CHƯƠNG III
BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

Chương này trình bày trình bày khái niệm đối ngẫu, các quy tắc đối ngẫu và giải thuật đối ngẫu. Đây là các kiến thức có giá trị trong ứng dụng vì nhờ đó có thể giải một quy hoạch tuyến tính từ quy hoạch tuyến tính đối ngẫu của nó.

Nội dung chi tiết của chương này bao gồm :

I- KHÁI NIỆM VỀ ĐỐI NGẪU

1- Đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

2- Định nghĩa đối ngẫu trong trường hợp tổng quát

3- Các định lý về sự đối ngẫu

a- Định lý 1 (đối ngẫu yếu)

b- Định lý 2

c- Định lý 3

d- Định lý 4 (sự đối ngẫu)

e- Định lý 5 (tính bổ sung)

II- GIẢI THUẬT ĐỐI NGẪU

CHƯƠNG III
BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

I- KHÁI NIỆM VỀ ĐỐI NGẪU

Đối ngẫu là một khái niệm cơ bản của việc giải bài toán quy hoạch tuyến tính vì lý thuyết đối ngẫu dẫn đến một kết quả có tầm quan trọng về mặt lý thuyết và cả mặt thực hành.

1- Đối ngẫu của quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Xét một bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\ z(x) = c^T x \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \end{array}}$$

Giả sử rằng x* là phương án tối ưu cần tìm của bài toán và x^0 là một phương án của bài toán thì một cận trên của giá trị mục tiêu tối ưu được xác định vì :

$$c^T x^* \leq c^T x^0$$

Tuy chưa tìm được phương án tối ưu x* nhưng nếu biết thêm được một cận dưới của giá trị mục tiêu tối ưu thì ta đã giới hạn được phần nào giá trị mục tiêu tối ưu. Người ta ước lượng cận dưới này theo cách như sau :

Với mỗi vectơ $x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n] \geq 0$ thuộc R^n chưa thoả ràng buộc của bài toán, tức là

$$b - Ax \neq 0$$

người ta *nới lỏng* bài toán trên thành bài toán nới lỏng :

$$\boxed{\begin{array}{l} \min L(x,y) = c^T x + y^T(b - Ax) \\ x \geq 0 \\ y^T = [\, y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_m] \text{ tuỳ ý } \in R^m \end{array}}$$

Gọi g(y) là giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán nới lỏng, ta có :

$$g(y) \quad = \min \{\, c^T x + y^T(b - Ax) \,\} \qquad (x \geq 0)$$

$\leq \ c^Tx + y^T(b - Ax)$

Trong trường hợp x là phương án của bài toán ban đầu, tức là :

$$b - Ax = 0$$

thì

$$g(y) \leq c^Tx$$

Vậy g(y) là một cận dưới của giá trị mục tiêu bất kỳ nên cũng là cận dưới của giá trị mục tiêu tối ưu.

Một cách tự nhiên là người ta quan tâm đến bài toán tìm cận dưới lớn nhất, đó là :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max \ g(y) \\ y \text{ tuỳ ý} \in R^m \end{array}}$$

Bài toán này được gọi là *bài toán đối ngẫu* của bài toán ban đầu. Trong phần sau người ta sẽ chứng minh giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán đối ngẫu bằng với giá trị mục tiêu tối ưu của bài toán gốc ban đầu.

Người ta đưa bài toán đối ngẫu về dạng dể sử dụng bằng cách tính như sau :

$$\begin{aligned} g(y) &= \min \{ c^Tx+y^T(b - Ax) \} && (x \geq 0) \\ &= \min \{ c^Tx + y^Tb - y^TAx \} && (x \geq 0) \\ &= \min \{ y^Tb + (c^T - y^TA)x \} && (x \geq 0) \\ &= y^Tb + \min \{ (c^T - y^TA)x \} && (x \geq 0) \end{aligned}$$

Ta thấy :

$$\min_{(x\geq 0)} (c^T - y^TA)x = \begin{cases} 0 \quad \text{khi } c^T - y^TA \geq 0 \\ \text{không xác đinh khi } c^T - y^TA < 0 \end{cases}$$

Vậy ta nhận được :

$$g(y) = y^Tb \ \text{ với } c^T - y^TA \geq 0$$

Suy ra bài tóan đối ngẫu có dạng :

$$\max \ g(y) = y^Tb$$

$$\begin{cases} y^TA \leq c^T \\ y \in R^m \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Hay là :

