CHƯƠNG IV
ỨNG DỤNG QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Chương này trình bày các bài toán để thấy khả năng ứng dụng rộng rãi của quy hoạch tuyến tính. Bài toán trò chơi được trình bày một cách chi tiết, các bày toán còn lại chỉ trình bày mô hình. Việc giải các bài toán này được nghiên cứu thêm trong các môn tiếp theo.

Nội dung chi tiết của chương này bao gồm :

I- MỞ ĐẦU

II- BÀI TOÁN TRÒ CHƠI
- 1- Trò chơi có nghiệm ổn định
- 2- Trò chơi không có nghiệm ổn định

III- BÀI TOÁN VẬN TẢI
- 1- Mở đầu
- 2- Các khái niệm cơ bản
- 3- Bài toán vận tải cân bằng thu phát
- 4- Các bài toán được đưa về bài toán vận tải

IV- BÀI TOÁN DÒNG TRÊN MẠNG
- 1- Mở đầu
- 2- Phát biểu bài toán dòng trên mạng

V- QUY HOẠCH NGUYÊN
- 1- Mở đầu
- 2- Bài toán quy hoạch nguyên trong thực tế

ỨNG DỤNG QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH

Trong chương này, chúng ta sẽ tìm hiểu sơ lược một số khái niệm và phương pháp cơ bản trong lý thuyết trò và một số bài toán thực tế mà người ta sẽ đưa về bài toán quy hoạch tuyến tính để giải .

I- MỞ ĐẦU

Trong thực tế hay gặp tình huống là phải chọn một quyết định (bấp bênh) do phải đối mặt với một đối thủ thông minh và có quyền lợi đối lập với ta : ví dụ trong các trò chơi tranh chấp, trong quân sự, trong vận động tranh cử....

Nghiên cứu việc chọn quyết định trong những trường hợp đối kháng này có tên gọi là lý thuyết trò chơi. Ở đây người chọn quyết định và đối thủ đều được gọi là người chơi. Mỗi người chơi có một tập hợp các hành động để lựa chọn được gọi là chiến lược.

Chúng ta xét một trường hợp đơn giản là trò chơi hai người : phần thưởng sẽ là cái được của một người và chính là cái mất của người kia.

Giải một trò chơi nghĩa là tìm chiến lược tốt nhất cho mỗi người chơi. Hai người chơi thường được ký hiệu là A và B, chiến lược tương ứng của mỗi người được ký hiệu là :

$$A : i \ (i=1 \rightarrow m)$$

$$B : j \ (j=1 \rightarrow n)$$

Giải thưởng ứng với chiến lược (i,j) của hai người được ký hiệu là a_{ij} và được viết thành một bảng như sau :

B A	1	2	...	n
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Ví dụ :

1	***2***	***3***	4	← **B**

	1	1	0	-2	1
A →	2	2	2	1	0
	3	-1	-1	0	3

Đối với A :

- Nếu A đi nước 1 (dòng 1) thì A sẽ :

. Thắng 1 điểm nếu B đi nước 1 (thắng)

. Thắng 0 điểm nếu B đi nước 2 (hoà)

. Thắng -2 điểm nếu B đi nước 3 (thua)

. Thắng 1 điểm nếu B đi nước 4 (thắng)

Những trường hợp còn lại là tương tự .

Đối với B :

- Nếu B đi nước 2 (cột 2) thì B sẽ :

. Thua 0 điểm nếu A đi nước 1

. Thua 2 điểm nếu A đi nước 2

. Thua -1 điểm nếu A đi nước 3

Những trường hợp còn lại là tương tự .

Nghiệm tối ưu của trò chơi, có khi gọi tắt là nghiệm, là bộ chiến lược (i*,j*) có tính chất là nếu một người lấy chiến lược khác còn người kia vẫn giữ nguyên thì phần thưởng cho người đi khác sẽ bị thiệt hại. Giải trò chơi có nghĩa là tìm nghiệm tối ưu.

II- BÀI TOÁN TRÒ CHƠI

1- Trò chơi có nghiệm ổn định

Hai nhà chính trị A và B vận động tranh cử 1 ghế ở nghị viện trong 2 ngày cuối quan trọng nhất ở hai thành phố P và Q. Mỗi người phải đặt kế hoạch vận động mà không biết được kế hoạch của đối phương. Các cố vấn đưa ra 3 chiến lược :

- Ở mỗi thành phố một ngày
- Ở cả 2 ngày ở thành phố P
- Ở cả 2 ngày ở thành phố Q và đánh giá kết quả vận động tương ứng như sau :

1	***2***	***3***	←

B

A →	1	1	2	4
	2	1	0	5
	3	0	1	-1

Dữ liệu là tổng số phiếu, tính theo đơn vị là ngàn, mà A sẽ dành được từ B hay ngược lại .

Đây là một trường hợp đơn giản mà người ta có thể giải được bằng khái niệm chiến lược bị trội hơn như sau :

- Đối với A thì chiến lược 3 bị trội hơn bởi chiến lược 1 và 2 vì nó mang đến cho A số điểm thắng ít, nên dù B có chọn chiến lược nào thì A cũng vẫn chọn chiến lược 1 hoặc 2 mà bỏ chiến lược 3 . Ta có :

		1	***2***	***3***	**← B**
A →	1	1	2	4	
	2	1	0	5	
	3	0	1	-1	

- Đối với B thì chiến lược 3 bị trội hơn bởi chiến lược 1 và 2 vì nó mang đến cho B số điểm thua nhiều nên B bỏ chiến lược 3. Ta có :

		1	***2***	***3***	**← B**
A →	1	1	2	4	
	2	1	0	5	
	3	0	1	-1	

- Đối với A thì chiến lược 2 bị trội hơn bởi chiến lược 1 vì vậy A bỏ chiến lược 2. Ta có :

1	***2***	***3***	**← B**

A →			
1	1	2	4
2	1	0	5
3	0	1	-1

- Đối với B thì chiến lược 2 bị trội hơn bởi chiến lược 1 vì vậy B bỏ chiến lược 2. Ta có :

A →	***1***	***2***	***3*** ← **B**
1	1	2	4
2	1	0	5
3	0	1	-1

Cuối cùng thì bộ chiến lược (1,1) là nghiệm tối ưu của trò chơi với kết quả là người A thu thêm được 1 (ngàn) phiếu từ người B.

Trong nhiều trường hợp, khi dùng chiến lược bị trội hơn chỉ mới giảm được cở của bài toán mà chưa giải quyết xong vấn đề đặt ra.

