# Hàm chỉnh hình

# *Chương 2*. **Hàm chỉnh hình**

*Nguyễn Thủy Thanh*

*Cơ sở lý thuyết hàm biến phức*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2006.
Tr 105-187.

*Từ khoá:* Cơ sở lý thuyết hàm biến phức, Hàm khả vi, Hàm chỉnh hình, Ánh xạ bảo giác, Ánh xạ chỉnh hình, Hàm Jukovski, Đẳng cấu.

.

---



---

# Chương 2

# Hàm chỉnh hình

Sự thu hẹp tập hợp các hàm biến phức bằng điều kiện $\mathbb{C}$ - khả vi sẽ đưa đến lớp các hàm chỉnh hình. Định nghĩa tính $\mathbb{C}$ - khả vi của hàm biến phức sẽ được trình bày hoàn toàn tương tự như định nghĩa tính khả vi trong giải tích thực. Tuy có sự "giống nhau" bề ngoài đó, giữa hai khái niệm này tồn tại những sự khác nhau rất cốt yếu mà ta sẽ thấy rõ trong chương II này.

## 2.1 Hàm khả vi

### 2.1.1 Hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi

Giả sử $D$ là miền của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ và $f(x, y)$ là hàm giá trị thực hoặc phức xác định trong $D$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$.

Ta có định nghĩa sau đây.

**Định nghĩa 2.1.1.** Hàm $f$ được gọi là $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm $(x_0, y_0) \in D$ nếu tồn tại hàm tuyến tính $Ah + Bk$ của các biến thực $h$ và $k$ sao cho với $h$ và $k$ đủ bé số gia của $f$ thỏa mãn hệ thức

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\rho,$$

trong đó $A$, $B$ thực hoặc phức, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ và $\varepsilon(h, k) \to 0$ khi $\rho \to 0$.

Nếu $f$ là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ thì các hằng số $A$ và $B$ (thực hoặc phức) được xác định duy nhất và tương ứng bằng

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

và biểu thức

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \tag{2.1}$$

được gọi là *vi phân* của hàm $f$ tại điểm $(x_0, y_0)$.

Bằng cách sử dụng ký hiệu có tính chất truyền thống đối với $h$ và $k$: $h = dx$, $k = dy$, từ (2.1) ta có

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

Ta lưu ý rằng nếu các đạo hàm riêng tồn tại trong một lân cận nào đó của điểm $(x_0, y_0)$ và liên tục tại điểm ấy thì $f$ là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm đó. Hàm $f$ có các đạo hàm riêng liên tục trong miền $D$ được gọi là *khả vi liên tục* trong miền đó.

Bây giờ ta xét vi phân

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2.2}$$

Đối với các hàm $z = x + iy$ và $\overline{z} = x - iy$ ta có

$$dz = dx + idy, \quad d\overline{z} = dx - idy$$

và do đó

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}), \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}). \tag{2.3}$$

Thế (2.3) vào (2.2) ta thu được hệ thức

$$df = \frac{1}{z}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)dz + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big)d\overline{z}.$$

Bằng cách đặt

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\Big) \tag{2.4}$$

ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i\Big(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)$$

và có thể viết biểu thức vi phân của hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi dưới dạng

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot d\overline{z}. \tag{2.5}$$

**Định lý 2.1.1.** *Phép biểu diễn vi phân (2.5) của hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi $f$ là duy nhất, tức là nếu có*

$$df = Adz + Bd\overline{z} \quad \text{thì} \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot$$

*Chứng minh.* Vì $dz = dx + idy$, $d\overline{z} = dx - idy$ nên

$$df = (A+B)dx + i(A-B)dy.$$

Từ đó thu được

$$A + B = \frac{\partial f}{\partial x}; \quad i(A-B) = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot$$

Giải hệ phương trình này ta thu được điều phải chứng minh. □

### 2.1.2 Đạo hàm theo phương

Giả sử $f(z)$ là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm $z_0 \in D$ và $\Delta f$ là số gia của nó tại điểm $z_0$ ứng với $\Delta z = \Delta r e^{i\alpha}$.

Ta thành lập tỷ số $\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ và xét giới hạn của nó khi $\Delta z \to 0$ sao cho

$$\lim_{\Delta z \to 0} \alpha = \lim_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta z) = \varphi$$

trong đó $\varphi$ là một số cố định cho trước.

**Định nghĩa 2.1.2.** Giới hạn của tỷ số $\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ khi $\Delta z \to 0$ mà $\varphi = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (\arg \Delta z)$ được gọi là *đạo hàm của hàm f theo phương* $\varphi$ tại điểm $z_0$.

Đạo hàm theo phương $\varphi$ được ký hiệu là $\dfrac{\partial f}{\partial z_\varphi}$ và như vậy

$$\frac{\partial f}{\partial z_\varphi} = \lim_{\substack{\varphi = \text{const} \\ \Delta z \to 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z} \cdot$$

Ta có định lý sau đây:

**Định lý 2.1.2.** *Giả sử f là hàm* $\mathbb{R}^2$ *- khả vi. Khi đó tập hợp các giá trị đạo hàm theo phương tại điểm* $z_0$ *cho trước lập thành đường tròn với tâm tại điểm* $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ *và bán kính bằng* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|$.

*Chứng minh.* Theo giả thiết ta có $f$ là hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi, nên

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Delta \overline{z} + o(\Delta z), \tag{2.6}$$

trong đó $\lim \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ khi $\Delta z \to 0$. Do đó

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} e^{-2i\alpha} + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\varepsilon(\Delta z) = \dfrac{o(\Delta z)}{\Delta z}$, và ta thu được

$$\frac{\partial f}{\partial z_\varphi} = \lim \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} e^{-2i\varphi}. \tag{2.7}$$

Công thức (2.7) chứng tỏ rằng các giá trị đạo hàm của hàm $f$ theo phương tại điểm $z_0$ lấp đầy đường tròn với tâm tại điểm $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ và bán kính bằng $\left|\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|$. □

Trường hợp đặc biệt quan trọng là trường hợp khi đạo hàm theo mọi phương trùng nhau. Khi đó, đường tròn đã nói trong định lý 2.1.2 sẽ suy biến thành một điểm $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

### 2.1.3 Hàm $\mathbb{C}$ - khả vi

Giả sử $D$ là miền của mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ và $f$ là hàm biến phức $z = x + iy$ xác định trong $D$. Ta có định nghĩa quan trọng sau đây:

**Định nghĩa 2.1.3.** Hàm $f$ được gọi là $\mathbb{C}$ - *khả vi* tại điểm $z_0 \in D$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

và ta nói rằng hàm $f$ *có đạo hàm theo biến phức* tại điểm $z_0$ và ký hiệu là $f'(z_0)$ hay $\dfrac{df}{dz}(z_0)$:

$$f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \cdot \tag{2.8}$$

Định nghĩa 2.1.3 đòi hỏi rằng giới hạn (2.8) phải tồn tại đối với *mọi cách cho z dần đến* $z_0$. Nói chính xác hơn, hệ thức (2.8) có nghĩa rằng: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho khi $0 < |h| < \delta$ thì bất đẳng thức

$$\left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \varepsilon \tag{2.9}$$

được thỏa mãn. Như vậy ta đòi hỏi rằng khi $h \to 0$ (tức là $z \to z_0$) *theo bất cứ đường nào* tỷ số

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

phải dần tới cùng một giới hạn.

Từ hệ thức (2.9) cũng suy ra rằng nếu *hàm $f(z)$ có đạo hàm tại điểm $z_0$ thì nó liên tục tại điểm đó.* Điều khẳng định ngược lại là không đúng.

Từ định nghĩa đạo hàm (2.8) và các tính chất của giới hạn trong miền phức suy rằng các quy tắc cơ bản để tính đạo hàm của tổng, tích và thương của hai hàm. của hàm hợp và hàm ngược đối với các hàm biến thực đều được bảo toàn đối với các hàm biến phức.

Bây giờ ta chuyển sang xét vấn đề tự nhiên là: tính $\mathbb{C}$ - khả vi đã nêu tương ứng với tính chất đơn giản nào của các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ là phần thực và phần ảo của hàm $f(z)$.

**Định lý 2.1.3.** *Giả sử hàm*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

*là $\mathbb{C}$ - khả vi tại điểm $z = x + iy$. Khi đó tại điểm $(x, y)$ hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng theo biến $x$ và $y$ thỏa mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\cdot \end{aligned} \tag{2.10}$$

*Các hệ thức* (2.10) *được gọi là các điều kiện Cauchy - Riemann.*

*Chứng minh.* Giả sử hàm $w = f(x)$ xác định trong miền $D \subset \mathbb{C}$ và có đạo hàm tại điểm $z \in D$:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot \tag{2.11}$$

Như vậy với mọi cách cho $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ dần đến 0 giới hạn (2.11) phải tồn tại và đều bằng một giá trị là $f'(z)$. Do đó giới hạn ấy phải tồn tại trong hai trường hợp riêng sau

a) $\Delta z = \Delta x + i0 = \Delta x$ và $\Delta x \to 0$.

b) $\Delta z = 0 + i\Delta y = i\Delta y$ và $\Delta y \to 0$.

Trong trường hợp thứ nhất ta có

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta x \to 0} \Big[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i\frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x}\Big] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Trong trường hợp thứ hai:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta y \to 0} \Big[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y}\Big] \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13) ta thu được

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\}$$

Định lý được chứng minh. □

Rõ ràng là các hệ quả thu được từ *tính* $\mathbb{C}$ - *khả vi* là ấn tượng hơn nhiều so với các hệ quả thu được từ *tính* $\mathbb{C}$ - *liên tục*. Ngoài việc các hàm $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1, các đạo hàm này còn phải liên hệ với nhau bởi các phương trình vi phân (2.10).

Như vậy, thậm chí nếu $u(x, y)$ và $v(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 thì nói chung hàm $u + iv$ không phải là hàm khả vi của $z$.

Từ đó, các hệ thức Cauchy - Riemann (2.10) lập thành *điều kiện cần* để hàm $f(z)$ là $\mathbb{C}$ - khả vi. Tuy nhiên đó không phải là điều kiện đủ. Ta xét một vài ví dụ.

Ta xét hàm $f(z) = \sqrt{|xy|}$. Hàm này triệt tiêu trên cả hai trục và do đó khi $z = 0$ ta có

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

và điều kiện Cauchy - Riemann thỏa mãn. Nhưng hàm $f(z)$ không $\mathbb{C}$ khả vi tại điểm $z = 0$. Thật vậy, ta có $\dfrac{f(z)}{z} = \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$ và nếu $x = \alpha r$, $y = \beta r$ trong đó $\alpha$, $\beta$ là những hằng số còn $r > 0$ thì hệ thức đó dẫn tới $\dfrac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha + i\beta}$ khi $r \to 0$. Như vậy giới hạn không duy nhất và hàm không $\mathbb{C}$ - khả vi.

Ví dụ này chứng tỏ rằng hàm $f(z)$ có thể không $\mathbb{C}$ - khả vi nếu hệ tỷ số $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ dần đến giới hạn dọc theo hai đường thẳng vuông góc. Và nói chung, hàm $f$ có thể không $\mathbb{C}$ - khả vi cho dù tỷ số trên dần đến giới hạn theo một lớp các đường đặc biệt nào đó. Chẳng hạn, ta xét hàm

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(x+iy)}{x^4+y^4} & \text{nếu } z \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } z = 0. \end{cases}$$

Dễ dàng thấy rằng $\lim \dfrac{f(z)-f(0)}{z} = 0$ nếu $z \to 0$ dọc theo bất cứ đường thẳng nào qua gốc tọa độ. Nhưng trên đường cong $x = y^2$ ta có

$$\frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}\cdot$$

Do đó hàm $f(z)$ không $\mathbb{C}$ - khả vi tại điểm $z = 0$.

Các hệ thức (2.10) sẽ là điều kiện đủ để $f(z)$ là $\mathbb{C}$ - khả vi nếu giả thiết thêm rằng cả bốn đạo hàm riêng cấp 1 của hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ đều tồn tại trong lân cận điểm $(x,y)$ và liên tục tại điểm $(x,y)$. Ta có

**Định lý 2.1.4.** *Nếu tại điểm $(x,y)$ các hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann thì hàm biến phức $f(z) = u + iv$ có đạo hàm tại điểm $z = x + iy$.*

*Chứng minh.* Giả sử các hàm $u$ và $v$ có các đạo hàm riêng liên tục tại điểm $(x,y)$. Khi đó $u$ và $v$ khả vi tại điểm đó, tức là số gia $\Delta u$ và $\Delta v$ tương ứng với các số gia $\Delta x$ và $\Delta y$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + o_1(\rho), \rho \to 0$$
$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + o_2(\rho), \rho \to 0$$

trong đó $\rho = |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o_1(\rho)$ và $o_2(\rho)$ $(\rho \to 0)$ là những vô cùng bé cấp cao hơn so với $\rho$, tức là

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{o_j(\rho)}{\rho} = 0, \quad j = 1, 2.$$

Do đó, nếu lưu ý rằng $o_1(\rho) + io_2(\rho) = o(\rho)$ $(\rho \to 0)$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i\Big(\dfrac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial v}{\partial y}\Delta y\Big)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\Delta z}\\ &= \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + \dfrac{\partial v}{\partial x}(-\Delta y + i\Delta x)}{\Delta x + i\Delta y} + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta z}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{o(\rho)}{\rho}\cdot\frac{\rho}{\Delta z}\cdot\end{aligned}$$

Vì $\left|\dfrac{\rho}{\Delta z}\right| = \dfrac{\rho}{|\Delta z|} = 1$ và $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{o(\rho)}{\rho} = 0$ nên từ đó suy rằng

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

tức là tại điểm $z$ hàm $f$ có đạo hàm $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}\cdot$ □

### 2.1.4 Mối liên hệ giữa $\mathbb{C}$ - khả vi và $\mathbb{R}^2$ - khả vi

Các điều kiện Cauchy - Riemann (2.10) có thể biểu diễn dưới dạng gọn gàng hơn nếu ta sử dụng khái niệm đạo hàm hình thức trong 1. và 2.

Từ định lý 2.1.2 suy ra rằng nếu $f$ là hàm $\mathbb{C}$ - khả vi tại điểm $z_0 \in D$ thì đạo hàm theo mọi phương tại điểm đó đều trùng nhau và bằng $\dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot$

Chính xác hơn ta có

**Định lý 2.1.5.** *Hàm $\mathbb{R}^2$ - khả vi $f$ trong miền $D$ là hàm $\mathbb{C}$ - khả vi trong miền đó khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0. \tag{2.14}$$

*Chứng minh.* 1. Giả sử $f$ là hàm $\mathbb{C}$ - khả vi. Khi đó, theo định nghĩa 2.1.3 giới hạn (2.8) tồn tại không phụ thuộc vào phương pháp dần $\Delta z$ đến 0, và ta có

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$. Từ đó rút ra

$$df = f'(z_0)dz,$$

tức là

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

2. Giả sử $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. Từ công thức (2.6) ta thu được

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon(\Delta z),$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \varepsilon(\Delta z) = 0$. Từ đó thấy rõ là giới hạn (2.8) tồn tại và

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot$$

□

Điều kiện (2.9) chính là điều kiện khả vi phức Cauchy - Riemann. Điều kiện Cauchy - Riemann còn có thể biểu diễn dưới dạng

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{2.15}$$

và như vậy ta có định lý sau đây.

**Định lý 2.1.6.** *Hàm $f$ là $\mathbb{C}$ - khả vi tại một điểm nào đó khi và chỉ khi nó là $\mathbb{R}^2$ - khả vi tại điểm đó và các đạo hàm riêng của nó tại điểm ấy liên hệ với nhau bằng hệ thức* (2.15).

## 2.1.5 Hàm chỉnh hình

Từ tính $\mathbb{C}$ - khả vi đã được định nghĩa ta chưa thể rút ra những kết luận mà chúng ta mong muốn khi nói đến tầm quan trọng của khái niệm này.

Để thu được những kết quả đó, đòi hỏi hàm $f$ phải là $\mathbb{C}$ - khả vi tại một lân cận nào đó của điểm $z_0$. Vì thế ta có

**Định nghĩa 2.1.4.** 1) Hàm $f$ được gọi là hàm *chỉnh hình tại điểm* $z_0$ nếu nó là $\mathbb{C}$ - khả vi tại một lân cận nào đó của điểm $z_0$. Hàm $f$ được gọi là *chỉnh hình trong miền* $D$ nếu nó chỉnh hình tại mọi điểm của miền ấy. Tập hợp mọi hàm chỉnh hình trong miền $D$ được ký hiệu là $\mathcal{H}(D)$.

2) Hàm $f(z)$ *chỉnh hình tại điểm vô cùng* nếu hàm $\varphi(z) = f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ chỉnh hình tại điểm $z = 0$.

Phần 2) của định nghĩa 2.1.4 cho phép ta xét các hàm chỉnh hình trên các tập hợp của mặt phẳng đóng $\overline{\mathbb{C}}$.

Ta nhận xét rằng cùng với thuật ngữ "hàm chỉnh hình" người ta còn dùng những thuật ngữ tương đương khác sau đây:

"hàm chỉnh hình" $\equiv$ "hàm chính quy" $\equiv$ "hàm giải tích đơn trị".

Từ điều kiện Cauchy - Riemann và định nghĩa 2.1.4 dễ dàng suy ra

**Định lý 2.1.7.** *Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$ và $\mathcal{H}(D)$ tập hợp mọi hàm chỉnh hình trong miền $D$.*

*Khi đó*

1. *$\mathcal{H}(D)$ là một vành;*
2. *nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f(z) \neq 0\ \forall z \in D$ thì $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{H}(D)$;*
3. *nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f$ chỉ nhận giá trị thực thì $f$ là hằng số.*

*Chứng minh.* Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f+g) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{z}},$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \cdot$$

Từ đó suy ra 1) và 2).

Để chứng minh 3) ta nhận xét rằng $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ cũng chỉ nhận giá trị thực. Nhưng mặt khác:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}$$

nên suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$. Vậy $f$ là hằng số. □

**Định lý 2.1.8. (về hàm hợp)**. *Nếu $f(w)$ là hàm chỉnh hình trong $D^*$ và nếu $g : D \to D^*$ là hàm chỉnh hình trong $D$ thì hàm hợp $f[g(z)]$ chỉnh hình trong $D$,*

*Chứng minh.* Thật vậy, dễ thấy rằng

$$\frac{\partial[f(g)]}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial w}\cdot\frac{\partial g}{\partial\overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial\overline{w}}\cdot\frac{\partial\overline{g}}{\partial\overline{z}}\cdot$$

Theo giả thiết $\dfrac{\partial f}{\partial\overline{w}} = 0$, $\dfrac{\partial g}{\partial\overline{z}} = 0$ nên suy ra $f[g(z)]$ là hàm chỉnh hình trong $D$. □

Tiếp theo, giả sử $w = f(z)$, $z \in D$ là hàm chỉnh hình ánh xạ đơn trị một - một miền $D$ lên miền $D^*$. Điều đó có nghĩa là theo hàm đã cho mỗi $z \in D$ đều tương ứng với một giá trị $w \in D^*$ và đồng thời theo quy luật đó mỗi $w \in D^*$ chỉ tương ứng với một giá trị $z \in D$. Từ đó xác định được hàm đơn trị $z = \varphi(w)$, $w \in D^*$ có tính chất là $f[\varphi(w)] = w$, $w \in D^*$. Như ta biết hàm $z = \varphi(w)$ được gọi là *hàm ngược* với hàm $w = f(z)$, $z \in D$.

Ta sẽ chứng minh rằng *nếu $f'(z) \neq 0$, $z \in D$ thì hàm $z = \varphi(w)$ là hàm chỉnh hình trên $D^*$.*

Thật vậy, giả sử $w$, $w + \Delta w \in D^*$. Nhờ hàm ngược, các điểm này tương ứng với điểm $z$, $z + \Delta z$. Theo giả thiết hàm $f$ có đạo hàm tại điểm $z$ nên $f(z)$ liên tục tại đó: $\Delta w \to 0$ nếu $\Delta z \to 0$. Do tính đơn trị một - một ta có cả điều khẳng định ngược lại: $\Delta z \to 0$ nếu $\Delta w \to 0$. Nhưng khi đó

$$\lim_{\Delta w\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{f'(z)}, \quad (f'(z) \neq 0).$$

Điều đó chứng tỏ rằng đạo hàm của hàm ngược $z = \varphi(w)$ tồn tại tại điểm $w$ và bằng

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \quad w \in D^*.$$

Vì $w$ là điểm tùy ý của $D^*$, $f'(z)$ liên tục và $f'(z) \neq 0$ nên hàm $\varphi(w)$ chỉnh hình trong $D^*$.

