CHƯƠNG I
LÝ THUYẾT CƠ BẢN VỀ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này trình bày cách xây dựng mô hình quy hoạch tuyến tính của những bài toán dạng đơn giản. Đây là những kiến thức quan trọng để xây dựng mô hình cho những bài toán phức tạp hơn trong thực tế sau này. Các khái niệm về ‘’ lồi’’ được trình bày để làm cơ sở cho phương pháp hình học giải quy hoạch tuyến tính. Một ví dụ mở đầu được trình bày một cách trực quan để làm rõ khái niệm về phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

Nội dung chi tiết của chương bao gồm :

I- GIỚI THIỆU BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

1- Bài toán vốn đầu tư

2- Bài toán lập kế hoạch sản xuất

3- Bài toán vận tải

II- QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT VÀ CHÍNH TẮC

1- Quy hoạch tuyến tính tổng quát

2- Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

3- Phương án

III- ĐẶC ĐIỂM CỦA TẬP HỢP CÁC PHƯƠNG ÁN

1- Khái niệm lồi và tính chất

2- Đặc điểm của tập các phương án

3- Phương pháp hình học

IV- MỘT VÍ DỤ MỞ ĐẦU

V- DẤU HIỆU TỐI ƯU

1- Ma trận cơ sở - Phương án cơ sở - Suy biến

2- Dấu hiệu tối ưu

CHƯƠNG I

LÝ THUYẾT CƠ BẢN VỀ QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

I- GIỚI THIỆU BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Có thể tạm định nghĩa quy hoạch tuyến tính là lĩnh vực toán học nghiên cứu các bài toán tối ưu mà *hàm mục tiêu* (vấn đề được quan tâm) và các *ràng buộc* (điều kiện của bài toán) đều là hàm và các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính. Đây chỉ là một định nghĩa mơ hồ, bài toán quy hoạch tuyến tính sẽ được xác định rõ ràng hơn thông qua các ví dụ .

Các bước nghiên cứu và ứng dụng một bài toán quy hoạch tuyến tính điển hình là như sau :

a- Xác định vấn đề cần giải quyết, thu thập dữ liệu.

b- Lập mô hình toán học.

c- Xây dựng các thuật toán để giải bài toán đã mô hình hoá bằng ngôn ngữ thuận lợi cho việc lập trình cho máy tính.

d- Tính toán thử và điều chỉnh mô hình nếu cần.

e- Áp dụng giải các bài toán thực tế.

1- Bài toán vốn đầu tư

Người ta cần có một lượng (tối thiểu) chất dinh dưỡng i=1,2,..,m do các thức ăn j=1,2,...,n cung cấp. Giả sử :

a_{ij} là số lượng chất dinh dưỡng loại i có trong 1 đơn vị thức ăn loại j

(i=1,2,...,m) và (j=1,2,..., n)

b_i là nhu cầu tối thiểu về loại dinh dưỡng i

c_j là giá mua một đơn vị thức ăn loại j

Vấn đề đặt ra là phải mua các loại thức ăn như thế nào để tổng chi phí bỏ ra ít nhất mà vẫn đáp ứng được yêu cầu về dinh dưỡng. Vấn đề được giải quyết theo mô hình sau đây :

Gọi $x_j \geq 0$ (j= 1,2,...,n) là số lượng thức ăn thứ j cần mua .

Tổng chi phí cho việc mua thức ăn là :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Vì chi phí bỏ ra để mua thức ăn phải là thấp nhất nên yêu cầu cần được thỏa mãn là :

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn 1 là : $a_{i1}x_1$ $(i=1\to m)$

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn 2 là : $a_{i2}x_2$

....

Lượng dinh dưỡng i thu được từ thức ăn n là : $a_{in}x_n$

Vậy lượng dinh dưỡng thứ i thu được từ các loại thức ăn là :

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \quad (i=1\to m)$$

Vì lượng dinh dưỡng thứ i thu được phải thỏa yêu cầu b_i về dinh dưỡng loại đó nên ta có ràng buộc sau :

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \geq b_i \quad (i=1\to m)$$

Khi đó theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình toán sau đây :

$$\boxed{\begin{array}{l}
\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n \\
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \\
x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n)
\end{cases}
\end{array}}$$

2- Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Từ m loại nguyên liệu hiện có người ta muốn sản xuất n loại sản phẩm

Giả sử :

a_{ij} là lượng nguyên liệu loại i dùng để sản xuất 1 sản phẩm loại j

$(i=1,2,\ldots,m)$ và $(j=1,2,\ldots, n)$

b_i là số lượng nguyên liệu loại i hiện có

c_j là lợi nhuận thu được từ việc bán một đơn vị sản phẩm loại j

Vấn đề đặt ra là phải sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu sao cho tổng lợi nhuận thu được từ việc bán các sản phẩm lớn nhất trong điều kiện nguyên liệu hiện có.

Gọi $x_j \geq 0$ là số lượng sản phẩm thứ j sẽ sản xuất (j=1,2,...,n)

Tổng lợi nhuận thu được từ việc bán các sản phẩm là :

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Vì yêu cầu lợi nhuận thu được cao nhất nên ta cần có :

$$\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Lượng nguyên liệu thứ $i=1\rightarrow m$ dùng để sản xuất sản phẩm thứ 1 là $a_{i1}x_1$

Lượng nguyên liệu thứ $i=1\rightarrow m$ dùng để sản xuất sản phẩm thứ 2 là $a_{i2}x_2$

....

