CHƯƠNG II

GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH

Chương này trình bày một cách chi tiết nội dung của giải thuật đơn hình. Sau phần cơ sở lý thuyết của giải thuật là các ví dụ tương ứng. Các ví dụ được trình bày đúng theo các bước của giải thuật. Kiến thức trong chương này cần thiết cho việc lập trình giải quy hoạch tuyến tính trên máy tính.

Nội dung chi tiết của chương bao gồm :

CHƯƠNG II: GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH

I- GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH CƠ BẢN

Chương này trình bày một phương pháp để giải bài toán quy hoạch tuyến tính đó là phương pháp đơn hình. Phương pháp đơn hình được George Bernard Dantzig đưa ra năm 1947 cùng lúc với việc ông khai sinh ra quy hoạch tuyến tính. Đây là một phương pháp thực sự có hiệu quả để giải những bài toán quy hoạch tuyến tính cở lớn trong thực tế. Với cách nhìn hiện đại ý tưởng của phương pháp đơn hình rất đơn giản. Có nhiều cách tiếp cận phương pháp đơn hình, chương này trình bày một trong các cách đó.

1- Cơ sở xây dựng giải thuật đơn hình cơ bản

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc :

$$\max\ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Giả sử rằng B^0 là một cơ sở khả thi xuất phát của bài toán (không nhất thiết là m cột đầu tiên của ma trận A) . Thuật toán đơn hình cơ bản được xây dựng dựa trên các bước sau :

a- Gán $B = B^0$ và $l=0$ (số lần lặp)

b- $l = l+1$

c- Với cơ sở hiện thời B tính :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$: phương án cơ sở khả thi tương ứng

$$\bar{b} = B^{-1}b$$

$$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_N^T B^{-1} N$$: dấu hiệu tối ưu

d- Nếu $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0$ thì giải thuật dừng và bài toán có phương án tối ưu là x .

Ngược lại, nếu tồn tại s sao cho $\bar{c}_s > 0$ ($\bar{c}_s$ là thành phần thứ s của $\bar{c}_N$) thì sang bước e e- Tính : $\overline{A}_s = B^{-1}A_s$ (A_s là cột thứ s của A)

Nếu $\overline{A}_s \le 0$ thì giải thuật dừng và phương án tối ưu không giới nội.

Ngược lại, nếu tồn tại $\overline{a}_{is} \in \overline{A}_s$ mà $\overline{a}_{is} > 0$ thì tính :

$$\hat{x}_s = \min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{is}}, \overline{a}_{is} > 0\right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rs}} \qquad (\ i = 1 \to m)$$

$\overline{a}_{is}$ là các thành phần của $\overline{A}_s$.

$\hat{x}_s$ là thành phần thứ s của phương án mới $\hat{x}$.

f- Gọi x_t là biến tương ứng với cột thứ r của cơ sở B. Khi đó biến x_s sẽ nhận giá trị $\hat{x}_s > 0$ (vào cơ sở), biến x_t sẽ nhận giá trị $\hat{x}_t = 0$ (ra khỏi cơ sở). Như vậy phương án mới $\hat{x}$ tương ứng với cơ sở mới $\hat{B}$ (thay đổi cơ sở) được xác định như sau :

$$\hat{B} = B \cup \{ t \} - \{ s \}$$

g- Gán B = $\hat{B}$ và quay về b .

Về mặt hình học, giải thuật này được hiểu như là một quá trình duyệt qua các điểm cực biên của đa diện lồi S các phương án khả thi của bài toán.

Về mặt đại số, giải thuật này được hiểu như là một quá trình xác định một chuỗi các ma trận cơ sở kề B^0 B^1 B^2 .... mà các phương án cơ sở tương ứng x^0 x^1 x^2........ là ngày càng tốt hơn, tức là :

$$z(x^0) < z(x^1) < z(x^2) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Chú ý :

Nếu cơ sở ban đầu B^0 chính là m cột đầu tiên của ma trận A thì trong giải thuật trên t chính là r .

2- Định lý về sự hội tụ

Với giả thiết bài toán không suy biến, giải thuật đơn hình trên đây sẽ hội tụ về phương án tối ưu sau một số hữu hạn lần lặp.

Bằng sự thống kê người thấy rằng nói chung giải thuật đơn hình sẽ hội tụ với số lần lặp ít nhất phải là từ m đến 3m (m là số ràng buộc) .

3- Giải thuật đơn hình cơ bản

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc

$$\min/\max \ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Giả sử rằng sau khi hoán vị các cột trong A ta chọn được ma trận cơ sở B thoả sự phân hoạch sau đây :

$$A = [B \quad N]$$
$$c^T = [c_B \quad c_N]$$
$$x^T = [x_B \quad x_N]$$

Giải thuật đơn hình cơ bản được thực hiện như sau :

a- Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

b- Tính các tham số :

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b = \bar{b} \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu $z(x) = c_B^T x_B$

. Ma trận $\overline{N} = B^{-1}N$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T \overline{N}$$

- Nếu $\overline{c}_N^T \leq 0$ thì kết thúc giải thuật với phương án tối ưu là :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b = \bar{b} \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

và giá trị hàm mục tiêu là :

$$z(x) = c_B^T x_B$$

- Nếu tồn tại $\overline{c}_s \in \overline{c}_N$ mà $\overline{c}_s > 0$ thì sang bước d.

d- Xác định chỉ số của phần tử pivot trong ma trận $\overline{N}$

. Xác định chỉ số cột s của pivot

$$\overline{c}_s = \max \left\{ \overline{c}_k > 0 \in \overline{c}_N \right\}$$

Nếu $\overline{N}_{is} \le 0$ thì giải thuật dừng, bài toán không có phương án tối ưu. Ngược lại thì tiếp tục.