Ta xét ví dụ hàm $w = az + b$, $a \neq 0$ là hàm tuyến tính nguyên. Hàm này ánh xạ đơn trị một - một mặt phẳng phức $z$ lên mặt phẳng phức $w$. Hàm ngược của nó có dạng

$$z = \frac{w-b}{a} \cdot$$

Dễ dàng thấy rằng hàm $w = az + b$ và hàm ngược của nó $z = \dfrac{w-b}{a}$ chỉnh hình khắp nơi trên mặt phẳng $z$ và $w$ tương ứng $\left(w'_z = a, z'_w = \dfrac{1}{a}\right)$.

**Định lý 2.1.9.** *Giả sử cho chuỗi lũy thừa*

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n. \tag{2.16}$$

*Nếu bán kính hội tụ của chuỗi* (2.16) *khác 0 thì tổng* $S(z)$ *của nó là một hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ* $\{|z| < R, R > 0\}$ *của nó, tức là khi* $|z| < R$ *ta có*

$$S'(z) = \lim \frac{S(z+h) - S(z)}{h} \cdot \tag{2.17}$$

*Chứng minh.* 1. Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu bán kính hội tụ của chuỗi đã cho (2.16) là $R$ thì bán kính hội tụ $R^*$ của chuỗi đạo hàm

$$S_0(z) = \sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1} \tag{2.18}$$

cũng bằng $R$. Thật vậy, hiển nhiên rằng bán kính $R^*$ bằng bán kính hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n\geqslant 0} n a_n z^n.$$

Nhưng

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

và do đó

$$R^* = \Big(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|a_n|}\Big)^{-1} = \Big(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\Big)^{-1} = R.$$

2. Giả sử $z$ là điểm cố định tùy ý nằm trong hình tròn $|z| < R$. Khi đó có thể chỉ ra số $R_1$ $(0 < R_1 < R)$ sao cho $|z| < R_1 < R$. Giả sử $\Delta z$ là số gia tùy ý của $z$ mà $|z + \Delta z| < R_1 < R$. Vì

$$\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = (z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}$$

cho nên

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{S(z+\Delta z) - S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\Big| \leqslant \\
&\leqslant \Big|\sum_{n=1}^{m} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1} - nz^{n-1}\big]\Big| + \\
&\quad + \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}\big]\Big| \\
&\quad + \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\Big|.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Xét điểm $z^* = R_1$. Vì điểm $z^* = R_1$ nằm trong hình tròn hội tụ $|z| < R$ của chuỗi (2.18) nên từ sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi (2.18) trong hình tròn $|z| < R$ suy rằng: $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,M = M(\varepsilon)$ sao cho $\forall\,m > M$ thì phần dư

$$\sum_{n\ m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \tag{2.20}$$

Do đó với $m > M$, từ (2.20) thu được

$$\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} na_n z^{n-1}\Big| < \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \tag{2.21}$$

và

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1} + z(z+\Delta z)^{n-2} + \cdots + z^{n-1}\big]\Big| \leqslant \\
&\leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} n|a_n|R_1^{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}\cdot
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Tiếp theo, từ hệ thức

$$\lim_{\Delta z\to 0}\sum_{n=1}^{m} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}\big]=\sum_{n=1}^{m} na_n z^{n-1}$$

suy rằng với số $\varepsilon > 0$ đã chọn, tìm được số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với $|\Delta z| < \min(\delta; |R_1 - z|)$ thì

$$\Big|\sum_{n=1}^{m} a_n\big[(z+\Delta z)^{n-1}+z(z+\Delta z)^{n-2}+\cdots+z^{n-1}-nz^{n-1}\Big| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot \qquad (2.23)$$

Bằng cách thay $n > M$ trong (2.19), từ (2.21) - (2.23) suy rằng khi $|\Delta z| < \min(\delta, |R_1 - z|)$ ta có

$$\Big|\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z} - S_0(z)\Big| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Do đó

$$S_0(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{S(z+\Delta z)-S(z)}{\Delta z}=S'(z).$$

Vì $z$ là điểm tùy ý của hình tròn hội tụ $|z| < R$ nên định lý được chứng minh. □

*Nhận xét.* Vì bằng phép đổi biến theo công thức $t = z - z_0$, $z_0 \neq 0$ chuỗi $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ được quy về chuỗi $\sum\limits_{n\geq 0} a_n t^n$ nên ta có định lý sau:

**Định lý 2.1.9*.** *Tổng $f(z)$ của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ là hàm chỉnh hình trong hình tròn hội tụ $|z-z_0| < R$ của chuỗi đó và đạo hàm $f'(z)$ được tìm theo công thức*

$$f'(z)=\sum_{n\geqslant 1} na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

### 2.1.6 Không gian các hàm chỉnh hình

Giả sử miền $D \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{C}(D)$ là tập hợp các hàm liên tục trong $D$ và $\mathcal{H}(D)$ là tập hợp các hàm chỉnh hình trong $D$.

Không đi sâu vào chi tiết (việc đó dành cho bộ môn tôpô học), ở đây chỉ phác qua việc xác định tôpô trong $\mathcal{C}(D)$. Đối với tập hợp compắc $K \subset D$ bất kỳ và số $\varepsilon > 0$ bất kỳ, đặt

$$V(K,\varepsilon) = \{f \in \mathcal{C}(D) : |f(z)| < \varepsilon, \forall\, z \in K\}.$$

Rõ ràng là tập hợp $V(K,\varepsilon)$ là lân cận của $f \equiv 0$ trong $\mathcal{C}(D)$. Người ta đã chứng minh rằng (xem [10], trang 188-191) nếu $\{K_n\}$ là dãy các tập hợp compắc của miền $D : K_i \subset K_{i+1}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_i = D$ sao cho mỗi compắc $K \subset D$ đều thuộc một $K_n$ nào đó thì các tập hợp $V(K_i,\varepsilon)$ đối với mọi $K_i$ và $\varepsilon$ như vậy là hệ lân cận cơ sở của phần tử 0 (tức là $f \equiv 0$) và sẽ xác định một tôpô mà với tôpô đó $\mathcal{C}(D)$ là một không gian tôpô. Rõ ràng là dãy hàm $f_n \in \mathcal{C}(D)$ hội tụ đều trên từng compắc của miền $D$ khi và chỉ khi $\forall\, K \subset D$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, n$ đủ lớn suy ra

$$f_n - f \in V(K,\varepsilon).$$

Điều đó có nghĩa rằng dãy $f_n \in \mathcal{C}(D)$ có giới hạn là một điểm trong tôpô mà $V(K,\varepsilon)$ lập thành hệ lân cận cơ sở của $f \equiv 0$.

Vì $\mathcal{H}(D)$ là không gian con của không gian $\mathcal{C}(D)$ nên trên $\mathcal{H}(D)$ ta xét tôpô cảm sinh bởi tôpô của không gian $\mathcal{C}(D)$. Với tôpô đó, $\mathcal{H}(D)$ là không gian tôpô. Đối với không gian $\mathcal{C}(D)$ cũng như $\mathcal{H}(D)$ ta có thể xác định tôpô bởi mêtric hóa. Do đó có thể áp dụng cho không gian $\mathcal{C}(D)$ và $\mathcal{H}(D)$ những định lý quen thuộc về không gian mêtric. Chẳng hạn, tập hợp con $A$ của không gian $E$ là đóng khi và chỉ khi giới hạn của dãy điểm bất kỳ của $A$ thuộc $A$.

# 2.2 Một số hàm chỉnh hình sơ cấp

## 2.2.1 Đa thức và hàm hữu tỷ

Để ý đến các đẳng thức $\dfrac{d(\text{const})}{dz} = 0$, $\dfrac{dz}{dz} = 1$ và các quy tắc tính đạo hàm ta có thể kết luận rằng *đa thức* $P_n(z)$ *là hàm chỉnh hình* $\forall\, z \in \mathbb{C}$ và

$$P_n(z) = \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}\Big)' = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) a_k z^{n-k-1}.$$

Các hàm hữu tỷ $\mathcal{R}(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, trong đó $P(z)$ và $Q(z)$ là các đa thức, chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus N(Q)$, trong đó $N(Q) = \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$. Chẳng hạn, hàm phân tuyến tính $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Big\{-\dfrac{d}{c}\Big\}$ nếu $c \neq 0$ và chỉnh hình trong $\mathbb{C}$ nếu $c = 0$ và $d \neq 0$; hàm Jukovski $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$ chỉnh hình $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

## 2.2.2 Hàm $w = z^n$ và $z = \sqrt[n]{w}$, $n \in \mathbb{N}$

Ta xét các giá trị $z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_1| e^{i\varphi_2}$. Từ đó

$$\begin{aligned} w_1 - w_2 &= |z_1|^n \big[e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2}\big] \\ &= |z_1|^n e^{in\varphi_2} \big[e^{in(\varphi_1 - \varphi_2)} - 1\big]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Hệ thức (2.24) chứng tỏ rằng $z_1$ và $z_2$ có cùng một ảnh khi và chỉ khi

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k \cdot \frac{2\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Do vậy, hàm $w = z^n$ đơn diệp trong miền $D$ nào đó khi và chỉ khi $D$ không chứa những cặp điểm khác nhau $z_1$ và $z_2$ mà

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + \dfrac{2\pi}{n} k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ví dụ về miền đơn diệp của hàm $w = z^n$ là các hình quạt vô hạn

$$D_k = \Big\{z \in \mathbb{C} : k\frac{2\pi}{n} < \arg z < \frac{2\pi}{n}(k+1), k = \overline{0, n-1}\Big\}.$$

Ta chia mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ thành $n$ hình quạt bởi các tia đi ra từ gốc tọa độ

$$\theta = \theta_k = \frac{2\pi}{n}k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Giả sử $D_k$ là hình quạt

$$\theta_k < \theta < \theta_{k+1}, \quad \rho > 0.$$

tức là

$$D_k = \Big\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta}, \rho > 0, \theta_k < \theta = \arg z < \theta_{k+1}\Big\}.$$

Hiển nhiên $D_k$ là miền. Ta ký hiệu

$$D_k^* = \Big\{z \in \mathbb{C} : z = \rho e^{i\theta}, \theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}, \rho > 0\Big\}.$$

Tiếp theo ta đặt

$$\theta = \theta_k + \psi, \quad \theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}.$$

Từ đó nếu $0 \leqslant \psi < \theta_1 = \dfrac{2\pi}{n}$ thì $\theta_k \leqslant \theta < \theta_{k+1}$ và ngược lại.

Ta chứng minh rằng: *hàm $w = z^n$ ánh xạ đơn trị một - một miền $D_k^*$ lên toàn bộ mặt phẳng*

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}_w^* = \Big\{w \in \mathbb{C} : w = re^{i\varphi}, 0 \leqslant \varphi < 2\pi\Big\}.$$

Thật vậy, ta có

$$re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\theta} = \rho^n e^{in(\frac{2\pi}{n}k + \psi)} = \rho^n e^{in\psi}.$$

Do đó

$$r = \rho^n, \quad \varphi = n\psi \quad \Big(0 \leqslant \psi < \theta_1 = \frac{2\pi}{n}\Big).$$

và từ đó ta thu được ảnh của $D_k^*$ là mặt phẳng $\mathbb{C}_w^*$.

Từ chứng minh trên ta cũng thu được

$$\rho = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r},$$
$$\psi = \frac{\varphi}{n}$$

và từ đó suy rằng trên miền $D_k^*$ hàm $w = z^n$ có hàm ngược

$$z = (z)_k = \rho e^{i\theta} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \; w \in \mathbb{C}_w^*. \tag{2.25}$$

Nói chung: hàm $w = z^n$ có hàm ngược $n$-trị

$$z = \sqrt[n]{w}$$

là $n$ nhánh liên tục (2.25) tương ứng với các số $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Các nhánh (2.25) xác định bởi các số $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ánh xạ $\mathbb{C}^*$ lên $D_0^*, D_1^*, \ldots, D_n^*$ tương ứng.

Để tính đạo hàm của nhánh thứ $k$ ta phải xét miền $D_k \subset D_k^*$. Ta ký hiệu

$$\mathbb{C}_w^+ = \mathbb{C}_w^* \setminus \mathbb{R}_+.$$

Rõ ràng là hàm chỉnh hình $w = z^n$ ánh xạ đơn trị một - một $D_k$ lên $\mathbb{C}_w^+$, đồng thời hàm ngược tương ứng được xác định theo công thức (2.25).

Áp dụng quy tắc đạo hàm hàm ngược ta có ($z \in D_k$)

$$\begin{aligned} \big(\sqrt[n]{w}\big)' &= \big(\sqrt[n]{w}\big)_k' = \frac{1}{\big(z^n\big)'} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{z}{nw} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}}{re^{i(\varphi+2k\pi)}} = \frac{1}{n} r^{\frac{1}{n}-1} e^{i(\frac{1}{n}-1)(\varphi+2k\pi)} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Hàm $e^z$

Giả sử $z = x + iy$. Khi đó

$$e^z \stackrel{def}{=} e^x(\cos y + i \sin y).$$

Nếu $z = x$ là số thực thì $e^z = e^x$, tức là khi $z$ nhận các giá trị thực thì hàm biến phức $e^z$ trùng với hàm mũ biến thực thông thường. Điều nhận xét này cùng với một số tính chất được nêu dưới đây sẽ chứng tỏ tính hợp lý của định nghĩa hàm mũ biến phức vừa nêu.

Ta lưu ý một số tính chất của hàm $e^z$.

1) $e^z \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Điều đó được suy ra từ định nghĩa và hệ thức $e^x \neq 0$, $|e^{iy}| = 1$.

2) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

*Chứng minh.* Giả sử $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Khi đó

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\big[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\big] = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\ &= e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

□

3) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$. Điều này được suy ra từ định nghĩa và tính chất 2).

4) Đẳng thức $e^{z+\alpha} = e^z \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

*Chứng minh.* Giả sử $\alpha = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$e^{z+\alpha} = e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z.$$

Ngược lại, nếu $e^{z+\alpha} = e^z$, $\alpha = \lambda + i\nu$ thì

$$e^{z+\lambda+i\nu} = e^z \Rightarrow e^z\big(e^{\lambda+i\nu} - 1\big) = 0.$$

Vì $e^z \neq 0$ nên $e^{\lambda+i\nu} = 1$. Ta sẽ chứng minh rằng khi đó $\lambda = 0$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Thật vậy, từ đẳng thức $e^{\lambda+i\nu} = 1$ suy rằng $e^\lambda \cdot e^{i\nu} = 1$ và do đó $e^\lambda = 1$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; tức là $\lambda = 0$, $\nu = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Như vậy $\alpha = 0 + i2k\pi = 2k\pi i$. □

Các số $2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ mà với $z \in \mathbb{C}$ bất kỳ ta có đẳng thức $e^{z+2k\pi i} = e^z$ được gọi là *các chu kỳ* của hàm $e^z$ và số $2\pi i$ gọi là *chu kỳ cơ bản* của nó.

5) $e^z$ không có giới hạn khi $z \to \infty$ vì $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = \infty$.

6) Hàm $e^z$ đơn diệp trong miền $D \subset \mathbb{C}$ khi và chỉ khi miền $D$ không chứa những cặp điểm khác nhau $z_1$ và $z_2$ mà

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Chứng minh.* Thật vậy, giả sử $z_1$, $z_2$ ($z_1 \neq z_2$) cùng có một ảnh. Khi đó từ hệ thức $w_1 = w_2$ suy ra

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi i.$$

□

Ví dụ về miền đơn diệp của hàm mũ biến phức là các *băng vô hạn* nằm ngang

$$D_k = \Big\{z \in \mathbb{C} : -\infty < \operatorname{Re} z < +\infty; 2k\pi < \operatorname{Im} z < 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

7) Hàm $e^z$ liên tục trên $\mathbb{C}$. Thật vậy vì các hàm $\operatorname{Re}(e^z) = u(x,y) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$ đều liên tục nên theo định lý ta có hàm $e^z$ liên tục.

8) Hàm $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Thật vậy các hàm phần thực $u(x,y) = e^x \cos y$ và phần ảo $v(x,y) = e^x \sin y$ đều là những hàm khả vi và thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann, nên theo định lý 2.1.4 ta có $e^z \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

### 2.2.4 Hàm lôgarit

Giả sử cho số phức $z \in \mathbb{C}$. Khi đó mọi số phức $\zeta \in \mathbb{C}$ thỏa mãn phương trình $e^\zeta = z$ được gọi là lôgarit của số $z \in \mathbb{C}$ và được ký hiệu là

$$\operatorname{Ln} z = \zeta.$$

Như vậy

$$\operatorname{Ln} z = \zeta \Leftrightarrow e^\zeta = z. \tag{2.26}$$

Giả sử $\zeta = x + iy$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Ta có

$$\begin{aligned} e^{\zeta} = z &\Leftrightarrow e^{x+iy} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &\Leftrightarrow e^{x}(\cos y + i\sin y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x &= r > 0, \\ y &= \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \ln r \\ y &= \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy

$$\operatorname{Ln} z = \zeta = x + iy = \ln r + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

hay là

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.27}$$

Ta ký hiệu

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

và gọi đó là *giá trị chính* của $\operatorname{Ln} z$. Từ đó

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Từ hệ thức (2.27) suy ra rằng: *mỗi số phức $z \neq 0, \infty$ đều có vô số giá trị lôgarit, trong đó hai giá trị lôgarit bất kỳ là khác nhau một bội nguyên của $2\pi i$.* Nếu $z$ là số thực dương thì giá trị chính của lôgarit trùng với $\ln|z|$ và do đó nó biểu diễn số thực trùng với lôgarit cổ điển: Chẳng hạn $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1, \dots$

Nhưng, ngoài các giá trị thực đó, lôgarit của các số thực dương còn có vô số các lôgarit phức được tính theo công thức (2.27). Chẳng hạn: $\operatorname{Ln} 1 = 2k\pi i$, $\operatorname{Ln} e = 1 + 2k\pi i, \dots$

Ta lưu ý hai tính chất đặc biệt của lôgarit số phức

a) $\mathrm{Ln}\,(z_1z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$,

b) $\mathrm{Ln}\,\dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$.

Các đẳng thức này cần được hiểu một cách ước lệ: đó là đẳng thức giữa các tập hợp. Nói cách khác; vế trái có thể sai khác vế phải một bội nguyên của $2\pi i$ hoặc vế phải bằng vế trái với việc chọn số hạng $2k\pi i$ trong vế trái một cách thích hợp.

Bây giờ ta xét lôgarit với tư cách là một hàm.

Ta đặt

$$\mathbb{C}_0 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

và đưa vào xét hàm

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ln}_k : \mathbb{C}_0 \to \mathbb{C}, \\ &\mathrm{Ln}_k z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i. \end{aligned}$$

Đó là hàm đơn trị. Mặt khác vì $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ nên

$$\mathrm{Ln}_k\mathbb{C}_0 \subset D_k = \Big\{w \in \mathbb{C} : (2k+1)\pi < \mathrm{Im}\, w \leqslant (2k+1)\pi\Big\}$$

là băng vô hạn nằm ngang có bề rộng $2\pi$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\mathrm{Ln}_k\mathbb{C}_0 = D_k,$$

tức là chứng minh rằng $\forall\, w \in D_k\ \exists\, z \in \mathbb{C}_0$ sao cho

$$\mathrm{Ln}_k z = w.$$

Giả sử $w = u + iv \in D_k$. Khi đó

$$v = v_0 + 2k\pi, \quad -\pi < v_0 \leqslant \pi.$$

Ta đặt $z = e^w = e^u(\cos v_0 + i\sin v_0)$. Khi đó ta thu được

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}_k z &= \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \\ &= u + i(v_0 + 2k\pi) = u + iv = w. \end{aligned}$$

Như vậy

$$\mathrm{Ln}_k : \mathbb{C} \xrightarrow{\text{(lên)}} D_k.$$

Vì $D_k$ là miền đơn diệp của $\mathrm{Ln}_k$ nên tại đó nó có hàm ngược

$$\mathrm{Ln}_k^{-1} : D_k \longrightarrow \mathbb{C}_0.$$

đó là hàm

$$\mathrm{Ln}_k^{-1}(w) = e^w.$$

Hàm này đơn trị.