Chiến lược MaxiMin và MiniMax

Xét ví dụ tương tự như ví dụ trên nhưng bảng kết quả vận động được các cố vấn đánh giá như sau :

A →	***1***	***2***	***3*** ← **B**
1	-3	-2	6
2	1	0	2
3	5	-2	-4

Đây là trường hợp người chọn quyết định nghĩ là đối phương thông minh và cố ý chọn quyết định chống lại mình nên họ luôn nghĩ đến chiến lượt "ăn chắc" , đó là MaxiMin(A) và MiniMax(B) như sau :

a- MaxiMin(A)

A luôn xem B là đối thủ thông minh. Khi A đi nước i_0 (dòng i_0) thì B sẽ chọn nước đi j_0 (cột j_0) sao cho A thắng điểm ít nhất . Nghĩa là B đi vào ô :

$$a_{i_0 j_0} = \underset{\forall j}{\mathrm{Min}} \{a_{i_0 j}\}$$

Trong tình huống đó A sẽ chọn nước đi sao cho A thắng nhiều điểm nhất. Chiến thuật của A là đi vào ô :

$$g_A = a_{i_A j_A} = \text{MaxiMin (A)} = \max_i \left\{ \min_j \left\{ a_{ij} \right\} \right\}$$

A đi nước 1 thì B sẽ đi nước 1 : a_{11}=-3

A đi nước 2 thì B sẽ đi nước 2 : a_{22}=0

A đi nước 3 thì B sẽ đi nước 3 : a_{33}=-4

← B

A →	***1***	***2***	***3***
1	-3	-2	6
2	1	0	2
3	5	-2	-4

Vậy MaxiMin(A) = a_{22} = 0

b- MiniMax(B)

B luôn xem A là đối thủ thông minh. Khi B đi nước j_0 (cột j_0) thì A sẽ chọn nước đi i_0 (dòng i_0) sao cho B thua điểm nhiều nhất . Nghĩa là A đi vào ô

$$a_{i_0 j_0} = \max_{\forall i} \left\{ a_{ij_0} \right\}$$

Trong tình huống đó B sẽ chọn nước đi sao cho B thua ít điểm nhất. Chiến thuật của B là đi vào ô :

$$g_B = a_{i_B j_B} = \text{MiniMax (B)} = \min_j \left\{ \max_i \left\{ a_{ij} \right\} \right\}$$

← B

A →	***1***	***2***	***3***
1	-3	-2	6
2	1	0	2
3	5	-2	-4

B đi nước 1 thì A sẽ đi nước 3 : a_{31}=5

B đi nước 2 thì A sẽ đi nước 2 : a_{22}=0

B đi nước 3 thì B sẽ đi nước 1 : a_{13}=6

Vậy MiniMax(B) = a_{22}= 0

Lần này ta thấy rằng :

MaxiMin(A) = MiniMax(B) = a_{22}= 0

Bộ chiến lược (2,2) có giá trị là 0 là nghiệm tối ưu của trò chơi vì nếu người nào đi lệch và người kia đi đúng thì người đi đúng thu lợi nhiều hơn giá trị của trò chơi. Nghiệm tối ưu trong trường hợp này còn được gọi là nghiệm ổn định.

2- Trò chơi không có nghiệm không ổn định

Xét ví dụ tương tự như trên với bảng kết quả được các chuyên gia đánh giá như sau :

		1	2	3	← B
	1	0	-2	2	
A →	2	5	4	-3	
	3	2	3	-4	

Khi A và B dùng chiến lược MaxiMin và MiniMax của mình thì cho kết quả như sau :

MaxiMin(A) = a_{12} = -2

MiniMax(B) = a_{13} = 2

Vì MaxiMin(A) và MiniMax(B) là khác nhau nên trò chơi không có nghiệm ổn định. Ta xem điều gì có thể xảy ra ?

- A tính rằng nếu B thực hiện đúng chiến lược của mình là chọn cột 3 thì A sẽ chọn chiến lược 1 để thắng 2 từ B (thay vì thắng -2)

		1	2	3	← B
	1	0	-2	2	
A →	2	5	4	-3	
	3	2	3	-4	

- Lúc này B sẽ suy tính và thấy rằng phải chọn chiến lược 2 để thua -2 từ A (thay vì thua 2).

1	2	3	←

B

A →

1	0	-2	2
2	5	4	-3
3	2	3	-4

- Đến lượt A cũng đủ thông minh để tính liền được 2 nước, biết được B sẽ chọn chiến lược 2 nên A sẽ dùng chiến lược 2 để thắng 4 từ B .

← B

A →

	1	***2***	***3***
1	0	-2	2
2	5	4	-3
3	2	3	-4

- Nhưng B cũng tính được điều này nên sẽ quay lại chọn chiến lược 3 để thua -3 từ A .

← B

A →

	1	***2***	***3***
1	0	-2	2
2	5	4	-3
3	2	3	-4

- Cũng như B , A cũng sẽ tính được điều này nên sẽ quay lại chọn chiến lược 1 để thắng 2 từ B.

← B

A →

	1	***2***	***3***
1	0	-2	2
2	5	4	-3
3	2	3	-4

Như vậy ta đã xoay đúng một vòng, và nếu cứ lập luận như vậy thì ta sẽ xoay vòng mãi. Những bộ chiến lược nhận được trong khi xoay vòng là những nghiệm không ổn định.

Chiến lược hỗn hợp

Để có được lời giải của trò chơi không có nghiệm ổn định người ta đưa ra khái niệm chiến lược hỗn hợp. Mỗi người chơi không chọn một chiến lược thuần túy như trước đây mà chọn một phân bố xác suất sử dụng tất cả các chiến lược.

Xét trò chơi giữa A và B có ma trận điểm dương có dạng tổng quát :

		1	**2**	**...**	n	← **B**
	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	
A	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	
→	...	...	...	...	...	
	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	

Giả sử rằng :

$$\text{MaxiMin}(A) = a_{i_A j_A} = g_A$$

$$\text{MiniMax}(B) = a_{i_B j_B} = g_B$$

$$a_{i_A j_A} \neq a_{i_B j_B}$$

Gọi :

. $p_i > 0$ ($i=1\to m$) là tần suất nước đi thứ i của A với

$$p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$$

. $q_j > 0$ ($j=1\to n$) là tần suất nước đi thứ j của B với

$$q_1 + q_2 + ... + q_n = 1$$

			q_1	***q_2***	**...**	q_n	
			1	***2***	**...**	n	← **B**
	p_1	1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	
A	p_2	2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	
→	...	...	...	...	...	...	
	p_m	m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	

Vấn đề đặt ra là :

-Tìm tần suất $p_i > 0$ của nước đi thứ i (i =1→ m) của A sao cho đối với mỗi nước đi thứ j của B số điểm thắng trung bình của A không nhỏ thua g_A :

$$p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + ... + p_ma_{mj} \qquad (\forall j = 1 \to n)$$