. Xác định chỉ số dòng r của pivot

$$\min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}, \overline{N}_{is} > 0\right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{N}_{rs}} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Phần tử $\overline{N}_{rs}$ trong ma trận $\overline{N}$ được gọi là phần tử pivot

Trong trường hợp bài toán min

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = c_N^T - c_B^T \overline{N}$$

- Nếu $\overline{c}_N^T \ge 0$ thì kết thúc giải thuật với phương án tối ưu là :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b = \overline{b} \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$$

và giá trị hàm mục tiêu là :

$$z(x) = c_B^T x_B$$

- Nếu tồn tại $\overline{c}_s \in \overline{c}_N$ mà $\overline{c}_s < 0$ thì sang bước d.

d- Xác định chỉ số của phần tử pivot trong ma trận $\overline{N}$

. Xác định chỉ số cột s của pivot

$$\overline{c}_s = \max\left\{ |\,\overline{c}_k\,| \quad \overline{c}_k < 0 \in \overline{c}_N \right\}$$

Nếu $\overline{N}_{is} \le 0$ thì giải thuật dừng, bài toán không có phương án tối ưu. Ngược lại thì tiếp tục.

. Xác định chỉ số dòng r của pivot

$$\min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}, \overline{N}_{is} > 0\right\} = \frac{\overline{b}_r}{\overline{N}_{rs}} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Phần tử $\overline{N}_{rs}$ trong ma trận $\overline{N}$ được gọi là phần tử pivot

e- Thực hiện các hoán vị :

. Cột thứ s trong ma trận N với cột thứ r trong ma trận B

. Phần tử thứ s trong c_N^T với phần tử thứ r trong c_B^T

. Biến x_s trong x_N^T với biến x_r trong x_B^T

f- Quay về (a)

Ví dụ : Tìm phương án tối ưu cho bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc sau đây bằng giải thuật đơn hình cơ bản

$$\max\ z(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5) \end{cases}$$

Ta có :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\qquad N \qquad\qquad\qquad B$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & | & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}$$

$$\qquad x_N^T \qquad\qquad\qquad x_B^T$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\qquad c_N^T \qquad\qquad\qquad c_B^T$$

Lần lặp1

a- Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

$$B^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b- Tính các tham số

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \overline{b} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x) = c_B^T x_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

. Tính ma trận :

$$\overline{N} = B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T \overline{N} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Chuyển sang bước d

d- Xác định chỉ số của pivot

. Xác định chỉ số cột pivot s :

$$\overline{c}_s = \max \left\{ \overline{c}_k > 0 \in \overline{c}_N \right\} = \max \{ 2, 1 \} = 2 = \overline{c}_1$$

Vậy s=1

Ma trận cột s=1 trong ma trận $\overline{N}$ là $\overline{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

. Xác định chỉ số dòng pivot r :

$$\min \left\{ \frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}} \right\} = \min \left\{ \frac{\overline{b}_1}{\overline{N}_{11}}, \frac{\overline{b}_2}{\overline{N}_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{3}{1}, \frac{6}{1} \right\} = 3 = \frac{\overline{b}_1}{\overline{N}_{11}}$$

Vậy r = 1

e- Hoán vị

. Cột thứ s=1 trong ma trận N và cột thứ r=1 trong ma trận B

. Phần tử thứ s=1 trong c_N^T với phần tử thứ r=1 trong c_B^T

. Biến thứ s=1 trong x_N^T với biến thứ r=1 trong x_B^T

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$c^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow c^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\right] \rightarrow x^T = \left[\begin{array}{cc|ccc} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & x_5 \end{array}\right]$$

f- Quay về bước a

Lần lặp 2

a. Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b- Tính các tham số

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \overline{b} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x) = c_B^T x_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 6$$

. Tính ma trận :

$$\overline{N} = B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T \overline{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Chuyển sang bước d

d- Xác định chỉ số của pivot

. Xác định chỉ số cột pivot s :

$$\overline{c}_s = \max \left\{ \overline{c}_k > 0 \in \overline{c}_N \right\} = \max \{ 3 \} = 3 = \overline{c}_2$$

Vậy s=2

Ma trận cột s=2 trong ma trận $\overline{N}$ là $\overline{N}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

. Xác định chỉ số dòng pivot r :

$$\min\left\{\frac{\overline{b}_i}{\overline{N}_{is}}\right\} = \min\left\{\frac{\overline{b}_2}{\overline{N}_{22}}, \frac{\overline{b}_3}{\overline{N}_{23}}\right\} = \min\left\{\frac{3}{3}, \frac{5}{1}\right\} = 1 = \frac{\overline{b}_2}{\overline{N}_{22}}$$