Ta nhận xét rằng hàm $\mathrm{Ln}_k z$ không liên tục trong $\mathbb{C}_0$, mà cụ thể là nó không liên tục trên phần âm trục thực $\mathbb{R}^-$. Thật vậy vì $\forall\, z = x_0 < 0$ và $\forall\, \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ là $\varepsilon$ - lân cận của $x_0$, $\exists\, z \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ sao cho $\mathrm{Im}(\mathrm{Ln}_k z)$ sẽ gần với $(2k+1)\pi$ và $\exists\, z \in \mathcal{U}(x_0, \varepsilon)$ sao cho $\mathrm{Im}(\mathrm{Ln}_k z)$ sẽ gần với $(2k-1)\pi$. Nói chính xác hơn khi $z \to x_0 \in \mathbb{R}^-$ mà $\mathrm{Im}\, z > 0$ (tương ứng: $\mathrm{Im}\, z < 0$) thì $\mathrm{Ln}_k z$ dần đến $\ln |x_0| + (2k+1)\pi$ (tương ứng: dần đến $\ln |x_0| + (2k-1)\pi$).

Các hàm $\mathrm{Ln}_k z$ được gọi là *các nhánh (đơn trị)* của hàm đa trị $\mathrm{Ln}\, z$.

Một cách tự nhiên ta đưa vào tập hợp

$$\mathbb{C}^* = \Big\{ z \in \mathbb{C} : -\pi < \arg z < \pi \Big\}$$

là mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ cắt bỏ phần âm trục thực và xét hàm

$$\mathrm{Ln}_k^0 = \mathrm{Ln}_k\big|_{\mathbb{C}^*}.$$

Rõ ràng là

$$\mathrm{Ln}_k^0 \mathbb{C}^* = D_k^0 = \Big\{ w \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, w < (2k+1)\pi \Big\}$$

Hàm $\mathrm{Ln}_k^0$ liên tục trên $\mathbb{C}^*$. Để chứng minh điều đó ta chỉ cần chứng minh rằng

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z$$

liên tục trên $\mathbb{C}^*$. Nhưng điều đó là hiển nhiên vì phần thực $\ln|z|$ liên tục trên $\mathbb{C}^*$ (thậm chí nó liên tục cả trong $\mathbb{C}_0$) và phần ảo $\arg z$ liên tục trên $\mathbb{C}^*$ như ta đã chứng minh trong chương trước. Như vậy: *hàm* $\mathrm{Ln}_k z$ *liên tục trên* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Đó là các nhánh đơn trị liên tục trên $\mathbb{C}^*$ của hàm lôgarit $\mathrm{Ln}\, z$.

Trong miền $\mathbb{C}^*$ ta thu được *vô số nhánh đơn trị liên tục*. Mọi nhánh $\mathrm{Ln}_k z$ hoàn toàn được đặc trụng bởi điều là: Các giá trị của nó thuộc một băng vô hạn nằm ngang $D_k$ xác định.

Từ lập luận trên cũng suy ra rằng hàm $w = \mathrm{Ln}_k z$ ánh xạ đơn trị một - một và liên tục miền $\mathbb{C}^*$ lên $D_k$ và hàm ngược của nó $z = e^w$ có đạo hàm $\neq 0$ tại mọi điểm $w \in D_k$. Do đó theo quy tắc đạo hàm của hàm ngược ta có

$$\Big(\mathrm{Ln}_k z\Big)'_z = \frac{1}{\big(e^w\big)'_w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}\cdot \tag{2.28}$$

Ta nhấn mạnh rằng ở đây ta tính đạo hàm không phải của hàm đa trị $\mathrm{Ln}\, z$ mà là của nhánh đơn trị của nó tương ứng với giá trị $k$ nào đó.

### 2.2.5 Hàm lũy thừa $z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Hàm lũy thừa $z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ được định nghĩa theo công thức

$$\begin{aligned} w = z^\alpha = e^{\alpha \ln z} &= e^{\alpha[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} \\ &= |z|^\alpha e^{i\alpha(\arg z + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{2.29}$$

hay là

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}; z = \rho e^{i\theta}. \tag{2.30}$$

Ta xét các trường hợp sau đây.

$1^+$. Nếu $\alpha$ là số nguyên thì $e^{i\alpha 2k\pi} = 1$ và

$$w = (\rho e^{i\theta})^\alpha = z^\alpha$$

trong đó $z^\alpha$ được hiểu theo nghĩa thông thường là tích của $\alpha$ thừa số $z$.

$2^+$. Nếu $\alpha = \pm\frac{p}{q}$, trong đó $p > 0$, $q > 0$ là những số nguyên, thì giữa các số ở vế phải của (2.30) chỉ có các giá trị tương ứng với $k = 0, 1, \ldots, q-1$ là khác nhau:

$$w = \rho^\alpha e^{i\alpha(\theta+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1.$$

Đặc biệt là khi $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ thì hàm $w = z^{\frac{1}{n}}$ đã được xét trong 2).

$3^+$. Nếu $\alpha$ là số vô tỷ thì đối với các giá trị $k$ khác nhau các hàm xác định bởi (2.29) hay (2.30) là khác nhau. Thật vậy giá trị acgumen của các giá trị $z^\alpha$ bằng

$$\theta_k = \alpha\theta + 2k\pi\alpha$$

và trong các giá trị đó không có các giá trị nào khác nhau một bội nguyên của $2\pi$ vì nếu với $k_1$, $k_2$ nguyên và $k_1 \neq k_3$ mà $\theta_{k_1} - \theta_{k_2} = 2k_1\pi\alpha - 2k_2\pi\alpha = 2n\pi$, trong đó $n$-nguyên thì

$$\alpha = \frac{n}{k_1 - k_2}$$

là số hữu tỷ. Vô lý. Điều đó chứng tỏ rằng $z^\alpha$ là hàm *vô số trị*. Đó là *Các nhánh liên tục của hàm vô số trị* $w = z^\alpha$.

Tiếp theo ta có ($z = \rho e^{i\theta}$)

$$\begin{aligned}(z^\alpha)' = (e^{\alpha \ln z})' = e^{\alpha \ln z} \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha \, \frac{e^{\alpha[\ln\rho + i(\theta+2k\pi)]}}{e^{[\ln\rho+i(\theta+2k\pi)]}} \\ = \alpha e^{(\alpha-1)[\ln\rho+i(\theta+2k\pi)]} = \alpha z^{\alpha-1}\end{aligned}$$

tức là đẳng thức $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ đúng đối với mọi nhánh của $z^\alpha$.

### 2.2.6 Các hàm sơ cấp khác

Các hàm chỉnh hình sơ cấp đã xét: hàm phân tuyến tính, hàm $e^z$ và $\ln z$, hàm Jukovski đóng một vai trò cơ bản trong việc khảo sát các hàm sơ cấp cơ bản khác.

Thật vậy, khi biết hàm $f(z)$ và $\varphi(z)$ ta cũng sẽ biết cả hàm $f[\varphi(z)]$ và $\varphi[f(z)]$. Có thể khẳng định rằng mọi *hàm sơ cấp cơ bản* khác đều có thể biểu diễn dưới dạng hợp một số nào đó các hàm sơ cấp mà ta đã nghiên cứu. Chẳng hạn ta xét các hàm lượng giác biến phức

$$\sin z \overset{def}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \tag{2.31}$$

$$\cos z \overset{def}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \tag{2.32}$$

$$\operatorname{tg} z \overset{def}{=} \frac{sin z}{\cos z}, \tag{2.33}$$

$$\operatorname{cotg} z \overset{def}{=} \frac{\cos z}{\sin z}\cdot \tag{2.34}$$

Nếu $z = x$ là số thực thì theo định nghĩa và công thức Euler ta có

$$\sin z = \frac{1}{2i}\big[(\cos x + i\sin x) - (\cos(-x) + i\sin(-x))\big] = \sin x, \quad \cos z = \cos x.$$

Như vậy khi $z = x$ là số thực hàm biến phức $\sin z$ trùng với hàm $\sin x$ quen thuộc. Tương tự như vậy đối với hàm $\cos z$ và $\operatorname{tg} z$.

Lưu ý rằng các hàm lượng giác (2.31) bảo toàn nhiều tính chất của hàm lượng giác biến thực *nhưng không phải mọi tính chất đều được bảo toàn.* Chẳng hạn $\cos i = \dfrac{e + e^{-1}}{2} \approx 1,54$; $\sin i = \dfrac{e - e^{-1}}{2i} \approx -1,17i$, nghĩa là *không thể nói* $\cos z$ *và* $\sin z$ *có môđun bị chặn.*

Hàm $w = \cos z$ được xét như là hợp của ba hàm sau đây:

$$z_1 = iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad w = \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big).$$

Do đó việc khảo sát hàm $\cos z$ được đưa về khảo sát các hàm đã được nghiên cứu.

Từ hệ thức (2.32) và các tính chất của hàm $e^z$ ta rút ra tính $\mathbb{C}$ - khả vi của hàm $\cos z$.

Tương tự, hàm $w = \sin\, z$ là hợp của bốn hàm sau đây:

$$z_1 = iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad z_3 = \frac{z_2}{i},\ w = \frac{1}{2}(z_3 + \frac{1}{z_3}\Big)$$

nên việc khảo sát hàm $w = \sin z$ cũng được đưa về khảo sát các hàm đã xét ở trên.

Từ hệ thức (2.31) và (2.32) suy ra rằng hàm $\cos z$ và $\sin z$ là những hàm tuần hoàn với chu kỳ $2\pi$ và là những hàm $\mathbb{C}$ - khả vi:

$$(\cos z)' = -\sin z; \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Đối với hàm $\operatorname{tg} z$, theo định nghĩa ta có:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Đó là hàm tuần hoàn với chu kỳ cơ sở $\pi$. Bằng cách sử dụng (2.31) và (2.32) ta có

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz+1}} \cdot \tag{2.35}$$

Do đó việc khảo sát hàm $\operatorname{tg} z$ được đưa về khảo sát các hàm "trung gian" đã được xét sau đây

$$z_1 = 2iz; \quad z_2 = e^{z_1}; \quad w = -i \cdot \frac{z_2 - 1}{z_2 + 1} \cdot$$

Bây giờ, ta chuyển sang xét hàm lũy thừa tổng quát

$$w = z^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

một cách chi tiết hơn.

Ta đặt

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}.$$

Hàm này là hợp của ba hàm trung gian sau đây

$$z_1 = \log z; \quad z_2 = \alpha z_1; \quad w = e^{z_2}.$$

Cũng như ở các phần trên, ta có thể định nghĩa khái niệm nhánh liên tục của hàm $z^\alpha$ trong miền $D$. Mỗi nhánh liên tục của hàm $\log z$ trong miền $D$ sẽ xác định một nhánh liên tục của hàm $z^\alpha$ trong miền đó.

Dễ dàng thấy rằng ảnh của góc

$$D = \{z \in \mathbb{C} : a < \arg z < b, b - a \leqslant 2\pi, b, a \in \mathbb{R}\} \tag{2.36}$$

qua ánh xạ $w = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ là một trong các góc sau:

$$D^* = \{w : \alpha a + 2\pi\alpha k < \arg w < \alpha b + 2\pi\alpha k, \quad k \in \mathbb{Z}\}. \tag{2.37}$$

Thật vậy, qua ánh xạ $z_1 = \log z$ ảnh của $D$ sẽ là một trong các băng vô hạn sau:

$$D(z_1) = \{z_1 \in \mathbb{C} : a + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

trong đó số nguyên $k$ được xác định bằng việc chọn nhánh liên tục của $\log z$ trong góc (2.36). Qua ánh xạ $z_2 = \alpha z_1$ thì ảnh của $D(z_1)$ sẽ là băng vô hạn

$$D(z_2) = \{z_2 \in \mathbb{C} : \alpha a + 2k\pi\alpha < \operatorname{Im} z_2 < \alpha b + 2k\pi\alpha\}$$

với điều kiện $\alpha(b - a) \leqslant 2\pi$.

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

### 2.2.7 Nhánh chỉnh hình của hàm đa trị

Theo định nghĩa, hàm chỉnh hình $f$ trong miền $D$ được gọi là một *nhánh chỉnh hình* của hàm đa trị $F(z)$ nếu tại mọi điểm $z \in D$ giá trị của hàm $f(z)$ trùng với một trong các giá trị của $F(z)$ tại điểm ấy.

Ta sẽ giải thích khái niệm nhánh chỉnh hình đối với một vài hàm đơn giản.

Trước hết ta xét hàm $w = \sqrt[n]{z}$ trong miền $D = \mathbb{C} \setminus \{[0, \infty e^{i\alpha}]\}$, trong đó $\{0, \infty e^{i\alpha}\}$ là tia $\arg z = \alpha$. Ta đã thấy rằng nhánh đơn trị liên tục của hàm $\sqrt[n]{z}$ có thể tách được trong miền $D$ nếu trong đó hàm $\arg z$ có thể tách các nhánh đơn trị liên tục (xem **1.5**). Giả sử $z_0$ là điểm cố định nào đó thuộc $D$ và $\varphi_0 = \arg z_0$ là một trong các giá trị của $\arg z$ tại $z_0$. Ta xét hàm

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0,z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0 \end{cases} \tag{2.38}$$

như đã làm trong **1.5**. Ta ký hiệu $w_*(z)$ là giá trị của hàm căn $\sqrt[n]{z}$ tại điểm $z$ tương ứng với giá trị $\varphi_*(z)$ tại điểm ấy. Khi đó

$$w_*(z) = \sqrt[n]{|z|}\Big[\cos\frac{\varphi_*(z)}{n} + i\sin\frac{\varphi_*(z)}{n}\Big]. \tag{2.39}$$

Hiển nhiên, vì $\sqrt[n]{|z|}$ và $\varphi_*(z)$ là những hàm đơn trị liên tục nên $w_*(z)$ đơn trị liên tục.

Ta chứng minh rằng $w_*(z)$ là hàm chỉnh hình trong $D$ (xem **2.2.2**).

Thật vậy, ta ký hiệu $r = |z|$, $\varphi = \varphi_*(z)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} w_*(z) &= u_*(r,\varphi) = \sqrt[n]{r}\cos\frac{\varphi}{n}\,,\\ \operatorname{Im} w_*(z) &= v_*(r,\varphi) = \sqrt[n]{r}\sin\frac{\varphi}{n}\,,\end{aligned}$$

và dễ dàng thấy rằng

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_*}{\partial \varphi} &= \frac{1}{n\sqrt[n]{r^{n-1}}}\cos\frac{\varphi}{n}\,, \quad \frac{\partial v_*}{\partial r} = \frac{1}{n\sqrt[n]{r^{n-1}}}\sin\frac{\varphi}{n}\,,\\ \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} &= -\frac{\sqrt[n]{r}}{n}\sin\frac{\varphi}{n}\,, \quad \frac{\partial v_*}{\partial \varphi} = \frac{\sqrt[n]{r}}{n}\cos\frac{\varphi}{n}\cdot\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_*}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v_*}{\partial \varphi}\,,\\ \frac{1}{r}\frac{\partial u_*}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial v_*}{\partial r}\cdot\end{aligned}$$

Đó chính là điều kiện Cauchy - Riemann. Như vậy hàm $u$ và $v$ thỏa mãn điều kiện Cauchy - Riemann trong $D$. Vì $u$ và $v$ khả vi liên tục trong $D$ theo $r$ và $\varphi$ nên $w_*(z)$ là một nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$ trong $D$.

Ta xét các hàm $w_m(z)$ xác định bởi đẳng thức

$$w_m(z) = \sqrt[n]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi_m(z)}{n} + i\sin\frac{\varphi_m(z)}{n}\Big) \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \tag{2.40}$$

trong đó hàm $\varphi_m(z)$ được xác định như (5.8), **1.5**. Khi $m = 0$ ta thu được hàm $\varphi_*(z)$ trong (2.38). Dễ dàng thấy rằng các hàm này đều là những nhánh chỉnh hình của hàm $\sqrt[n]{z}$.

Từ lý luận trên đây và mục **1.5.3** ta có thể kết luận rằng trong miền $D$ không chứa điểm $z = 0$ hàm đa trị $\sqrt[n]{z}$ có thể tách $n$ nhánh chỉnh hình được xác định bởi (2.40).

Cũng tương tự như ở mục 5, dễ dàng chứng tỏ rằng trong miền $D$ bất kỳ có chứa gốc tọa độ ta không thể tách nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $\sqrt[n]{z}$.

Nếu từ tập hợp các nhánh chỉnh hình của hàm đa trị $F(z)$ ta muốn tách một nhánh xác định thì cần đặt ra điều kiện bổ sung. Điều kiện đó thông thường được cho bởi giá trị của nhánh cần tách tại một điểm nào đó của miền $D$.

**Ví dụ 1.** Cho hàm $w = \sqrt[3]{z}$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. Hãy tách nhánh chỉnh hình $w_m(z)$ mà $w_m(-1) = -1$. Tìm giá trị của nhánh đó tại điểm $z = 8i$.

Vì $w_m(-1) = -1$ nên ta có thể đặt

$$\varphi_0 = \arg z_0 = \arg(-1) = 3\pi.$$

Khi đó hàm $\varphi_m(z)$ là

$$\varphi_m(z) = \begin{cases} 3\pi, & z = -1, \\ \Delta_{\gamma(-1,z)} \arg z, & z \in D, z \neq -1 \end{cases}$$

và nhánh chỉnh hình cần tách là

$$w_m(z) = \sqrt[3]{|z|}\Big(\cos\frac{\varphi_m(z)}{3} + i\sin\frac{\varphi_m(z)}{3}\Big).$$

Giá trị của nó tại điểm $z = 8i$ bằng

$$\begin{aligned} w_m(8i) &= \sqrt[3]{8}\Big(\cos\frac{3\pi - \dfrac{\pi}{2}}{3} + i\sin\frac{3\pi - \dfrac{\pi}{2}}{3}\Big) \\ &= 2\Big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\Big) = -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

Bây giờ ta chuyển sang xét việc tách nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit. Cũng tương tự như trên, dễ dàng chứng minh rằng nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit có thể tách được trong miền $D$ nếu trong đó có thể tách được nhánh đơn trị liên tục của hàm $\arg z$.

Cũng như trên, giả sử $z_0$ là điểm cố định của $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [0, \infty e^{i\alpha}]$ và $\arg z_0 = \varphi_0$ là một trong các giá trị của $\operatorname{Arg} z_0$. Ta đặt

$$\varphi_*(z) = \begin{cases} \arg z_0, & z = z_0, \\ \Delta_{\gamma(z_0,z)} \arg z, & z \in D, z \neq z_0 \end{cases}$$

và $w_*(z)$ là giá trị của $w = \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ tương ứng với $\arg z = \varphi_*(z)$. Khi đó

$$w_*(z) = \ln|z| + i\varphi_*(z).$$

Hiển nhiên vì trong $D$ cả $\ln|z|$ lẫn $\varphi_*(z)$ đều đơn trị liên tục nên $w_*(z)$ đơn trị liên tục trong $D$. Ta còn cần chứng minh rằng $w_*(z)$ là hàm chỉnh hình trong $D$ (xem 2.2.3).

Đặt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w_*(z) &= u_*(r, \varphi) = \log r, \\ \operatorname{Im} w_*(z) &= v_*(r, \varphi) = \varphi_*(z) = \varphi. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\frac{\partial u_*}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial u_*}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial v_*}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v_*}{\partial \varphi} = 1.$$

Do đó

$$\frac{\partial u_*}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v_*}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u_*}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v_*}{\partial r}\cdot$$

Như vậy trong $D$ các điều kiện Cauchy - Riemann được thỏa mãn. Vì $u_*$ và $v_*$ khả vi liên tục trong $D$ nên $w_*(z)$ là nhánh chỉnh hình của $w = \operatorname{Ln} z$ trong $D$. Cũng tương tự các hàm

$$w_m(z) = \ln|z| + i[\varphi_*(z) + 2m\pi], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

là những nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit, trong đó $w_0(z) = w_*(z)$.

Cũng tương tự như đối với hàm căn, hàm lôgarit có thể tách được thành các nhánh chỉnh hình trong miền $D$ bất kỳ không chứa gốc tọa độ $z = 0$, còn nếu miền $D \supset \{0\}$ thì việc tách đó là không thực hiện được.

## 2.3 Hàm chỉnh hình và ánh xạ bảo giác

Trong mục này ta sẽ làm quen với sự mô tả hình học đối với các hàm chỉnh hình. Cụ thể hơn ta sẽ làm quen với một trong những vấn đề cơ bản của lý thuyết hàm biến phức là việc nghiên cứu các hàm chỉnh hình bằng cách xuất phát từ đặc tính của các ánh xạ mà các hàm đó đã thực hiện - gọi là ánh xạ bảo giác.