Cũng có nghĩa là tìm p_i sao cho :

$$p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + ... + p_ma_{mj} \geq g_1 \geq g_A \quad (\forall j = 1 \to n)$$

$$g_1 \to \max$$

- Tìm tần suất $q_j > 0$ của nước đi thứ j (j =1→ n) của B sao cho đối với mỗi nước đi thứ i của A số điểm thua trung bình của B không lớn hơn g_B :

$$q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ... + q_na_{in} (\forall i = 1 \to m)$$

Cũng có nghĩa là tìm các q_j sao cho :

$$q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ... + q_na_{in} \leq g_2 \leq g_B \qquad (\forall i = 1 \to m)$$

$$g_2 \to \min$$

Khi đó hai bài toán quy hoạch tuyến tính thu được là :

$$\begin{cases} \max\ g_1 & \left(\min \dfrac{1}{g_1}\right) \\ p_1 + p_2 + ... + p_m = 1 \\ p_1a_{1j} + p_2a_{2j} + ... + p_ma_{mj} \geq g_1 & (j = 1 \to n) \\ p_i > 0 \quad (i = 1 \to n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \min\ g_2 & \left(\max \dfrac{1}{g_2}\right) \\ q_1 + q_2 + ... + q_n = 1 \\ q_1a_{i1} + q_2a_{i2} + ... + q_na_{in} \leq g_2 & (i = 1 \to m) \\ q_j > 0 \quad (j = 1 \to m) \end{cases}$$

Chia các ràng buộc của bài toán thứ nhất cho g_1>0 và đặt :

$$x_i = \frac{p_i}{g_1} \quad (i = 1 \to m)$$

Chia các ràng buộc của bài toán thứ hai cho g_2>0 và đặt :

$$y_j = \frac{q_j}{g_2} \quad (j = 1 \to n)$$

Khi đó hai bài toán quy hoạch tuyến tính trên trở thành :

$$(D)\begin{cases} \min \dfrac{1}{g_1} = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \ldots + a_{mj}x_m \geq 1 & (j = 1 \to n) \\ x_i > 0 \quad (i = 1 \to m) \end{cases}$$

$$(P)\begin{cases} \max \dfrac{1}{g_2} = y_1 + y_2 + \ldots + y_3 \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n \leq 1 & (i = 1 \to m) \\ y_j > 0 \quad (j = 1 \to m) \end{cases}$$

Đây là hai bài toán đối ngẫu . Chọn một trong hai để giải

Ví dụ **:**

Xét trò chơi giữa A và B có bảng điểm như sau :

		1	***2***	***3***	**← B**
A →	1	-1	2	1	
	2	1	-2	2	
	3	3	4	-3	

Theo chiến thuật của A và của B ta có :

MaxiMin(A) = a_{11}

MiniMax(B) = a_{23}

Tăng đồng loạt các ô của bảng điểm lên 4 ta được :

		1	***2***	***3***	**← B**
A →	1	3	6	5	
	2	5	2	6	
	3	7	8	1	

Gọi

$p_i \geq 0$ là tần suất nước đi thứ i của A $(i=1\to 3)$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$q_j \geq 0$ là tần suất nước đi thứ j của B $(j=1\to 3)$

$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

Thực hiện tương tự như trên ta được hai bài toán đối ngẫu như sau :

A →	q_1	q_2	q_3 ← B
p_1	3	6	5
p_2	5	2	6
p_3	7	8	1

$$(D)\quad \begin{cases} \min w = \dfrac{1}{g_1} = x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 2x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0\ ,\ x_3 > 0 \end{cases} \qquad (P)\quad \begin{cases} \max z = \dfrac{1}{g_2} = y_1 + y_2 + y_3 \\ 3y_1 + 6y_2 + 5y_3 \leq 1 \\ 5y_1 + 2y_2 + 6y_3 \leq 1 \\ 7y_1 + 8y_2 + y_3 \leq 1 \\ y_1 > 0\ ,\ y_2 > 0\ ,\ y_3 > 0 \end{cases}$$

Ta chọn bài toán (P) để giải.

Đưa bài toán (P) về dạng chuẩn :

$$(P)\quad \begin{cases} \max z = \dfrac{1}{g_2} = y_1 + y_2 + y_3 + 0.y_4 + 0.y_5 + 0.y_6 \\ 3y_1 + 6y_2 + 5y_3 + y_4 = 1 \\ 5y_1 + 2y_2 + 6y_3 + y_5 = 1 \\ 7y_1 + 8y_2 + y_3 + y_6 = 1 \\ y_1 > 0\ ,\ y_2 > 0\ ,\ y_3 > 0,\ y_4 > 0\ ,y_5 > 0\ ,\ y_6 > 0 \end{cases}$$

Dùng giải thuật đơn hình cải tiến :

c_{B_0}	i_{B_0}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_0$

0	4	3	6	5	1	0	0	1
0	5	5	2	6	0	1	0	1
0	6	7	8	1	0	0	1	1
c^T		1	1	1	0	0	0	z_0
$\bar{c}_0^T$		1	1	1	0	0	0	0

c_{B_1}	i_{B_1}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_1$
0	4	0	$\frac{18}{7}$	$\frac{32}{7}$	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
0	5	0	$-\frac{26}{7}$	$\frac{37}{7}$	0	1	$-\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$
1	1	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
c^T		1	1	1	0	0	0	z_1
$\bar{c}_1^T$		0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

c_{B_2}	i_{B_2}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_2$
0	4	0	$\frac{214}{37}$	0	1	$-\frac{32}{37}$	$\frac{7}{37}$	$\frac{12}{37}$
1	3	0	$-\frac{26}{37}$	1	0	$\frac{7}{37}$	$-\frac{5}{37}$	$\frac{2}{37}$
1	1	1	$\frac{46}{37}$	0	0	$-\frac{1}{37}$	$\frac{6}{37}$	$\frac{5}{37}$
c^T		1	1	1	0	0	0	z_2
$\bar{c}_2^T$		0	$\frac{17}{37}$	0	0	$-\frac{6}{37}$	$-\frac{1}{37}$	$\frac{7}{37}$

c_{B_3}	i_{B_3}	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\bar{b}_3$
1	2	0	1	0	$\frac{37}{214}$	$-\frac{16}{107}$	$\frac{7}{214}$	$\frac{6}{107}$
1	3	0	0	1	$\frac{13}{107}$	$\frac{9}{107}$	$-\frac{12}{107}$	$\frac{10}{107}$
1	1	1	0	0	$-\frac{23}{107}$	$\frac{17}{107}$	$\frac{13}{107}$	$\frac{7}{107}$
c^T		1	1	1	0	0	0	z_3

$\bar{c}_3^T$	0	0	0	$-\frac{17}{214}$	$-\frac{10}{107}$	$-\frac{9}{214}$	$\frac{23}{107}$