Lượng nguyên liệu thứ $i=1\rightarrow m$ dùng để sản xuất sản phẩm thứ n là $a_{in}x_n$

Vậy lượng nguyên liệu thứ i dùng để sản xuất là các sản phẩm là

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n$$

Vì lượng nguyên liệu thứ $i=1\rightarrow m$ dùng để sản xuất các loại sản phẩm không thể vượt quá lượng được cung cấp là b_i nên :

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \leq b_i \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

Vậy theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình sau đây :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n \\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases} \end{array}}$$

3- Bài toán vận tải

Người ta cần vận chuyển hàng hoá từ m kho đến n cửa hàng bán lẻ. Lượng hàng hoá ở kho i là s_i (i=1,2,...,m) và nhu cầu hàng hoá của cửa hàng j là d_j

(j=1,2,...,n). Cước vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ kho i đến của hàng j là $c_{ij} \geq 0$ đồng.

Giả sử rằng tổng hàng hoá có ở các kho và tổng nhu cầu hàng hoá ở các cửa hàng là bằng nhau, tức là :

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Bài toán đặt ra là lập kế hoạch vận chuyển để tiền cước là nhỏ nhất, với điều kiện là mỗi cửa hàng đều nhận đủ hàng và mỗi kho đều trao hết hàng.

Gọi $x_{ij} \geq 0$ là lượng hàng hoá phải vận chuyển từ kho i đến cửa hàng j. Cước vận chuyển chuyển hàng hoá i đến tất cả các kho j là :

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Cước vận chuyển tất cả hàng hoá đến tất cả kho sẽ là :

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Theo yêu cầu của bài toán ta có mô hình toán sau đây :

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1,2,...,n) \\ x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1,2,...,m) & (j = 1,1,...,n) \end{cases} \end{array}}$$

II- QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT VÀ CHÍNH TẮC

1- Quy hoạch tuyến tính tổng quát

Tổng quát những bài toán quy hoạch tuyến tính cụ thể trên, một bài toán quy hoạch tuyến tính là một mô hình toán tìm cực tiểu (min) hoặc cực đại (max) của hàm mục tiêu tuyến tính với các ràng buộc là bất đẳng thức và đẳng thức tuyến tính. Dạng tổng quát của một bài toán quy hoạch tuyến tính là :

$$\min/\max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i \in I_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i \in I_2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i & (i \in I_3) \end{cases} & \text{(II)} \\ \begin{cases} x_j \ge 0 & (j \in J_1) \\ x_j \le 0 & (j \in J_2) \\ x_j \ \text{tùy ý} & (j \in J_3) \end{cases} & \text{(III)} \end{cases}$$

Trong đó :

- (I) *Hàm mục tiêu*

Là một tổ hợp tuyến tính của các biến số, biểu thị một đại lượng nào đó mà ta cần phải quan tâm của bài toán.

- (II) *Các ràng buộc của bài toán*

Là các phương trình hoặc bất phương trình tuyến tính n biến số, sinh ra từ điều kiện của bài toán.

- (III) *Các các hạn chế về dấu của các biến số*

Người ta cũng thường trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính dưới dạng ma trận như sau :

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Gọi a_i ($i=1\to m$) là dòng thứ i của ma trận A, ta có :

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} a_i x = b_i & (i \in I_1) \\ a_i x \le b_i & (i \in I_2) \qquad \text{(II)} \\ a_i x \ge b_i & (i \in I_3) \end{cases} \\ \begin{cases} x_j \ge 0 & (j \in J_1) \\ x_j \le 0 & (j \in J_2) \qquad \text{(III)} \\ x_j \text{ tùy ý} & (j \in J_3) \end{cases} \end{cases}$$

Người ta gọi :

- A là ma trận hệ số các ràng buộc.
- c là vectơ chi phí (c^T là chuyển vị của c)
- b là vectơ giới hạn các ràng buộc.

2- Quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu = và các biến số đều không âm.

$$\min/\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1,2,\ldots,m) \qquad \text{(II)} \\ x_j \ge 0 & (j = 1,2,\ldots,n) \qquad \text{(III)} \end{cases}$$

(m≤ n)

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} Ax = b & \text{(II)} \\ x \ge 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

rang(A)=m

Người ta có thể biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát thành bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc nhờ các quy tắc sau đây :

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≤ thì người ta cộng thêm vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* $x_{n+i} \ge 0$ để được dấu = .

- Nếu gặp ràng buộc i có dạng ≥ thì người ta trừ vào vế trái của ràng buộc một *biến phụ* $x_{n+i} \geq 0$ để được dấu = .

Các biến phụ chỉ là những đại lượng giúp ta biến các ràng buộc dạng bất đẳng thức thành đẳng thức, nó phải không ảnh hưởng gì đến hàm mục tiêu nên không xuất hiện trong hàm mục tiêu.

- Nếu biến $x_j \leq 0$ thì ta đặt $x_j = -x'_j$ với $x'_j \geq 0$ rồi thay vào bài toán.

- Nếu biến x_j là tuỳ ý thì ta đặt $x_j = x'_j - x''_j$ với x'_j, x''_j đều ≥ 0 rồi thay vào bài toán.

- Trong trường hợp trong số các ràng buộc có dòng mà vế phải của dòng đó là giá trị âm thì đổi dấu cả hai vế để được vế phải là một giá trị không âm.

Dựa vào các phép biến đổi trên mà người ta có thể nói rằng bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc là bài toán quy hoạch tuyến tính mà trong đó các ràng buộc chỉ có dấu = , vế phải và các biến số đều không âm.