Bài toán cơ bản của ánh xạ bảo giác là bài toán sau đây. Giả sử cho hai miền $D$ và $D^*$. Hãy tìm hàm $f : D \to D^*$ thực hiện ánh xạ đơn trị một - một và bảo giác miền $D$ lên miền $D^*$.

Từ đó cũng sẽ nảy sinh ra những vấn đề tồn tại và duy nhất đối với hàm $f$ mà ta sẽ nghiên cứu kỹ trong chương VII.

### 2.3.1 Ý nghĩa hình học của acgumen của đạo hàm

Giả sử hàm $w = f(z) \in \mathcal{H}(D)$, $f'(z_0) \neq 0$, $z_0 \in D$. Khi đó, theo định nghĩa, ta có:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = Ae^{i\alpha}, \quad A \neq 0 \tag{2.41}$$

và từ đó suy ra

$$\lim_{\Delta z \to 0} \left( \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \alpha = \arg f'(z_0). \tag{2.42}$$

Giả sử $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ là cung trơn Jordan đi qua điểm $z_0$. Tại điểm $z_0 = z_0(t_0)$ ta có $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Ảnh của $\gamma$ qua ánh xạ $w = f(z)$ là cung $\Gamma = f(\gamma)$ đi qua điểm $w_0$. Cung đó có phương trình là $w = f[\gamma(t)]$, $t \in [a, b]$.

Theo quy tắc vi phân hàm hợp, ta có:

$$w' = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) \neq 0. \tag{2.43}$$

Từ hệ thức (2.43) suy ra rằng $\Gamma$ có tiếp tuyến tại điểm $w_0$ và

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg \gamma'(t_0) (\mathrm{mod}\, 2\pi). \tag{2.44}$$

Như vậy, về mặt hình học, $\arg f'(z_0)$ bằng góc quay của cung $\gamma$ tại điểm $z_0$ qua ánh xạ $f(z)$.

Nếu hai đường cong có tiếp tuyến $\gamma_1$ và $\gamma_2$ giao nhau tại điểm $z_0$ thì qua ánh xạ $w = f(z)$ tiếp tuyến của những đường cong này sẽ quay một góc như nhau và bằng $\arg f'(z_0)$. Do đó nếu góc giữa $\gamma_1$ và $\gamma_2$ bằng $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ thì góc $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)$ giữa các ảnh $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$ và $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$ cũng sẽ bằng $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$. Như vậy, về độ lớn và hướng góc giữa hai đường cong cắt nhau tại một điểm là bằng góc giữa các đường cong ảnh tương ứng của chúng qua ánh xạ $w = f(z)$, $f'(z_0) \neq 0$.

**Định nghĩa 2.3.1.** Giả sử $\gamma_1$ và $\gamma_2$ là hai đường cong đi qua điểm vô cùng $z = \infty$. Khi đó góc giữa các ảnh của $\gamma_1$ và $\gamma_2$ qua ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{z}$ tại điểm $\zeta = 0$ được gọi là góc giữa hai đường cong $\gamma_1$ và $\gamma_2$ tại $z = \infty$.

**Ví dụ 1.** Giả sử hai tia $\gamma_1$ và $\gamma_2$ xuất phát từ điểm hữu hạn $z_0$. Khi đó góc giữa $\gamma_1$ và $\gamma_2$ tại điểm $z = \infty$ bằng góc giữa hai tia đó tại điểm $z_0$ với dấu ngược lại.

Để đơn giản, ta đặt $z_0 = 0$. Giả sử

$$\arg z\Big|_{z\in\gamma_i} = \varphi_i, \quad i = 1, 2.$$

Khi đó góc giữa $\gamma_1$ và $\gamma_2$ (theo hướng từ $\gamma_1$ đến $\gamma_2$) tại điểm $z = 0$ là bằng $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Ảnh của các tia $\gamma_1$ và $\gamma_2$ qua ánh xạ $\zeta = 1/z$ là $\tilde{\gamma}_1$ và $\tilde{\gamma}_2$ và $\arg\zeta\Big|_{\zeta\in\tilde{\gamma}_i} = -\varphi_i$. Do đó góc giữa $\tilde{\gamma}_1$ và $\tilde{\gamma}_2$ tại điểm $\zeta = 0$ bằng $(-\varphi_2) - (-\varphi_1) = -\alpha$ và theo định nghĩa 2.3.1 góc giữa hai tia $\gamma_1$ và $\gamma_2$ tại điểm $\infty$ bằng $-\alpha$.

Bây giờ ta nêu ra một số điều kiện đủ về sự bảo toàn góc tại điểm $z_0$ qua ánh xạ $w = f(z)$ liên tục tại lân cận điểm $z_0$ khi $z_0 = \infty$ hay khi $f(z_0) = \infty$.

1. Giả sử $z_0 = \infty$ và $f(z_0) \neq \infty$. Hàm $\zeta = 1/z$ ánh xạ các đường cong xuất phát từ điểm $z_0 = \infty$ thành các đường cong xuất phát từ điểm $\zeta = 0$. Do đó, để có sự bảo toàn các góc tại điểm $z_0 = \infty$ qua ánh xạ $w = f(z)$ chỉ cần các góc tại điểm $\zeta = 0$ được bảo toàn qua ánh xạ $w = f\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)$. Và để

được điều đó ta chỉ cần có sự tồn tại đạo hàm khác 0 của hàm $f(1/\zeta)$ tại điểm $\zeta = 0$, tức là

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{f(1/\zeta)-f(\infty)}{\zeta-0}=\lim_{z\to 0}[z(f(z)-f(\infty))]\neq 0.$$

2. Giả sử $z_0 \neq \infty$ còn $f(z_0) = \infty$. Trong trường hợp này các đường cong xuất phát từ điểm $z_0$ được ánh xạ thành các đường cong đi qua điểm $w = \infty$. Do đó để các góc tại điểm $z_0$ bảo toàn qua ánh xạ $f(z)$ điều kiện đủ là các góc tại điểm $z_0$ được bảo toàn qua ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{w} = \dfrac{1}{f(z)}$. Và để có điều đó, điều kiện đủ là tồn tại giới hạn hữu hạn sau đây:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\dfrac{1}{f(z)}-\dfrac{1}{f(z_0)}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)(z-z_0)}\neq 0.$$

3. Bây giờ giả sử $z_0 = \infty$ và $f(z_0) = \infty$. Để bảo toàn các góc tại điểm $z_0 = \infty$ qua ánh xạ $w = f(z)$ điều kiện đủ là các góc tại điểm $\zeta_0 = \dfrac{1}{z_0} = 0$ bảo toàn qua ánh xạ $\zeta = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\zeta}\right)}$. Và để có điều đó, điều kiện đủ là tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{1/f(1/\zeta)-1/f(\infty)}{\zeta-0}=\lim_{z\to\infty}\frac{z}{f(z)}\neq 0.$$

### 2.3.2 Ý nghĩa hình học của môđun đạo hàm

Bây giờ từ điểm $z_0 \in D$ ta kẻ tia theo hướng vectơ đơn vị $\vec{s}$ và lấy trên tia đó điểm $z$. Ta lập tỷ số khoảng cách giữa các ảnh $f(z_0)$ và $f(z)$ với khoảng cách giữa các điểm $z_0$ và $z$.

Giới hạn của tỷ số này khi $z$ dần đến $z_0$ theo tia được gọi là *hệ số co giãn* của ánh xạ $f$ tại điểm $z_0$ theo hướng vectơ $\vec{s}$ và ký hiệu là $m_f^{\vec{s}}(z_0)$. Nếu $z = z_0 + \vec{s}t$, $0 < t < \infty$ thì

$$m_f^{\vec{s}}(z_0)=\lim_{t\to 0}\frac{|f(z_0+\vec{s}t)-f(z_0)|}{|\vec{s}t|}=|f'(z_0)|.$$

Như vậy, nếu hàm $f$ khả vi tại điểm $z_0$ thì độ co giãn tuyến tính tại điểm $z_0$ theo hướng $\vec{s}$ qua ánh xạ $f$, $f'(z_0) \neq 0$ là bằng $|f'(z_0)|$, $(m_f^{\vec{s}}(z_0) = |f'(z)_0)|)$ và không phụ thuộc vào hướng $\vec{s}$.

Bây giờ giả sử $\gamma$ là đường cong Jordan như trong **1.** và $\Gamma = f(\gamma)$ là ảnh của nó.

$$|dz_0| = (dx_0^2 + dy_0^2)^{1/2}dt = ds_0,$$
$$|dw_0| = (du_0^2 + dv_0^2)^{1/2}dt = d\sigma_0$$

là những yếu tố độ dài lần lượt của $\gamma$ và $\Gamma$ tại các điểm $z_0$ và $w_0$ tương ứng nên

$$|f'(z_0)| = \frac{d\sigma_0}{ds_0} \cdot \tag{2.45}$$

Hệ thức (2.45) chứng tỏ rằng qua ánh xạ $w = f(z)$ hệ số co giãn tuyến tính tại điểm $z_0$ của một cung $\gamma$ bất kỳ đi qua điểm đó không phụ thuộc vào dạng và hướng của $\gamma$.

### 2.3.3 Ánh xạ bảo giác

Bây giờ ta có thể phát biểu định nghĩa ánh xạ bảo giác.

**Định nghĩa 2.3.2.** Ánh xạ tôpô

$$w = f(z) = u(z) + iv(z),$$

biến miền $D$ của mặt phẳng phức $(z)$ lên miền $D^*$ của mặt phẳng phức $(w)$ được gọi là *ánh xạ bảo giác trong miền D* nếu tại mỗi điểm $z \in D$, góc giữa các đường cong được bảo toàn (cả về độ lớn và hướng) và độ co giãn là đều.

Từ **2.3.1** và **2.3.2** ta có thể phát biểu những điều kiện mà hàm biến phức cần thỏa mãn để nó là ánh xạ bảo giác.

**Định lý 2.3.1.** *Giả sử ánh xạ tôpô $w = f(z)$ chỉnh hình trong miền $D$ và $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in D$. Khi đó ánh xạ $w = f(z)$ bảo giác trong miền $D$.*

*Chứng minh.* Vì $f'(z) \neq 0$, $\forall\, z \in D$ nên độ co giãn là đều qua ánh xạ đó. Ta cần chứng minh rằng góc giữa các đường cong được bảo toàn qua ánh xạ đó. Thật vậy, giả sử $z_0$ là điểm tùy ý thuộc $D$, $\gamma_1$ và $\gamma_2$ là hai cung trơn Jordan xuất phát từ $z_0$, ở đây $\gamma_1 : z = z_1(t)$, $t \in [a, b]$, $z_0 = z_1(t_0)$, $z_1'(t_0) \neq 0$ và $\gamma_2 : z = z_2(\tau)$, $\tau \in [a_2, b_2]$, $z_2 = z_2(\tau_0)$, $z_2'(\tau_0) \neq 0$, và góc giữa $\gamma_1$ và $\gamma_2$ là $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$. Ta ký hiệu ảnh của $\gamma_1$ và $\gamma_2$ tương ứng qua ánh xạ $f$ là $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$, $\Gamma_2 = f(\gamma_2)$. Hai cung $\Gamma_1$ và $\Gamma_2$ đều đi qua điểm $w_0 = f(z_0)$ và có phương trình tương ứng là $w_1(t) = f[z_1(t)]$, $z_1(t_0) = z_0$ và $w_2(\tau) = f[z_2(\tau)]$, $z_2(\tau_0) = z_0$. Theo giả thiết ta có $w_1'(t_0) \neq 0$ và $w_2'(\tau_0) \neq 0$. Điều đó chứng tỏ rằng tại điểm $w_0 = f(z_0)$ hai cung $\Gamma_1$ và $\Gamma_2$ có tiếp tuyến. Ta ký hiệu góc giữa các ảnh $\Gamma_1$ và $\Gamma_2$ là $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)$. Trên cơ sở (2.45) ta có

$$\begin{aligned} \arg f(z_0) &= \arg w_1(t_0) - \arg z_1'(t_0) (\operatorname{mod} 2\pi), \\ \arg f(z_0) &= \arg w_2(\tau_0) - \arg z_2(\tau_0) (\operatorname{mod} 2\pi). \end{aligned} \tag{2.46}$$

Từ (2.46) suy ra rằng với sự sai khác số hạng $2k\pi$ ta có

$$\arg w_1'(t_0) - \arg w_1'(\tau_0) = \arg z_1'(t_0) - \arg z_2'(\tau_0)$$

hay là

$$\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2) = \varphi(\gamma_1, \gamma_2).$$

□

Từ định lý vừa chứng minh suy ra rằng *tính chỉnh hình và đạo hàm khác không là điều kiện đủ để hàm $f$ là ánh xạ bảo giác.* Điều đó được luận chứng trong định lý sau đây.

**Định lý 2.3.2.** *Giả sử hàm $w = f(z)$ thực hiện ánh xạ bảo giác miền $D$ lên miền $D^*$. Khi đó hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f'(z) \neq 0$ với mọi $z \in D$.*

*Chứng minh.* Đặt $\Delta w = \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$, $\quad \forall\, z, z + \Delta z \in D$. Theo điều kiện của định lý, $f$ là bảo giác nên tại điểm $z_0 \in D$ bất kỳ ánh xạ

$w = f(z)$ có tính chất bảo toàn góc và độ co giãn đều. Do đó với mọi $z_1$, $z_2$ thuộc lân cận của $z_0$, với sự sai khác đại lượng vô cùng bé, ta có:

a) $$\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg\Delta z_1$$

và do đó

$$\arg\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \arg\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha, \tag{2.47}$$

b)

$$\left|\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}\right| = \left|\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}\right| = A \neq 0, \tag{2.48}$$

trong đó

$$\Delta z_1 = z_1 - z_0, \quad \Delta z_2 = z_2 - z_0,$$
$$\Delta w_1 = f(z_1) - f(z_0), \quad \Delta w_2 = f(z_2) - f(z_0).$$

Từ hệ thức (2.47), (2.48), với sự sai khác đại lượng vô cùng bé, ta có

$$\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = A \cdot e^{i\alpha}. \tag{2.49}$$

Vì $z_1$, $z_2$ là những điểm tùy ý trong lân cận điểm $z_0$ nên hệ thức (2.49) chứng tỏ tồn tại

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

và do đó tồn tại đạo hàm $f'(z_0)$. Vì $A \neq 0$ nên

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) \neq 0.$$

Vì $z_0$ là điểm tùy ý thuộc $D$, nên $f$ chỉnh hình trong $D$. □

### 2.3.4 Ánh xạ liên tục và ánh xạ chỉnh hình

Từ các mục **2.3.1 - 2.3.3** của tiết này, ta thấy rằng ánh xạ chỉnh hình với đạo hàm khác 0 được đặc trưng bởi hai tính chất

1. Tính chất bảo toàn góc;

2. Độ co giãn đều.

Một bài toán được đặt ra tự nhiên là:

I) Mọi ánh xạ liên tục

$$w = u + iv \tag{2.50}$$

có tính chất bảo toàn góc có phải đều là chỉnh hình không? (Nói cách khác: tính chất bảo toàn góc có kéo theo sự co giãn đều không?)

Hoặc bài toán tương tự:

II) Mọi ánh xạ liên tục có độ co giãn đều có phải là chỉnh hình hay không?

Cả hai vấn đề trên đây đều có lời giải hợp lý nếu ngay từ đầu ta giả thiết rằng đối với ánh xạ đã cho (2.50) các hàm $u$ và $v$ đều có đạo hàm riêng liên tục.

**Định lý 2.3.3.** *Giả sử phần thực $u(z)$ và phần ảo $v(z)$ của ánh xạ $f(z) = u(z) + iv(z)$ có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và ánh xạ $f(z)$ có tính chất bảo toàn góc tại mọi điểm $z \in D$. Khi đó $f \in \mathcal{H}(D)$ và $f'(z) \neq 0$.*

*Chứng minh.* Ta có

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} e^{-2i\varphi},$$

trong đó $\varphi = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z$.

Theo điều kiện của định lý, khi cố định $z$ thì $\arg\Big(\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}\Big)$ không phụ thuộc vào $\varphi$ nên

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0.$$

□

**Định nghĩa 2.3.3.** Ánh xạ $\mathbb{R}^2$ - khả vi $f$ được gọi là *phản chỉnh hình (đối chỉnh hình)* trong miền $D$ nếu

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

tại mọi điểm $z \in D$.

Hiển nhiên rằng nếu $f \in \mathcal{H}(D)$ thì hàm $\overline{f}$ là phản chỉnh hình trong $D$.

**Định lý 2.3.4.** *Giả sử $u(z)$ và $v(z)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong miền $D$ và tại mọi điểm $z \in D$ nó có độ co giãn đều, tức là $\left|\lim \dfrac{\Delta w}{\Delta z}\right| \neq 0$ không phụ thuộc vào $\varphi$. Khi đó ánh xạ $w = f = u + iv$ là chỉnh hình hoặc phản chỉnh hình.*

*Chứng minh.* Từ hệ thức (2.7) ta có

$$\left|\lim \frac{\Delta w}{\Delta z}\right|^2 = \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|^2 + \left|\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \overline{\frac{\partial w}{\partial z}} e^{2i\varphi}\right\}.$$

Từ điều kiện của định lý ta rút ra

$$\frac{\partial w}{\partial z} \cdot \overline{\frac{\partial w}{\partial \overline{z}}} = 0.$$

Ta sẽ chứng minh rằng hoặc $\dfrac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0$, $\forall\, z \in D$ hoặc $\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\forall\, z \in D$.

Thật vậy, nếu cả hai hệ thức vừa nói đồng thời được thỏa mãn tại một điểm nào đó thuộc $D$ thì các đạo hàm riêng của $f$ theo $x$ và $y$ đều bằng 0 tại điểm đó. Nhưng điều đó không thể xảy ra do điều kiện của định lý. Vì các hàm $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}$ đều liên tục nên các tập hợp

$$E_1 = \left\{z \in D : \frac{\partial w}{\partial z} = 0\right\}, \quad E_2 = \left\{z \in D : \frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0\right\}$$

đều là những tập hợp đóng trong $D$. Như vậy miền $D$ là hợp của hai tập hợp đóng không giao nhau $E_1$ và $E_2$. Do $D$ liên thông nên một trong hai tập hợp này phải là tập hợp trống. □

Trong trường hợp nếu xét ánh xạ liên tục tùy ý nào đó thì hai vấn đề đặt ra trên đây sẽ trở nên rất khó khăn. Tuy nhiên, bằng cách ứng dụng các phương pháp của lý thuyết hàm biến thực đối với bài toán I, D. Menchoff[1] đã chứng minh được rằng

[1]D. Menchoff, Sur la représentation conforme des domaines planes, Math. Ann. 1926.

*Nếu ánh xạ đơn diệp liên tục $w = f(z)$ có tính chất bảo toàn góc thì $f(z)$ là hàm chỉnh hình.*

Thế nhưng đến nay người ta chưa rõ tính đơn diệp trong phép chứng minh định lý trên cần thiết đến mức nào. Còn đối với bài toán II thì nó đã được giải quyết trọn vẹn. H. Bohr [2] đã chứng minh được rằng

*Nếu ánh xạ đơn diệp liên tục $w = f(z)$ có độ co giãn đều tại mọi điểm $z \in D$ thì hoặc $f(z)$ là hàm chỉnh hình hoặc $f(z)$ là phản chỉnh hình.*

Ở đây, giả thiết "đơn diệp" đóng vai trò cốt yếu. Thật vậy, xét ví dụ hàm

$$f(z) = \begin{cases} z & \text{khi } \operatorname{Im} z \geqslant 0, \\ \overline{z} & \text{khi } \operatorname{Im} z \leqslant 0. \end{cases}$$

Hàm $f(z)$ liên tục trên $\mathbb{C}$ nhưng không đơn diệp. Hàm $f(z)$ có độ co giãn đều vì rằng

$$\lim \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim \left|\frac{\Delta z}{\Delta z}\right| = 1 \text{ khi } \operatorname{Im} z \geqslant 0,$$
$$\lim \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim \left|\frac{\Delta \overline{z}}{\Delta z}\right| = 1 \text{ khi } \operatorname{Im} z \leqslant 0.$$

Thế nhưng $f(z)$ không chỉnh hình và cũng không phản chỉnh hình trong mặt phẳng phức $(z)$.