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\max\ g(y) = b^T y \\
\begin{cases} A^T y \le c \\ y \in R^m \text{ tùy ý} \end{cases}
\end{array}
}
$$

2- Định nghĩa đối ngẫu trong trường hợp quy hoạch tổng quát

Trong trường hợp quy hoạch tuyến tính tổng quát, những quy tắc sau đây được áp dụng để xây dựng bài toán đối ngẫu :

- Hàm mục tiêu đối ngẫu :

  . max $\leftrightarrow$ min

- Biến đối ngẫu :

  . Mỗi ràng buộc $\leftrightarrow$ một biến đối ngẫu

- Chi phí đối ngẫu và giới hạn ràng buộc :

  . Chi phí đối ngẫu $\leftrightarrow$ giới hạn ràng buộc

- Ma trận ràng buộc đối ngẫu :

  . Ma trận chuyển vị

- Chiều của ràng buộc và dấu của biến :

  . Ràng buộc trong bài toán max có dấu $\le$ thì biến đối ngẫu trong bài toán min có dấu ≥ 0 (trái chiều)

  . Ràng buộc trong bài toán max có dấu $=$ thì biến đối ngẫu trong bài toán min có dấu tùy ý.

  . Ràng buộc trong bài toán max có dấu $\ge$ thì biến đối ngẫu trong bài toán min có dấu ≤ 0 (trái chiều)

  . Biến của bài toán max có dấu ≥ 0 thì ràng buộc đối ngẫu trong bài toán min có dấu $\ge$ (cùng chiều)

  . Biến của bài toán max có dấu tùy ý thì ràng buộc đối ngẫu trong bài toán min có dấu $=$.

  . Biến của bài toán max có dấu ≤ 0 thì ràng buộc trong bài toán đối ngẫu min có dấu $\le$ (cùng chiều)

Xét các ràng buộc dạng ma trận của một bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát như sau :

$$a_i^T \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \mathbf{a_{1j}} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \ldots & \mathbf{a_{ij}} & \ldots & \mathbf{a_{in}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \mathbf{a_{mj}} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_j \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{matrix} = \\ \le \\ \ge \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_i \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\uparrow A_j$$

Ký hiệu :

a_i^T là dòng thứ i (i=1,2,...,m)

A_j là cột thứ j (j=1,2,...,n)

Khi đó, mối liên hệ giữa hai bài toán đối ngẫu có thể được trình bày như sau :

$z(x) = c^Tx \rightarrow \min$	$w(y) = y^Tb \rightarrow \max$	Ràng buộc / Dấu
$a_i^Tx = b_i$ $a_i^Tx \le b_i$ $a_i^Tx \ge b_i$	y_i tự do $y_i \le 0$ $y_i \ge 0$	Cùng chiều
$x_j \ge 0$ $x_j \le 0$ x_j tự do	$y^TA_j \le c_j$ $y^TA_j \ge c_j$ $y^TA_j = c_j$	Trái chiều

Ví dụ

a- Hai bài toán sau đây là đối ngẫu :

$$\max\ z(x) = 30x_1 + 10x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\min\ w(y) = 4y_1 + 6y_2$$
$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 \ge 30 \\ y_1 + 2y_2 \ge 10 \end{cases} \qquad \text{(D)}$$
$$y_1, y_2 \ge 0$$

b- Hai bài toán sau đây là đối ngẫu :

$$\min\ w(x) = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4x_4 \ge 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9 \\ 7x_1 + x_3 - 2x_4 \ge 5 \end{cases} \qquad \text{(D)}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, x_3 \text{ tuy } y, x_4 \le 0$$

$$\max\ z(y) = 6y_1 + 7y_2 + 9y_3 + 5y_4$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 7y_4 \le 1 \\ 2y_1 - 3y_2 - 2y_3 \le -1 \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 + y_4 = 1 \\ 5y_1 - 4y_2 - 2y_4 \ge 2 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

$$y_1 \le 0, y_2 \ge 0, y_3 \text{ tuy } y,\ y_4 \ge 0$$

Đối với cặp bài toán đối ngẫu (P) và (D) chỉ xảy ra một trong ba trường hợp sau :

- Cả hai bài toán đều không có phương án tối ưu .

- Cả hai bài toán đều có phương án, lúc đó chúng đều có phương án tối ưu và giá trị hàm mục tiêu đối với hai phương án tối ưu là bằng nhau.