Ví dụ :

Biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây về dạng chính tắc :

$$\min\ z(x) = 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 7 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -1 \\ 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 10 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} x_1, x_5 \geq 0 \\ x_4 \leq 0 \\ x_2, x_3 \text{ tùy ý} \end{cases} \end{cases}$$

Bằng các thay thế :

$$\begin{aligned} x_4 &= -x'_4 && (x'_4 \geq 0) \\ x_2 &= x'_2 - x''_2 && (x'_2, x''_2 \geq 0) \\ x_3 &= x'_3 - x''_3 && (x'_3, x''_3 \geq 0) \end{aligned}$$

ta được :

$$\min\ z(x) = 2x_1 - (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - 2x_5$$
$$\begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + (x_3' - x_3'') - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') + x_4 - x_7 = -1 \\ 2(x_3' - x_3'') - x_4' + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geq 0$$

hay :

$$\min\ z(x) = 2x_1 - (x_2' - x_2'') + 2(x_3' - x_3'') - x_4' - 2x_5$$
$$\begin{cases} x_1 - 2(x_2' - x_2'') + (x_3' - x_3'') - 2x_4' + x_5 + x_6 = 7 \\ -(x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4 + x_7 = 1 \\ 2(x_3' - x_3'') - x_4' + 3x_5 - x_8 = 10 \\ x_1 + (x_2' - x_2'') - 2(x_3' - x_3'') - x_4' = 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_5, x_6, x_7, x_8, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4' \geq 0$$

3- Phương án

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc :

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (P)$$

- $x=[x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n]^T$ là một phương án của (P) khi và chỉ khi $Ax = b$.
- $x=[x_1\ \ x_2\ \ \ldots\ \ x_n]^T$ là một phương án khả thi của (P) khi và chỉ khi $Ax = b$ và $x \geq 0$.
- Một phương án tối ưu của (P) là một phương án khả thi của (P) mà giá trị của hàm mục tiêu tương ứng đạt min/max.

III- ĐẶC ĐIỂM CỦA TẬP HỢP CÁC PHƯƠNG ÁN

1- Khái niệm lồi và các tính chất

a- Tổ hợp lồi

- Cho m điểm x^i trong không gian R^n . Điểm x được gọi là tổ hợp lồi của các điểm x^i nếu :

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x^i = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$$

- Khi x là tổ hợp lồi của hai điểm x^1, x^2 người ta thường viết :

$$x=\lambda x^1+(1-\lambda)x^2 \qquad (0\leq\lambda\leq1)$$

Nếu $0<\lambda<1$ thì x được gọi là tổ hợp lồi thật sự.

- Đoạn thẳng

Tập hợp tất cả các tổ tổ hợp lồi của 2 điểm bất kỳ A, B$\in R^n$ được gọi là đoạn thẳng nối A và B . Ký hiệu :

$\delta_{AB}= \{x = \lambda A + (1-\lambda)B$ với $\lambda\in[0,1] \}$

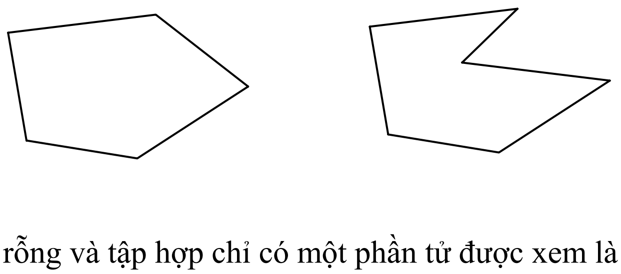
Định lý

Tổ hợp lồ có tính chất bắc cầu.

b- Tập hợp lồi

Tập con S của R^n được gọi là tập hợp lồi khi S chứa toàn bộ đoạn thẳng nối hai điểmbất kỳ của S.

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S \quad \forall x,y\in,\lambda\in[0,1]$$



Tập hợp rỗng và tập hợp chỉ có một phần tử được xem là tập hợp lồi.

Định lý

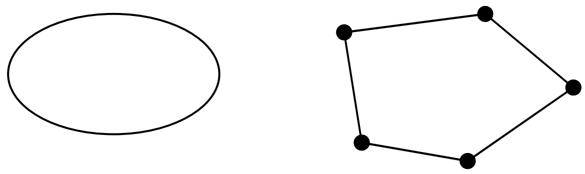
Giao của một số bất kỳ các tập hợp lồi là một tập hợp lồi.

Định lý

Nếu S là một tập hợp lồi thì S chứa mọi tổ hợp lồi của một họ điểm bất kỳ trong S.

c- Điểm cực biên của một tập hợp lồi

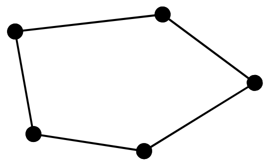
Điểm x trong tập lồi $S \subset R^n$ được gọi là điểm cực biên nếu không thể biểu diễn được x dưới dạng tổ hợp lồi thật sự của hai điểm phân biệt của S.



d- Đa diện lồi và tập lồi đa diện

Đa diện lồi

Tập hợp S tất cả các tổ hợp của các điểm x^1, x^2,....,x^m cho trước được gọi là đa diện lồi sinh ra bởi các điểm đó.



Đa diện lồi là một tập hợp lồi.

Trong đa diện lồi người ta có thể loại bỏ dần các điểm là tổ hợp của các điểm còn lại. Khi đó người ta thu được một hệ các điểm, giả sử là y^1, y^2,...,y^p ($p \le m$) . Các điểm này chính là các điểm cực biên của đa diện lồi, chúng sinh ra đa diện lồi đó.

Số điểm cực biên của đa diện lồi là hữu hạn.

Siêu phẳng - Nửa không gian

$A=[a_{ij}]_{m.n}$ là ma trận cấp m.n

A_i (i=1,2,...,m) là hàng thứ i của A

Siêu phẳng trong R^n là tập các điểm $x=[x_1,x_2,.....,x_n]^T$ thỏa

$$A_i\, x = b_i$$

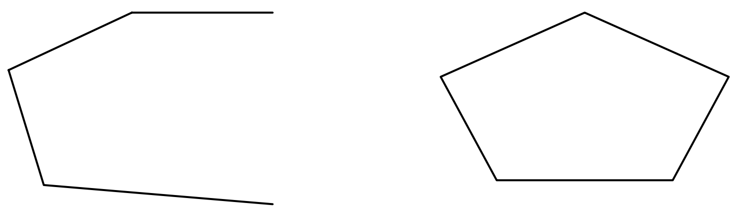
Nửa không gian trong R^n là tập các điểm $x=[x_1,x_2,.....,x_n]^T$ thỏa

$$A_i\, x \ge b_i$$

Siêu phẳng và nửa không gian đều là các tập hợp lồi.