## 2.4 Các đẳng cấu sơ cấp

Giả sử $D$ là miền của mặt phẳng biến phức $z$, $D^*$ là miền của mặt phẳng biến phức $w$. Theo định nghĩa, *phép đồng phôi $f : D \to D^*$ được gọi là một phép đẳng cấu nếu cả ánh xạ $f$ lẫn ánh xạ ngược $f^{-1}$ đều chỉnh hình.* Phép đẳng cấu miền $D$ lên chính nó được gọi là *phép tự đẳng cấu.*

Về sau ánh xạ bảo giác (đơn diệp) $f$ biến miền $D$ lên miền $D^*$ còn được gọi là *đẳng cấu (bảo giác)*, còn $D$ và $D^*$ được gọi là những *miền đẳng cấu*

[2] H. Bohr, Über streckentreue und conforme Abbildung, Math. z., 1918, s, 403

*với nhau.* Trong mục này ta sẽ trình bày các đẳng cấu đơn giản nhất thực hiện bởi các hàm sơ cấp hoặc tổ hợp của các hàm ấy cùng một ví dụ để tiện làm quen với cách giải bài toán tìm các đẳng cấu biến miền này lên miền kia. Đồng thời thông qua việc trình bày đó, chúng tôi muốn đi đến một kết luận là: quá trình giải bài toán tìm đẳng cấu biến một miền cho trước lên miền khác được tiến hành gần giống như quá trình tìm nguyên hàm của một hàm cho trước mà ở đây các ánh xạ sơ cấp sẽ được trình bày có vai trò như một "bảng tích phân cơ bản".

Khi giải các bài toán ánh xạ bảo giác ta thường sử dụng hai tính chất sau đây của ánh xạ bảo giác (sẽ được trình bày kỹ trong **7.1**):

(i) Ánh xạ ngược với ánh xạ bảo giác là ánh xạ bảo giác.

(ii) Hợp của hai ánh xạ bảo giác là ánh xạ bảo giác.

## 2.4.1 Đẳng cấu phân tuyến tính

Ánh xạ phân tuyến tính đã được đề cập đến trong chương I. Ở đây, ta sẽ trình bày các tính chất cơ bản nhất của ánh xạ đó.

Ánh xạ phân tuyến tính được xác định bởi hệ thức

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0, \tag{2.51}$$

trong đó $a, b, c, d$ là các số phức.

Với điều kiện $ad - bc \neq 0$ ta có $w \not\equiv \text{const}$. Trong công thức (2.51) nếu $c = 0$ còn $d \neq 0$ thì

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = \tilde{a}z + \tilde{b}.$$

Đó là một hàm nguyên.

**Định lý 2.4.1.** *Ánh xạ phân tuyến tính* (2.51) *là một phép đồng phôi biến* $\overline{\mathbb{C}}$ *lên* $\overline{\mathbb{C}}$.

*Chứng minh.* 1. Trường hợp $c = 0$ là hiển nhiên.

2. Ta xét trường hợp $c \neq 0$. Giải phương trình (2.51) đối với $z$ ta có

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad ad - bc \neq 0. \tag{2.52}$$

Đó là hàm ngược của (2.51). Ánh xạ (2.52) đơn trị trong mặt phẳng $\overline{\mathbb{C}}$ và là ánh xạ phân tuyến tính. Do đó (2.51) đơn trị một - một trên $\overline{\mathbb{C}}$.

Tính liên tục của (2.51) tại các điểm $z \neq -\dfrac{d}{c}$, $\infty$ là hiển nhiên. Bằng cách đặt

$$w(\infty) = \frac{a}{c}, \quad w\Big(-\frac{d}{c}\Big) = \infty$$

ta thấy rằng (2.51) liên tục trên $\overline{\mathbb{C}}$. Định lý được chứng minh. □

**Định lý 2.4.2.** *Ánh xạ phân tuyến tính bảo giác khắp nơi trên* $\overline{\mathbb{C}}$.

*Chứng minh.* 1. Đối với $z \neq -d/c$, $\infty$ tính bảo giác được suy từ chỗ là tại các điểm ấy

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0.$$

2. Bây giờ giả sử hai đường cong $\gamma_1$ và $\gamma_2$ đi qua điểm $z = -d/c$ và $\alpha$ là góc giữa $\gamma_1$ và $\gamma_2$ tại điểm ấy. Từ **2.3.1** suy ra rằng góc giữa các ảnh $\gamma_1^*$ và $\gamma_2^*$ của $\gamma_1$ và $\gamma_2$ tương ứng qua ánh xạ (2.51) tại điểm $w = \infty$ (tương ứng với $z = -d/c$) là bằng $\alpha$ vì

$$\lim_{z \to -d/c} \frac{1}{\dfrac{az + b}{cz + d}(z + d/c)} = \lim_{z \to -d/c} \frac{c}{az + b} \neq 0.$$

Trường hợp $z = \infty$ cũng được chứng minh tương tự. □

**Định nghĩa 2.4.1.** Ánh xạ phân tuyến tính biến miền $D$ lên miền $D^*$ được gọi là *đẳng cấu phân tuyến tính*, còn các miền $D$ và $D^*$ được gọi là những miền đẳng cấu phân tuyến tính với nhau.

**Định lý 2.4.3.** *Tập hợp mọi đẳng cấu phân tuyến tính lập thành một nhóm, nghĩa là*

1. *Hợp (tích) các đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.*

2. *Ánh xạ ngược của đẳng cấu phân tuyến tính là đẳng cấu phân tuyến tính.*

*Chứng minh.* Điều khẳng định 2) là hiển nhiên.

Ta chứng minh 1). Giả sử

$$\zeta = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0,$$
$$w = \frac{a_2 \zeta + b_2}{c_2 \zeta + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0.$$

Khi đó

$$w = \frac{a_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + d_1 b_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)} = \frac{az + b}{cz + d},$$

trong đó $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$. □

*Nhận xét.* Hiển nhiên rằng nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính là nhóm không giao hoán. Thật vậy, giả sử $w(z) = \dfrac{1}{z}$, $\varphi(z) = z + 1$.

Khi đó

$$w(\varphi(z)) = \frac{1}{z+1}, \quad \varphi(w(z)) = \frac{1}{z} + 1.$$

Do đó

$$w(\varphi(z)) \neq \varphi(w(z)).$$

Vì qua phép chiếu nổi cả đường thẳng lẫn đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đều tương ứng với đường tròn trên mặt cầu Riemann nên ta có thể quy ước gọi đường thẳng hay đường tròn trên mặt phẳng phức đều là "đường tròn" trên $\overline{\mathbb{C}}$ (ta xem đường thẳng trên $\mathbb{C}$ là đường tròn trên $\overline{\mathbb{C}}$ đi qua điểm $\infty$), và gọi hình tròn, phần ngoài hình tròn và nửa mặt phẳng (hình tròn với bán kính vô cùng) đều là "hình tròn" trên $\overline{\mathbb{C}}$.

$$\begin{aligned} S(a,R) &= \big\{|z-a| < R\big\} \text{ – hình tròn,} \\ S^*(a,R) &= \big\{|z-a| > R\big\} \text{ – phần ngoài hình tròn,} \\ P(R,\varphi) &= \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > R\big\} \text{ là nửa mặt phẳng.} \end{aligned}$$

Thật vậy, đặt $e^{+i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $z = x + iy$, ta có

$$P(R,\varphi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\cos\varphi + y\sin\varphi > R\}.$$

Đó là nửa mặt phẳng;

**Định lý 2.4.4.** *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến "hình tròn" ("đường tròn") thành "hình tròn" (tương ứng thành "đường tròn").*

Nói cách khác: "hình tròn" và "đường tròn" đều là bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.

*Chứng minh.* Ánh xạ phân tuyến tính có thể biểu diễn dưới dạng hợp của các ánh xạ:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\xi; \quad \xi = \frac{1}{\zeta}; \quad \zeta = z + \frac{d}{c},$$

trong đó có hai ánh xạ tuyến tính và ánh xạ $\xi = 1/\zeta$. Đối với các ánh xạ tuyến tính định lý 2.4.4 là hiển nhiên. Ta chỉ cần xét phép nghịch đảo $w = \dfrac{1}{z}$.

1. Ta xét trường hợp hình tròn $S(a,R)$. Ảnh của nó sẽ là

$$\begin{aligned} &\Big|\frac{1}{w} - a\Big| < R, \quad |1-aw| < R|w|, \quad |1-aw|^2 < R^2|w|^2 \\ &\qquad \Rightarrow 1 - 2\mathrm{Re}(aw) + |a^2||w|^2 < R^2|w|^2. \end{aligned}$$

Tiếp theo ta xét ba trường hợp sau

a) $|a| > R$. Ta có

$$
\begin{aligned}
&(|a|^2 - R^2)|w|^2 - 2\mathrm{Re}(aw) + 1 < 0\\
\Rightarrow &|w|^2 - 2\mathrm{Re}\frac{aw}{|a|^2 - R^2} + \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2}\\
&< \frac{|a|^2}{(|a|^2 - R^2)^2} - \frac{1}{|a|^2 - R^2}\\
\Rightarrow &\Big|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\Big|^2 < \frac{R^2}{(|a|^2 - R^2)^2}\\
\Rightarrow &\Big|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\Big| < \frac{R}{|a|^2 - R^2}\cdot
\end{aligned}
$$

Đó là hình tròn.

b) Giả sử $|a| < R$. Tương tự như trên ta có

$$\Big|w - \frac{\overline{a}}{|a|^2 - R^2}\Big| > \frac{R}{R^2 - |a|^2}\cdot$$

c) Giả sử $|a| = R$. Đặt $a = |a|e^{i\varphi}$, $\varphi = \arg a$, ta có:

$$\mathrm{Re}(aw) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > \frac{1}{2|a|}\cdot$$

Đó là nửa mặt phẳng.

2. Đối với phần ngoài hình tròn $A^*(a, R)$ định lý được xét tương tự.

3. Bây giờ ta xét phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > -R$, $R > 0$. Ảnh của nó sẽ là

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Big(e^{-i\varphi}\frac{1}{w}\Big) > -R \Rightarrow \mathrm{Re}\Big(e^{-i\varphi}\frac{\overline{w}}{|w|^2}\Big) > -R\\
\Rightarrow \mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > -R|w|^2,
\end{aligned}
$$

và do đó

$$
\begin{aligned}
&2R|w|^2 + 2\mathrm{Re}(e^{i\varphi}w) > 0\\
\Rightarrow &|w|^2 + 2\mathrm{Re}\Big(\frac{e^{i\varphi}}{2R}w\Big) + \frac{1}{4R^2} > \frac{1}{4R^2}\\
\Rightarrow &\Big|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\Big|^2 > \frac{1}{4R^2}, \quad \Big|w + \frac{e^{-i\varphi}}{2R}\Big| > \frac{1}{2R}\cdot
\end{aligned}
$$

Đó là phần ngoài hình tròn. Phép ánh xạ nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(e^{-i\varphi}z) > R > 0$ được xét tương tự. $\square$

*Nhận xét* 2.4.1. Trong mọi trường hợp, điểm $a$ được ánh xạ thành điểm $1/a$. Điểm này thuộc ảnh hình tròn $S(a, R)$ cùng với một lân cận nào đó của nó.

**Định lý 2.4.5.** *Ánh xạ phân tuyến tính biến miền thành miền.*

*Chứng minh.* Giả sử $B$ là miền, $w = \varphi(z)$ là ánh xạ phân tuyến tính, $D = \varphi(B)$.

1. Chứng minh $D$ là tập hợp mở. Với mọi $w_0 \in D$, tồn tại duy nhất điểm $z_0 \in B$ sao cho $\varphi(z_0) = w_0$. Giả sử $U(z_0) \subset B$ là lân cận của điểm $z_0$ (hình tròn với tâm $z_0$ nếu $z_0 \neq \infty$ hoặc phần ngoài hình tròn nếu $z_0 = \infty$). Khi đó theo định lý 2.4.4 ta có $\varphi(U(z_0))$ là "hình tròn" chứa điểm $w_0$ cùng với một lân cận nào đó của nó. Như vậy $w_0$ là điểm trong của $D$ và do đó $D$ là tập hợp mở.

2. Chứng minh $D$ là tập hợp liên thông. Vì $B$ là tập liên thông nên từ định lý 2.4.1 suy ra rằng $D$ là tập hợp liên thông.

Như vậy $D$ là tập hợp mở liên thông, nghĩa là: $D$ là một miền. $\square$

Định lý 2.4.1, 2.4.2 và 2.4.4 là những tính chất đặc trưng của ánh xạ phân tuyến tính.

Ngoài tính bảo giác và bảo toàn đường tròn, nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính còn có những bất biến khác nữa.

Đẳng cấu phân tuyến tính (2.51) chứa ba tham số phức là tỷ số của ba trong bốn hệ số $a, b, c, d$ với hệ số thứ tư ($\neq 0$). Các tham số này được xác định đơn trị bởi điều kiện: ba điểm cho trước $z_1, z_2, z_3$ của mặt phẳng phức $(z)$ biến thành ba điểm $w_1, w_2, w_3$ của mặt phẳng phức $(w)$. Điều đó được suy ra từ định lý sau đây.

**Định lý 2.4.6.** *Tồn tại đẳng cấu phân tuyến tính duy nhất biến ba điểm khác nhau $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ thành ba điểm khác nhau $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ tương ứng. Đẳng cấu đó được xác định theo công thức*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \cdot \tag{2.53}$$

*Chứng minh.* 1.*Tính duy nhất.* Giả sử ta có hai đẳng cấu $w_1(z)$ và $w_2(z)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý. Giả sử $\zeta_2(w)$ là ánh xạ ngược của $w_2(z)$.

Ta xét ánh xạ $\zeta_2[w_1(z)]$. Đó là một đẳng cấu phân tuyến tính. Đẳng cấu này có ba điểm bất động $z_1, z_2$ và $z_3$ vì

$$\begin{aligned} w_1(z_k) &= w_k, \quad k = 1, 2, 3, \\ \zeta_2(w_k) &= z_k, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Do đó nếu đặt $\zeta_2[w_1(z)] = \dfrac{az + b}{cz + d}$ thì

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

hay là

$$cz_k^2 + (d - a)z_k - b = 0, \quad k = 1, 2, 3.$$

Đa thức bậc hai ở vế trái chỉ có thể có ba nghiệm khác nhau ($z_1 \neq z_2 \neq z_3$) khi mọi hệ số của nó đều bằng 0, tức là $a = d$, $b = c = 0$ và $\zeta_2[w_1(z)] \equiv z$ hay là $w_1(z) \equiv w_2(z)$.

2. Đẳng cấu phân tuyến tính thỏa mãn điều kiện của định lý được xác định theo công thức (2.53). Thật vậy, giải phương trình (2.53) đối với $w$ ta thu được hàm phân tuyến tính. Ngoài ra khi thế cặp $z = z_1$ và $w = w_1$ vào (2.53) thì cả hai vế của (2.53) đều bằng 0. Thế cặp $z = z_3$ và $w = w_3$ vào (2.53) ta thu được cả hai vế đều bằng 1 và cuối cùng, thế cặp $z = z_2$ và $w = w_2$ ta thu được cả hai vế đều bằng $\infty$. □

Trong hình học, biểu thức

$$\lambda = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

được gọi là *tỷ số phi điều hòa* của bốn điểm $z, z_1, z_2$ và $z_3$.

Nếu bốn điểm $z_1, z_2, z, z_3$ nằm trên một đường tròn (hoặc đường thẳng) thì tỷ số phi điều hòa là một số thực. Thật vậy

a) Nếu các điểm $z_1, z_2, z, z_3$ nằm trên đường thẳng $\zeta = \zeta_0 + te^{i\alpha}$, $-\infty < t < \infty$ ta có: $z_1 = \zeta_0 + t_1 e^{i\alpha}$, $z_2 = \zeta_0 + t_2 e^{i\alpha}$, $z = \zeta_0 + t_0 e^{i\alpha}$, $z_3 = \zeta_0 + t_3 e^{i\alpha}$ và từ đó

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\\ &= \frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_2} : \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

b) Nếu các điểm $z, z_1, z_2, z_3$ nằm trên đường tròn $\zeta = \zeta_0 + re^{it}$, $r > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, ta có $z_1 = \zeta_0 + re^{i\varphi_1}$, $z_2 = \zeta_0 + re^{i\varphi_2}$, $z_3 = \zeta_0 + re^{i\varphi_3}$ và từ đó ta có

$$\begin{aligned}(z_1, z_2, z, z_3) &= \frac{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_0} - e^{i\varphi_2}} : \frac{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_3} - e^{i\varphi_2}}\\ &= \frac{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_1}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}\right]}{e^{i\frac{\varphi_0+\varphi_2}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}\right]} : \frac{e^{i\frac{\varphi_2+\varphi_1}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_1}{2}}\right]}{e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_3}{2}}\left[e^{i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_3-\varphi_2}{2}}\right]}\\ &= \frac{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_2}{2}} : \frac{\sin\dfrac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Từ định lý 2.4.6 ta rút ra một tính chất quan trọng nữa của đẳng cấu phân tuyến tính.

**Hệ quả 2.4.1.** *Tỷ số phi điều hòa là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

**Định nghĩa 2.4.2.** 1. Hai điểm $z$ và $z^*$ được gọi là *đối xứng với nhau qua đường tròn* $\Gamma = \big\{|z - z_0| = R\big\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ nếu chúng có các tính chất sau:

a) $z$ và $z^*$ cùng nằm trên một tia đi từ $z_0$;

b) $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.

2. Mọi điểm trên đường tròn $\Gamma$ được xem là đối xứng với chính nó qua $\Gamma$.

Từ định nghĩa 2.4.2 suy ra rằng các điểm đối xứng qua đường tròn $\Gamma$ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w = z_0 + \frac{R^2}{\overline{z - z_0}} \cdot$$

Thật vậy, từ biểu thức vừa viết suy ra

$$|w - z_0|\ |z - z_0| = R^2$$

và

$$\arg(w - z_0) = \arg(z - z_0).$$

Trong hình học sơ cấp ta biết rằng hai điểm $z$ và $z^*$ đối xứng với nhau qua đường tròn $\Gamma$ khi và chỉ khi mọi đường tròn $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ đi qua $z$ và $z^*$ đều trực giao với $\Gamma$.

Ta có định lý sau.

**Định lý 2.4.7.** *Tính đối xứng tương hỗ giữa các điểm là một bất biến của nhóm các đẳng cấu phân tuyến tính.*

*Chứng minh.* Kết luận của định lý được suy từ định lý 2.4.2 và 2.4.4. □

Từ sự bất biến của tính đối xứng giữa các điểm suy ra rằng trong trường hợp khi đường tròn biến thành đường thẳng, tính đối xứng trùng với khái niệm đối xứng thông thường.

Ta minh họa việc áp dụng tính bất biến của các điểm đối xứng qua đẳng cấu phân tuyến tính bằng các định lý sau đây.

**Định lý 2.4.8.** *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến nửa mặt phẳng trên lên hình tròn đơn vị đều có dạng*

$$w = e^{i\lambda}\frac{z - \alpha}{z - \overline{\alpha}}, \quad \operatorname{Im}\alpha > 0, \tag{2.54}$$

*trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$ là số thực tùy ý.*

*Chứng minh.* Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ ánh xạ nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ $(\operatorname{Im} \alpha > 0)$.

Ta nhận xét rằng điểm $w = 0$ và $w = \infty$ sẽ tương ứng với các giá trị liên hợp của $z$, do đó $c \neq 0$ (vì nếu $c = 0$ thì điểm $\infty$ sẽ tương ứng với điểm $\infty$).