Phương án tối ưu của bài toán (P) là :

$$\begin{cases} \frac{1}{g_2} = \frac{23}{107} \\ y_1 = \frac{q_1}{g_2} = \frac{7}{107} \\ y_2 = \frac{q_2}{g_2} = \frac{6}{107} \\ y_3 = \frac{q_3}{g_2} = \frac{10}{107} \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} g_2 = \frac{107}{23} \\ q_1 = \frac{7}{23} \\ q_2 = \frac{6}{23} \\ q_3 = \frac{10}{23} \end{cases}$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu (D) được tính bằng công thức sau :

$$x^T = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] = c_B^T B^{-1} = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{37}{214} & -\frac{16}{107} & \frac{7}{214} \\ \frac{13}{107} & \frac{9}{107} & -\frac{12}{107} \\ -\frac{23}{107} & \frac{17}{107} & \frac{13}{107} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{17}{214} & \frac{10}{107} & \frac{9}{214} \end{bmatrix}$$

$$w = \frac{1}{g_1} = b^T x = [1 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix} \frac{17}{214} \\ \frac{10}{107} \\ \frac{9}{214} \end{bmatrix} = \frac{23}{107}$$

Ta có :

$$\begin{cases} w = \dfrac{1}{g_1} = \dfrac{23}{107} \\ x_1 = \dfrac{p_1}{g_1} = \dfrac{17}{214} \\ x_2 = \dfrac{p_2}{g_1} = \dfrac{10}{107} \\ x_3 = \dfrac{p_3}{g_1} = \dfrac{9}{214} \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} g_1 = \dfrac{107}{23} \\ p_1 = \dfrac{17}{46} \\ p_2 = \dfrac{10}{23} \\ p_3 = \dfrac{9}{46} \end{cases}$$

III- BÀI TOÁN VẬN TẢI

1- Mở đầu

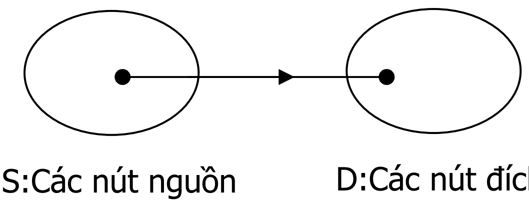
Bài toán vận tải là bài toán quan trọng nhất trong các bài toán quy hoạch tuyến tính. Người ta tổng kết rằng 85% các bài toán quy hoạch tuyến tính gặp trong ứng dụng là bài toán vận tải hoặc mở rộng của nó. Thuật ngữ bài toán vận tải thường được hiểu là bài toán vận chuyển sao cho cước phí nhỏ nhất.

2- Các khái niệm cơ bản

Bài toán vận tải được mô tả như là một bài toán về dòng dữ liệu gồm tập hợp các nút N được chia thành hai phần rời nhau : các nút nguồn S và các nút đích D, tức là :

$$\begin{cases} N = S \cup D \\ S \cap D = \varnothing \end{cases}$$

và mỗi cung (i,j) trong tập các cung A đều có gốc trong S và có ngọn trong D.



Các nút thuộc S được gọi là các nút nguồn (cung), các nút thuộc D được gọi là các nút đích (cầu). Một cách tổng quát, bài toán vận tải trình bày được bằng đồ thị.

Ở bài toán vận tải đôi khi còn có thêm giả thiết nữa là mỗi nút nguồn đều có cung nối với mọi nút đích. Ở đây ta chỉ đề cập đến bài toán vận tải có thêm giả thiết này và sẽ gọi tắt là bài toán vận tải.

Đối với bài toán vận tải người ta thường ký hiệu

$s_i \in S$ là nguồn phát ở nút i($i=1\rightarrow m$)

$d_j \in D$ là nhu cầu thu của nút j ($j=1\rightarrow n$)

Trong trường hợp các nguồn phát không chuyển hết sang các nút cầu vì đã đủ nhu cầu thì bài toán vận tải được gọi là bài toán vận tải mở. Có thể đưa một bài toán vận tải mở về một bài toán vận tải (đóng) bằng cách thêm vào một nút cầu giả thứ (n+1) với nhu cầu được xác định như sau :

$$d_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} s_i - \sum_{j=1}^{n} d_j$$

3- Bài toán vận tải cân bằng thu phát

a- Thiết lập bài toán

Có m nơi $A_1, A_2, ..., A_m$ cung cấp một loại hàng với khối lượng tương ứng là $a_1, a_2, ..., a_m$. Hàng được cung cấp cho n nơi $B_1, B_2, ..., B_n$ với khối lượng tiêu thụ tương ứng là $b_1, b_2, ..., b_n$.

Cước phí chuyên chở một đơn vị hàng từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j là c_{ij} .

Hãy lập kế hoạch vận chuyển từ mỗi điểm phát đến mỗi điểm thu bao nhiêu hàng để :

- Các điểm phát đều phát hết hàng
- Các điểm thu đều nhận đủ hàng
- Tổng cước phí phải trả là ít nhất

Gọi x_{ij} là lượng hàng chuyển từ điểm phát A_i đến điểm thu B_j , $x_{ij} \geq 0$.

Vì tổng lượng hàng phát đi từ mỗi điểm phát A_i đến mọi điểm thu B_j bằng lượng hàng phát từ A_i nên :

$$x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} = a_i \quad (i = 1,2,...,m)$$

Vì tổng lượng hàng thu được tại mỗi điểm thu B_j từ mọi điểm phát A_i bằng lượng hàng cần thu tại B_j nên :

$$x_{1j} + x_{2j} + ... + x_{mj} = b_{ji} \quad (j = 1,2,...,n)$$

Để tổng cước phí là ít nhất cần phải có :

$$\min\ z(x) = \sum_{i} \sum_{j} c_{ij} x_{ij}$$

Với các phân tích trên ta có mô hình của bài toán như sau :

$$\min \quad z(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,\ldots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,\ldots,n) \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (3)$$

Phương án - Phương án tối ưu

Một ma trận $X=[x_{ij}]_{m.n}$ thỏa (2) và (3) được gọi là phương án, thỏa thêm (1) được gọi là phương án tối ưu.

b- Dạng bảng của bài toán vận tải

Có thể giải bài toán vận tải theo cách của quy hoạch tuyến tính. Tuy nhiên do tính chất đặc biệt của bài toán vận tải nên người ta nghĩ ra một thuật toán hiệu quả hơn. Trước tiên người ta trình bày bài toán vận tải dưới dạng bảng như sau :

Thu Cước Phát	b_1	b_2	....	b_j	....	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	....	c_{1j} x_{1j}	....	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	....	c_{2j} x_{2j}	....	c_{2n} x_{2n}
....	....	....	....	....	....	
a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	....	c_{ij} x_{ij}	....	c_{in} x_{in}
....	....	....	....	....	....	....
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	....	c_{mj} x_{mj}	....	c_{mn} x_{mn}

Trong bảng mỗi hàng mô tả một điểm phát, mỗi cột mô tả một điểm thu, mỗi ô mô tả một tuyến đường đi từ một điểm phát tới một điểm thu.