Tập lồi đa diện

Giao của một số hữu hạn các nửa không gian trong R^n được gọi là tập lồi đa diện.



Tập lồi đa diện là một tập hợp lồi.

Nếu tập lồi đa diện không rỗng và giới nội thì đó là một đa diện lồi

2- Đặc điểm của tập hợp các phương án

Định lý

Tập hợp các phương án của một quy hoạch tuyến tính là một tập lồi đa diện.

Nếu tập hợp lồi đa diện này không rỗng và giới nội thì đó là một đa diện lồi, số điểm cực biên của nó là hữu hạn.

Định lý

Tập hợp các phương án tối ưu của một quy hoạch tuyến tính là một tập lồi.

Xét quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{cases} Ax = b & \text{(II)} \\ x \geq 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Giả sử A=[aij]m.n có cấp m.n, $m \leq n$, rang(A)=m .

Gọi A^j (j=1,2,...,n) cột thứ j của ma trận A, quy hoạch tuyến tính chính tắc trên có thể viết :

$$\min/\max \ z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} x_1A^1 + x_2A^2 + \ldots + x_nA^n = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Gọi $S=\{x=[x_1,x_2,\ldots,x_n]^T \geq 0 \;/\; x_1A^1+ x_2A^2+\ldots+ x_nA^n=b\}$ là tập các phương án của bài toán.

$x^0 = \left[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right]^T \in S$ là một phương án khác 0.

Định lý

Điều kiện cần và đủ để x^0 là phương án cực biên (điểm cực biên của S) là các cột A^j ứng với $x_j^0>0$ là độc lập tuyến tính.

Hệ quả

Số phương án cực biên của một quy hoạch tuyến tính chính tắc là hữu hạn. Số thành phần > 0 của một phương án cực biên tối đa là bằng m.

Khi số thành phần > 0 của một phương án cực biên bằng đúng m thì phương án đó được gọi là một phương án cơ sở.

Định lý

Nếu tập các phương án của một quy hoạch tuyến tính chính tắc không rỗng thì quy hoạch tuyến tính đó có ít nhất một phương án cực biên.

Bổ đề

Nếu

$\overline{x}$ là một phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

x^1, x^2 là các phương án của quy hoạch tuyến tính.

$\overline{x}$ là tổ hợp lồi thực sự của x^1, x^2

thì x^1, x^2 cũng là phương án tối ưu của quy hoạch tuyến tính.

Định lý

Nếu quy hoạch tuyến tính chính tắc có phương án tối ưu thì thì sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

Ví dụ : xét quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\max\ z(x) = 2x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Với hệ A^1 A^2 ta tính được $x^1 = \begin{bmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{1}{10} & 0 \end{bmatrix}^T$

Với hệ A^1 A^3 ta tính được $x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

Với hệ A^2 A^3 ta tính được $x^3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \end{bmatrix}^T$

Vì các thành phần của phương án cực biên là > 0 nên ta chi xét x^2 và x^3 . Khi đó :

$z(x^2)$=2.1+3.0=2

$z(x^3)$=2.0+3.1/3=1

Vậy $x^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ là một phương án tối ưu.

Định lý

Điều kiện cần và đủ để một quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu là tập các phương án không rỗng và hàm mục tiêu bị chặn.

Định lý

Nếu tập các phương án của một quy hoạch tuyến tính không rỗng và là một đa diện lồi thì quy hoạch tuyến tính đó sẽ có ít nhất một phương án cực biên là phương án tối ưu.

3- Phương pháp hình học

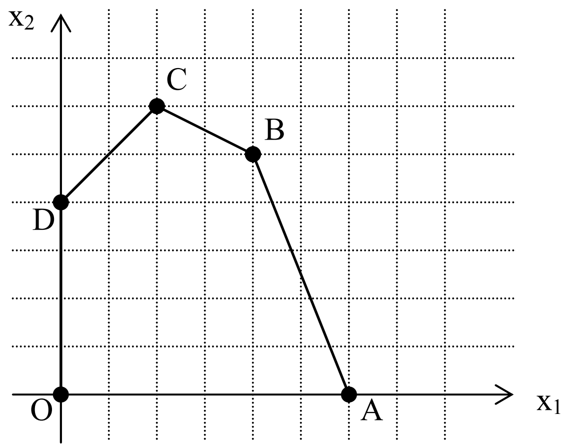
Từ những kết quả trên người ta có cách giải một quy hoạch tuyến tính hai biến bằng phương pháp hình học thông qua ví dụ sau :

Ví dụ : xét quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



A,B,C,D,O là các điểm cực biên. Giá trị hàm mục tiêu tại đó là :

z(A)=3.6+2.0=18

z(B)=3.4+2.5=22

z(C)=3.2+2.6=18

z(D)=3.0+2.8=8

z(O)=3.0+2.0=0

Phương án tối ưu của bài toán đạt được tại B : x_1=4 và x_2=5

IV- MỘT VÍ DỤ MỞ ĐẦU

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ z(x) = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách đưa vào các *biến phụ* w_1, w_2, $w_3 \ge 0$ (làm cho các ràng buộc bất đẳng thức thành đẳng thức) . Ta được :

$$\min\ z(x) = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

Thực hiện việc chuyển vế ta được bài toán ban đầu như sau :

$$\min\ z(x) = -5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$
$$\begin{cases} w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\ w_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ w_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \end{cases} \qquad \text{(I)}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

