**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC THÀNH ĐÔNG**

# *Bài giảng*
# *Xác suất & thống kê*

MSSV: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Họ tên: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Hải Dương – Ngày 10 tháng 10 năm 2013

# Mục lục

# Chương 1

# Biến cố, xác suất của biến cố

## 1.1 Phép thử, biến cố

- Phép thử là việc thực hiện một thí nghiệm hoặc quan sát một hiện tượng nào đó. Phép thử được gọi là ngẫu nhiên nếu ta không thể dự báo trước chính xác kết quả nào sẽ xảy ra.

- Mỗi kết quả của phép thử, $\omega$ được gọi là một biến cố sơ cấp.

**Ví dụ 1.1.** Thực hiện phép thử tung một đồng xu. Có hai kết quả có thể xảy ra khi tung đồng xu là xuất hiện mặt **sấp-S** hoặc mặt **ngửa-N**:

- Kết quả $\omega = S$ là một biến cố sơ cấp.
- Kết quả $\omega = N$ là một biến cố sơ cấp. □

- Tập hợp tất cả các kết quả, $\omega$ có thể xảy ra khi thực hiện phép thử gọi là không gian các biến cố sơ cấp, ký hiệu là $\Omega$.

**Ví dụ 1.2.** Tung ngẫu nhiên một con xúc sắc. Quan sát số chấm trên mặt xuất hiện của xúc sắc, ta có 6 kết quả có thể xảy ra đó là:1, 2, 3, 4, 5, 6. Không gian các biến cố sơ cấp, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Số phần tử của $\Omega$, $|\Omega| = 6$. □

- Mỗi tập con của không gian các biến cố sơ cấp gọi là biến cố.

**Ví dụ 1.3.** Thực hiện phép thử tung một xúc sắc. Ta đã biết $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Đặt $A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$, A gọi là biến cố "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn". Thay vì liệt kê các phần tử của A, ta đặt tên cho A

A: "Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn"

- Ngược lại, nếu ta gọi biến cố:

  B: "Số chấm trên mặt xuất hiện lớn hơn 4"

  thì khi đó $B = \{5, 6\}$ □

- Xét biến cố $A$, khi thực hiện phép thử ta được kết quả $\omega$.

- Nếu trong lần thử này kết quả $\omega \in A$ ta nói biến cố $A$ xảy ra.
- Ngược lại nếu trong lần thử này kết quả $\omega \notin A$ ta nói biến cố $A$ không xảy ra.

**Ví dụ 1.4.** Một sinh viên thi kết thúc môn xác suất thống kê.
Gọi các biến cố:

$A$: "Sinh viên này thi đạt" $A = \{4; \ldots; 10\}$

- Giả sử sinh viên này đi thi được kết quả $\omega = 6 \in A$ lúc này ta nói biến cố $A$ xảy ra (Sinh viên này thi đạt).
- Ngược lại nếu sinh viên này thi được kết quả $\omega = 2 \notin A$ thì ta nói biến cố $A$ không xảy ra (Sinh viên này thi không đạt). □

## 1.2 Quan hệ giữa các biến cố

a) Quan hệ kéo theo $(A \subset B)$ : Nếu biến cố $A$ xảy ra thì kéo theo biến cố $B$ xảy ra.

**Ví dụ 1.5.** Theo dõi 3 bệnh nhân phỏng đang được điều trị. Gọi các biến cố:

Gọi các biến cố:

$A_i$: "Có $i$ bệnh nhân tử vong", $i = 0, 1, 2, 3$
$B$ : "Có nhiều hơn một bệnh nhân tử vong"

Ta có $A_2 \subset B$, $A_3 \subset B$, $A_1 \not\subset B$ □

b) Hai biến cố $A$ và $B$ được gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, ký hiệu $A = B$.

c) Biến cố tổng $A + B$ $(A \cup B)$ xảy ra khi và chỉ khi $A$ xảy ra hoặc $B$ xảy ra trong một phép thử. (Ít nhất một trong hai biến cố xảy ra)

**Ví dụ 1.6.** Hai xạ thủ cùng bắn vào một mục tiêu, mỗi người bắn một phát. Gọi các biến cố:

Gọi các biến cố:

$A$: "Người thứ nhất bắn trung mục tiêu"
$B$: "Người thứ hai bắn trúng mục tiêu"

Biến cố $A + B$: "Có it nhất một người bắn trúng mục tiêu" □

d) Biến cố tích $AB$ $(A \cap B)$ xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố $A$ và $B$ cùng xảy ra trong một phép thử.