Vậy r = 2

e- Hoán vị

. Cột thứ s=2 trong ma trận N và cột thứ r=2 trong ma trận B

. Phần tử thứ s=2 trong c_N^T với phần tử thứ r=2 trong c_B^T

. Biến thứ s=2 trong x_N^T với biến thứ r=2 trong x_B^T

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & | & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & | & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} x_3 & x_2 & | & x_1 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} \rightarrow x^T = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & | & x_1 & x_2 & x_5 \end{bmatrix}$$

f- Quay về bước a

Lần lặp 3

a. Tính ma trận nghịch đảo B^{-1}

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

b- Tính các tham số

. Phương án cơ sở khả thi tốt hơn :

$$x = \begin{bmatrix} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \overline{b} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

. Giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x) = c_B^T x_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 9$$

. Tính ma trận :

$$\overline{N} = B^{-1}N = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

c- Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\overline{c}_N^T = c_N^T - c_B^T \overline{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} < 0 : \text{dừng}$$

Vậy phương án tối ưu sẽ là :

$$\begin{cases} x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Giá trị hàm mục tiêu là $z(x) = 9$ với $x_1 = 4$ và $x_2 = 1$

4- Chú ý trong trường hợp suy biến

Trong trường hợp bài toán suy biến, nghĩa là $\bar{b}_r = 0$, ta có :

$$\hat{x}_s = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = 0$$

cho nên giá trị của hàm mục tiêu không thay đổi khi thay đổi cơ sở, vì :

$$z(\hat{x}) = z(x) + \bar{c}_s \hat{x}_s = z(x)$$

Vậy thì, có thể sau một số lần thay đổi cơ sở lại quay trở về cơ sở đã gặp và lặp như vậy một cách vô hạn. Người ta có nhiều cách để khắc phục hiện tượng này bằng cách xáo trộn một chút các dữ liệu của bài toán, sử dụng thủ tục từ vựng, quy tắc chọn pivot để tránh bị khử.

II- GIẢI THUẬT ĐƠN HÌNH CẢI TIẾN

1- Một cách tính ma trận nghịch đảo

Trong giải thuật đơn hình cơ bản hai ma trận kề B và $\hat{B}$ chỉ khác nhau một cột vì vậy có thể tính ma trận nghịch đảo $\hat{B}^{-1}$ một cách dễ dàng từ B^{-1}. Để làm điều đó chỉ cần nhân (bên trái) B^{-1} với một ma trận đổi cơ sở được xác định như sau :

$$\mu = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & \frac{-\bar{a}_{1s}}{\bar{a}_{rs}} & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & \frac{-\bar{a}_{2s}}{\bar{a}_{rs}} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \frac{1}{\bar{a}_{rs}} & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \frac{-\bar{a}_{ms}}{\bar{a}_{rs}} & .. & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rightarrow \text{dòng } r \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow \text{cột } r \end{array}$$

Khi đó :

$$\hat{B}^{-1} = \mu B^{-1}$$

Ta thấy rằng ma trận đổi cơ sở μ được thiết lập giống như một ma trận đơn vị mxm, trong đó cột r có các thành phần được xác định như sau :

$\dfrac{-\bar{a}_{is}}{\bar{a}_{rs}}$: đối với thành phần $i \neq r$.

$\dfrac{1}{\bar{a}_{rs}}$: đối với thành phần r .

Khi mà ma trận cở sở xuất phát là ma trận đơn vị, sau một số bước đổi cơ sở B^0 B^1 B^2 .... B^q tương ứng với các ma trận đổi cơ sở μ^0 μ^1 μ^2 ....μ^{q-1} người ta có cách tính ma trận nghịch đảo như sau :

$$\left[B^q\right]^{-1} = \mu^0.\mu^1\ldots\ldots\mu^{q-1}$$

2- Quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn

Quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn là quy hoạch tuyến tính chính tắc mà trong đó có thể rút ra một ma trận cơ sở là ma trận đơn vị. Quy hoạch tuyến tính chuẩn có dạng :

$$\min/\max \ z(x) = c^T x$$
$$\begin{cases} [I \quad N]\, x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3- Giải thuật đơn hình cải tiến

Từ những kết quả trên người ta xây dựng giải thuật đơn hình cải tiến đối với bài toán qui hoạch tuyến tính (max) dạng chuẩn như sau :

a- Khởi tạo

$$\bar{A}_0 = A$$
$$\bar{b}_0 = b$$

b- Thực hiện bước lặp với k = 0,1,2, ...

. Xác định phương án cơ sở khả thi :

$$x^k = \begin{bmatrix} x_{B_k} = \bar{b}_k \\ \\ x_{N_k} = 0 \end{bmatrix}$$

. Tính giá trị hàm mục tiêu :

$$z(x^k) = c_{B_k}^T x_{B_k} = c_{B_k}^T \bar{b}_k$$

. Xét dấu hiệu tối ưu :

$$\bar{c}_k^T = c^T - c_{B_k}^T \bar{A}_k$$

- Nếu $\bar{c}_k^T \leq 0$ thì giải thuật dừng và :

$$x^k = \begin{bmatrix} x_{B_k} = \overline{b}_k \\ x_{N_k} = 0 \end{bmatrix} \text{ là phương án tối ưu}$$

$$z(x^k) = c_{B_k}^T x_{B_k} = c_{B_k}^T \overline{b}_k \text{ là giá trị hàm mục tiêu}$$

- Ngược lại thì sang bước (c)

c- Cập nhật các giá trị mới :

.Tính pivot

.Tính ma trận chuyển cơ sở μ^k

.Tính $\overline{A}_{k+1} = \mu^k \overline{A}_k$

.Tính $\overline{b}_{k+1} = \mu^k \overline{b}_k$

.Tăng số lần lặp k=k+1.