Một phương án khả thi xuất phát (chưa là phương án tối ưu) của bài toán là :

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$w_1=5$ $\qquad$ $w_2=11$ $\qquad$ $w_3 = 8$

Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là $z(x) = 0$

Người ta sẽ cải tiến phương án xuất phát này để được một phương án mới tốt hơn, nó làm cho giá trị của hàm mục tiêu giảm xuống. Người ta làm như sau :

Vì hệ số của x_1 trong hàm mục tiêu là âm và có giá trị tuyệt đối lớn nhất nên nếu tăng x_1 từ bằng 0 lên một giá trị dương (càng lớn càng tốt) và đồng thời vẫn giữ x_2 và x_3 bằng 0 thì giá trị của hàm của hàm mục tiêu sẽ giảm xuống. Khi đó các biến ở vế trái của bài toán (I) sẽ bị thay đổi theo nhưng phải thoả ≥ 0 . Sự thay đổi của chúng không ảnh hưởng đến sự thay đổi của hàm mục tiêu. Thực hiện ý tưởng trên ta được :

$$\begin{cases} w_1 = 5 - 2x_1 \ge 0 \\ w_2 = 11 - 4x_1 \ge 0 \\ w_3 = 8 - 3x_1 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_2 = x_3 = 0$$

Suy ra : $\begin{cases} x_1 \le \dfrac{5}{2} \\ x_1 \le \dfrac{11}{4} \\ x_1 \le \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 \le \dfrac{5}{2}$ (dòng 1 được chọn)

Người ta chọn $x_1 = \dfrac{5}{2}$ nên nhận được một phương án tốt hơn được xác định như sau :

$$x_2 = x_3 = w_1 = 0$$
$$x_1 = \frac{5}{2} \quad w_2 = 1 \quad w_3 = \frac{1}{2}$$

Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là $z(x) = -\dfrac{25}{2}$

Bước tiếp theo là biến đổi bài toán (I) thành một bài toán tương đương bằng cách từ dòng 1 (dòng được chọn) tính x_1 theo các biến còn lại và thế giá trị nhận được vào các dòng còn lại, ta được :

$$\min\ z(x) = -\frac{25}{2} + \frac{5}{2}w_1 + \frac{7}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$
$$\begin{cases} \mathbf{x_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}w_1 - \dfrac{3}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3} \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2 \\ w_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}w_1 + \dfrac{1}{2}x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \ge 0$$

Thực hiện tương tự như trên, người ta tăng x_3 từ bằng 0 lên một giá trị dương cho phép và đồng thời vẫn giữ x_2 và w_1 bằng 0 thì giá trị của hàm của hàm mục tiêu sẽ giảm xuống. Khi đó các biến ở vế trái của bài toán (II) sẽ bị thay đổi theo nhưng phải thoả ≥ 0 . Ta được :

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}x_3 \ge 0 \\ w_2 = 1 \ge 0 \\ w_3 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}x_3 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 \le 5 \\ x_3 \le 1 \end{cases} \Rightarrow x_3 \le 1$ (dòng 3 được chọn)

Khi đó người ta chọn x_3=1 nên thu được một phương án tốt hơn được xác định như sau :

$$x_2 = w_1 = w_3 = 0$$
$$x_1 = 2 \quad x_3 = 1 \quad w_2 = 1$$

Giá trị tương ứng của hàm mục tiêu là z(x)=-13

Bước tiếp theo là biến đổi bài toán (II) thành một bài toán tương đương bằng cách từ dòng 3 (dòng được chọn) tính x_3 theo các biến còn lại và thế giá trị nhận được vào các dòng còn lại, ta được :

$$\min\ z(x) = -13 + w_1 + 3x_2 + w_3$$
$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2w_1 - 2x_2 + w_3 \\ w_2 = 1 + 2w_1 + 5x_2 \\ \mathbf{x_3 = 1 + 3w_1 + x_2 - 2w_3} \end{cases} \qquad \text{(III)}$$
$$x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Đến đây vì không có hệ số nào của hàm mục tiêu là âm nên không thể làm giảm giá trị của hàm mục tiêu theo cách như trên nữa. Phương án thu được ở bước sau cùng chính là phương án tối ưu của bài toán.

Đối với bài toán max, thay cho việc làm tăng biến có hệ số âm trong hàm mục tiêu người ta làm tăng biến có hệ số dương cho đến khi các hệ số trong hàm mục tiêu hoàn toàn âm.

V- DẤU HIỆU TỐI ƯU

1- Ma trận cơ sở - Phương án cơ sở - Suy biến

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min/\max \quad z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

a- Ma trận cơ sở

Người ta gọi cơ sở của bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc (P) là mọi ma trận B không suy biến (có ma trận nghịch đảo) mxm trích ra từ m cột của ma trận ràng buộc A. Các cột còn lại được gọi là ma trận ngoài cơ sở, ký hiệu là N .

b- Phương án cơ sở - Phương án cơ sở khả thi

B là một cơ sở của bài toán (P).

Khi đó, bằng cách hoán vị các cột của A người ta có thể luôn luôn đặt A dưới dạng :

$A = [\, B \;\; N \,]$

Do đó, người ta cũng phân hoạch x và c như sau :

$x^T = [\, x_B \;\; x_N \,]$

$c^T = [\, c_B \;\; c_N \,]$

Một phương án x của bài toán (P) thoả :

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; [\, B \;\; N \,]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \;\Leftrightarrow\; Bx_B + Nx_N = b$$

Phương án cơ sở

Người ta gọi một phương án cơ sở tương ứng với cơ sở B là một phương án đặc biệt, nhận được bằng cách cho :

$$x_N = 0$$

Khi đó x_B được xác định một cách duy nhất bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Cramer :

$$Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b$$

Phương án cơ sở khả thi

Một phương án cơ sở là phương án cơ sở khả thi nếu :

$$x_B = B^{-1}b \geq 0$$

Cơ sở tương ứng với một phương án khả thi được gọi là cơ sở khả thi .