**Ví dụ 1.7.** Một sinh viên thi kết thúc 2 môn hoc. Gọi các biến cố:

Gọi các biến cố:

$A$: "Sinh viên thi đạt môn thứ nhất"
$B$: "Sinh viên thi đạt môn thứ hai"

Biến cố $AB$: "Sinh viên thi đạt cả hai môn" □

e) Hai biến cố $A$ và $B$ gọi là xung khắc nếu chúng không cùng xảy ra trong một phép thử $(AB = \emptyset)$.

f) Biến cố không thể: là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử, ký hiệu $\emptyset$.

g) Biến cố chắc chắn: là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện phép thử, ký hiệu $\Omega$.

h) Biến cố $\bar{A}$ được gọi là biến cố bù của biến cố $A$ hay ngược lại khi và chỉ khi

$$\begin{cases} A \cap \bar{A} = \emptyset \\ A \cup \bar{A} = \Omega \end{cases}$$

## 1.3 Định nghĩa xác suất

**Định nghĩa 1.1** (Định nghĩa cổ điển)**.** *Xét một phép thử đồng khả năng, có không gian các biến cố sơ cấp*

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}, \ |\Omega| = n < \infty$$

*$A \subset \Omega$ là một biến cố. Xác suất xảy ra biến cố $A$, ký hiệu $\mathbb{P}(A)$*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{số trường hợp thuận lợi đối với } A}{\textit{số trường hợp có thể}}$$

**Ví dụ 1.8.** Gieo một con xúc sắc cân đối. Tính xác suất số chấm trên mặt xuất hiện lớn hơn 4.

*Giải.* ______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

□

**Ví dụ 1.9.** Xếp ngẫu nhiên 5 sinh viên vào một ghế dài có 5 chỗ ngồi. Tính xác suất hai người định trước ngồi cạnh nhau.

*Giải.* ______________________________

______________________________

______________________________

______________________________

□

**Tính chất 1.2** (Tính chất của xác suất)**.** *Xác suất có các tính chất:*

*i.* $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ *với mọi biến cố* $A$.

*ii.* $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

*iii. Nếu* $A \subset B$ *thì* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

*iv.* $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}\right)$.

**Ví dụ 1.10.** Một lọ đựng 4 bi trắng và 6 bi đen. Từ lọ lấy ra ngẫu nhiên 3 bi, tính xác suất lấy được:

a) Hai bi trắng.

b) Ít nhất một bi trắng.

*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

$\square$

**Chú ý:** Trong câu b), chúng ta tính xác suất của biến cố bù sẽ đơn giản hơn. Ta có

$$\bar{B}: \text{“Lấy được không bi trắng”}$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{B}\right) = 1 - \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3}$$

## 1.4 Xác suất có điều kiện, sự độc lập

### 1.4.1 Xác suất có điều kiện

**Định nghĩa 1.3** (Xác suất có điều kiện)**.** *$\mathbb{P}(A|B)$ là xác suất xảy ra biến cố $A$ biết rằng biến cố $B$ đã xảy ra ($\mathbb{P}(B) > 0$).*

**Ví dụ 1.11.** Một lọ có 4 viên bi trắng và 6 viên bi đen. Từ lọ này lấy lần lượt ra 2 viên bi, mỗi lần lấy một bi (lấy không hoàn lại). Tìm xác suất để lần lấy thứ hai được viên bi trắng biết lần lấy thứ nhất đã lấy được viên bi trắng.

*Giải.*

$$\begin{cases} 4 \text{ bi trắng} \\ 6 \text{ bi đen} \end{cases} \xrightarrow[\text{đã lấy 1 bi trắng}]{B \text{ xảy ra}} \begin{cases} 3 \text{ bi trắng} \\ 6 \text{ bi đen} \end{cases}$$

□

**Ví dụ 1.12.** Từ một bộ bài tây (4 chất, 52 lá), rút ngẫu nhiên ra 2 lá. Tính xác suất:

a) Rút được hai lá bài cơ.

b) Rút được 2 lá bài cơ biết rằng 2 lá bài này màu đỏ.

*Giải.*

□

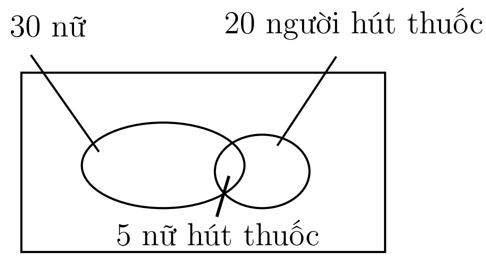
**Ví dụ 1.13.** Một nhóm 100 người có:

+ 20 người hút thuốc.

+ 30 nữ, trong đó có 5 người hút thuốc.