Quay về bước b

Ví dụ

Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây bằng phương pháp đơn hình cải tiến :

$$\max\ z(x) = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

Bước khởi tạo

$$\overline{A}_0 = A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{N_0} \Bigg| \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_0} \qquad \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [\underbrace{2 \quad 1}_{c_{N_0}^T} \mid \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{c_{B_0}^T}]$$

Bước lặp k=0

$$x^0 = \begin{bmatrix} x_{B_0} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} \\ x_{N_0} = 0 \end{bmatrix}$$

$$z(x^0) = c_{B_0}^T \bar{b}_0 = [0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix} = 0$$

$$\bar{c}_0^T = c^T - c_{B_0}^T \bar{A}_0 = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0] - [0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$$

$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix}$ suy ra pivot : $\bar{a}_{11} = 1$

$$\mu^0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 = \mu^0 \bar{A}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_1 = \mu^0 \bar{b}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\6\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix}$$

Bước lặp k=1

$$x^1 = \begin{bmatrix} x_{B_1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \bar{b}_1 = \begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix} \\ x_{N_1} = 0 \end{bmatrix}$$

$$z(x^1) = c_{B_1}^T \bar{b}_1 = [2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix} = 6$$

$$\bar{c}_1^T = c^T - c_{B_1}^T \bar{A}_1 = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0] - [2\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$= [\ 0\ 3\ {-2}\ \ 0\ \ 0\ ]$

$$\begin{bmatrix}-1\\3\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix}$$ suy ra pivot : $\overline{a}_{22} = 3$

$$\mu^1 = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{A}_2 = \mu^1\overline{A}_1 = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$$

$$\overline{b}_2 = \mu^1\overline{b}_1 = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\\4\end{bmatrix}$$

Bước lặp k=2

$$x^2 = \begin{bmatrix} x_{B_2} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_5\end{bmatrix} = \overline{b}_2 = \begin{bmatrix}4\\1\\4\end{bmatrix} \\ x_{N_2} = 0 \end{bmatrix}$$

$$z(x^2) = c_{B_2}^T\overline{b}_2 = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\1\\4\end{bmatrix} = 9$$

$$\overline{c}_2^T = c^T - c_{B_2}^T\overline{A}_2 = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}$$

= [0 0 -1 -1 0] : thoả dấu hiệu tối ưu.

Vậy kết quả của bài toán là :

. Phương án tối ưu $x = x^2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

. Giá trị hàm mục tiêu $z(x) = 9$

4- Phép tính trên dòng - Bảng đơn hình

Các bước thực hiện giải thuật đơn hình cải tiến được trình bày lần lượt trong các bảng, gọi là bảng đơn hình. Trong thực hành, để cập nhật những giá trị mới ta có thể làm như sau :

. Tìm pivot.

. Chia dòng chứa pivot cho pivot.

. Khử các phần tử trên cột chứa pivot.

. Tính dấu hiệu tối ưu.

. Tính giá trị hàm mục tiêu .

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}_0$
0	3	1	-1	1	0	0	3
0	4	1	2	0	1	0	6
0	5	-1	2	0	0	1	2
c^T		2	1	0	0	0	$z(x^0)$
$\bar{c}_0^T$		2	1	0	0	0	0

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}_1$
2	1	1	-1	1	0	0	3
0	4	0	3	-1	1	0	3
0	5	0	1	1	0	1	5
c^T		2	1	0	0	0	$z(x^1)$
$\bar{c}_1^T$		0	3	-2	0	0	6

c_{B_2}	i_{B_2}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}_2$
2	1	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	4
1	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
0	5	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	4
c^T		2	1	0	0	0	$z(x^2)$
$\bar{c}_2^T$		0	0	-1	-1	0	9

III- PHƯƠNG PHÁP BIẾN GIẢ CẢI BIÊN

1- Bài toán cải biên

a- Cải biên bài toán quy hoạch tuyến tính

Người ta có thể biến đổi một bài toán quy hoạch tuyến tính chính tắc thành dạng chuẩn bằng cách cộng một cách phù hợp vào vế trái của ràng buộc i một biến giả $x_{n+i} \geq 0$ để làm xuất hiện ma trận đơn vị. Vì các biến giả cải biên có ảnh hưởng đến hàm mục tiêu nên cũng sẽ có sự cải biên hàm mục tiêu.

Vậy, người ta có thể biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát, gọi là bài toán xuất phát, thành bài toán dạng chuẩn, gọi là bài toán cải biên (mở rộng)

Ví dụ :

Biến đổi bài toán quy hoạch tuyến tính sau đây thành dạng chuẩn

$$\max z(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ -4x_2 - x_3 + 6x_4 = 18 \\ 3x_2 + 8x_4 = 28 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,3,4)$$

Bài toán xuất phát có các biến, ma trận ràng buộc và chi phí :

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [2 \quad 1 \quad 1 \quad -1]$$

Bằng cách thêm biến giả x_5, x_6 lần lượt vào ràng buộc 2 và 3 . Ta được bài toán cải biên :

$$\max\ z'(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - M(x_5 + x_6)$$
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 5x_4 = 25 \\ -4x_2 - x_3 + 6x_4 + x_5 = 18 \\ 3x_2 + 8x_4 + x_6 = 28 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,3,4,5,6)$$

$z'(x)$ là hàm mục tiêu cải biên sẽ được giải thích trong phần tiếp theo.