Các điểm $w = 0$, $w = \infty$ sẽ tương ứng với các điểm $-\dfrac{b}{a}$ và $-\dfrac{d}{c}$. Do đó có thể viết $-\dfrac{b}{a} = \alpha$, $-\dfrac{d}{c} = \overline{\alpha}$ và $w = \dfrac{a}{c}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\cdot$

Vì các điểm của trục thực có ảnh nằm trên đường tròn đơn vị, tức là $|w| = 1$ khi $z = x \in \mathbb{R}$, cho nên

$$\left|\frac{a}{c}\ \frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| = 1$$

và $a = ce^{i\lambda}$. Như vậy $w = e^{i\lambda}\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\cdot$

Ta chứng minh rằng đó là đẳng cấu phải tìm. Thật vậy, nếu $z = x \in \mathbb{R}$ thì hiển nhiên $|w| = 1$. Nếu $\operatorname{Im} z > 0$ thì $z$ gần $\alpha$ hơn so với $\overline{\alpha}$ (tức là $|z-\alpha| < |z-\overline{\alpha}|$) và do đó $|w| < 1$. □

*Nhận xét* 2.4.2. Trong ánh xạ (2.54) góc quay của các đường cong tại điểm $\alpha$ là bằng $\lambda - \dfrac{\pi}{2}$ vì từ (2.54) ta có

$$arg\, w'(\alpha) = \lambda - \frac{\pi}{2}\cdot$$

**Định lý 2.4.9.** *Đẳng cấu phân tuyến tính bất kỳ biến hình tròn* $\{|z| < 1\}$ *lên hình tròn* $\{|w| < 1\}$ *đều có dạng*

$$w = e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}, \tag{2.55}$$

*trong đó* $|\alpha| < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *là số thực tùy ý.*

*Chứng minh.* Giả sử đẳng cấu phân tuyến tính $w = w(z)$ biến hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho $w(\alpha) = 0$ $(|\alpha| < 1)$. Theo tính chất bảo toàn điểm đối xứng, các điểm $w = 0$, $w = \infty$ tương ứng với các điểm liên hợp $z = \alpha$ và $z = \dfrac{1}{\overline{\alpha}}$, $|\alpha| < 1$. Do đó:

$$-\frac{b}{a} = \alpha, \quad -\frac{d}{c} = \frac{1}{\overline{\alpha}}, \quad |\alpha| < 1,$$

và

$$w = \frac{a}{c}\,\frac{z-\alpha}{z-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}} = \frac{a\overline{\alpha}}{c}\cdot\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}$$
$$= -\frac{a\overline{\alpha}}{c}\,\frac{z-\alpha}{1-\alpha\overline{z}}\,\cdot$$

Vì các điểm của đường tròn đơn vị phải biến thành các điểm của đường tròn đơn vị nên $|w| = 1$ khi $|z| = 1$. Vì $z\cdot\overline{z} = |z|^2$ nên $z\overline{z} = 1$ khi $|z| = 1$. Vì số $1-\overline{\alpha}z$ và $1-\alpha\overline{z}$ liên hợp với nhau và $|1-\overline{\alpha}z| = |1-\overline{\alpha z}|$ nên nếu $|z| = 1$ thì

$$|1-\overline{\alpha}z| = |1-\alpha\overline{z}|\cdot|z| = |z-\alpha\overline{z}z| = |z-\alpha|.$$

Do đó khi $|z| = 1$ thì ta có:

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = 1.$$

Nhưng khi đó $|w| = 1$ cho nên $\left|\dfrac{a\overline{\alpha}}{c}\right| = 1$ và $\dfrac{a\overline{\alpha}}{c} = e^{i\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Như vậy ta thu được (2.55).

Ta cần chứng minh rằng đó là đẳng cấu muốn tìm. Thật vậy nếu $z = e^{i\theta}$ và $\alpha = r_1e^{i\beta}$ thì

$$|w| = \left|\frac{e^{i\theta}-r_1e^{i\beta}}{1-r_1e^{-i\beta}\cdot e^{i\theta}}\right| = \left|\frac{1-r_1e^{i\beta}e^{-i\theta}}{1-r_1e^{-i\beta}e^{i\theta}}\right| = 1.$$

Nếu $z = re^{i\theta}$ $(r<1)$ thì

$$|z-a|^2 - |1-\overline{\alpha}z|^2 = r^2 - 2rr_1\cos(\theta-\beta) + r_1^2 - (r_1^2r^2 - 2r_1r\cos(\theta-\beta)+1)$$
$$= (r^2-1)(1-r_1^2) < 0$$

và do đó $|z-\alpha|^2 - |1-\overline{\alpha}z|^2 < 0$ và $|w| < 1$. □

*Nhận xét* 2.4.3. Vì

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=\alpha} = e^{i\lambda}\frac{1}{1-|\alpha|^2}\,, \quad |\alpha| < 1,$$

cho nên về mặt hình học $\lambda$ bằng góc quay của ánh xạ (2.55) tại điểm $\alpha$:

$$\lambda = \Big[\arg \frac{dw}{dz}\Big]_{z=\alpha}.$$

Từ công thức (2.55) ta còn rút ra hệ thức

$$\Big(\Big|\frac{dw}{dz}\Big|\Big)_{z=\alpha} = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$$

và do đó độ giãn dần đến $\infty$ khi điểm $\alpha$ dần đến biên của hình tròn đơn vị.

*Nhận xét* 2.4.4. Phép đẳng cấu biến hình tròn $\{|z| < R\}$ lên hình tròn $\{|w| < R'\}$ có dạng

$$w = RR'e^{i\lambda}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - R^2}, \quad |\alpha| < R, \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Ví dụ 1.** Giả sử $U_1 = \{|z| < 1\}$, $U_2 = \{|z-1| < 1\}$ và $D = U_1 \cap U_2$. Tìm đẳng cấu biến miền $D$ lên nửa mặt phẳng trên.

*Giải.* Giao điểm của các cung tròn giới hạn miền $D$ là các điểm sau:

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad a^* = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Giả sử cung tròn đi qua điểm $z = 1$ được ký hiệu là $\delta_1$ và cung tròn đi qua điểm $z = 0$ là $\delta_2$. Ta áp dụng các ánh xạ trung gian sau

1. Ánh xạ

$$z_1 = \frac{z - \Big(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)}{z - \Big(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Big)},$$

biến miền đã cho $D$ thành một góc trong mặt phẳng $z_1$ với đỉnh là $z_1 = 0$. Vì góc giữa hai cung tròn $\delta_1$ và $\delta_2$ tại các điểm $a$ cũng như $a^*$ đều bằng $\dfrac{2\pi}{3}$

nên độ mở của góc vừa thu được bằng $\frac{2\pi}{3}$. Dễ dàng thấy rằng

$$z_1(1) = \frac{1 - \Big(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)}{1 - \Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1(0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

và do đó góc - ảnh thu được có cạnh đi qua điểm $z_1(1)$ và $z_1(0)$. Ta ký hiệu góc đó kà $D(z_1)$.

2. Ánh xạ quay $z_2 = e^{\frac{-2\pi i}{3}} z_1$ biến góc $D(z_1)$ thành góc có một cạnh trùng với phần dương của trục thực, còn cạnh kia đi qua điểm $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

3. Ánh xạ cần tìm có dạng $w = z_2^{3/2}$

$$\Big(\text{góc có độ mở } \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{3}{2} = \pi\,!\Big)$$

Hợp nhất 1) - 3) ta thu được

$$w = -\Big(\frac{2z - 1 + i\sqrt{3}}{2z - 1 - i\sqrt{3}}\Big)^{3/2}$$

và hiển nhiên đó chỉ là một trong các hàm thực hiện ánh xạ phải tìm.

**Ví dụ 2.** Ánh xạ miền $D$ là góc $\{0 < \arg z < \pi\beta, 0 < \beta < 2\}$ với nhát cắt theo một cung của đường tròn đơn vị từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\alpha\pi}$, $0 < \alpha < \beta$ (hãy vẽ hình) lên nửa mặt phẳng trên.

*Giải.* Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây

1. Ánh xạ $z_1 = z^{1/\beta}$ biến góc đã cho thành góc $D(z_1)$ có độ mở bằng $\pi$ với nhát cắt thuộc đường tròn đơn vị đi từ điểm $z = 1$ đến điểm $z = e^{i\frac{\alpha}{\beta}\pi}$.

2. Ánh xạ phân tuyến tính

$$z_2 = \frac{z_1 - 1}{z_1 + 1}$$

biến miền $D(z_1)$ thành nửa mặt phẳng trên với nhát cắt theo trục ảo từ gốc tọa độ đến điểm $i\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2\beta}\pi$. Ta ký hiệu miền ảnh đó là $D(z_2)$.

3. Ánh xạ $z_3 = z_2^2$ biến miền $D(z_2)$ thành mặt phẳng với nhát cắt theo $\Big(-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2\beta}\pi, \infty\Big) \subset \mathbb{R}$. Ta ký hiệu miền thu được là $D(z_3)$.

Hiển nhiên hàm cần tìm có dạng

$$w = \sqrt{z_3 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2\beta}\pi} = \sqrt{\Big(\frac{z^{1/\beta}-1}{z^{1/\beta}+1}\Big)^2 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2\beta}\pi}\,.$$

Để kết thúc tiết này, ta chứng minh rằng *ánh xạ phân tuyến tính* (2.51) $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ *biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó khi và chỉ khi mọi hệ số* $a, b, c, d$ *đều là những số thực thỏa mãn điều kiện* $ad - bc > 0$. Giả sử ánh xạ (2.51) biến nửa mặt phẳng trên lên chính nó. Ta xét ba điểm khác nhau $z_1, z_2$ và $z_3$ của trục thực trong mặt phẳng $z$. Ảnh của ba điểm này là những điểm biên của nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} w > 0$, tức là các số $w_k = w(z_k)$, $k = 1, 2, 3$ là những số thực. Từ đó, ta thu được hệ phương trình với các hệ số thực để xác định $a, b, c, d$. Do đó với sự chính xác đến một thừa số nào đó từ hệ phương trình tuyến tính vừa thu được dễ dàng suy ra rằng các hệ số của (2.51) đều là thực. Vì $w = u + iv$, $z = x + iy$ nên khi $y > 0$ ta có $v > 0$. Thay $w = u + iv$, $z = x + iy$ vào (2.51) ta có

$$v = \frac{y(ad - bc)}{(cx+d)^2 + (cy^2)}\,.$$

Từ đó suy ra $ad - bc > 0$.

Ngược lại, nếu các hệ số $a, b, c$ và $d$ đều thực thì trục thực của mặt phẳng $(z)$ được ánh xạ lên trục thực của mặt phẳng $(w)$ và vì $ad - bc > 0$ nên nửa mặt phẳng trên được ánh xạ lên nửa mặt phẳng trên.

### 2.4.2 Ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$

Nếu cho trước miền $D$ và hàm $f \in \mathcal{H}(D)$ thì ta không thể tìm ngay một thuật toán cho phép tìm ảnh $D^*$ của miền $D$ qua ánh xạ $f$.

Đối với các đường cong sự việc có giản đơn hơn. Thật vậy nếu $z = z(t)$ là phương trình của đường cong trong mặt phẳng $z$ thì phương trình của đường cong - ảnh là $f[z(t)]$. Do đó để khảo sát ảnh của một miền cho trước tốt hơn cả là tiến hành như sau: ta chọn một họ đường cong "phủ" miền đã cho và tìm ảnh của họ đường cong đó. Tất nhiên, việc chọn họ đường cong được xác định bởi dạng cụ thể của hàm đã cho và miền đã cho.

Bây giờ ta áp dụng phương pháp đó để khảo sát một số hàm sơ cấp.

Đối với ánh xạ $w = e^z$ và $z = \log w$ ta đã có dịp đề cập đến trong chương II. Ta lưu ý rằng ánh xạ $w = e^z$ đơn diệp trong miền $D$ nào đó khi và chỉ khi miền này không chứa những cặp điểm khác nhau $z_1$ và $z_2$ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Định lý 2.4.10.** *Với số nguyên $n$ bất kỳ ($n \in \mathbb{Z}$) hàm $w = e^z$ ánh xạ bảo giác băng vô hạn*

$$D_n = \{a + 2n\pi < Im\, z < b + 2n\pi, b - a < 2\pi\}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2.56}$$

*lên góc*

$$\Delta = \{a < arg\, w < b\}. \tag{2.57}$$

*Hàm $z = log\, w$ ánh xạ bảo giác góc $\Delta = \{a < arg\, w < b\}$ lên một trong các băng vô hạn $D_n$ (số $n$ được xác định bởi cách chọn nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit trong góc $\Delta$).*

*Chứng minh.* 1. Để chứng minh phần thứ nhất ta xét họ các đường thẳng song song với trục thực:

$$\{\lambda\} = \{\lambda : z = x + i\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ảnh của các đường thẳng này qua ánh xạ $e^z$ có phương trình là:

$$\begin{aligned} w &= e^{x+i\alpha} = e^x \cdot e^{i\alpha} = (\text{đặt } e^x = t) \\ &= te^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ 0 < t < \infty. \end{aligned}$$

Hiển nhiên rằng $w = te^{i\alpha}$ là phương trình của tia $\{\arg w = \alpha\}$.

Bây giờ ta cho $\alpha$ biến thiên liên tục từ $a+2n\pi$ đến $b+2n\pi$. Khi đó, đường thẳng $\lambda$ sẽ quét hết băng $D_0$ và tia ảnh của đường thẳng $\lambda$ cũng sẽ quay liên tục ngược chiều kim đồng hồ từ vị trí $\arg w = a$ đến vị trí $\arg w = b$. Từ đó suy ra ảnh của băng (2.56) với $b - a < 2\pi$ là góc (2.57).

2. Ta chứng minh phần thứ hai của định lý.

Ta đặt $w = re^{i\varphi}$. Khi đó một trong các giá trị của $z$ sẽ là: $\log r + i(\varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Do đó từ $z = x + iy$ suy ra

$$
\begin{aligned}
x &= \log r,\\
y &= \varphi + 2n\pi.
\end{aligned}
$$

Khi $r$ biến thiên từ 0 đến $\infty$ thì $x$ biến thiên từ $-\infty$ đến $+\infty$. Do đó nếu $b - a \leqslant 2\pi$ thì như ta đã biết hàm $\log w$ có thể tách nhánh chỉnh hình trong góc $a < \arg w < b$ và mỗi nhánh này sẽ ánh xạ bảo giác góc (2.57) lên băng $D_n$ tương ứng nào đó. □

*Nhận xét* 2.4.5. Khi ánh xạ băng $a < \operatorname{Im} z < b$ lên góc của mặt phẳng $w$ thì một phần của mặt phẳng $w$ sẽ được phủ nhiều lần nếu $b - a > 2\pi$ và lúc này ánh xạ không đơn diệp.

Bây giờ ta xét ảnh của các đường thẳng song song với trục ảo. Phương trình của những đường thẳng này có thể biểu diễn dưới dạng

$$\lambda : z = c + iy, \quad -\infty < y < \infty.$$

Từ đó rút ra ảnh của $\lambda$ qua ánh xạ $e^z$ có phương trình

$$e^z\big|_{z\in\lambda} = e^{c+iy} = e^c \cdot e^{iy}; \quad -\infty < y < \infty.$$

Hiển nhiên đó là phương trình của đường tròn

$$\{|w| = e^c\}$$

được vòng quanh nhiều lần. Mỗi đoạn thẳng có độ dài $2\pi$ sẽ tương ứng với một lần vòng quanh đầy đủ. Từ đó ta rút ra

**Định lý 2.4.11.** *Với số nguyên $n \in \mathbb{Z}$ bất kỳ, hàm $w = e^z$ ánh xạ bảo giác hình chữ nhật*

$$R = \{c < Re\, z < d, a + 2n\pi < Im\, z < b + 2n\pi, b - a < 2\pi\} \tag{2.58}$$

*lên hình quạt vòng*

$$Q = \{e^c < |w| < e^d, a < arg w < b\}. \tag{2.59}$$

*Hàm $z = \log w$ ánh xạ bảo giác hình quạt vòng* (2.59) *lên một trong các hình chữ nhật* (2.58) *(số n được xác định bởi việc chọn nhánh chỉnh hình của hàm lôgarit trong hình quạt).*

**Ví dụ 3.** Ánh xạ băng vô hạn nằm ngang $\{0 < y < 2\pi\}$ với nhát cắt $\{-\infty \leqslant x \leqslant a, y = H\}$ lên băng $\{0 < v < 2H\}$ (hình II.1)

*Hình II.1*

*Giải*

1. Hàm $z_1 = e^{\pi z/2H}$ ánh xạ miền đã cho lên nửa mặt phẳng trên với nhát cắt theo đoạn trục ảo $[0, bi]$, $b = e^{a\pi/2H}$. Ta ký hiệu miền thu được là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = \sqrt{z_1^2 + b^2} = \sqrt{e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}}$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên nửa mặt phẳng trên.

Hàm ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \frac{2H}{\pi} \ln z_2 = \frac{H}{\pi} \ln[e^{\pi z/H} + e^{\pi a/H}].$$

**Ví dụ 4.** Ánh xạ miền giới hạn bởi đường tròn đơn vị và đường thẳng $\lambda$ tiếp xúc với đường tròn tại điểm $z = i$ lên nửa mặt phẳng trên.

*Giải*

1. Hàm $z_1 = \dfrac{z+i}{z-i}$ biến điểm chung của đường tròn và đường thẳng $\lambda$ thành điểm $z_1 = \infty$. Từ tính chất bảo toàn đường tròn và tính bảo giác của ánh xạ phân tuyến tính suy ra ảnh của miền $D(z)$ là băng vô hạn:

$$D(z_1) = \{0 < \operatorname{Re} z_1 < 1\}.$$

2. Hàm $z_2 = \pi z_1$ ánh xạ băng $D(z_1)$ thành băng $D(z_2) = \{0 < \operatorname{Re} z_2 < \pi\}$.

3. Hàm $z_3 = e^{\pi i/2} z_2$ quay băng vừa thu được thành băng nằm ngang

$$D(z_3) = \{0 < \operatorname{Im} z_3 < \pi\}.$$

Từ đó dễ dàng suy rằng hàm

$$w = e^{z_3} = e^{\pi i \frac{z+i}{z-i}}$$

là ánh xạ phải tìm.

### 2.4.3 Hàm Jukovski

Hàm

$$w = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \tag{2.60}$$

được gọi là hàm Julovski. Hàm này chỉnh hình tại mọi điểm $z \neq 0, \infty$; trong đó

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big)$$

và có cực điểm đơn tại các điểm $z = 0; \infty$. Do đó hàm Jukovski đơn diệp tại mỗi điểm $z \neq \pm 1$ vì $w(z) \neq 0$ khi $z \neq \pm 1$ và không đơn diệp tại điểm $z = \pm 1$.

Ta lưu ý rằng hàm Jukovski đơn diệp trong miền $D$ nào đó khi và chỉ khi miền $D$ không chứa những cặp điểm khác nhau $z_1, z_2$ liên hệ với nhau bởi đẳng thức $z_1 z_2 = 1$.

Ta nhận xét rằng vì $w(z) \equiv w\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$ nên ảnh của miền $D$ và miền $\overline{D} = \Big\{t = \dfrac{1}{z} : z \in D\Big\}$ là trùng nhau. Để khảo sát ánh xạ (2.60) ta xét các họ đường cong là: họ các đường tròn $\{|z| = r\}$ và họ các tia $\{\arg z = \varphi\}$.

Đầu tiên ta tìm ảnh của họ đường tròn.

Ta đặt $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$ và thu được

$$u + iv = \frac{1}{2}\Big(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\Big),$$

hay là

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\theta \\ v &= \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Ta xét đường tròn

$$\gamma(\rho) = \big\{z = \rho e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\big\}, \tag{2.62}$$

($\rho > 0$ là số cố định). Từ (2.61) suy ra rằng qua ánh xạ Jukovski, ảnh của đường tròn (2.62) là elip

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\cos\theta, \\ v &= \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{1}{\rho}\Big)\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

với các bán trục là

$$a(\rho) = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big), \quad b(\rho) = \frac{1}{2}\Big|\rho - \frac{1}{\rho}\Big|$$

và với các tiêu điểm là $w = \pm 1$ (vì $a^2(\rho) - b^2(\rho) = 1$). Bằng cách khử tham số $\theta$ từ phương trình (2.63) ta thu được dạng chính tắc của phương trình elip

$$\frac{u^2}{a^2(\rho)} + \frac{v^2}{b^2(\rho)} = 1, \quad \rho \neq 1. \tag{2.64}$$

*1. Trường hợp* $0 < \rho < 1$. Vì khi $\rho < 1$ đại lượng $r - \dfrac{1}{r} < 0$ cho nên từ (2.63) suy ra rằng khi vòng quanh đường tròn $\gamma(\rho)$ theo hướng dương thì elip tương ứng trong mặt phẳng $w$ sẽ chạy theo hướng âm. Thật vậy khi $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ta có $u > 0$ và giảm từ $a(\rho)$ đến 0, còn $v < 0$ và giảm từ 0 đến $-b(\rho)$. Khi $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ thì $u$ tiếp tục giảm từ 0 đến $-a(\rho)$ còn $v$ tăng từ $-b$ đến 0. Khi $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$, $u$ tăng từ $-a$ đến 0, còn $v$ tăng từ 0 đến $b$; cuối cùng khi $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ ta có $u$ tăng từ 0 đến $a$, còn $v$ giảm từ $b$ đến 0.

*2. Trường hợp* $r > 1$. Trong trường hợp này hướng của đường tròn (2.62) và elip - ảnh của nó trong mặt phẳng $w$ là trùng nhau và chạy theo hướng dương.