- Một trong hai bài toán không có phương án, còn bài toán kia thì có phương án, khi đó bài toán có phương án không có phương án tối ưu.

3- Các định lý về sự đối ngẫu

a- Định lý 1 (đối ngẫu yếu)

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$\text{(P)} \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{(D)} \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \ge c \\ y \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Nếu $\overline{x}$ là phương án của bài toán (P)

$\overline{y}$ là phương án của bài toán (D)

thì $z(\overline{x}) \le w(\overline{y})$

nghĩa là giá trị hàm mục tiêu của bài toán max không vượt quá giá trị hàm mục tiêu của bài toán đối ngẫu min trên các phương án bất kỳ của mỗi bài toán .

Chứng minh

$\overline{x}$ là phương án của (P) nên : $A\overline{x} = b$

$$\Rightarrow \quad \overline{y}^T A\overline{x} = \overline{y}^T b = b^T\overline{y} = w(\overline{y})$$

$\overline{y}$ là phương án của (D) nên : $A^T\overline{y} \geq c$

$$\Rightarrow \quad \overline{y}^T A \geq c^T$$

$$\Rightarrow \quad \overline{y}^T A\overline{x} \geq c^T\overline{x} = z(\overline{x})$$

Vậy $z(\overline{x}) \leq w(\overline{y})$

Định lý này được phát biểu và chứng minh cho hai bài toán đối ngẫu trong trường hợp tổng quát .

b- Định lý 2

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$(P)\ \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \quad \text{tùy ý} \end{cases}$$

$\overline{x}$ là phương án khả thi của bài toán (P)

$\overline{y}$ là phương án khả thi của bài toán (D)

Nếu $z(\overline{x}) = w(\overline{y})$ thì $\overline{x}$, $\overline{y}$ lần lượt là phương án tối ưu tương ứng của (P và (D).

Chúng minh

- Nếu $\overline{x}$ không là phương án tối ưu của bài toán (P) thì tồn tại một phương án x sao cho :

$$z(\overline{x}) < z(x)$$

$\Rightarrow \quad w(\overline{y}) < z(x)$: điều này mâu thuẩn với định lý 1.

- Nếu $\overline{y}$ không là phương án tối ưu của bài toán (D) thì tồn tại một phương án y sao cho :

$$w(y) < w(\overline{y})$$

$\Rightarrow \quad w(y) < z(\overline{x})$: điều này mâu thuẩn với định lý 1.

Vậy $\overline{x}$ và $\overline{y}$ lần lượt là phương án tối ưu của (P) và (D).

c- Định lý 3

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$(P)\ \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \quad \text{tùy ý} \end{cases}$$

Nếu x* là phương án tối ưu của bài toán (P) đối với cơ sở B thì phương án tối ưu y* của bài toán (D) được tính bởi công thức :

$$(y^*)^T = c_B^T B^{-1}$$

Chứng minh

Do x* là phương án tối ưu của (P) với cơ sở B nên thoả dấu hiệu tối ưu

$$c^T - c_B^T.B^{-1}A \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad c_B^T.B^{-1}A \geq c^T$$

$$\Rightarrow \quad (y^*)^T A \geq c^T$$

$\Rightarrow$ y* là một phương án của (D)

Mặt khác x* được tính bởi công thức :

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* = B^{-1}b \\ x_N^* = 0 \end{bmatrix}$$

và giá trị mục tiêu tối ưu của (P) là :

$$z(x^*) = c^T x^* = c_B^T x_B^*$$

Ta có :

$$\begin{aligned} w(y^*) &= b^T y^* = b^T (c_B^T B^{-1})^T = (c_B^T B^{-1})b \\ &= c_B^T (B^{-1}b) = c_B^T x_B^* = c_B^T x_B^* = z(x^*) \end{aligned}$$

Theo định lý 2 thì y* là phương án tối ưu của (D).

Định lý này cho phép tìm phương án tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính đối ngẫu từ bài toán gốc. Trong đó :

- c_B^T được xác định trong bảng đơn hình tối ưu của (P).
- B^{-1} gồm m cột tương ứng với m cột của ma trận cơ sở ban đầu lấy từ bảng đơn hình tối ưu của bài toán gốc.

d- Định lý 4 (sự đối ngẫu)

Xét hai bài toán đối ngẫu

$$(P)\ \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \ge c \\ y \quad \text{tùy ý} \end{cases}$$

- Nếu (P) và (D) đều có phương án khả thi thì chúng có phương án tối ưu và giá trị của hàm mục tiêu tương ứng là bằng nhau.