Dây chuyền - Chu trình

Một dãy các ô của bảng mà hai ô liên tiếp nằm trong cùng một hàng hoặc một cột, ba ô liên tiếp không cùng nằm trên một hàng hoặc một cột được gọi là một dây chuyền. Ta thấy rằng hai ô liền nhau trong một dây chuyền có chỉ số hàng hoặc chỉ số cột bằng nhau

	x	x	
		x	x
x			x

Dây chuyền : (1,2) (1,3) (2,3) (2,4) (4,4) (4,1)

Một dây chuyền khép kín, ô đầu tiên và ô cuối cùng bằng nhau, được gọi là một chu trình.Ta thấy rằng số ô trong một chu trình là một số chẵn.

x		x	
		x	x
x			x

Chu trình : (1,1) (1,3) (2,3) (2,4) (4,4) (4,1) (1,1)

Ô chọn - Ô loại

Giả sử ma trận $X=[x_{ij}]_{m.n}$ (i=1,2,...,m) (j=1,2,...,n) là một phương án của bài toán vận tải.

Những ô trong bảng tương ứng với $x_{ij} > 0$ được gọi là ô chọn, những ô còn lại được gọi là ô loại.

Phương án cơ bản

Một phương án mà các ô chọn không tạo thành một chu trình được gọi là phương án cơ bản.

Một phương án có đủ m+n-1 ô chọn được gọi là không suy biến, có ít hơn m+n-1 ô chọn được gọi là suy biến. Trong trường hợp suy biến người ta chọn bổ sung vào phương án cơ bản một số ô loại có lượng hàng bằng 0 để phương án cơ bản trở thành không suy biến

c- Giải bài toán vận tải

Xét bài toán vận tải có số lượng phát, số lượng thu và ma trân cước phí ở dạng bảng như sau :

	80	20	60
50	5	4	1
40	3	2	6
70	7	9	11

LẬP PHƯƠNG ÁN CƠ BẢN BAN ĐẦU

Phương án cơ bản ban đầu được xác định bằng cách ưu tiên phân phối nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất (r,s) (gọi là ô chọn). Khi đó : nếu điểm phát r đã phát hết hàng thì xóa hàng r của bảng và số lượng cần thu tại điểm s chỉ còn là b_s-a_r ; nếu điểm thu s đã nhận đủ hàng thì xóa cột s của bảng và số lượng phát còn lại tại điểm phát r là a_r-b_s

Bảng mới thu được có kích thước giảm đi. Tiếp tục phân phối như trên cho đến khi hết hàng.

Các ô chọn trong quá trình phân phối, sẽ không chứa chu trình, là một phương án cơ bản. Nếu phương án cơ bản suy biến, chưa đủ m+n-1 ô, thì bổ sung thêm một số " ô chọn 0 "

Áp dụng vào bài toán đang xét :

1- Phân vào ô (1,3) 50 . Hàng (1) bị xóa . Cột (3) còn thu 60-50=10

	80	20	10
0	5	4	1 *50*
40	3	2	6
70	7	9	11

2- Phân vào ô (2,2) 20 . Cột (2) bị xóa . Hàng (2) còn phát 40-20=20

	80	0	10
0	5	4	1 *50*
20	3	2 *20*	6
70	7	9	11

3- Phân vào ô (2,1) 20 . Hàng (2) bị xóa . Cột (1) còn thu 80-20=60

	60	0	10
0	5	4	1 *50*
0	3 *20*	2 *20*	6
70	7	9	11

4- Phân vào ô (3,1) 60 . Cột (1) bị xóa . Hàng (3) còn phát 70-60=10

	0	0	10
0	5	4	1 *50*
0	3 *20*	2 *20*	6
10	7 *60*	9	11

5- Phân vào ô (3,3) 10. Hết hàng.

	0	0	0
0	5	4	1 *50*
0	3 *20*	2 *20*	6
0	7 *60*	9	11 *10*

Đã có 5 ô được chọn, chúng tạo thành một phương án cơ bản không suy biến vì số ô bằng với m+n-1=3+3-1.

THUẬT TOÁN "QUY 0 CƯỚC PHÍ CÁC Ô CHỌN"

Định lý

Nếu cộng vào hàng i và cột j của ma trận cước phí $C=[c_{ij}]$ một số tùy ý r_i và s_j thì bài toán vận tải mới với ma trận cước phí mới $C'=[c'_{ij}=c_{ij}+r_i+s_j]$ thì phương án tối ưu của bài toán này cũng là phương án tối ưu của bài toán kia và ngược lại.

Thuật toán "Quy 0 cước phí các ô chọn" gồm ba giai đoạn.

Giai đoạn 1 : Quy 0 cước phí các ô chọn

Sau khi xác định được phương án cơ bản có m+n-1 ô chọn, người ta cộng vào mỗi hàng i và mỗi cột j của ma trận cước phí $C=[c_{ij}]$ một số r_i và s_j sao cho ma trận cước phí mới C' tại các ô chọn thỏa $c'_{ij}=c_{ij}+r_i+s_j=0$.

Tiếp tục ví dụ trên ta thấy :

5	4	1 *50*	$r_1=6$
3 *20*	2 *20*	6	$r_2=0$
7 *60*	9	11 *10*	$r_3=-4$
$s_1=-3$	$s_2=-2$	$s_3=-7$	

Các giá trị cộng vào phải thỏa hệ phương trình :

$$\begin{cases} 1+r_1+s_3=0 \\ 3+r_2+s_1=0 \\ 2+r_2+s_2=0 \\ 7+r_3+s_1=0 \\ 11+r_3+s_3=0 \end{cases}$$

Chọn $r_2=0$, giải hệ ta được kết quả trên

Ma trận cước phí mới thu được là :

8	8	0 *50*

0 *20*	0 *20*	-1
0 *60*	3	0 *10*

Giai đoạn 2 : Kiểm tra tính tối ưu

Sau khi quy 0 cước phí các ô chọn nếu : các ô loại đều có cước phí ≥ 0 thì phương án đang xét là tối ưu, ngược lại thì chuyển sang giai đoạn 3

Trong ví dụ này ta chuyển sang giai đoạn 3.

Giai đoạn 3 : Xây dựng phương án mới tốt hơn

1- Tìm ô đưa vào.

Ô đưa vào là ô loại (i*,j*) có cước phí nhỏ nhất và trở thành ô chọn

Trong ví dụ này là ô (2,3).

2- Tìm chu trình điều chỉnh.

Chu trình điều chỉnh được tìm bằng cách bổ sung ô (i*,j*) vào m+n-1 ô chọn ban đầu, khi đó sẽ xuất hiện một chu trình duy nhất, gọi là chu trình điều chỉnh V .