Ví dụ : xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc :

$$\min/\max z(x) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_4 + x_5 = 20 \\ -3x_1 + 4x_2 - 4x_4 + x_6 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 28 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots,6)$$

Ma trận ràng buộc là

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Có thể chọn ba cột bất kỳ và kiểm chứng xem đó có thể là cơ sở không.

Một cơ sở được chọn và sắp xếp lại là

$$\begin{array}{cccccc} x_5 & x_6 & x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Các cột x_5 x_6 x_3 tạo thành một ma trận cơ sở . Các biến tương ứng được gọi là các biến (trong) cơ sở .

Các cột x_1 x_2 x_4 tạo thành một ma trận ngoài cơ sở. Các biến tương ứng được gọi là các biến ngoài cơ sở.

Một phương án cơ sở khả thi của bài toán là :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	28	0	20	10

c- Suy biến

Một phương án cơ sở khả thi được gọi là suy biến nếu $x_B = B^{-1}b \geq 0$ có những thành phần bằng 0. Sự suy biến là một hiện tượng thường xảy ra trong một số bài toán như bài toán vận tải, dòng dữ liệu, đường đi ngắn nhất....... Đây là hiện tượng khá phức tạp (có nhiều cách giải quyết sẽ được xét sau). Vì vậy trong những phần tiếp theo ta giả sử rằng phương án cơ sở khả thi là không suy biến, tức là $x_B = B^{-1}b > 0$ (dương thực sự) .

2- Dấu hiệu tối ưu

Theo trên, khi một bài toán quy hoạch tuyến tính có phương án tối ưu thì tồn tại một cơ sở khả thi (tối ưu) B* , tức là phương án cơ sở x* tương ứng với B* là phương án tối ưu.

Vấn đề bây giờ là xác định một thủ tục để tìm B*. Chúng ta sẽ thấy rằng thủ tục đó được suy ra một cách trực tiếp từ việc chứng minh dấu hiệu tối ưu sau đây.

Định lý 4 (dấu hiệu tối ưu)

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\text{min/max } \ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Điều kiện cần và đủ để một *phương án cơ sở khả thi x* có dạng :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

của bài toán là *phương án tối ưu* là :

$$\boxed{\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \le 0} \quad \text{đối với bài toán max}$$

$$\boxed{\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \ge 0} \quad \text{đối với bài toán min}$$

Với :

$A = [\ B \mid N\ ]$

$c^T = [\ c_B \mid c_N\ ]$

Người ta thường gọi :

c_N là chi phí ngoài cơ sở

c_B là chi phí cơ sở

$\bar{c}_N^T$ là chi phí trượt giảm

$c_B^T B^{-1} N$ là lượng gia giảm chi phí

Chứng minh (cho bài toán max)

Điều kiện đủ

Giả sử x* là một phương án cơ sở khả thi với ma trận cơ sở B và thoả

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \le 0$$

thì cần chứng minh x* là phương án tối ưu, nghĩa là chứng minh rằng với mọi phương án bất kỳ của bài toán ta luôn có :

$$z(x) \le z(x^*)$$

Xét một phương án khả thi x bất kỳ , x thoả :

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [B \quad N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b \\ x_B \ge 0 \quad x_N \ge 0 \end{cases}$$

B là ma trận cơ sở của phương án cơ sở khả thi x*

B có ma trận nghịch đảo là B^{-1}

$$\Rightarrow \begin{cases} Bx_B + Nx_N = b \\ x_B \ge 0 \qquad x_N \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \qquad (B^{-1}B = I) \\ x_B \ge 0 \qquad x_N \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}.b \\ x_B \geq 0 \qquad x_N \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B \geq 0 \qquad x_N \geq 0 \end{cases}$$

Tính giá trị hàm mục tiêu đối với phương án x ta được :

$$\begin{aligned} z(x) &= c^T x \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T \left(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N\right) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \qquad (1) \end{aligned}$$

Vì x* là phương án cơ sở khả thi tương ứng với ma trận cơ sở B nên

$$\begin{cases} x_B^* = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N^* = 0 \end{cases}$$

Tính giá trị hàm mục tiêu đối vơi phương án cơ bản x* ta được :

$$\begin{aligned} z(x^*) &= c^T x^* \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = c_B^T x_B^* + c_N^T x_N^* \\ &= c_B^T x_B^* = c_B^T B^{-1}b \qquad (\text{ vì } x_N^* = 0\,) \qquad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$z(x) \leq z(x^*) \quad \text{vì } c_N - c_B^T B^{-1}N \leq 0$$

Vậy x* là phương án tối ưu.

Điều kiện cần

Giả sử $x^* = \begin{bmatrix} x_B^* = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N^* = 0 \end{bmatrix}$ là phương án tối ưu với ma trận cơ sở B, cần chứng minh rằng : $\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N \leq 0$.

($\overline{c}_N$ là vectơ có n-m thành phần)

Ta sẽ chứng minh điều này bằng phản chứng.