Các biến, ma trận ràng buộc các hệ số và chi phí của bài toán cải biên là

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]$$
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$c^T = [2 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -M \quad -M]$$

b- Quan hệ giữa bài toán xuất phát và bài toán cải biên

Người ta kiểm chứng rằng :

- Nếu $x^T = [x_1 \ \ x_2 \ \ldots \ x_n]$ là phương án (tối ưu) của bài toán xuất phát thì $\overline{x}^T = [x_1 \ \ x_2 \ \ldots \ x_n \ \ 0 \ \ 0 \ \ldots \ 0]$ là phương án (tối ưu) của bài toán cải biên tương ứng.

Vậy nếu bài toán cải biên không có phương án tối ưu thì bài toán xuất phát cũng sẽ không có phương án tối ưu.

- Nếu $\overline{x}^T = [x_1 \ \ x_2 \ \ldots \ x_n \ \ 0 \ \ 0 \ \ldots \ 0]$ là phương án tối ưu của bài toán cải biên thì $x^T = [x_1 \ \ x_2 \ \ldots \ x_n]$ là phương án tối ưu của bài toán xuất phát

- Nếu bài toán cải biên có một phương án tối ưu mà trong đó có ít nhất một biến giả có giá trị dương thì bài toán xuất phát không có phương án tối ưu.

- Nếu bài toán cải biên (dạng chuẩn) có phương án tối ưu thì cũng sẽ phương án cơ sở tối ưu.

Ví dụ

1- Xét bài toán :

$$\min\ z(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 - 5x_5$$

$$\begin{cases} -3x_3 - 9x_4 = 0 \\ x_2 - 7x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 5 \\ x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 + \dfrac{2}{3}x_3 + \dfrac{4}{3}x_4 + \dfrac{1}{3}x_5 = \dfrac{2}{3} \\ \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = 1,2,3,4,5)$$

Bài toán cải biên không có phương án tối ưu nên bài toán xuất phát cũng không có phương án tối ưu .

2- Xét bài toán :

$$\min\ z(x) = -16x_1 + 7x_2 + 9x_3$$

$$\begin{cases} -\dfrac{2}{3}x_1 - \dfrac{1}{3}x_2 + x_3 = \dfrac{1}{3} \\ -5x_1 + 5x_2 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3)$$

Phương án tối ưu của bài toán cải biên :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{7}{5} & \dfrac{22}{15} & 0 \end{bmatrix}$$

Phương án tối ưu của bài toán xuất phát :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{7}{5} & \dfrac{22}{15} \end{bmatrix}$$

3- Xét bài toán :

$$\min\ z(x) = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 27 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 50 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 18 \end{cases}$$

$$x_j \quad (j = 1,2,3)$$

Phương án tối ưu của bài toán cải biên :

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25 & 43 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Bài toán xuất phát không có phương án tối ưu .

Hai phương pháp biến giả cải biên thương dùng là phương pháp hai pha và phương pháp M vô cùng lớn .

2- Phương pháp hai pha

Pha 1

Tìm phương án tối ưu cho bài toán cải biên với hàm mục tiêu cải biên là :

min (tổng tất cả biến giả cải biên)

Pha 2

Tìm phương án tối ưu cho bài toán xuất phát với phương án cơ sở khả thi xuất phát là phương án tối ưu tìm được ở pha 1. Ở pha 2 này các biến giả cải biên bị loại ra khỏi ma trận các hệ số ràng buộc, và vectơ chi phí được cập nhật lại, do đó dấu hiệu tối ưu cũng được cập nhật lại

Đây là phương pháp thuận lợi cho việc lập trình ứng dụng giải thuật đơn hình cải tiến.

Ví dụ : Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \ge \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3)$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc bằng cách thêm biến phụ x_4 , x_5 ta được

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

Ma trận các hệ số ràng buộc là :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ không chứa ma trận đơn vị

Áp dụng phương pháp đơn hình cải biên hai pha như sau :

Pha 1

Thêm biến giả (cải biên) $x_6 \geq 0$ vào ràng buộc thứ hai để được ma trận đơn vị . Khi đó bài toán cải biên có dạng :

$$\min\ w(x) = x_6$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6)$$

Có ma trận các ràng buộc là :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ có chứa ma trận đơn vị

Giải bài toán cải biên bằng giải thuật đơn hình cải tiến

Khởi tạo

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bước lặp k=0

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_0$
0	4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$
1	6	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$
c^T		0	0	0	0	0	1	$w(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		-1	-2	-3	0	1	0	$\frac{7}{3}$

Bước lặp k= 1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_1$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
0	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		0	0	0	0	0	1	$w(x^1)$
$\overline{c}_1^T$		0	0	0	0	0	1	0

Ta được phương án tối ưu . Xong pha 1 . Chuyển sang pha 2.