Trong ví dụ này chu trình điều chỉnh là :

V : (2,3) (3,3) (3,1) (2,1) (2,3)

3- Phân ô chẵn lẻ cho chu trình điều chỉnh.

Đánh số thứ tự các ô trong chu trình điều chỉnh V bắt đầu từ ô (i*,j*). Khi đó chu trình điều chỉnh V được phân thành hai lớp :

V_C : các ô có số thứ tự chẵn.

V_L : các ô có số thứ tự lẻ.

4- Tìm ô đưa ra và lượng điều chỉnh.

Trong số các ô có thứ tự chẵn chọn ô (r,s) được phân phối ít hàng nhất làm ô đưa ra, trở thành ô loại. Lượng hàng x_{rs} ở ô đưa ra gọi là lượng điều chỉnh.

Trong ví dụ này ô đưa ra là ô (3,3), lượng điều chỉnh là 10.

5- Lập phương án mới.

Phương án mới có được bằng cách thêm hoặc bớt lượng điều chỉnh trên chu trình điều chỉnh như sau :

Ô có thứ tự chẵn bị bớt đi lượng điều chỉnh.

Ô có thứ tự lẻ được cộng thêm lượng điều chỉnh.

Ô ngoài chu trình điều chỉnh không thay đổi

Trong ví dụ này ta thấy những ô trong chu trình điều chỉnh có sự thay đổi như sau :

Ô (2,3) được thêm 10 trở thành 10

Ô (3,3) bị bớt 10 trở thành 0

Ô (3,1) được thêm 10 trở thành 70

Ô (2,1) bị bớt 10 nên trở thành 10

Khi đó phương án mới là :

8	8	0 *50*
0 *10*	0 *20*	-1 *10*
0 *70*	3	0

Quay về giai đoạn 1.

Giai đoạn 1 : Quy 0 cước phí ô chọn

8	8	0 *50*	r_1=-1
0 *10*	0 *20*	-1 *10*	r_2=0
0 *70*	3	0	r_3=0
s_1=0	s_2=0	s_3=1	

Ma trận cước phí mới là :

7	7	0 *50*
0 *10*	0 *20*	0 *10*
0 *70*	3	1

Giai đoạn 2 : Kiểm tra tính tối ưu

Đây là phương án tối ưu

	80	20	60
50	5	4	1 **50**
40	3 **10**	2 **20**	6 **10**
70	7 **70**	9	11

Với cước phí là :

1.50+3.10+2.20+6.10+7.70=670

Khi sử dụng phương án ban đầu

	80	20	60
50	5	4	1 **50**
40	3 **20**	2 **20**	6
70	7 **60**	9	11 **10**

thì cước phí là :

1.50+3.20+2.20+7.60+11.10=680

4- Các bài toán được đưa về bài toán vận tải

Có nhiều bài toán thực tế có tính chất không phải là ''vận tải '' nhưng có mô hình toán học là bài toán vận tải. Một số bài toán như vậy là :

a- Bài toán bổ nhiệm

Giả sử tập hợp S gồm m người và tập hợp D gồm n công việc (chức vụ). Cước phí của việc bổ nhiệm người $i\in S$ vào việc $j\in D$ là c_{ij} ($i=1\rightarrow m$, $j=1\rightarrow n$). Bài toán đặt ra là tìm cách chia mỗi người đúng một việc sao cho cước phí bổ nhiệm là nhỏ nhất.

Người ta đặt biến (biến trên dòng) như sau :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nÕung-êi i nhËn viÖc j} \\ 0 & \text{nÕutr-êng hîp kh¸c} \end{cases}$$

thì bài toán trở thành :

$$\min \sum_{i\in S}\sum_{j\in D} c_{ij}x_{ij}$$

Vì mỗi người nhận đúng 1 việc nên : $\sum_{j\in D} x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in S)$

Vì mỗi việc chỉ giao cho một người nên : $\sum_{i\in S} x_{ij} = 1 \quad (\forall j \in D)$

Đây là bài toán vận tải nhưng có thêm yêu cầu là các biến x_{ij} chỉ lấy giá trị 0 hoặc 1.

Bài toán bổ nhiệm cũng có khi được gọi là bài toán chọn (Choice Problem). Nhiều bài toán thực tế đa dạng có mô hình toán học là bài toán bổ nhiệm, chẳng hạn như bài toán phân bố hoả lực vào mục tiêu cần tiêu diệt.

b- Bài toán vận tải với cung ít hơn cầu

Xét một bài toán một bài toán vận tải với S là tập hợp m nút cung và D là tập hợp n nút cầu mà tổng nguồn cung nhỏ hơn tổng nhu cầu, tức là

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \le \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Trong trường hợp này tất nhiên không thể đáp ứng đủ nhu cầu d_j cho mỗi nút $j=1\rightarrow n$ cho nên ràng buộc có dạng bất đẳng thức thay vì là đẳng thức. Vậy :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le d_j \qquad (\forall j = 1 \rightarrow n)$$

Người ta thường đưa bài toán này về bài toán vận tải (đóng) theo một trong hai trường hợp sau đây :

1.Trường hợp thứ nhất là có tính đến sự thiệt hại bằng tiền khi thiếu một đơn vị hàng hoá ở nút cầu j là r_j ($j=1\to n$)

Lúc này người ta đưa thêm vào một nút cung giả (m+1) với nguồn cung là

$$s_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{n} s_i$$

và cước phí tương ứng là

$$c_{(m+1)\,j} = r_j \qquad (j=1\to n)$$

Khi đó ta nhận được một bài toán vận tải (đóng)

$$\min \sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = d_j & (j = 1 \to n) \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & (i = 1 \to m) \\ x_{ij} \ge 0 & (i = 1 \to m+1, j = 1 \to n) \end{cases}$$

2.Trường hợp thứ hai là không tính đến sự thiệt hại do thiếu hàng ở nút cầu

Lúc này ta cũng đưa về bài toán vận tải (đóng) như trên, nhưng vì không tính đến sự thiệt hại nên mục tiêu sẽ là

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Ghi chú :

Với bài toán vận tải mở, nguồn chuyển không hết sang các nhu cầu, người ta có thể tính thêm cước phí lưu kho ở mỗi nguồn cho mỗi đơn vị hàng là $c_{i\,(n+1)}$ ($i=1\to m$) . Hoàn toàn tương tự như trên, khi đưa bài toán này về bài toán vận tải (đóng) bằng cách thêm vào nút cầu giả (n+1) thì hàm mục tiêu trở thành

$$\min \sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

Như vậy ta chỉ cần xét bài toán vận tải (đóng)

$$\min \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1 \to n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1 \to m, j = 1 \to n) \end{cases}$$

c- Bài toán vận tải có đường cấm

Đây là bài toán vận tải nhưng không phải mỗi nguồn đều có cung nối với mọi đích. nghĩa là có đường cấm. Cách đưa về bài toán vận tải là dùng phương pháp M-lớn, tức là phương pháp phạt như sau :

Gọi E là tập các cung không cấm, tức là các cung (i,j), $i \in S$, $j \in D$ và bài toán có thêm điều kiện

$$x_{ij}=0 \text{ với } (i,j) \notin E$$

ta đưa bài toán có các yêu cầu

$$\min \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1 \to n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1 \to m, j = 1 \to n) \\ x_{ij} = 0 & \text{khi } (i, j) \notin E \end{cases} \qquad (*)$$

về bài toán vận tải bằng cách đặt cước vận chuyển mới như sau :

$$\bar{c}_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{nÕu } (i, j) \in E \\ M & \text{nÕu} (i, j) \notin E \end{cases}$$

Ở đây M là một số rất lớn, được coi là số lớn hơn mọi số gặp phải khi tính toán.