Giả sử rằng tồn tại một thành phần c_s của $\bar{c}_N$ mà $c_s > 0$. Dựa vào c_s người ta xây dựng một vectơ x như sau :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = x_B^* - B^{-1}Nx_N \\ x_N = \theta I_s \geq 0 \end{bmatrix}$$

Trong đó $\theta>0$ và I_s là một vectơ có (n-m) thành phần bằng 0, trừ thành phần thứ s bằng 1 . Vậy

$$x = \begin{bmatrix} x_N = \theta I_s \geq 0 \\ x_B = x_B^* - B^{-1}N\theta I_s = B^{-1}b - B^{-1}N\theta I_s \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Do $B^{-1}b \geq 0$ nên người ta có thể chọn $\theta>0$ đủ nhỏ để $x_B > 0$

Vậy x được chọn như trên sẽ thoả :

$$x \geq 0 \qquad (3)$$

Ta kiểm chứng x thỏa ràng buộc của bài toán bằng cách tính :

$$\begin{aligned} Ax &= [B \quad N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = Bx_B + Nx_N \\ &= B\left(x_B^* - B^{-1}N\theta I_s\right) + N\theta I_s \\ &= B\left(B^{-1}b - B^{-1}N\theta I_s\right) + N\theta I_s \\ &= BB^{-1}b - BB^{-1}N\theta I_s + N\theta I_s \\ &= b - N\theta I_s + N\theta I_s \\ &= b \qquad (4) \end{aligned}$$

Từ (3) và (4) cho thấy x là một phương án khả thi của bài toán

Bây giờ ta chỉ ra mâu thuẫn bằng so sánh giá trị hàm mục tiêu tại x và x* . Ta có :

$$\begin{aligned} z(x) &= c^T x \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &= c_B^T\left(x_B^* - B^{-1}Nx_N\right) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T x_B^* - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N \\ &= c_B^T x_B^* + c_N^T x_N^* - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N \qquad (\text{vì } c_N^T x_N^* = 0) \\ &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1}N\right)x_N \\ &= c^T x^* + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1}N\right)\theta I_s \end{aligned}$$

$$= c^T x^* + \bar{c}_N^T \theta I_s = c^T x^* + \bar{c}_N^T I_s \theta$$

$$= z(x^*) + \bar{c}_s \theta > z(x^*) \qquad (\text{ vì } \bar{c}_s \theta > 0)$$

Vậy x* không phải là phương án tối ưu nên mâu thuẩn với giả thiết .

Chú ý

Qua việc chứng minh định lý dấu hiệu tối ưu ta thấy rằng từ một phương án cơ sở khả thi chưa tối ưu có thể tìm được các phương án khả thi càng lúc càng tốt hơn nhờ lặp lại nhiều lần công thức (*). Vấn đề được đặt là đại lượng θ được chọn như thế nào để nhanh chóng nhận được phương án tối ưu.

Bổ đề

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\max\ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

với B là một cơ sở khả thi nào đó và x^0 là phương án cơ sở tương ứng, tức là

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_B^0 = B^{-1}b \geq 0 \\ x_N^0 = 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad z(x^0) = c_B^T B^{-1} b$$

Xét $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N$.

Nếu tồn tại một biến ngoài cơ sở x_s sao cho $\bar{c}_s > 0$ với $\bar{c}_s$ là thành phần thứ s của $\bar{c}_N$ thì :

a- Hoặc là người ta có thể làm tăng một cách vô hạn giá trị của x_s mà không đi ra khỏi tập hợp các phương án khả thi, và trong trường hợp này phương án tối ưu của bài toán không giới nội.

b- Hoặc là người ta có thể xác định một cơ sở khả thi khác là $\hat{B}$ có phương án cơ sở khả thi $\hat{x}$ tương ứng với nó là tốt hơn , tức là :

$$z(x^0) < z(\hat{x})$$

Chứng minh

Trong quá trình chứng minh định lý dấu hiệu tối ưu ta có phương án mới được xác định như sau :

$$x = \begin{bmatrix} x_N = \theta I_s \geq 0 \\ x_B = x_B^* - B^{-1} N \theta I_s = B^{-1} b - B^{-1} N \theta I_s \end{bmatrix}$$

Ký hiệu :

$$\overline{N} = B^{-1}N$$

$\overline{N}_s$ là cột s của $\overline{N}$

$$\overline{b} = B^{-1}b$$

Như vậy ta có : $x = \begin{bmatrix} x_B = \overline{b} - \theta \overline{N}_s \\ x_N = \theta I_s \end{bmatrix}$

Hai trường hợp có thể xảy ra như sau :

a- Trường hợp $\overline{N}_s \le 0$

Trong trường hợp này x_s có thể nhận một giá trị θ lớn tuỳ mà vẫn đảm bảo $x_B \ge 0$, nghĩa là x luôn luôn thoả ≥ 0 . Khi đó như đã biết giá trị hàm mục tiêu tương ứng là

$$\begin{aligned}
z(x) &= \begin{bmatrix} c_B^T & c_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\
&= c_B^T \left(B^{-1}b - B^{-1}N\theta I_s \right) + c_N^T \theta I_s \\
&= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}N\theta I_s + c_N^T \theta I_s \\
&= z(x^0) + \left(c_N^T - c_B^T B^{-1}N \right)\theta I_s \\
&= z(x^0) + \overline{c}_N^T \theta I_s \\
&= z(x^0) + \overline{c}_s \theta
\end{aligned}$$

với $\overline{c}_s\theta$ có thể lớn vô hạn thì giá trị của hàm mục tiêu là không giới nội.

b- Trường hợp tồn tại i=1→m sao cho $\overline{N}_{is} > 0$

($\overline{N}_{is} > 0$ là thành phần thứ i của $\overline{N}_s$)

Trong trường hợp này giá trị của θ>0 mà x_s có thể nhận không thể tăng vô hạn vì phải đảm bảo $x_B>0$. Giá trị lớn nhất $\hat{\theta}$ của θ mà x_s có thể nhận được xác định như sau :

$$\hat{\theta} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}, \overline{N}_{is} > 0 \right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{N}_{rs}}$$

$$(\forall i = 1 \to m)$$

Phương án cơ sở khả thi mới có các thành phần như sau :