*3. Trường hợp* $r = 1$. Trong trường hợp này đường tròn $\{|z| = 1\}$ cũng biến thành elip với các bán trục $a(\rho) = 1$, $b(\rho) = 0$ nghĩa là biến thành nhát cắt $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Bây giờ ta xét các tia

$$z = re^{i\alpha}, \quad 0 < r < \infty \tag{2.65}$$

($\alpha$ là số cố định). Qua ánh xạ Jukovski ảnh của tia (2.65) là đường cong

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\alpha, \\ v &= \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\alpha. \end{aligned}\right\} 0 < r < +\infty \tag{2.66}$$

Bằng cách khử tham số $r$ từ (2.66) ta thu được

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.67}$$

Đường cong (2.67) là đường hypecbôn với tiêu điểm tại $w = \pm 1$, dễ dàng chứng minh rằng các cặp đường kính đối xứng với nhau qua các trục tọa độ (lập nên từ các bán kính

$$z = \pm r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha), \quad 0 \leqslant r < 1)$$

được ánh xạ thành các hypecbôn không kể đỉnh, với tiêu điểm $\pm 1$ và các bán trục $|\cos\alpha|$, $|\sin\alpha|$.

Khi $\alpha = 0$ ta có

$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big), \quad v = 0 \quad (0 \leqslant r < 1).$$

Do đó ảnh của đường kính nằm ngang của hình tròn đơn vị là khoảng vô hạn của trục đi từ điểm $-1$ đến điểm $+1$ qua $\infty$.

Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ta có

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} - r\Big), \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Từ đó dễ dàng suy ra ảnh của đường kính thẳng đứng là toàn bộ trục ảo trừ gốc tọa độ.

Hiển nhiên rằng qua ánh xạ Jukovski hai họ đường cong (2.64) và (2.67) trực giao với nhau do tính bảo giác của ánh xạ (2.60).

Ta có định lý sau đây:

**Định lý 2.4.12.** *Hàm Jukovski* $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$*:*

1. *Ánh xạ đường tròn* $\{|z| = \rho\}$ *thành elip* (2.64) $0 < \rho < 1$.

2. *Ánh xạ bảo giác hình tròn đơn vị* $\{|z| < 1\}$ *lên toàn bộ mặt phẳng đóng trừ nhát cắt theo đoạn* $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

*Chứng minh.* 1. Điều khẳng định thứ nhất là hiển nhiên.

2. Vì $a(\rho) = \dfrac{1}{2}\Big(\rho + \dfrac{1}{\rho}\Big)$, $b(\rho) = -\dfrac{1}{2}\Big(\rho - \dfrac{1}{\rho}\Big)$, nên như ta đã nói ở trên elip (2.64) chạy theo hướng âm khi vòng quanh đường tròn theo hướng dương.

a) Khi $\rho \to 0$ ta có

$$\lim_{\rho\to 0} a(\rho) = \infty, \quad \lim_{\rho\to 0} b(\rho) = \infty,$$
$$\lim_{\rho\to 0}(a(\rho) - b(\rho)) = \lim_{\rho\to 0} \rho = 0.$$

Từ đó suy ra rằng khi $\rho \to 0$ thì các elip to dần ra và tròn dần lại.

b) Khi $\rho \to 1 - 0$ ta có

$$\lim_{\rho \to 1-0} a(\rho) = 1, \quad \lim_{\rho \to 1-0} b(\rho) = 0.$$

Từ đó suy ra rằng các elip ảnh co - dẹt dần thành đoạn $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Ta xét sự tương ứng giữa đường tròn đơn vị và các bờ của nhát cắt $[-1, +1]$.

Khi $r \to 1 - 0$ và $0 < \theta < \pi$ thì $v \to -0$. Khi $r \to 1 - 0$ và $\pi < \theta < 2\pi$, ta có $v \to +0$. Từ đó suy ra rằng nửa đường tròn trên biến thành bờ dưới của nhát cắt, còn nửa đường tròn dưới biến thành bờ trên. □

**Định lý 2.4.13.** *Hàm Jukovski* (2.60) *ánh xạ bảo giác phần ngoài của hình tròn đơn vị lên toàn bộ mặt phẳng $w$ với nhát cắt theo đoạn* $[-1, +1]$ *của trục thực.*

*Chứng minh.* Hiển nhiên điều kết luận của định lý có thể suy ngay từ chỗ là $w(z) \equiv w\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Phép chứng minh trực tiếp được tiến hành như sau. Ta xét họ đường tròn $\{|z| = \rho, \rho > 1\}$. Ảnh của họ này qua ánh xạ (2.60) là những elip chạy theo hướng dương và với các bán trục là

$$a(\rho) = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \quad b(\rho) = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{!}{\rho}\right).$$

a) Khi $\rho \to 1 + 0$ ta có

$$\lim a(\rho) = 1, \quad \lim b(\rho) = 0.$$

Do đó các elip (2.60) co - dẹt dần thành đoạn $[-1, +1]$. Ta xét sự tương ứng giữa đường tròn và nhát cắt $[-1, +1]$. Khi $\rho \to 1 + 0$, và $0 < \theta < \pi$ ta có $v \to +0$ và khi $\rho \to 1 + 0$ và $\pi < \theta < 2\pi$ ta có $v \to -0$.

Từ đó rút ra kết luận: nửa đường tròn trên biến thành bờ trên của nhát cắt và nửa đường tròn dưới biến thành bờ dưới của nhát cắt $[-1, +1]$.

b) Khi $\rho \to \infty$ ta có

$$\lim a(\rho) = \infty, \quad \lim b(\rho) = \infty$$
$$\lim[a(\rho) - b(\rho)] = \lim \frac{1}{\rho} = 0.$$

Do đó các elip - ảnh to dần ra và tròn dần lại. □

*Nhận xét* 2.4.6. Tại các điểm $z = \pm 1$, ánh xạ Jukovski không bảo giác. Thật vậy từ (2.60) ta có

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1} = \frac{z^2 + 1 - 2z}{z^2 + 1 + 2z}$$
$$= \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2. \tag{2.68}$$

Bây giờ ta đặt

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}\,; \quad \omega = \zeta^2; \quad w = \frac{1+\omega}{1-\omega}\cdot \tag{2.69}$$

Từ đó ta suy ra rằng ánh xạ Jukovski là hợp của ba ánh xạ (2.69). Ánh xạ thứ nhất và thứ ba bảo giác khắp nơi trên $\overline{\mathbb{C}}$, ánh xạ thứ hai không bảo giác tại điểm $\zeta = 0$ (tương ứng với điểm $z = 1$) và tại điểm $\zeta = \infty$ (tương ứng với điểm $z = -1$).

Bây giờ ta xét ánh xạ ngược với ánh xạ Jukovski. Giải phương trình (2.60) đối với $z$, ta tìm được

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

như vậy hàm

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{2.70}$$

là hàm ngược đối với hàm Jukovski. Hàm này là hàm đa trị: mỗi điểm $z$ sẽ tương ứng với hai giá trị $w_1$ và $w_2$ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w_1 w_2 = 1.$$

Trong miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ hàm (2.70) có thể tách thành hai nhánh chỉnh hình: một nhánh sẽ ánh xạ bảo giác phần ngoài đoạn $[-1, +1]$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị, còn nhánh kia ánh xạ phần ngoài đoạn $[-1, +1]$ lên phần trong của hình tròn đơn vị.

Ta nhận xét rằng hai nhánh chỉnh hình vừa nói trên đây không thể được đặc trưng bởi dấu của căn thức. Thật vậy, ta xét nhánh thứ nhất: nhánh ánh xạ miền $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, +1]$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị. Tại điểm $z = 2$ nó nhận giá trị $(2+\sqrt{3})$, và tại điểm $z = -2$ nó nhận giá trị $-(2+\sqrt{3})$.

**Ví dụ 5.** Ánh xạ nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa trên của hình tròn đơn vị và tia $\{x = 0, y > 2\}$ lên nửa mặt phẳng trên (hình II.2).

*Hình II.2*

*Giải.* Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây

1. Hàm

$$z_1 = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big)$$

ánh xạ miền $D(z)$ lên nửa mặt phẳng trên trừ nhát cắt theo trục ảo đi từ $\frac{3}{4}i$. Ta ký hiệu miền này là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = z_1^2$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên toàn bộ mặt phẳng $z_2$ trừ nhát cắt $\Big(-\infty, -\frac{9}{16}\Big)$ và $[0, \infty)$. Ta chỉ miền thu được là $D(z_2)$.

3. Ánh xạ phân tuyến tính $z_3 = \dfrac{z_2 + 9/16}{z_2}$ biến miền $D(z_2)$ thành miền

$D(z_3) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{R}^+$. Từ các ánh xạ 1) - 3) suy ra rằng:

$$w = \sqrt{z_3} = \frac{\sqrt{4z^4 + 17z^2 + 4}}{2(z^2 + 1)} \cdot$$

**Ví dụ 6.** Ánh xạ phần ngoài elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ lên phần ngoài hình tròn đơn vị.

*Giải.* Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Vì elip đã cho có tiêu điểm tại các điểm

$$c = \pm\sqrt{25 - 16} = \pm 3,$$

nên đầu tiên ta dùng ánh xạ $z_1 = \frac{z}{3}$ và thu được elip với tiêu điểm $\pm 1$.

2. Hàm $z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1}$ ánh xạ hình elip vừa thu được lên hình tròn $\{|z_2| < 3\}$.

3. Ánh xạ đồng dạng $w = \frac{z_2}{3}$ cho ta ảnh của miền vừa thu được là hình tròn đơn vị. Như vậy ánh xạ cần tìm là

$$w = \frac{z + \sqrt{z^2 - 9}}{3} \cdot$$

**Ví dụ 7.** Ánh xạ hình quạt $Q = \left\{|z| < 1, 0 < \arg z < \frac{\pi}{n}\right\}$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ lên chính nó sao cho các đoạn

$$\big\{|z| \leqslant \alpha, \arg z = 0\big\},\ 0 < \alpha < 1\big\}$$

và

$$\Big\{|z| \leqslant \alpha, \arg z = \frac{\pi}{n}, 0 < \alpha < 1\Big\}$$

biến thành đoạn bán kính tương ứng.

Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau:

1. Hàm $z_1 = z^n$ ánh xạ hình quạt $Q$ lên nửa trên của hình tròn đơn vị. Đoạn bán kính $[0, \alpha]$ biến thành đoạn $[0, \alpha^n]$, đoạn $[0, \alpha e^{i\pi/n}]$ thành đoạn $[0, -\alpha^n]$.

2. Hàm $z_2 = \dfrac{1}{2}\Big(z_2 + \dfrac{1}{z_2}\Big)$ biến miền vừa thu được thành nửa mặt phẳng dưới và đoạn $[-\alpha^n, \alpha^n]$ biến thành phần biên từ $-\dfrac{1}{2}(\alpha^n + \alpha^{-n})$ đến $\dfrac{1}{2}(\alpha^n + \alpha^{-n})$ đi qua $\infty$. Ta ký hiệu phần biên đó là $\lambda(\alpha)$.

3. Hàm ngược của hàm Jukovski $z_4 = z_3 + \sqrt{z_3^2 - 1}$ biến miền vừa thu được lên nửa trên của hình tròn đơn vị và đường kính nằm ngang là ảnh của phần biên từ $-1$ đến $+1$ (qua $\infty$).

Ánh xạ hợp trong kết quả bằng

$$w = (\alpha^n + \alpha^{-n})^{-1/n}\sqrt{z^n - z^{-n} + \sqrt{(z^n + z^{-n})^2 - (\alpha^n + \alpha^{-n})^2}}\,.$$

### 2.4.4 Các đẳng cấu sơ cấp khác

Các đẳng cấu sơ cấp được nghiên cứu trong **2.4.1, 2.4.2** và **2.4.3** mang lại cho ta một dự trữ cục kỳ quan trọng các ánh xạ cơ bản. Nhờ các đẳng cấu này ta có thể xây dựng các ánh xạ thực hiện bởi các hàm sơ cấp khác. Thật vậy, khi biết các ánh xạ $w = f(\zeta)$ và $\zeta = \varphi(z)$ ta sẽ biết cả ánh xạ $f[\varphi(z)]$ (phép hợp các ánh xạ).

Ánh xạ sơ cấp cơ bản bất kỳ đều có thể biểu diễn dưới dạng hợp một số nào đó các ánh xạ mà ta đã nghiên cứu trong **1. 2.** và **3.** Thật vậy, ta xét các ánh xạ sơ cấp thực hiện bởi các hàm lượng giác sau đây:

1. Hàm $w = \cos z$. Theo định nghĩa ta có

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\cdot \tag{2.71}$$

Ánh xạ này là hợp của ba ánh xạ

a) $\zeta = iz$; b) $\omega = e^{\zeta}$; c) $w = \dfrac{1}{2}\Big(\omega + \dfrac{1}{\omega}\Big)$, trong đó mọi ánh xạ trung gian đều đã được khảo sát ở trên.

Giả sử qua ánh xạ a) ảnh của miền $D$ là miền $D_1$, qua ánh xạ b) ảnh của miền $D_1$ là $D_2$ và qua ánh xạ c) ảnh của miền $D_2$ là miền $D^*$. Ánh xạ a) đơn diệp khắp nơi, ánh xạ b) đơn diệp trong miền $D_1$ khi và chỉ khi $D_1$ không chứa những cặp điểm $\zeta_1$ và $\zeta_2$ liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\zeta_1 - \zeta_2 = 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

hay là

$$z_1 - z_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ánh xạ c) đơn diệp trong miền $D_2$ khi và chỉ khi $D_2$ không chứa những cặp điểm liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$\omega_1\omega_2 = 1,$$

hay là $D$ không chứa những điểm mà

$$e^{iz_1} \cdot e^{iz_2} = e^{i(z_1+z_2)} = 1$$

tức là $D$ không chứa những điểm mà

$$z_1 + z_2 = 2k\pi.$$

Từ đó suy ra rằng ánh xạ (2.71) đơn diệp trong miền $D$ nào đó khi và chỉ khi miền $D$ không chứa những điểm mà $z_1 - z_2 = 2k\pi$, hoặc $z_1 + z_2 = 2k\pi$.

2. Hàm $w = \sin z$. Từ hệ thức

$$\sin z = \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

suy rằng ánh xạ $w = \sin z$ khác với ánh xạ $\cos z$ bởi phép dịch chuyển mặt phẳng $z$.

Ánh xạ $w = \sin z$ cũng có thể biểu diễn qua các ánh xạ đã nghiên cứu ở trên. Ta biết rằng, theo định nghĩa

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2.72}$$

và do đó ánh xạ này là hợp của bốn ánh xạ:

a) $z_1 = iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $z_3 = -iz_2$; d) $w = \dfrac{1}{2}\left(z_3 + \dfrac{1}{z_3}\right) = \sin z$,
trong đó mỗi ánh xạ vừa viết đều đã được nghiên cứu.

3. Ánh xạ $w = \operatorname{tg} z$. Theo định nghĩa ta có

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \tag{2.73}$$

và do đó từ (2.71) và (2.72) rút ra:

$$\operatorname{tg} z = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + w^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}\cdot$$

Do đó ánh xạ (2.73) là hợp của ba ánh xạ quen biết sau đây

a) $z_1 = 2iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $w = -i\dfrac{z_2 - 1}{z_2 + 1}\cdot$

4. Cũng tương tự, ánh xạ $w = \operatorname{cotg} z$ cũng là hợp của ba ánh xạ quen biết

a) $z_1 = 2iz$; b) $z_2 = e^{z_1}$; c) $w = i\dfrac{z_2 + 1}{z_2 - 1}$,

trong đó mọi ánh xạ trung gian đều đã được xét.

5. Hàm $w = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta có $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$. Ánh xạ này là hợp của các ánh xạ trung gian sau đây:

$$\text{a) } z_1 = \ln z; \quad \text{b) } z_2 = \alpha z_1; \quad \text{c) } w = e^{z_2}. \tag{2.74}$$

Ví dụ: Ta tìm ảnh của góc

$$D(z) = \Big\{a < \arg z < b, b - a \leqslant 2\pi\Big\}$$

qua ánh xạ $w = z^\alpha$ (tức là ánh xạ (2.74)).

Qua ánh xạ a) góc $D(z)$ biến thành một trong các băng sau

$$D(z_1) = \Big\{a + 2k\pi < \operatorname{Im} z_1 < b + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

(số $k$ được xác định bằng việc chọn nhánh của logarit trong góc $D(z)$).

Qua ánh xạ b) băng $D(z_1)$ biến thành băng

$$D(z_2) = \Big\{\alpha a + \alpha 2k\pi < \operatorname{Im} z_2 < \alpha b + \alpha 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

với điều kiện là $\alpha(b - a) \leqslant 2\pi$.

Do đó qua ánh xạ $w = z^\alpha$ góc đã cho có ảnh là một trong các góc sau

$$\Big\{\alpha a + \alpha 2k\pi < \arg w < \alpha b + \alpha 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\Big\}$$

nếu $b - a \leqslant 2\pi$ và $\alpha(b - a) \leqslant 2\pi$.

### 2.4.5 Một số ví dụ

Các ánh xạ bảo giác đã xét ở trên là những ánh xạ "mẫu". Nhờ các ánh xạ đó, ta có thể tìm ánh xạ bảo giác các miền đơn giản khác.

**Ví dụ 8.** Tìm ánh xạ bảo giác hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ thỏa mãn các điều kiện

$$w(z_0) = w_0; \quad \arg w'(z_0) = \alpha.$$

*Giải.* Hàm

$$\zeta = g(z) = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

ánh xạ hình tròn $\{|z| < 1\}$ lên hình tròn $\{|\zeta| < 1\}$ và thỏa mãn điều kiện $z_0$ biến thành 0 và $\arg g'(z_0) = \alpha$.

Hàm

$$\zeta = h(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w}$$

ánh xạ hình tròn $\{w < 1\}$ lên hình tròn $\{|\zeta < 1\}$ thỏa mãn điều kiện $w_0$ biến thành 0, $\arg h'(w_0) = 0$. Từ đó suy ra rằng hàm $w = w(z)$ xác định bởi hệ thức

$$\frac{w - w_0}{1 - \overline{w}_0 w} = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

sẽ là ánh xạ muốn tìm.

**Ví dụ 9.** Ánh xạ hình quạt $Q = \left\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$ lên hình tròn $\{|w| < 1\}$ sao cho các điểm $z = e^{i\pi/8}$ và $z = 0$ biến thành các điểm $w = 0$ và $w = 1$ tương ứng.

*Giải.* Hàm $z_1 = z^4$ ánh xạ hình quạt đã cho lên nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z_1 > 0$. Khi đó các điểm $z = e^{i\pi/8}$ biến thành $z_1 = e^{i\pi/2} = i$ và điểm $z = 0$ biến thành điểm $z_1 = 0$. Bây giờ ta ánh xạ nửa mặt phẳng trên vừa thu được lên hình tròn $\{|z_2| < 1\}$ sao cho điểm $z_1 = i$ biến thành tâm của hình tròn

$$z_2 = k\frac{z_1 - i}{z_1 + i}\cdot$$

Số $k$ được xác định từ điều kiện là điểm $z_1 = 0$ biến thành điểm $z_2 = 1$. Dễ dàng thấy rằng $k = -1$. Từ đó suy ra rằng hàm:

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i} = \frac{i - z^4}{i + z^4}$$

là ánh xạ cần tìm.

**Ví dụ 10.** Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền nhị liên giới hạn bởi hai đường tròn $\gamma = \{|z-3| = 9\}$ và $\Gamma = \{|z-8| = 16\}$ lên vành đồng tâm với tâm tại điểm $w = 0$ sao cho bán kính ngoài của vành bằng 1.