Xét bài toán với cước phí mới như trên như sau :

$$\min \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i & (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & (j = 1 \to n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1 \to m, j = 1 \to n) \end{cases} \qquad (**)$$

thì ta có :

Định lý :

Giả sử $x^* = [x^*_{ij}]_{m.n}$ là phương án vận chuyển tối ưu của (**) thì khi đó :

1. Nếu $x^*_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \notin E$ thì x^* là phương án vận chuyển tối ưu của bài toán vận tải có đường cấm (*)

2. Nếu tồn tại $x_{kl} \notin E$ mà $x_{kl} > 0$ thì bài toán vận tải có đường cấm (**) không có nhiệm chấp nhận được.

d- Bài toán vận tải kèm chế biến trung gian

Giả sử rằng trong mô hình vận tải có một số điểm nguồn, tức là điểm sản xuất, cho ra một số sản phẩm cần phải chế biến trước khi đến điểm cầu. Giả sử có $\lambda=1\to k$ điểm chế biến với khả năng chế biến là a_λ đơn vị sản phẩm tương ứng. Gọi cước phí vận chuyển một đơn vị bán sản phẩm từ i đến λ là $c'_{i\lambda}$ và chuyển một đơn vị sản phẩm từ λ đến j là $c''_{i\lambda}$. Bài toán đặt ra là lập kế hoạch vận chuyển tất cả các sản phẩm qua chế biến đến tất cả các điểm cầu sao cho cước phí nhỏ nhất.

Gọi $x_{i\lambda j}$ là lượng sản phẩm từ i qua λ rồi qua j, ta cần tìm $x=[x_{i\lambda j}]_{mkn}$ sao cho :

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (c'_{i\lambda} + c''_{\lambda j}) x_{i\lambda j}$$

$$\begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{i\lambda j} = s_i & (i = 1 \to m) \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{k} x_{i\lambda j} = d_j & (j = 1 \to n) \\ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{i\lambda j} = a_\lambda & (\lambda = 1 \to k) \\ x_{i\lambda j} \geq 0 & (i = 1 \to m, \lambda = 1 \to k, j = 1 \to n) \end{cases}$$

IV- BÀI TOÁN DÒNG TRÊN MẠNG

1- Mở đầu

Nhiều bài toán quy hoạch tuyến tính có thể quy về bài toán làm cực tiểu phí tổn vận chuyển hàng trong một mạng (gồm các nút và các cung đường) sao cho đảm bảo được các nhu cầu ở một số nút sau khi biết nguồn cung cấp tại một số nút khác. Các bài toán như vậy được gọi là các bài toán dòng trên mạng hay bài toán chuyển vận (TransShipment Problem). Đây là lớp bài toán quan trọng nhất và hay gặp nhất trong quy hoạch tuyến tính. Lớp này bao gồm các bài toán quen thuộc trong thực tế như :

- Bài toán vận tải
- Bài toán mạng điện
- Bài toán mạng giao thông
- Bài toán quản lý
- Bài toán phân bổ vật tư
- Bài toán bổ nhiệm
- Bài toán kế hoạch tài chính
- Bài toán đường ngắn nhất
- Bài toán dòng lớn nhất
- ....

Vì là một bài toán quy hoạch tuyến tính nên các bài toán dòng trên mạng có thể giải được bằng bất kỳ thuật toán nào giải được bài toán quy hoạch tuyến tính, chẳng hạn bằng thuật toán đơn hình như đã biết . Tuy nhiên, nếu tận dụng những cấu trúc đặc biệt của các bài toán dòng trên mạng sẽ làm cho phương pháp đơn hình đơn giản hơn và được thực hiện nhanh hơn.

2- Phát biểu bài toán dòng trên mạng

Mạng là một đồ thị có hướng ký hiệu G=(N,A), N là tập các nút, A là tập các cung, cùng một số thông tin về số lượng bổ sung như sau :

. b_i ($i \in N$) biểu thị nguồn từ ngoài vào nút i, gọi tắt là nguồn

. u_{ij} biểu thị tải năng của cung $(i,j) \in A$

. c_{ij} biểu thị cước phí cho một đơn vị của dòng trên cung $(i,j) \in A$

. x_{ij} biểu thị lượng vận chuyển của dòng trên cung $(i,j)\in A$

Giá trị tuyệt đối $|b_i|$ được gọi là nhu cầu của nút i. Nếu $b_i>0$ thì nút i được gọi là điểm nguồn, nếu $b_i<0$ thì nút i được gọi là điểm hút. Một cách hoàn toàn tự nhiên người ta đặt hai điều kiện sau đây :

a- Tổng lượng trên dòng vào nút i bất kỳ phải bằng tổng lượng trên dòng ra khỏi nút i (luật bảo toàn dòng). Như vậy :

$$\boxed{b_i + \sum_{j\in I(i)} x_{ji} = \sum_{j\in Q(i)} x_{ij} \quad (\forall i \in N)} \qquad (1)$$

Trong đó :

$I(i)=$ {nút j / cung $(j,i)\in A$} : những nút có cung nối đến nút i

$O(i)=$ {nút j / cung $(i,j)\in A$} : những nút có cung nối từ nút i đến nó

b- Dòng trên cung là không âm và không vượt quá tải năng của cung. Như vậy :

$$\boxed{0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad \forall (i,j) \in A} \qquad (2)$$

Mọi vectơ x có các thành phần x_{ij} , $(i,j)\in A$, được gọi là một dòng. Dòng x thoả điều kiện (1) và (2) được gọi là dòng chấp nhận được. Lấy tổng của (1) theo các nút i ta được :

$$\boxed{\sum_{i\in N} b_i = 0} \qquad (3)$$

Điều này có nghĩa là tổng dòng từ bên ngoài vào mạng phải bằng tổng dòng từ mạng ra ngoài. Nếu điều này điều này không thoả thì bài toán là không chấp nhận được.