Pha 2

Loại bỏ biến giả cải biên $x_6 \ge 0$

Khởi tạo

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\overline{b}_0 = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{7}{9} \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bước lặp k=0

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_0$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$

Bước lặp k=1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_1$
0	4	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$
4	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^1)$
$\overline{c}_1^T$		1	0	-5	0	2	$\frac{14}{3}$

Bước lặp k=2

c_{B_2}	i_{B_2}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_2$
0	5	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$
4	2	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{3}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^2)$
$\overline{c}_2^T$		1	0	-3	-2	0	$\frac{16}{3}$

Bước lặp k=3

c_{B_3}	i_{B_3}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_3$

0	5	0	0	-1	1	1	$\frac{1}{3}$
3	1	1	2	2	1	0	$\frac{8}{3}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^3)$
$\bar{c}_3^T$		0	-2	-5	-2	0	8

Kết quả của bài toán đã cho :

. Phương án tối ưu
$$\begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

. Giá trị hàm mục tiêu $z(x)=z(x^3)= 8$

3- Phương pháp M vô cùng lớn

Phương pháp M vô cùng lớn (M là số vô cùng lớn) tương tự như phương pháp hai pha, ngoại trừ ở pha 1 hàm mục tiêu cải biên có dạng sau đây cho bài toán max/min

max [z(x) - M*(tổng các biến giả cải biên)]

min [z(x) + M*(tổng các biến giả cải biên)]

Bằng phương pháp này, trong quá trình tối ưu, các biến giả cải biên sẽ được loại dần ra khỏi ma trận cơ sở : tất cả đều bằng 0. Nếu trong quá trình tìm phương án tối ưu mà không loại bỏ được các biến giả cải biên ra khỏi cơ sở thì bài toán vô nghiệm.

So với phương pháp hai pha thì phương pháp này tránh được việc phải cập nhật lại dữ liệu cho bài toán gốc nhưng không tiện lợi bằng trong lập trình ứng dụng.

Ví dụ : Xét bài toán tương tự như trên

$$\max\ z(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5)$$

Thêm biến giả cải biên $x_6 \ge 0$ vào ràng buộc thứ hai đồng thời cải biên hàm mục tiêu theo như trên ta được :

$$\max\ w(x) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 - Mx_6$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = \dfrac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_5 + x_6 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4,5,6)$$

Tìm phương án tối ưu cho bài toán cải biên này bằng phương pháp đơn hình cải tiến

Khởi tạo

$$\overline{A}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \overline{b}_0 = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad c^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & -M \end{bmatrix}$$

Bước lặp k=0

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_0$
0	4	1	2	2	1	0	0	$\frac{8}{3}$
-M	6	1	2	3	0	-1	1	$\frac{7}{3}$
c^T		3	4	1	0	0	-M	$w(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		3+M	4+2M	1+3M	0	-M	0	$-\frac{7M}{3}$

Bước lặp k= 1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\overline{b}_1$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		3	4	1	0	0	-M	$w(x^1)$
$\overline{c}_1^T$		$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}-M$	$\frac{7}{9}$

Do $x_6 = 0$ (vì ngoài cơ sở) nên bị loại ra khỏi bảng và ta tiếp tục tìm phương án tối ưu cho bài toán gốc đã cho có phương án cơ sở khả thi được khởi tạo như sau :

c_{B_0}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}_0$
0	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{9}$
1	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$
c^T		3	4	1	0	0	$z(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$

Các bước tiếp theo được thực hiện giống như phương pháp hai pha.

IV- QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH SUY BIẾN

Khi thực hiện thuật toán đơn hình trường hợp bất thường có thể xảy ra là khi xác định biến ra thì tồn tại tỷ số $\frac{b_i}{a_{ik}} = 0$, tức là tồn tại $b_i=0$, hay không có tỷ số nào dương thật sự. Người ta xem đây là trường hợp suy biến. Khi một bảng đơn hình rơi vào tình trạng suy biến thì có thể gây khó khăn mà cũng có thể không khi ta tiếp tục thực hiện thuật toán đơn hình.

1- Các ví dụ về quy hoạch tuyến tính suy biến

Ví dụ 1 : xét quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -3x_1 \le 6 \\ -2x_1 \le 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_5 = 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

với ma trận hệ số là :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		b
1	-2	1	0	0		2
-3	0	0	1	0		6
-2	0	0	0	1		0

có chứa ma trận đơn vị. Áp dụng thuật toán đơn hình cải tiến ta được :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	3	1	-2	1	0	0	2
0	4	-3	0	0	1	0	6
0	5	-2	0	0	0	1	0
c^T		1	-1	0	0	0	w=7
$\bar{c}^T$		1	-1	0	0	0	

Đây là trường hợp suy biến, biến vào là x_2, nó được tăng lên đến mức vẫn thỏa những điều kiện về dấu của các biến trong cơ sở x_3, x_3, x_5 . Đó là :

$$\begin{cases} x_3 = 2 + 2x_2 \geq 0 \\ x_4 = 6 + 0x_2 \geq 0 \\ x_3 = 0 + 0x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 \geq -\dfrac{2}{2} \\ \forall x_2 \geq 0 \\ \forall x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Như vậy x_2 có thể lớn tùy ý nên hàm mục tiêu không bị giới nội. Vậy bài toán không có phương án tối ưu. Trường hợp này ở bảng đơn hình không có tỷ số nào dương thật sự để xác định biến ra.