Chọn ngẫu nhiên một người trong nhóm 100 người này. Tính xác suất:

**a.** Người này hút thuốc biết rằng người này là nữ.
**b.** Người này là nữ biết rằng người này hút thuốc.




*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

□

**Công thức xác suất điều kiện**

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}, \quad \mathbb{P}(B) > 0$$

**Tính chất 1.4.** *Xác suất có điều kiện có các tính chất:*

*i.* $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$ *với mọi biến cố* $A$.
*ii. Nếu* $A \subset A'$ *thì* $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A'|B)$.
*iii.* $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}\left(\bar{A}|B\right)$.

**Ví dụ 1.14.** Một công ty cần tuyển 4 nhân viên. Có 10 người nộp đơn dự tuyển, trong đó có 4 nữ (khả năng trúng tuyển của các ứng cử viên là như nhau). Tính xác suất:

a) Cả 4 nữ trúng tuyển.

b) Có ít nhất một nữ trúng tuyển.

c) Cả 4 nữ trúng tuyển, biết rằng có ít nhất một nữ đã trúng tuyển.

*Giải.* 

□

### 1.4.2 Sự độc lập của hai biến cố

$A$ và $B$ là hai biến cố độc lập nếu $B$ có xảy ra hay không cũng không ảnh hưởng đến khả năng xảy ra $A$ và ngược lại, nghĩa là:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \text{ hoặc } \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$$

**Nhận xét:** Nếu hai biến cố $A$ và $B$ độc lập thì các cặp biến cố $A$ và $\bar{B}$; $\bar{A}$ và $B$; $\bar{A}$ và $\bar{B}$ độc lập.

**Ví dụ 1.15.** Tung một xúc sắc 2 lần. Gọi các biến cố:

Gọi các biến cố:

$A$: "Lần 1 xuất hiện mặt 6 chấm"
$B$: "Lần 2 xuất hiện mặt 6 chấm"

Hai biến cố $A$ và $B$ có độc lập?

*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

□

**Ví dụ 1.16.** Một lọ đựng 4 bi trắng và 6 bi đen, thực hiện hai lần lấy bi. Mỗi lần lấy 1 bi (lấy không hoàn lại). Đặt các biến cố:

Gọi các biến cố:

$A$: "Lần 1 lấy được bi đen"
$B$: "Lần 2 lấy được bi trắng"

Hai biến cố $A$ và $B$ có độc lập?

*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

□

## 1.5 Các công thức tính xác suất

### 1.5.1 Công thức cộng

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$$

**Chú ý:** Nếu $A$ và $B$ xung khắc ($AB = \emptyset$) thì

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

**Ví dụ 1.17.** Một lớp học có 20 học sinh trong đó có 10 học sinh giỏi toán, 8 học sinh giỏi văn và 6 học sinh giỏi cả toán và văn. Chọn ngẫu nhiên một học sinh, tính xác suất học sinh này giỏi ít nhất một môn.

*Giải.* ____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

□

**Công thức cộng 3 biến cố:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A+B+C) = &\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)\\ &- \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(AC) - \mathbb{P}(BC)\\ &+ \mathbb{P}(ABC)\end{aligned}$$

**Chú ý:** Nếu $A, B, C$ xung khắc từng đôi một thì

$$\mathbb{P}(A+B+C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$

### 1.5.2 Công thức nhân

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A|B)$$

**Chú ý:** Nếu $A$ và $B$ độc lập thì $\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

**Mở rộng công thức nhân:** Cho $n$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\mathbb{P}(A_1A_2\ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

**Chú ý:** Nếu $A_i, i = 1, \ldots, n$ độc lập toàn bộ thì

$$\mathbb{P}(A_1\ldots A_n) = \mathbb{P}(A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n)$$

**Ví dụ 1.18.** Một người có 4 con gà mái, 6 con gà trống nhốt trong một lồng. Hai người đến mua (người thứ nhất mua xong rồi đến lượt người thứ hai mua, mỗi người mua 2 con) và người bán bắt ngẫu nhiên từ lồng. Tính xác suất người thứ nhất mua được một gà trống và người thứ hai mua hai gà trống.