*Giải.* Điểm $w = 0$ và $w = \infty$ đồng thời đối xứng với nhau qua hai đường tròn biên của vành đồng tâm. Từ đó, theo định lý 2.4.7 các nghịch ảnh của $w = 0$ và $w = \infty$ cũng sẽ đồng thời đối xứng qua hai đường tròn $\Gamma$ và $\gamma$. Ta xác định các nghịch ảnh này. Vì tâm của $\Gamma$ và $\gamma$ nằm trên trục thực nên các điểm cần tìm cũng nằm trên trục thực. Ta ký hiệu các điểm ấy là $x_1$ và $x_2$. Theo định nghĩa 9.2 ta có

$$(x_1 - 3)(x_2 - 3) = 81, \quad (x_1 - 8)(x_2 - 8) = 256.$$

Giải hệ phương trình này ta có: $x_1 = -24$, $x_2 = 0$ (hoặc $x_1 = 0$, $x_2 = -24$). Một trong hai điểm vừa tìm được cần được ánh xạ lên điểm $w = 0$, còn điểm kia lên điểm $w = \infty$.

a) Giả sử $w = 0$ khi $z = -24$ và $w = \infty$ khi $z = 0$. Khi đó

$$w = k\frac{z + 24}{z}, \tag{2.75}$$

trong đó hệ số $k$ cần được xác định. Vì ánh xạ (2.75) biến điểm $z = 0$ thành điểm $w = \infty$ nên phần trong của mỗi đường tròn trong mặt phẳng $z$ sẽ được ánh xạ lên phần ngoài của ảnh tương ứng. Vì $\gamma$ nằm trong $\Gamma$ nên qua ánh xạ (2.75) bán kính của ảnh đường tròn $\gamma$ sẽ lớn hơn bán kính của ảnh đường tròn $\Gamma$. Từ đó hệ số $k$ cần được xác định sao cho $|w| = 1$ khi $z \in \gamma$. Chẳng hạn ta xét điểm $z = 12 \in \gamma$. Giá trị $w$ tương ứng sẽ là

$$w = 3k; \quad |w| = 3k = 1 \quad \text{hay là } k = 1/3.$$

Như vậy, trong trường hợp này ta có:

$$w = \frac{1}{3}\,\frac{z+24}{z}e^{i\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.76}$$

b) Nếu ta đòi hỏi $w = 0$ khi $z = 0$ và $w = \infty$ khi $z = -24$ thì cũng tương tự như ở trên ta có:

$$w = e^{i\alpha}\frac{2z}{z+24}\,\cdot \tag{2.77}$$

*Nhận xét* 2.4.7. Trong điều kiện của bài toán người ta chỉ cho trước bán kính ngoài của vành tròn. Ta sẽ chứng tỏ rằng khi đó bán kính trong cũng hoàn toàn xác định.

Thật vậy, bằng cách thế vào (2.76) hoặc (2.77) một điểm bất kỳ nằm trên đường tròn có ảnh là đường tròn trong của vành tròn, dễ dàng thấy rằng bán kính trong bằng $2/3$. Từ đó suy ra rằng miền nhị liên đã cho chỉ có thể ánh xạ lên vành tròn mà tỷ số giữa bán kính trong và bán kính ngoài bằng $2/3$.

**Ví dụ 11.** Ánh xạ băng vô hạn $\{0 < x < 1\}$ với các nhát cắt dọc theo các tia

$$\Big\{x = \frac{1}{2}\,, h_1 \leqslant y < \infty\Big\} \quad \text{và} \quad \Big\{x = +\frac{1}{2}\,, -\infty < y \leqslant h_2\Big\}.$$

trong đó $h_2 < h_1$ (Hình II.3) lên nửa mặt phẳng trên.

*Giải.* Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = 2\pi iz$ ánh xạ miền $D(z)$ lên miền $D(z_1)$ là băng nằm ngang $\{0 < \operatorname{Im} z_1 < 2\pi\}$ với hai nhát cắt $(-\infty, \pi i - 2\pi h_1]$ và $[\pi i + 2\pi h_1, \infty)$.

2. Hàm $z_2 = e^{z_1}$ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên miền

$$D(z_2) = \overline{\mathbb{C}} \setminus [(-\infty, -e^{-2\pi h_1}] \cup [e^{-2\pi h_2}, \infty].$$

Từ đó suy ra rằng ánh xạ cần tìm có dạng

$$w = \sqrt{\frac{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_1}}{e^{2\pi iz} + e^{-2\pi h_2}}}\,.$$

**Ví dụ 12.** Ánh xạ miền giới hạn bởi các đường tròn $\{|z-1| = 1\}$; $\{|z-2| = 2\}$ với nhát cắt theo đoạn $\{y = 0, 2 \leqslant x \leqslant a\}$ $(a < 4)$ lên nửa mặt phẳng trên (hình II.4).

*Hình II.3* *Hình II.4*

*Giải.* Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. $z_1 = \dfrac{4\pi}{z}$. Qua ánh xạ này miền $D(z)$ đã cho có ảnh là băng thẳng đứng $\{\pi < x < 2\pi\}$ với nhát cắt theo đoạn $\left[\dfrac{4\pi}{a}, 2\pi\right]$. Ta gọi miền đó là $D(z_1)$.

2. Hàm $z_2 = \cos z_1$ sẽ ánh xạ miền $D(z_1)$ lên toàn bộ mặt phẳng trừ hai nhát cắt theo trục thực. Thật vậy, phương trình của đường thẳng $x = \pi$, $x = 2\pi$ có thể viết dưới dạng

$$\lambda_1 : z = \pi + it, \quad -\infty < t < \infty;$$
$$\lambda_2 : z = 2\pi + it, \quad -\infty < t < \infty.$$

khi $z_1$ biến thiên trên $\lambda_1$ thì

$$z_1\Big|_{\lambda_1} = \cos(\pi + it) = \cos\pi \operatorname{ch} t - i \sin\pi \operatorname{sh} t = -\operatorname{ch} t.$$

Và do đó $z_2$ vạch nên nhát cắt tia $(-\infty, 1]$.

Tương tự khi $z_1$ biến thiên trên $\lambda_2$ thì

$$z_1\Big|_{\lambda_2} = \cos(2\pi + it) = \operatorname{ch} t,$$

và do đó $z_2$ vạch nên nhát cắt $[1, \infty)$.

Từ đó suy ra

$$w = \sqrt{\frac{1 + \cos\dfrac{4\pi}{z}}{\cos\dfrac{4\pi}{z} - \cos\dfrac{4\pi}{a}}}\,.$$

là ánh xạ muốn tìm.

**Ví dụ 13.** Ánh xạ nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình elip lên nửa mặt phẳng trên (hãy vẽ hình!).

*Giải.* Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = \dfrac{z}{c}$, $c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$ biến hình elip đã cho thành elip với tiêu điểm là $+1$ và $-1$. Elip cắt trục thực tại hai điểm $\pm\dfrac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ và cắt trục ảo tại điểm $\dfrac{bi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

2. Hàm $z_2 = z_1 + \sqrt{z_1^2 - 1} = \dfrac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ biến miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn tâm $z_1 = 0$ và bán kính là $R = \dfrac{a + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

3. Hàm $z_3 = \dfrac{z_2}{R}$ sẽ ánh xạ miền vừa thu được lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn đơn vị và

$$\begin{aligned} z_3 = \frac{z_1}{R} &= \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \times \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b} \\ &= \frac{z + \sqrt{z^2 + b^2 - a^2}}{a + b}. \end{aligned}$$

4. Tiếp theo ta sử dụng ánh xạ Jukovski

$$z_4 = \frac{1}{2}\Big(z_3 + \frac{1}{z_3}\Big)$$

và thu được nửa mặt phẳng trên. Thế giá trị $z_3$ vào biểu thức vừa viết ta có

$$\begin{aligned}
z_4 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}{a+b} + \frac{a+b}{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}\right\}\\
&= \frac{z^2+2z\sqrt{z^2+b^2-a^2}+z^2+b^2-a^2+(a+b)^2}{2(a+b)(z+\sqrt{z^2+b^2-a^2})}\\
&= \frac{2z(z+\sqrt{z^2+b^2-a^2})+2b(a+b)}{2(a+b)(z+\sqrt{z^2+b^2-a^2})}\\
&= \frac{z}{a+b} + \frac{b}{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}\cdot
\end{aligned}$$

Áp dụng ánh xạ đồng dạng và sau vài phép biến đổi ta có

$$\begin{aligned}
w = (a+b)z_4 &= z + \frac{b(a+b)}{z+\sqrt{z^2+b^2-a^2}}\\
&= \frac{az-b\sqrt{z^2+b^2-a^2}}{a^2-b^2}\cdot
\end{aligned}$$

Đó là ánh xạ phải tìm.

**Ví dụ 14.** Ánh xạ miền $\{|z|>1\}$ với các nhát cắt theo các đoạn thẳng $[a,-1]$ và $[1,b]$, trong đó $-\infty<a<-1$, $1<b<\infty$ lên hình tròn đơn vị.

*Giải*

1. Hàm Jukovski $z_1 = \dfrac{1}{2}\Big(z+\dfrac{1}{z}\Big)$ ánh xạ miền $D(z)$ lên phần ngoài đoạn thẳng $[A,B]\subset\mathbb{R}$, trong đó

$$A = \frac{1}{2}\Big(a+\frac{1}{a}\Big);\quad B = \frac{1}{2}\Big(b+\frac{1}{b}\Big).$$

2. Hàm tuyến tính $z_2 = \Big(z_1 - \dfrac{A+B}{2}\Big)\dfrac{2}{A+B}$ sẽ ánh xạ miền vừa thu được lên phần ngoài đoạn $[-1,1]$. Từ đó rút ra

$$w = z_2 + \sqrt{z_2^2-1}$$

là ánh xạ muốn tìm.

**Ví dụ 15.** Ánh xạ nửa băng $\{x>0, 0<y<2h\}$ với nhát cắt theo tia $\{x>h, y=h\}$ (Hình II.5) lên băng vô hạn $\{0<\operatorname{Im} w<1\}$

*Hình II.5*

*Giải.* Ta sử dụng các ánh xạ trung gian sau đây:

1. Hàm $z_1 = \dfrac{z}{2h}$ ánh xạ miền $D(z)$ lên nửa băng với độ rộng là $\pi$.

2. Lợi dụng tính chất của hàm $e^z$, ta xét ánh xạ

$$z_2 = e^{z_1}$$

biến miền thu được trong mặt phẳng $z_1$ lên nửa mặt phẳng trên cắt bỏ nửa hình tròn đơn vị và nhát cắt $\{\operatorname{Im} z_2 \geqslant e^{\pi}, \operatorname{Re} z_2 = 0\}$. Ta gọi miền đó là $D(z_2)$.

3. Hàm

$$z_3 = \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big), \quad \Big(ie^{\pi/2} \to i\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{2}\Big)$$

biến miền $D(z_2)$ lên miền $D(z_3)$ là nửa mặt phẳng trên trừ nhát cắt theo trục ảo đi từ điểm $i\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi}{2}$.

4. Đến đây ta thấy rõ là để có băng nằm ngang rộng 2 ta cần biến miền $D(z_3)$ lên mặt phẳng với nhát cắt theo phần dương trục thực và sau đó dùng ánh xạ logarit. Như vậy,

$$z_4 = z_3^2$$

ánh xạ $D(z_3)$ lên miền $D(z_4)$ là mặt phẳng trừ hai nhát cắt $\Big(-\infty, -\mathrm{sh}^2\dfrac{\pi}{2}\Big]$ và $[0, \infty)$.

5. Hàm $z_5 = \dfrac{z_4}{z_4 + \mathrm{sh}^2\dfrac{\pi}{4}}$ ánh xạ miền $D(z_4)$ lên mặt phẳng với nhát cắt theo phần dương trục thực. Từ các ánh xạ trung gian trên đây ta suy ra

$$w = \frac{-1}{2\pi}\log\Bigg(1 + \frac{\mathrm{sh}^2\dfrac{\pi}{2}}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\pi z}{2h}}\Bigg).$$

## 2.5 Bài tập

**1.** Cho hàm

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{khi } z \neq 0, \\ 0 & \text{khi } z = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

1) $f(z)$ liên tục tại điểm $z = 0$.

2) Hàm $f(z)$ thỏa mãn các điều kiện Cauchy - Riemann tại điểm $(0, 0)$ nhưng đạo hàm tại điểm đó không tồn tại.

**2.** Chứng minh rằng các hàm

$$1) \quad f_1(z) = \begin{cases} \dfrac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{khi } z \neq 0 \\ 0 & \text{khi } z = 0; \end{cases}$$

$$2) \quad f_2(z) = \begin{cases} \dfrac{x^{4/3}y^{5/3}}{x^2+y^2} + i\dfrac{x^{5/3}y^{4/3}}{x^2+y^2} & \text{nếu } z \neq 0, \\ 0 & \text{khi } z = 0 \end{cases}$$

đều không có đạo hàm tại điểm $z = 0$.

**3.** Tìm miền mà tại đó hàm

$$f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$$

chỉnh hình.

[Trả lời: Hàm chỉnh hình khi

$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$, $\pi < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}(f(z) = z^2)$ và khi

$\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4}(f(x) = -z^2)$.]

**4.** Giả sử $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ và $f(z) = u(\rho, \varphi) + iv(\rho, \varphi)$. Khi đó hàm $f(z)$ là $\mathbb{C}$ - khả vi khi và chỉ khi $u(\rho, \varphi)$ và $v(\rho, \varphi)$ là hàm khả vi của $\rho$, $\varphi$ và các đạo hàm riêng của chúng thỏa mãn hệ thức

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

**5.** Chứng minh rằng hàm dạng

$$w = \frac{\alpha z + \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}},$$

trong đó $\alpha$, $\beta$ là những số phức tùy ý thỏa mãn hệ thức $\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} = 1$ ánh xạ đường tròn đơn vị $\{|z| = 1\}$ lên chính nó. Nếu $\beta\overline{\beta} - \alpha\overline{\alpha} = 1$ thì phần trong đường tròn đơn vị được biến thành phần ngoài.

**6.** Tìm những điểm trên mặt phẳng $z$ mà

1. $\left|\dfrac{az+b}{cz+d}\right| = \text{const}$,
2. $\arg \dfrac{az+b}{cz+d} = \text{const}$,

trong đó $a, b, c, d$ là những hằng số phức.

**7.** Chứng minh rằng ảnh của đường thẳng hay đường tròn $\gamma$ qua ánh xạ phân tuyến tính $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ là đường thẳng khi và chỉ khi điểm $z_0 = -\dfrac{d}{c} \in \gamma$.

**8.** Chứng minh rằng góc tại $\infty$ giữa hai đường thẳng song song là bằng 0.

**9.** Chứng minh rằng 4 điểm nằm trên đường thẳng hay đường tròn khi và chỉ khi tỷ số kép của chúng là một số thực.

**10.** Chứng minh rằng đại lượng $\dfrac{|dz|}{R^2 - |z|^2}$ là bất biến đối với các ánh xạ phân tuyến tính $w = w(z)$ biến hình tròn $\{|z| < R\}$ lên chính nó, nghĩa là

$$\frac{|dw|}{R^2 - |w|^2} = \frac{|dz|}{R^2 - |z|^2}, \quad w = w(z).$$

**11.** Chứng minh rằng đại lượng $\dfrac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$ là bất biến đối với các phép ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ lên chính nó.

**12.** Chứng minh rằng đường thẳng qua các điểm bất động của ánh xạ $w = \dfrac{iz+2}{z-i}$ là biến thành chính nó.

**13.** Tìm dạng tổng quát của ánh xạ phân tuyến tính có hai điểm bất động $z_1$ và $z_2$.

(Trả lời : 1) $w = Az$ nếu $z_1 = 0$, $z_2 = \infty$, $A \in \mathbb{C}$;

2) $\dfrac{w-z_1}{w-z_2} = A\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$, $A \in \mathbb{C}$.)

**14.** Dãy điểm $(z_n)$ xác định như sau: $z_0$ là điểm cho trước, $z_{n+1} = f(z_n)$, $n \in \mathbb{N}$, trong đó $f$ là hàm phân tuyến tính có hai điểm bất động. Hãy khảo sát sự hội tụ của dãy đó.

*Chỉ dẫn.* Giả sử $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ là hai điểm bất động của $f$. Áp dụng bài 13 và cách cho dãy để chứng minh rằng

$$\frac{z_{n+1}-\alpha}{z_{n+1}-\beta} = |A|^{n+1}e^{i(n+1)\theta}\frac{z_0-\alpha}{z_0-\beta}, \quad \theta = \arg A.$$

Tiếp đó là qua giới hạn đẳng thức khi $n \to \infty$.

*Trả lời* 1) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } |A| < 1, \\ \beta & \text{nếu } |A| > 1 \end{cases}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ không tồn tại nếu $|A| = 1$.

**15.** Giả sử hình tròn đơn vị được ánh xạ lên chính nó sao cho điểm $z_0$ của nó biến thành tâm. Chứng minh rằng khi đó nửa đường tròn đơn vị được ánh xạ thành nửa đường tròn khi và chỉ khi các đầu mút của nó nằm trên đường kính đi qua $z_0$.

*Chỉ dẫn.* Sử dụng công thức

$$w = e^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$$

và điều là $w(z_0) = 0$, $w\left(\dfrac{1}{\overline{z}_0}\right) = \infty$.

**16.** Tìm ảnh đối xứng của đường tròn $\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ qua đường tròn $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$.

*Trả lời.* Đó là đường tròn Apolonius đối với các điểm 1 và 2: $|w-2| = 2|w=1|$.

*Chỉ dẫn.* Phép biến đổi đối xứng qua đường tròn $\gamma$ hoàn toàn được xác định bởi hàm

$$w = 1 + \frac{1}{\overline{\overline{z-1}}}\cdot$$

**17.** Chứng minh rằng mọi đường tròn đi qua điểm $\pm 1$ đều chia mặt phẳng $\mathbb{C}$ thành hai miền đơn diệp của hàm Jukovski.

*Chỉ dẫn.* Xét đường tròn $\gamma$ bất kỳ qua $\pm 1$ và $z_1, z_2 \notin \gamma$ sao cho $z_1 z_2 = 1$. Tiếp theo, xét ánh xạ

$$w = \frac{z+1}{k(z-1)}, \quad |k| = 1$$

biến một trong hai miền của mặt phẳng $z$ (giới hạn bởi $\gamma$) lên nửa mặt phẳng trên. Từ điều kiện $z_1 z_2 = 1$ suy ra $w_1 = -w_2$.

**18.** Tìm ảnh của hình chữ nhật $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, 0 < \operatorname{Im} z < b\}$ qua ánh xạ $w = \cos z$.

*Trả lời.* Ảnh là nửa dưới của hình elip với các bán trục $\operatorname{ch} b$ và $\operatorname{sh} b$.

**19.** Chứng minh rằng các cạnh của hình vuông với đỉnh $\pi\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\Big(\pm 1 \pm i\Big)$, $n \in \mathbb{N}$ hàm $\dfrac{1}{|\sin z|}$ thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{|\sin z|} < 1$.

*Chỉ dẫn.* Khi ước lượng hàm trên các cạnh nằm ngang $z = x \pm i\Big(n+\dfrac{1}{2}\Big)\pi$ hãy sử dụng bất đẳng thức

$$\operatorname{sh}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\pi \geqslant \operatorname{sh}\frac{\pi}{2} > 1.$$

**20.** Giả sử $f(z) = u(z) + iv(z) \in \mathcal{H}(D)$. Chứng minh rằng các họ đường cong $u(x,y) = C$, $v(x,y) = C$ ($C$ là hằng số tùy ý) trực giao với nhau.

*Chỉ dẫn.* Chứng minh rằng $\langle \operatorname{grad} y, \operatorname{grad} v\rangle = 0$, trong đó $\operatorname{grad} u = \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)$, $\operatorname{grad} v = \Big(\dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}\Big)$.

**21.** Giả sử $f(z) \in \mathcal{H}(D)$. Chứng minh rằng $|f(z)| = \text{const}$ khắp nơi trong miền $D$ thì hàm $f(z) = \text{const}$ trong $D$.

*Chỉ dẫn.* Lấy đạo hàm riêng theo $x$, theo $y$ đẳng thức $u^2 + v^2 = C^2$ rồi áp dụng điều kiện Cauchy - Riemann.

**22.** Tìm ảnh của miền $D = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, -\infty < \operatorname{Im} z < \infty \right\}$ qua ánh xạ $w = \sin z$.

*Trả lời.* Ảnh $D^*$ là toàn bộ mặt phẳng phức với nhát cắt theo trục thực từ điểm $w = -1$ đến điểm $w = +1$ qua $\infty$.

**23.** Với giá trị nào của $\alpha$ thì các tập hợp giá trị sau đây trùng nhau:

1. $(a^2)^\alpha$ và $a^{2\alpha}$;
2. $(a^3)^\alpha$ và $a^{3\alpha}$.

[*Trả lời.* 1. $\alpha = \dfrac{k}{2m+1}$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

2. $\alpha = \dfrac{k}{3m-1}$, $k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$]

**24.** Chứng minh rằng

1. $i^i = e^{-\pi/2} e^{-2k\pi}$,
2. $(-1)^i = e^{(2k+1)\pi}$,
3. $(-1)^{\sqrt{2}} = \cos(2k+1)\pi\sqrt{2} + i \sin(2k+1)\pi\sqrt{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.