Ví dụ 2 : xét quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ -3x_1 \leq 6 \\ -2x_1 \leq 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn :

$$\min\ z(x) = 7 + x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -3x_1 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_5 = 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

với ma trận hệ số là :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		b
1	2	1	0	0		2
-3	0	0	1	0		6
-2	0	0	0	1		0

có chứa ma trận đơn vị. Áp dụng thuật toán đơn hình cải tiến ta được :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	3	1	**2**	1	0	0	2
0	4	-3	0	0	1	0	6
0	5	-2	0	0	0	1	0
c^T		1	-1	0	0	0	w=7
$\bar{c}^T$		1	-1	0	0	0	

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1
0	4	-3	0	0	1	0	6
0	5	-2	0	0	0	1	0
c^T		1	-1	0	0	0	w=6
$\bar{c}^T$		$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	

Đây là bảng đơn hình tối ưu.

Ví dụ 3 : xét quy hoạch tuyến tính :

$$\min\ w(x) = -3 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \le 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn :

$$\min\ w(x) = -3 + \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{3}{2}x_3$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0$$

với ma trận hệ số :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	1
-1	1	1	0	1	0

có chứa ma trận đơn vị . Áp dụng giải thuật đơn hình cải tiến :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	1
0	5	-1	**1**	1	0	1	0
c^T		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	w=-3
$\bar{c}^T$		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	

x_2 vào , x_5 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	4	$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	1		1
-2	2	-1	1	-1	0		0
c^T		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	w=-3
$\bar{c}^T$		$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	2	

x_1 vào , x_4 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$\frac{1}{2}$	1	1	0	1	2	0	2
-2	2	0	1	0	2	1	2
c^T		$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	0	0	w=-6
$\bar{c}^T$		0	0	1	3	2	

Đây là bảng đơn hình tối ưu

Ví dụ 4 : xét quy hoạch tuyến tính

$$\min\ z(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 - 5{,}5x_2 - 2{,}5x_3 + 9x_4 \le 0 \\ 0{,}5x_1 - 1{,}5x_2 - 0{,}5x_3 + x_4 \le 0 \\ x_1 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

Đưa bài toán về dạng chuẩn

$$\min\ w(x) = -10x_1 + 57x_2 + 9x_3 + 24x_4$$

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 - 5{,}5x_2 - 2{,}5x_3 + 9x_4 + x_5 = 0 \\ 0{,}5x_1 - 1{,}5x_2 - 0{,}5x_3 + x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 + x_7 = 1 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0$$

với ma trận hệ số

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		b
0,5	-5,5	-2,5	9	1	0	0		0
0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0		0
1	0	0	0	0	0	1		1

có chứa ma trận đơn vị . Áp dụng phương pháp đơn hình cải tiến

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	5	**0,5**	-5,5	-2,5	9	1	0	0	0
0	6	0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		-10	57	9	24	0	0	0	

x_1 vào , x_5 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
-10	1	1	-11	-5	18	2	0	0	0
0	6	0	**4**	2	-8	-1	1	0	0
0	7	0	11	5	-18	-2	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		0	-53	-41	204	20	10	0	

x_2 vào , x_6 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
-10	1	1	0	**0,5**	-4	-0,75	2,75	0	0
57	2	0	1	0,5	-2	-0,25	0,25	0	0
0	7	0	0	-0,5	4	0,75	-2,75	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		0	0	-14,5	98	6,75	13,25	0	

x_3 vào , x_1 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b

9	3	2	0	1	-8	-1,5	5,5	0	0
57	2	-1	1	0	**2**	0,5	-2,5	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		29	0	0	-18	-15	93	0	

x_4 vào , x_2 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
9	3	-2	4	1	0	**0,5**	-4,5	0	0
24	4	-0,5	0,5	0	1	0,25	-1,25	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		20	9	0	0	-10,5	70,5	0	

x_5 vào , x_3 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	5	-4	8	2	0	1	-9	0	0
24	4	0,5	-1,5	-0,5	1	0	**1**	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		-22	93	21	0	0	-24	0	

x_6 vào , x_4 ra

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
0	5	0,5	-5,5	-2,5	9	1	0	0	0
0	6	0,5	-1,5	-0,5	1	0	1	0	0
0	7	1	0	0	0	0	0	1	1
c^T		-10	57	9	24	0	0	0	w=0
$\bar{c}^T$		-10	57	9	24	0	0	0	

Bảng đơn hình hiện thời giống với bảng đơn hình xuất phát : đây là hiện tượng xoay vòng .

2- Xử lý trường hợp suy biến

Theo các ví dụ trên, trong trường hợp quy hoạch tuyến tính suy biến thì sau một số lần lặp có thể phương án nhận được vẫn như cũ mà không có sự thay đổi nào, có thể phương án nhận được tốt hơn, có thể phương án nhận được là một phương án đã nhận trước đó rồi và từ đó cứ xoay vòng mãi. Do đó nếu không có biện pháp phòng ngừa thì thuật toán đơn hình sẽ có thể kéo dài vô tận.

Khi thực hiện thuật toán đơn hình thì hiện tượng suy biến xảy ra khi có sự tình cờ khử lẫn nhau làm cho tồn tại $\bar{b}_i$ nào đó bằng 0. Trong trường hợp này có thể có nhiều biến thỏa điều kiện của biến ra. Gặp trường hợp này cần phải lựa chọn biến ra sao cho tránh được hiện tượng xoay vòng.