*Giải.* ____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

□

**Ví dụ 1.19.** Trong một kỳ thi, mỗi sinh viên phải thi 2 môn. Một sinh viên A ước lượng rằng: xác suất đạt môn thứ nhất là 0,8. Nếu đạt môn thứ nhất thì xác suất đạt môn thứ hai là 0,6; nếu không đạt môn thứ nhất thì xác suất đạt môn thứ hai là 0,3. Tính xác suất sinh viên A:

**a.** Đạt môn thứ hai.

**b.** Đạt $i$ môn, $i = 0, 1, 2$.

**c.** Đạt ít nhất một môn.

**d.** Đạt môn thứ hai biết rằng sinh viên này đạt một môn.

**e.** Đạt môn thứ hai biết rằng sinh viên này đạt ít nhất một môn.

*Giải.*

□

**Ví dụ 1.20.** Một người có 3 con gà mái, xác suất đẻ trứng trong ngày của con gà I, II, III lần lượt là 0,4; 0,7; 0,8. Tính xác suất:

a) Có $i$ con gà đẻ trứng trong ngày, $i = 0, 1, 2, 3$.

b) Có ít nhất 1 con gà đẻ trứng trong ngày.

c) Có nhiều nhất 2 con gà đẻ trứng trong ngày.

d) Con gà thứ I đẻ trứng trong ngày biết rằng trong ngày đó có 1 con đẻ trứng.

e) Con gà thứ I đẻ trứng trong ngày biết rằng trong ngày đó có ít nhất 1 con đẻ trứng.

f) Con gà thứ I đẻ trứng trong ngày biết rằng trong ngày đó có nhiều nhất 2 con đẻ trứng.

*Giải.*

□

### 1.5.3 Công thức xác suất đầy đủ

**Định nghĩa 1.5** (Hệ đầy đủ)**.** *$n$ biến cố $A_1, A_2, \ldots, A_n$ được gọi là hệ đầy đủ nếu chúng xung khắc từng đôi một và luôn có ít nhất một biến cố xảy ra trong một phép thử. Nghĩa là*

$$\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j \\ A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \Omega \end{cases}$$

**Ví dụ 1.21.** Từ một lọ có 4 bi trắng và 6 bi đen lấy ra 2 bi.

Gọi các biến cố:

$A_0$: "Lấy được 0 bi đen"
$A_1$: "Lấy được 1 bi đen"
$A_2$: "Lấy được 2 bi đen"

Khi đó $A_0; A_1; A_2$ là hệ đầy đủ. □

**Công thức xác suất đầy đủ:** Cho $A_1; A_2; \ldots; A_n$ ($\mathbb{P}(A_i) > 0$ ) là hệ đầy đủ các biến cố và $B$ là một biến cố bất kỳ. Xác suất xảy ra biến cố $B$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \cdots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n)$$

**Ví dụ 1.22.** Một đám đông có số đàn ông bằng nửa số đàn bà. Xác suất để đàn ông bị bệnh tim là 0,06 và đàn bà là 0,036. Chọn ngẫu nhiên 1 người từ đám đông, tính xác suất để người này bị bệnh tim.

*Giải.* ______________________________

□

### 1.5.4 Công thức xác suất Bayes

Gải thiết giống công thức xác suất đầy đủ. Xác suất:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_iB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(B)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

**Ví dụ 1.23.** Một lớp có số học sinh nam bằng 3 lần số học sinh nữ. Tỷ lệ học sinh nữ giỏi toán là 30% và tỷ lệ học sinh nam giỏi toán là 40%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp này. Tính xác suất:

**a.** Học sinh này giỏi toán.

**b.** Học sinh này là nam biết rằng học sinh này giỏi toán.

*Giải.*

□

**Ví dụ 1.24.** Có hai chuồng gà: Chuồng I có 10 gà trống và 8 gà mái; Chuồng II có 12 trống và 10 mái. Có hai con gà chạy từ chuồng I sang chuồng II. Sau đó có hai con gà chạy ra từ chuồng II. Tính xác suất:

**a.** Hai con gà chạy từ chuồng I sang chuồng II là 2 con trống và hai con gà chạy ra từ chuồng II cũng là hai con trống.

**b.** Hai con gà chạy ra từ chuồng II là hai con trống.

**c.** Biết rằng hai con gà chạy ra từ chuồng II là hai con trống, tính xác suất hai con gà chạy từ chuồng I sang chuồng II là 2 con gà trống.

*Giải.* ______________________________________________

$\square$

## 1.6 Bài tập chương 1

**Bài tập 1.1.** Một nhóm khảo sát sở thích tiết lộ thông tin là trong năm qua:

- 45% người xem Tivi thích xem phim tình cảm Hàn quốc.
- 25% người xem Tivi thích xem phim hành động Mỹ.
- 10% thích xem cả hai thể loại trên.