- Nếu một trong hai bài toán có phương án tối ưu không giới nội thì bài toán còn lại không có phương án khả thi.

Chứng minh

- Đây là kết quả của định lý 3 .

- Giả sử rằng phương án tối ưu của (D) không giới nội, tức là tồn tại một phương án khả thi y của (D) sao cho w(y)= $b^T y$ nhỏ tuỳ ý. Điều này cũng có nghĩa là : với mọi M>0 lớn tuỳ ý luôn tìm được một phương án khả thi $\overline{y}$ của (D) sao cho :

$$b^T \overline{y} \le -M$$

Nếu (P) có phương án khả thi là $\overline{x}$ thì theo định lý 1 ta có :

$$z(\overline{x}) = c^T \overline{x} \le w(\overline{y}) = b^T \overline{y} < -M$$

Điều này dẫn đến mâu thuẩn

e- Định lý 5 (tính bổ sung)

Xét hai bài toán đối ngẫu

$$(P)\ \begin{cases} \max\ z(x) = c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad (D)\ \begin{cases} \min\ w(y) = b^T y \\ A^T y \ge c \\ y \quad \text{tùy ý} \end{cases}$$

$\overline{x}$, $\overline{y}$ là phương án khả thi tương ứng của (P) và (D).

Điều kiện cần và đủ để $\overline{x}$, $\overline{y}$ cũng là phương án tối ưu là :

$$\overline{x}^T (A^T \overline{y} - c^T) = 0$$

Chứng minh

- Do $\overline{x}$ là phương án khả thi của (P) nên :

$$A\bar{x} = b$$
$$\Rightarrow (A\bar{x})^T = b^T$$
$$\Rightarrow \bar{x}^T A^T = b^T$$
$$\Rightarrow \bar{x}^T A^T \bar{y} = b^T \bar{y}$$
$$\Rightarrow \bar{x}^T A^T \bar{y} - \bar{x}^T c = b^T \bar{y} - c^T \bar{x} \qquad (x^T c = c^T x)$$
$$\Rightarrow \bar{x}^T (A^T \bar{y} - c) = b^T \bar{y} - c^T \bar{x} \qquad (*)$$

- Theo kết quả (*) :

. Nếu $\bar{x}, \bar{y}$ là phương án tối ưu của (P) và (D) thì theo định lý 4

$$c^T \bar{x} = b^T \bar{y}$$
$$\Rightarrow c^T \bar{x} - b^T \bar{y} = 0$$
$$\Rightarrow \bar{x}^T (A^T \bar{y} - c) = 0$$

. Nếu $\bar{x}^T (A^T \bar{y} - c) = 0 \Rightarrow b^T \bar{y} - c^T \bar{x} = 0 \Rightarrow b^T \bar{y} = c^T \bar{x}$

Theo định lý 2 thì $\bar{x}, \bar{y}$ là phương án tối ưu .

II- GIẢI THUẬT ĐỐI NGẪU

Xét hai bài toán đối ngẫu :

$$\text{(P)} \quad \begin{array}{l} \max\ z(x) = c^T x \\ \begin{cases} Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases} \end{array} \qquad \text{và} \quad \text{(D)} \quad \begin{array}{l} \min\ w(y) = b^T y \\ \begin{cases} A^T y \ge c \\ y \text{ tuy } y \end{cases} \end{array}$$

Chúng ta sẽ xét xem giải thuật đơn hình cơ bản đã biết trong chương trước được áp dụng như thế nào đối với bài toán đối ngẫu.

Giả sử rằng B là một cơ sở của bài toán (P) thoả :

$$y = c_B^T B^{-1} \quad \text{và} \quad N^T y \ge c_N$$

Nếu B cũng là một cơ sở khả thi của bài toán gốc, tức là $x = \begin{bmatrix} x_B = B^{-1}b = \bar{b} \ge 0 \\ x_N = 0 \end{bmatrix}$, thì (theo định lý đối ngẫu) y, x lần lượt là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu và bài toán gốc. Nếu không thì $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ không là phương án của bài toán gốc vì $x_B = \bar{b} = B^{-1}b$ không thể ≥ 0.