Người ta thường dùng phương pháp nhiễu loạn, phương pháp từ vựng để tránh sự tình cờ khử lẫn nhau này. Trong thực tiễn tính toán người ta đã đề ra một quy tắc xử lý khá đơn giản, gọi là quy tắc Bland, khi dùng giải thuật đơn hình giải các quy hoạch tuyến tính suy biến, đó là :

Với x_k là biến vào , biến ra x_r được chọn là biến có chỉ số nhỏ nhất thỏa điều kiện chọn biến ra :

$$\min \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ik}}, \bar{a}_{ik} > 0 \right\} \quad (i = 1,2,\ldots,m)$$

Ví dụ :

Xét quy hoạch tuyến tính suy biến :

$$\min\ w(x) = -\frac{4}{3}x_4 - +2x_5 - x_6 + 16x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_4 - 2x_5 - x_6 + 12x_7 = 0 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_4 - x_5 - \frac{1}{6}x_6 + \frac{2}{3}x_7 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 - 9x_7 = 2 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Áp dụng quy tắc Bland ta thấy :

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
0	1	1	0	0	$\boldsymbol{\frac{1}{3}}$	-2	-1	12	0
0	2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0
0	3	0	0	1	0	1	1	-9	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\bar{c}^T$		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	

Biến ra có thể là x_1 hay x_2 . Chọn x_1

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
$-\frac{4}{3}$	4	3	0	0	1	-6	-3	36	0

0	2	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	**2**	$\frac{4}{3}$	$-\frac{34}{3}$	0
0	3	0	0	1	0	1	1	-9	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\bar{c}^T$		4	0	0	0	-6	-5	64	

Biến ra là x_2

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
$-\frac{4}{3}$	4	$-\frac{3}{2}$	3	0	1	0	**1**	2	0
2	5	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{17}{3}$	0
0	3	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\bar{c}^T$		$-\frac{1}{2}$	3	0	0	0	-1	30	

Biến ra có thể là x_4 hay x_5 . Chọn x_4

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
-1	6	$-\frac{3}{2}$	3	0	1	0	1	2	0
2	5	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	-7	0
0	3	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	-4	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=0
$\bar{c}^T$		-2	6	0	1	0	0	32	

Biến ra là x_5

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
-1	6	0	-6	0	-3	6	1	-40	0
0	1	1	6	0	$-\frac{8}{3}$	4	0	-28	0

0	3	0	6	1	3	-5	0	**31**	2
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w=
$\bar{c}^T$		0	-6	0	$-\frac{13}{3}$	81	0	-24	

Biến ra là x_3

c_B	i_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\bar{b}$
-1	6	0	$\frac{54}{31}$	$\frac{40}{31}$	$\frac{27}{31}$	$-\frac{14}{31}$	1	0	$\frac{80}{31}$
0	1	1	$-\frac{18}{31}$	$\frac{28}{31}$	$\frac{4}{93}$	$-\frac{16}{31}$	0	0	$\frac{56}{31}$
16	7	0	$\frac{6}{31}$	$\frac{1}{31}$	$\boldsymbol{\frac{3}{31}}$	$-\frac{5}{31}$	0	1	$\frac{2}{31}$
c^T		0	0	0	$-\frac{4}{3}$	2	-1	16	w= $-\frac{48}{31}$
$\bar{c}^T$		0	$\frac{42}{31}$	$\frac{24}{31}$	$-\frac{187}{93}$	$\frac{128}{31}$	0	0	

Đến đây không còn hiện tượng suy biến.

Biến vào là x_7

CÂU HỎI CHƯƠNG 2

1- Trình bày cơ sở lý thuyết của thuật toán đơn hình cơ bản.

2- Định nghĩa quy hoạch tuyến chuẩn.

3- Trình bày các bước lập bảng đơn hình theo phép toán trên dòng .

4- Cải biên một quy hoạch tuyến tính tổng quát như thế nào ? . Cách giải quy hoạch tuyến tính cải biên và quy hoạch tuyến tính gốc.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2

1- Tìm phương án tối ưu của bài toán sau đây bằng phương pháp đơn hình cơ bản

a)- $$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b)- $$\min\ z = -2x_1 - 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 5x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c)- $$\min w = x_1 + 2x_3 + x_5$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

2- Tìm phương án tối ưu của bài toán sau bằng phương pháp đơn hình cải tiến

a) $$\max z = 5x_1 + 3x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 80 \\ x_1 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b) $$\max z = x_1 + 2x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 7 \\ x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c) $$\max z = 5x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \le 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

3- Tìm phương án tối ưu của các bài toán sau bằng phương pháp biến giả cải biên.

a) $$\max z = 3x_1 - x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 100 \end{cases}$$

$x_1 \geq 10$

$x_2 \geq 0$

b) $\min w = 3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 \geq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

c) $\max z = 3x_1 + x_2 - 3x_3$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ -10x_2 + 5x_3 = 5 \\ -3x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_i \geq 0, \forall i = 1 \rightarrow 3 \end{cases}$$

d)- $\max z = 2x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

e)- $\min w = -x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

f)- $\max z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -3 \\ -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

g)- $\min w = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq -1 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$