Tính tỷ lệ nhóm người thích xem ít nhất một trong hai thể loại trên. **(60%)**

*Giải.*

**Bài tập 1.2.** Có ba lô hàng mỗi lô có 20 sản phẩm, số sản phẩm loại A có trong lô I, II, III lần lượt là: 12; 14; 16. Bên mua chọn ngẫu nhiên từ mỗi lô hàng 3 sản phẩm, nếu lô nào cả 3 sản phẩm đều loại A thì bên mua nhận mua lô hàng đó. Tính xác suất:

- **a.** Lô thứ $i$ được mua, $i = 1, 2, 3$. **(0,193; 0,3193; 0,4912)**
- **b.** Có $i$ lô được mua, $i = 0, 1, 2, 3$. **(0,2795; 0,4678; 0,2225; 0,0303)**
- **c.** Có nhiều nhất hai lô được mua. **(0,9697)**
- **d.** Có ít nhất một lô được mua.**(0,7205)**
- **e.** Giả sử có ít nhất một lô được mua. Tính xác suất trong đó lô II được mua. **(0,4432)**
- **f.** Giả sử có ít nhất một lô được mua. Tính xác suất trong đó lô I và II được mua.**(0,0855)**
- **g.** Giả sử có một lô được mua. Tính xác suất lô II được mua. **(0,2803)**

*Giải.*

**Bài tập 1.3.** Một hộp bóng bàn có 15 bóng mới và 8 bóng cũ. Lần thứ I lấy ra 2 bóng để sử dụng sau đó cho vào lại hộp; lần thứ II lấy ra 3 bóng. Tính xác suất

**a.** Lần thứ I lấy được $i$ bóng cũ, $i = 0, 1, 2$. **(0,4150; 0,4743; 0,1107)**
**b.** Lần I lấy 1 bóng cũ và lần II là 3 bóng mới. **(0,0975)**
**c.** Lần thứ II lấy được 3 bóng mới. **(0,1929)**
**d.** Biết lần thứ II lấy được 3 bóng mới, tính xác suất lần thứ I lấy được 1 bóng cũ. **(0,5054)**

*Giải.*

**Bài tập 1.4.** Có 3 bình đựng bi: bình I có 4 bi trắng và 6 bi đen; bình II có 7 bi trắng và 3 bi đen; bình III có 6 bi trắng và 8 bi đen. Từ bình I và bình II, mỗi bình lấy 1 bi và bỏ sang bình III. Tiếp theo, từ bình III lấy ra tiếp 3 bi. Tính xác suất:

- **a.** Hai bi lấy ra từ bình I và II có $i$ bi trắng, $i = 0, 1, 2$. **(0,18; 0,54; 0,28)**
- **b.** Ba bi lấy ra từ bình III có hai bi trắng. **(0,3424)**
- **c.** Giả sử ba bi lấy từ bình III có hai bi trắng, tính xác suất hai bi lấy từ bình I và II là hai bi đen. **(0,1408)**

*Giải.*

**Bài tập 1.5.** Một thùng kín đựng 2 loại thuốc: Số lượng lọ thuốc loại A bằng 2/3 thuốc số lượng lọ thuốc loại B. Tỉ lệ lọ thuốc A, B đã hết hạn sử dụng lần lượt là 10% và 8%. Từ thùng lấy ngẫu nhiên một lọ thuốc.

**a.** Tính xác suất lấy được lọ thuốc $A$ hết hạn sử dụng. **(0,04)**

**b.** Tính xác suất lọ thuốc lấy ra từ thùng đã hết hạn sử dụng. **(0,088)**

**c.** Giả sử lấy được lọ thuốc còn hạn sữ dụng, tính xác suất lọ này là lọ thuốc B. **(0,6053)**

*Giải.*

**Bài tập 1.6.** * Một người bắn 3 phát đạn vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất trúng mục tiêu ở mỗi phát lần lượt là 0,55; 0,6; 0,7. Xác suất mục tiêu bị hạ khi bi trúng 1, 2, 3 phát đạn lần lượt là 0,2; 0,4; 0,8. Tính xác suất:

- **a.** Có $i$ phát trúng mục tiêu, $i = 0, 1, 2, 3$. **(0,054; 0,273; 0,442; 0,231)**
- **b.** Có nhiều nhất 2 phát trúng mục tiêu. **(0,769)**
- **c.** Tính xác suất mục tiêu bị hạ. **(0,4162)**
- **d.** Giả sử có 2 phát trúng mục tiêu, tính xác suất phát thứ I trúng mục tiêu. **(0,5724)**
- **e.** Giả sử mục tiêu bị hạ. Tính xác suất phat thứ nhất trúng mục tiêu. **(0,7189)**
- **f.** Biết rằng có nhiều nhất 2 phát trúng mục tiêu, tính xác suất mục tiêu bị hạ. **(0,3575)**

*Sinh viên hệ cao đẳng không phải làm các câu c, e, f.