Để tiện việc trình bày ta xét (m=3 , n=5) :

$$\max\ z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$$

$$(P)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Các dữ liệu của (P) được trình bày trong bảng sau :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}		b_1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}		b_2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}		b_3

và bài toán đối ngẫu

$$\min\ w(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

$$(D)\quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 \geq c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 \geq c_3 \\ a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_4 \geq c_4 \\ a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 \geq c_5 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ \text{tuy y}$$

Người ta đưa (D) về dạng chính tắc bằng cách thêm các biến phụ y_4 y_5, y_6, y_7, $y_8 \geq 0$. Chúng không ảnh hưởng đến hàm mục tiêu.

$$\min\ w(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + 0.y_4 + 0.y_5 + 0.y_6 + 0.y_7 + 0.y_8$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 - y_4 = c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 - y_5 = c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 + a_{33}y_3 - y_6 = c_3 \\ a_{14}y_1 + a_{24}y_2 + a_{34}y_4 - y_7 = c_4 \\ a_{15}y_1 + a_{25}y_2 + a_{35}y_3 - y_8 = c_5 \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ \text{tuy y} \ -\ y_4, y_5, y_6, y_7, y_8 \geq 0$$

Các dữ liệu của (D) được trình bày trong bảng sau :

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	
b_1	b_2	b_3	0	0	0	0	0	
a_{11}	a_{21}	a_{31}	-1	0	0	0	0	c_1
a_{12}	a_{22}	a_{32}	0	-1	0	0	0	c_2
a_{13}	a_{23}	a_{33}	0	0	-1	0	0	c_3
a_{14}	a_{24}	a_{34}	0	0	0	-1	0	c_4
a_{15}	a_{25}	a_{35}	0	0	0	0	-1	c_5

Giả sử rằng m cột đầu tiên của A là một cơ sở B của (P) thì hai bảng trên được trình bày rút gọn như sau :

x_B^T	x_N^T	
c_B^T	c_N^T	
B	N	b

Bảng (P)

y^T	$y_4 \ldots y_8$		
b^T	0		
B^T	$-I_m$	0	c_B
N^T	0	$-I_{n-m}$	c_N

Bảng (D)

Để đưa bài toán đối ngẫu về dạng chuẩn người ta nhân (bên trái) bảng (D) với bảng sau đây :

$\left(B^{-1}\right)^T$	0
$\left(B^{-1}N\right)^T$	$-I_{n-m}$

Khi đó người ta được bảng kết quả có dạng :

	m	m	n-m	
	y^T	$y_4 y_5 y_6$	$y_7 y_8$	
	0	$\overline{b} = B^{-1}b$	0	
m	I_m	$-\left(B^{-1}\right)^T$	0	$\left(c_B^T B^{-1}\right)^T$
n-m	0	$-\left(\overline{N}\right)^T = -\left(B^{-1}N\right)^T$	I_{n-m}	$-\overline{c}_N = -\left(c_N^T - c_B^T B^{-1} N\right)^T$

Bảng này cho ta một quy hoạch tuyến tính dạng chuẩn với ma trận đơn vị (cơ sở) tương ứng với các cột $y_1\ y_2\ y_3\ y_7\ y_8$.

Áp dụng giải thuật đơn hình cơ bản vào kết quả này cho ta quy tắc đổi cơ sở như sau :

Tính : $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$

a- Nếu $\overline{b} \geq 0$ thì giải thuật kết thúc, khi đó :

$y = c_B^T B^{-1}$ là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu .

$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{b} \\ 0 \end{bmatrix}$ là phương án tối ưu của bài toán gốc .

b- Nếu tồn tại r sao cho $\overline{b}_r \in \overline{b}, \overline{b}_r < 0$ thì xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- Nếu trong dòng r của $\overline{N}$ có thành phần < 0 thì người ta tính :

$$\frac{\overline{c}_s}{\overline{N}_{rs}} = \min_{\forall j : \overline{N}_{ij} < 0} \left\{ \frac{\overline{c}_j}{\overline{N}_{rj}} \right\}$$

Như vậy : đối với bài toán đối ngẫu thì biến y_r đi vào cơ sở và biến y_s ra khỏi cơ sở, trong khi đó đối với bài toán gốc thì biến x_s đi vào cơ sở và biến x_r ra khỏi cơ sở.

- Nếu mọi thành phần trong dòng r của $\overline{N}$ đều > 0 thì phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là không giới nội, điều này (theo định lý đối ngẫu) dẫn đến bài toán gốc không có phương án.