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{x}_B = \overline{b} - \hat{\theta}\,\overline{N}_s \\ \hat{x}_N = \hat{\theta}\, I_s \end{bmatrix}$$

và giá trị hàm mục tiêu tương ứng là :

$$z(\hat{x}) = z(x^0) + \hat{\theta}\,\bar{c}_s > z(x^0)$$

Ghi chú :

Trong trường hợp bài toán không suy biến, nếu $\hat{\theta}$ được xác định một cách duy nhất thì phương án mới $\hat{x}$ có đúng m thành phần khác 0. Thật vậy :

- Biến x_s đang bằng 0 trong phương án x^0 trở thành dương thật sự vì $x_s = \hat{\theta}$

- Biến x_r đang dương thật sự bây giờ nhận giá trị :

$$\hat{x}_r = \bar{b}_r - \hat{\theta}\bar{N}_{rs} = \bar{b}_r - \frac{\bar{b}_r}{\bar{N}_{rs}}\bar{N}_{rs} = \bar{b}_r - \bar{b}_r = 0$$

Vậy phương án mới $\hat{x}$ là một phương án cơ sở. Nó tương ứng với cơ sở ở $\hat{B}$ được suy ra từ B bằng cách thay thế cột r bằng cột s.

Người ta nói rằng hai cơ sở B và $\hat{B}$ là kề nhau, chung tương ứng với những điểm cực biên kề nhau trong tập hợp lồi S các phương án khả thi của bài toán.

CÂU HỎI CHƯƠNG 1

1- Trình bày các bước nghiên cứu một quy hoạch tuyến tính.

2- Định nghĩa quy hoạch tuyến tính chính tắc.

3- Trình bày khái niệm về phương án của một quy hoạch tuyến tính.

4- Trình bày cơ sở lý thuyết của phương pháp hình học giải một quy hoạch tuyến tính hai biến.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1

1- Một nhà máy cán thép có thể sản xuất hai loại sản phẩm : thép tấm và thép cuộn. Nếu chỉ sản xuất một loại sản phẩm thì nhà máy chỉ có thể sản xuất 200 tấn thép tấm hoặc 140 tấn thép cuộn trong một giờ . Lợi nhuận thu được khi bán một tấn thép tấm là 25USD, một tấn thép cuộn là 30USD. Nhà máy làm việc 40 giờ trong một tuần và thị trường tiêu thụ tối đa là 6000 tấn thép tấm và 4000 tấn thép cuộn .

Vấn đề đặt ra là nhà máy cần sản xuất mỗi loại sản phẩm là bao nhiêu trong một tuần để đạt lợi nhuận cao nhất. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính cho vấn đề trên.

2- Có 3 người cùng phải đi một quảng đường dài 10km mà chỉ có một chiếc xe đạp một chổ ngồi. Tốc độ đi bộ của người thứ nhất là 4km/h, người thứ hai là 2km/h, người thứ ba là 2km/h. Tốc độ đi xe đạp của người thứ nhất là 16km/h, người thứ hai là 12km/h, người thứ ba là 12km/h.

Vấn đề đặt ra là làm sao để thời gian người cuối cùng đến đích là ngắn nhất. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính cho vấn đề trên.

3- Một nhà máy sản xuất ba loại thịt : bò, lợn và cừu với lượng sản xuất mỗi ngày là 480 tấn thịt bò, 400 tấn thịt lợn, 230 tấn thịt cừu. Mỗi loại đều có thể bán được ở dạng tươi hoặc nấu chín. Tổng lượng các loại thịt có thể nấu chín để bán là 420 tấn trong giờ và 250 tấn ngoài giờ. Lợi nhuận thu được từ việc bán một tấn mỗi loại thịt được cho trong bảng sau đây :

	Tươi	Nấu chín trong giờ	Nấu chín ngoài giờ
Bò	8	14	11
Lợn	4	12	7
Cừu	4	13	9

Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính để nhà máy sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

4- Một xưởng mộc làm bàn và ghế. Một công nhân làm xong một cái bàn phải mất 2 giờ, một cái ghế phải mất 30 phút. Khách hàng thường mua nhiều nhất là 4 ghế kèm theo 1 bàn do đó tỷ lệ sản xuất giữa ghế và bàn nhiều nhất là 4:1. Giá bán một cái bàn là 135USD, một cái ghế là 50USD. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính để xưởng mộc sản xuất đạt doanh thu cao nhất, biết rằng xưởng có 4 công nhân đều làm việc 8 giờ mỗi ngày.

5- Một nhà máy sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một cái mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp 2 lần thời gian làm ra một cái kiểu thứ hai. Nếu sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì nhà máy làm được 500 cái mỗi ngày. Hàng ngày, thị trường tiêu thụ nhiều nhất là 150 cái mũ kiểu thứ nhất và 200 cái kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một cái mũ kiểu thứ nhất là 8USD, một cái mũ thứ hai là 5USD. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính để nhà máy sản xuất đạt lợi nhuận cao nhất.

6- Trong hai tuần một con gà mái đẻ được 12 trứng hoặc ấp được 4 trứng nở ra gà con. Sau 8 tuần thì bán tất cả gà con và trứng với giá 0,6USD một gà và 0,1USD một trứng. Hãy trình bày bài toán quy hoạch tuyến tính bố trí 100 gà mái đẻ trứng hoặc ấp trứng sao cho doanh thu là nhiều nhất.

7- Giải những bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây bằng phương pháp hình học :

a)- $\max z = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$$

b)- $\min w = -x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

c)- $\max z = 5x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \text{ tuy ý} \end{cases}$$

d)- $\min \ w = -2x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

e)- $\max \ z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

f)- $\max \ z = 3x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

g)- $\min/\max \ z(x) = 4x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \geq -12 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 3x_1 - x_2 \leq 14 \\ x_1 + 4x_2 \geq 9 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$