*Giải.*

**Bài tập 1.7.** Nhà máy có hai phân xưởng, sản lượng của phân xưởng I gấp

3 lần sản lượng của phân xưởng II. Tỉ lệ phế phẩm của phân xưởng I, II lần lượt là 7% và 12%. Chọn ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy, tính:

- **a.** Xác suất chọn được sản phẩm tốt do phân xưởng I sản xuất. **(0,6975)**
- **b.** Xác suất chọn được phế phẩm. **(0,0825)**
- **c.** Giả sử chọn được sản phẩm tốt, tính xác suất sản phẩm này do phân xưởng I sản xuất. **(0,7602)**

*Giải.*

**Bài tập 1.8.** Một người buôn bán bất động sản đang cố gắng bán một mảnh đất lớn. Ông ta tin rằng nếu nền kinh tế tiếp tục phát triển, khả năng mảnh đất được mua là 80%; ngược lại nếu nền kinh tế ngừng phát triển, ông ta chỉ có thể bán được mảnh đất đó với xác suất 40%. Theo dự báo của một chuyên gia kinh tế, xác suất nền kinh tế tiếp tục tăng trưởng là 65%. Tính xác suất để bán được mảnh đất. **(0,66)**

*Giải.*

**Bài tập 1.9.** [†] Có hai hộp đựng bi: hộp I có 5 bi trắng và 7 bi đen; hộp II có 6 bi trắng và 4 bi đen. Lấy 1 bi từ hộp I bỏ sang hộp II, rồi từ hộp II lấy ra 1 bi. Tính xác suất

**a.** Bi lấy từ hộp II là bi trắng. **(7/12)**

**b.** Giả sử bi lấy từ hộp II là bi trắng, tính xác suất bi lấy từ hộp I là bi trắng. **(5/11)**

**c.** Giả sử bi lấy ra từ hộp II là bi trắng, tính xác suất bi này của hộp I. $\left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{11}}/\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}\right)$

**d.** Giả sử bi lấy ra từ hộp II là bi trắng, tính xác suất bi này của hộp II. $\left(\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{11}}/\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}\right)$

*Giải.*

[†]Sinh viên hệ cao đẳng không phải làm các câu c, d.

# Chương 2

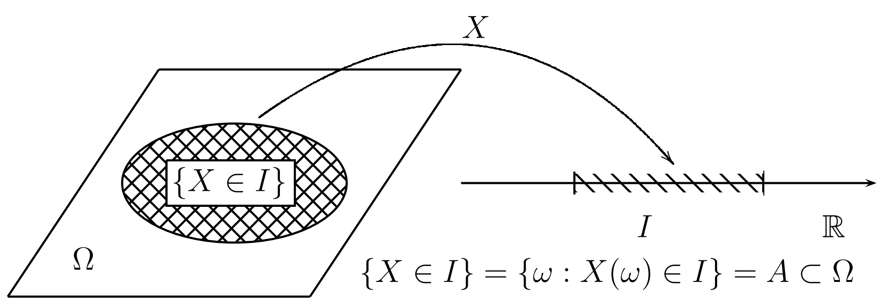
# Biến ngẫu nhiên

## 2.1 Khái niệm biến ngẫu nhiên

- Xét một phép thử có không gian các biến cố sơ cấp $\Omega$. Đặt

$$\begin{array}{rcccl} X & : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \omega & \longmapsto & X(\omega) = x \end{array}$$

$X$ được gọi là biến ngẫu nhiên, $x$ gọi là giá trị của biến ngẫu nhiên $X$.




Hình 2.1: Biến ngẫu nhiên $X$

**Ví dụ 2.1.** Thực hiện phép thử gieo đồng thời 2 đồng xu cân đối, chúng ta có không gian các biến cố sơ cấp

$$\Omega = \{N_1N_2; N_1S_2; S_1N_2; S_1S_2\}$$

Đặt $X(\omega)$ là số đồng xu sấp khi kết quả phép thử là $\omega$. Ta có:

$$X(N_1N_2) = 0; \quad X(N_1S_2) = 1; \quad X(S_1N_2) = 1; \quad X(S_1S_2) = 2$$

Khi đó ta gọi $X$ là biến ngẫu nhiên số đồng xu sấp khi tung 2 đồng xu. $\square$

- Có hai loại biến ngẫu nhiên:

- Biến ngẫu nhiên rời rạc là biến ngẫu nhiên mà giá trị có thể của nó là một tập hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.
- Biến ngẫu nhiên liên tục là biến ngẫu nhiên mà giá trị có thể của nó lấp đầy một khoảng trên trục số.