Ví dụ : Xét bài toán

$$\min\ w(x) = x_1 - x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2 \end{cases} \qquad \text{(D)}$$
$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2,3,4)$$

Bài toán đối ngẫu của (D) là :

$$\max z(y) = y_1 + 2y_2$$
$$\begin{cases} y_1 + y_2 \le 1 \\ -2y_1 + 3y_2 \le 0 \\ y_1 \le -1 \\ y_2 \le 0 \end{cases} \qquad \text{(P)}$$

y_1, y_2 là tùy ý

Ta có thể chọn bài toán (D) hoặc (P) để giải tìm phương án tối ưu bằng phương pháp đơn hình, từ đó suy ra phương án tối ưu của bài toán còn lại theo kết quả trên. Trong ví dụ này ta chọn bài toán (D) để giải vì có chứa sẵn ma trận đơn vị.

Giải bài toán (D) bằng phương pháp đơn hình cải tiến ta được :

c_{B_0}	i_{B_0}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{b}_0$
-1	3	1	-2	1	0	1
0	4	1	**3**	0	1	2
c^T		1	0	-1	0	$w(x^0)$
$\overline{c}_0^T$		2	-2	0	0	-1

c_{B_1}	i_{B_1}	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overline{b}_1$
-1	3	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$
0	2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
c^T		1	0	-1	0	$w(x^1)$
$\overline{c}_1^T$		$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$

Giải thuật dừng vì thoả dấu hiệu tối ưu của bài toán min.

Phương án tối ưu của bài toán (D) là :

$$\begin{cases} x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{2}{3} \quad x_3 = \frac{7}{3} \quad x_4 = 0 \\ w(x) = w(x^1) = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

Suy ra phương án tối ưu của (P) là :

$$\begin{cases} y^T = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} = c_B^T B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ z(y) = b^T y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

CÂU HỎI CHƯƠNG 3

1- Bạn hiểu như thế nào về khái niệm đối ngẫu ?

2- Quy hoạch tuyến tính đối ngẫu của một quy hoach tuyến tính chính tắc có dạng như thế nào ?

3- Bạn hãy nêu ra các quy tắc đối ngẫu. Cho ví dụ .

4- Giá trị hàm mục tiêu của hai quy hoạch tuyến tính đối ngẫu thì như thế nào ? . Chứng minh

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1- Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max z = 7x_1 + 5x_2$$

$$(P)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 19 \\ 2x_1 + x_2 \le 13 \\ 3x_2 \le 15 \\ 3x_1 \le 18 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

a- Tìm bài toán đối ngẫu (D) từ bài toán (P)

b- Tìm phương án tối ưu cho bài toán (P)

c- Từ bảng đơn hình tối ưu của (P). Hãy tìm phương án tối ưu cho bài toán (D)

2- Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min w = x_1 + x_2$$

$$(D)\quad \begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 5 \\ x_i \ge 0, \forall i = 1 \to 5 \end{cases}$$

a- Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán (D)

b- Tìm phương án tối ưu của bài toán (D)

c- Từ bảng đơn hình tối ưu của bài toán (D). Hãy tìm phương án tối ưu cho bài toán đối ngẫu ở câu a.

3- Xét bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\min w = -2x_1 - x_4$$

$$(D)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 20 \\ x_2 + 2x_4 \ge 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 8 \\ x_i \text{ tùy ý } (i=1 \to 4) \end{cases}$$

Tìm bài toán đối ngẫu (P) của bài toán (D). Từ bài toán (P) hãy chỉ ra rằng (P) không tồn tại phương án tối ưu do đó (D) cũng tồn tại phương án tối ưu.

4- Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4$$

$$(D)\qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 \le 1 \\ -5x_2 - 2x_4 \le 3 \\ 4x_2 + 4x_3 + x_4 \le 3 \\ x_j \ge 0\ (j = 1 \to 4) \end{cases}$$

1- Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

2- Giải bài toán đã cho rồi suy ra kết quả của bài toán đối ngẫu.

5- Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\ z = 27x_1 + 50x_2 + 18x_3$$

$$(D)\qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \le -2 \\ x_1, x_2 \text{ tuỳ ý}, x_3 \le 0 \end{cases}$$

a- Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán đã cho.

b- Giải bài toán đối ngẫu rồi suy ra kết quả của bài toán đã cho.