Mục tiêu của bài toán là làm cực tiểu cước phí dòng trên mạng, tức là :

$$\boxed{\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}} \qquad (4)$$

trong đó cực tiểu lấy trên mọi dòng chấp nhận được. Như vậy ta nhận được một bài toán quy hoạch tuyến tính như sau :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{cases} b_i + \sum\limits_{j\in I(i)} x_{ji} = \sum\limits_{j\in O(i)} x_{ij} & (\forall i \in N) \\ 0 \le x_{ij} \le u_{ij} & \forall (i,j) \in A \end{cases}$$

V- QUY HOẠCH NGUYÊN

1- Mở đầu

Quy hoạch nguyên (Integer Programming) , viết tắt là IP, là bài toán quy hoạch mà trong đó tất cả hoặc một phần các biến bị ràng buộc chỉ lấy giá trị nguyên. Trường hợp thứ nhất được gọi là quy hoạch nguyên hoàn toàn (Pure Integer Programming – PIP), trường hợp thứ hai được gọi là quy hoạch nguyên bộ phận (Mixed Integer Programming – MIP). Tuy vậy thuật ngữ ''quy hoạch nguyên'' được dùng chung cho cả hai trường hợp.

Mảng các bài toán có vẻ đơn giản nhất mà cũng là quan trọng nhất trong lớp các bài toán quy hoạch nguyên là các bài toán chọn các quyết định (chọn/không chọn). Chẳng hạn như bài toán bổ nhiệm, biến quyết định việc bổ nhiệm nhận giá trị như sau :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nÕu ng-êi } i \text{ nhËn c«ng viÖc } j \\ 0 & \text{nÕu ng-êi } i \text{ kh«ng nhËn c«ng viÖc } j \end{cases}$$

Vì các biến quyết định thường chỉ nhận một trong hai giá trị nên bài toán này còn được gọi là bài toán quy hoạch nguyên nhị phân (Binary Integer Programming) .

Một ý tưởng tự nhiên để giải bài toán quy hoạch nguyên là cứ giải như một bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát tạm bỏ qua ràng buộc biến phải nguyên. Khi tìm được phương án tối ưu thì sẽ làm tròn nó để được phương án tối ưu nguyên gần đúng. Phương pháp này có thể áp dụng trong thực tế nhưng phải chú ý đến hai nguy cơ sau đây :

- Một là phương án tối ưu đã được làm tròn không chấp nhận được đối với bài toán quy hoạch nguyên.

- Hai là phương án tối ưu đã được làm tròn chấp nhận được nhưng có thể giá trị mục tiêu tương ứng là rất xa với mục tiêu tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên.

2- Bài toán quy hoạch nguyên trong thực tế

a- Bài toán balô

Một nhà thám hiểm mang theo một balô chỉ chứa được một trọng lượng không quá b. Có n loại vật dụng phải mang theo. Mỗi vật loại vật i có trọng lượng là a_i và giá trị sử dụng là c_i. Hỏi ông ta phải chọn lựa các vật mang theo như thế nào để có giá trị sử dụng là lớn nhất ?

Gọi x_i ($i=1\to n$) là số lượng vật loại i mà ông ta mang theo thì mô hình toán của bài toán balô này là quy hoạch nguyên như sau :

$$\boxed{\begin{array}{l} \max\ z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\ x_i \ge 0 \quad \text{vµ nguyª n} \quad (i = 1 \to n) \end{cases} \end{array}}$$

Về mặt toán học thì nếu hàm mục tiêu là min z hoặc ràng buộc là đẳng thức thì bài toán cũng gọi là bài toán balô. Bài toán balô có dạng đặc biệt và đơn giản vì chỉ có một ràng buộc ngoài ràng buộc dấu và tính nguyên. Người ta nghiên cứu được nhiều cách giải riêng cho bài toán và đưa bài toán quy hoạch nguyên về bài toán balô để giải.

b- Bài toán sản xuất có lệ phí cố định

Giả sử một nhà máy có kế hoạch sẽ sản xuất n sản phẩm. Chi phí sản xuất sản phẩm $j=1\to n$ gồm lệ phí cố định k_j , không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm j, và cước phí c_j đối với mỗi đơn vị sản phẩm j.

Gọi $x_j \ge 0$ là lượng sản phẩm $j=1\to n$ sẽ sản xuất thì chi phí sản xuất sản phẩm j sẽ là :

$$c_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{nÕu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nÕu } x_j = 0 \end{cases}$$

mục tiêu sản xuất với chi phí cực tiểu sẽ là :

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j(x_j)$$

Trong trường hợp này hàm mục tiêu z là hàm phi tuyến với các đối số là x_j ($j=1\to n$) mặc dù các ràng buộc thực tế như nguyên liệu, thị trường,.... đều là tuyến tính nên bài toán rất khó giải. Người ta có thể đưa bài toán này về bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận bằng cách đưa vào các biến phụ nhị phân như sau :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{nÕu } x_j > 0 \\ 0 & \text{nÕu} x_j = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Để biểu thị y_j ($j=1 \rightarrow n$) là biến nhị phân độc lập, không phụ thuộc vào x_j như trong (1) người ta đưa vào một ràng buộc tuyến tính như sau :

$$x_j \le My_j \quad (j=1 \rightarrow n)$$

ở đây M>0 và rất lớn để ràng buộc $x_j \le \mu$ là thừa. Khi đó hàm mục tiêu và ràng buộc trên trở thành :

$$\min\ z = \sum_{j=1}^{n} (k_j y_j + c_j x_j)$$

$$\begin{cases} 0 \le x_j \le My_j \\ y_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (2)$$

Thật vậy :

- Nếu $x_j > 0$ thì y_j không thể bằng 0 nên $y_j = 1$
- Nếu $x_j = 0$ thì $y_j = 0$ hoặc $y_j = 1$

Nhưng vì $k_j > 0$ (nếu $k_j = 0$ thì không cần đưa vào biến phụ y_j) và hàm mục tiêu là min z nên ở thuật toán tìm phương án tối ưu luôn lấy $y_j=0$ vì phương án với $x_j=0$ và $y_j=1$ không thể là tối ưu. Khi viết đủ các ràng buộc tuyến tính khác vào ta được bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bộ phận.

CÂU HỎI CHƯƠNG 4

1- Trình bày chiến lược bị trội hơn.

2- Trình bày chiến lược MaxiMin và MiniMax.

3- Xây dựng quy hoạch tuyến tính trong trường hợp không có nghiệm ổn định.

4- Trình bày các giai đoạn giải bài toán vận tải.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1- Tìm phương án tối ưu cho bài toán lý thuyết trò chơi có ma trận điểm được cho như sau :

2	3	-2	-1
-1	5	4	-2
-2	-5	0	3

2- Giải bài toán vận tải có ma trận cước phí

	60	70	40	30
100	2	1	4	3
80	5	3	2	6
20	6	2	1	5