**Ví dụ 2.2.**

- Số chấm trên mặt xuất hiện khi tung một xúc sắc là biến ngẫu nhiên rời rạc (giá trị của $X$ là tập hữu hạn).
- Số cuộc gọi đến tổng đài điện thoại trong 1 giờ là biến ngẫu nhiên rời rạc (giá trị của $X$ là tập vô hạn đếm được).
- Thời gian hoàn thành 1 sản phẩm của một công nhân là biến ngẫu nhiên liên tục. □

## 2.2 Phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

### 2.2.1 $X$ là biến ngẫu nhiên rời rạc

Để mô tả phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc người ta sử dụng bảng phân phối xác suất:

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $\cdots$ | $f(x_n)$ | $\cdots$ |

Trong đó:

- Dòng 1 liệt kê giá trị có thể của X.
- $f(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i), i = 1, 2, \ldots$ gọi là xác suất $X$ nhận giá trị $x_i$.
- Nếu $x_0 \notin \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ thì $f(x_0) = 0$.

**Ví dụ 2.3.** Thực hiện phép thử tung một xúc sắc. Gọi $X$ là số chấm trên mặt xuất hiện của xúc sắc. $X$ có bảng phân phối như sau:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |

**Nhận xét:**

- $f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) + \cdots = 1.$
- $\mathbb{P}(a < X < b) = \sum_{a<x_i<b} f(x_i).$ □

**Ví dụ 2.4.** Cho biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ có bảng phân phối xác suất cho như sau:

| $X$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $a$ | $2a$ | $3a$ | $4a$ |

**a.** Xác định $a$.
**b.** Xác định $\mathbb{P}(X = 2)$.
**c.** Xác định $\mathbb{P}(-1 < X < 4)$.

*Giải.* ____________________

□

**Ví dụ 2.5.** Một xạ thủ có 4 viên đạn, bắn lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,7. Nếu có một viên trúng mục tiêu hoặc hết đạn thì dừng. Gọi $X$ là số viên đạn đã bắn, lập bảng phân phối xác suất của $X$.

*Giải.* ____________________

□

**Ví dụ 2.6.** Một xạ thủ có 6 viên đạn, bắn lần lượt từng viên vào một mục tiêu một cách độc lập. Xác suất trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,7. Nếu có 3 viên trúng mục tiêu hoặc hết đạn thì dừng. Gọi $X$ là số viên đạn đã bắn, lập bảng phân phối xác suất của $X$.

*Giải.*

□

**Ví dụ 2.7.** Một lọ có 3 bi trắng và 7 bi đen. Từ lọ này lấy ra ngẫu nhiên 4 bi. Gọi X là số bi đen lẫn trong 4 bi lấy ra, lập bảng phân phối xác suất của $X$.

*Giải.*

□

### 2.2.2 $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục

**Định nghĩa 2.1** (Hàm mật độ)**.** *Hàm số $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ được gọi là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên liên tục X nếu*

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x)dx, \forall A \subset \mathbb{R}$$

*Chú ý.* Với định nghĩa hàm mật độ ta có

i. Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục thì xác suất $X$ thuộc một tập $A \subset \mathbb{R}$ được tính bằng tích phân của hàm mật độ $f(x)$ trên tập $A$.

ii. Mọi hàm mật độ phải thỏa hai điều kiện $f(x) \geq 0$ và $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

**Ví dụ 2.8.** Cho hàm số

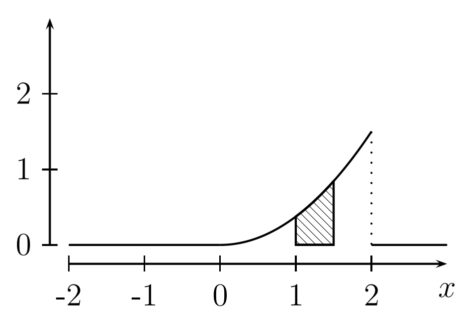
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{8}x^2 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Chứng tỏ $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $X$.

**b.** Tính xác suất $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3/2)$.

**c.** Tính xác suất $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)$.

*Giải.* ______________________________________________




□

### 2.2.3 Hàm phân phối xác suất

**Định nghĩa 2.2** (Hàm phân phối xác suất)**.** *Hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên $X$, ký hiệu $F(x)$*

$$F(x) = \mathbb{P}\left(X < x\right)$$

**Nhận xét:**

- Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên rời rạc thì

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \sum_{x_i < x} f(x_i)$$

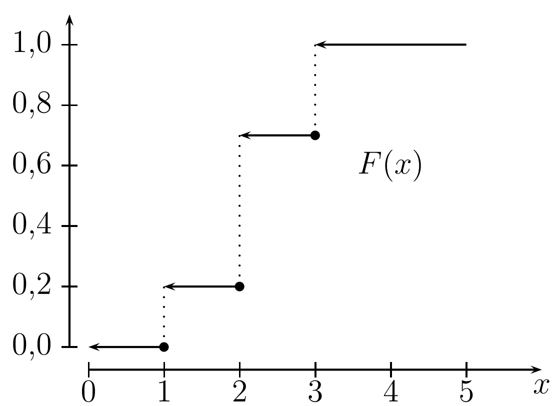
- Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì

$$F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

**Ví dụ 2.9.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có bảng phân phối như sau:

| $X$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 0,2 | 0,5 | 0,3 |

**a.** Tìm hàm phân phối $F(x)$ của $X$.
**b.** Vẽ đồ thị của $F(x)$.




*Giải.* ______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

______________________________________________

□

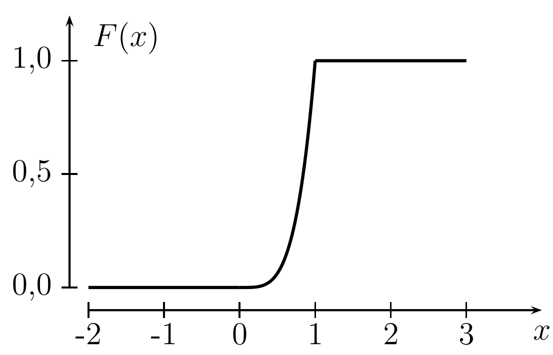
**Ví dụ 2.10.** Cho biến ngẫu nhiên liên tục $X$ có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^3 & \text{khi } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Xác định $k$.

**b.** Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$.

**c.** Vẽ đồ thị hàm phân phối $F(x)$.




*Giải.*

□

**Tính chất 2.3.** *Hàm phân phối xác suất $F(x)$ có các tính chất:*

*i.* $0 \leq F(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}; F(-\infty) = 0; F(+\infty) = 1$

*ii.* *$F(x)$ là hàm không giảm (nếu $x_1 < x_2$ thì $F(x_1) \leq F(x_2)$).*

*iii.* $\mathbb{P}(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

*iv. Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$ thì:*

- $F'(x) = f(x)$
- $\mathbb{P}(X = x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ *và*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(b \leq X < a) &= \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \mathbb{P}(a < X \leq b) \\ &= \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \end{aligned}$$

**Ví dụ 2.11.** Một phân xưởng có 2 máy hoạt động độc lập. Xác suất trong 1 ngày làm việc các máy đó hỏng tương ứng là 0,3 và 0,4. Gọi X là số máy hỏng trong 1 ngày làm việc.

**a.** Lập bảng phân phối xác suất của $X$.

**b.** Tìm hàm phân phối xác suất của $X$.

*Giải.* ________________________________________

□

## 2.3 Các đặc trưng số của biến ngẫu nhiên

### 2.3.1 Kỳ vọng - $\mathbb{E}X$

**Định nghĩa 2.4** (Kỳ vọng)**.** *Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên $X$, ký hiệu $\mathbb{E}X$ :*

- *$X$ là biến ngẫu nhiên rời rạc có bảng phân phối xác suất*

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $f(x_1)$ | $f(x_2)$ | $\cdots$ | $f(x_n)$ | $\cdots$ |

  *Kỳ vọng* $\mathbb{E}X = x_1 f(x_1) + \cdots + x_n f(x_n) + \cdots$

- *$X$ là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$*

$$\textit{Kỳ vọng } \mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

**Ví dụ 2.12.** Anh A nuôi 5 con lợn có cân nặng (kg) 55, 55, 60, 70, 70. Chọn ngẫu nhiên một con và mang cân, gọi $X$ là cân nặng.

**a.** Lập bảng phân phối xác suất của $X$.
**b.** Tính kỳ vọng của $X$.
**c.** Lập bảng phân phối xác suất của $X^2$.
**d.** Tính kỳ vọng của $X^2$.

*Giải.*

□

**Ý nghĩa của kỳ vọng:** Kỳ vọng của $X$ là *trung bình* các giá trị của $X$ theo xác suất.

**Tính chất 2.5.** *Kỳ vọng có các tính chất:*

*i.* $\mathbb{E}c = c$, *c là hằng số.*

*ii.* $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}X$.

*iii.* $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$.

*iv.* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$ *khi* $X$ *và* $Y$ *độc lập.*

*v. Cho* $Y = h(X)$ *là hàm của biến ngẫu nhiên* $X$.

- *Khi* $X$ *là biến ngẫu nhiên rời rạc*

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}h(X) = h(x_1)f(x_1) + \cdots + h(x_n)f(x_n) + \cdots$$

- *Khi* $X$ *là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ* $f(x)$ *thì*

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}h(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx$$

**Ví dụ 2.13.** Thời gian học rành nghề sửa ti vi của một người là một biến ngẫu nhiên - $X$ (năm) có hàm mật độ.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{40}x^2 + \dfrac{1}{5} & \text{khi } x \in (0;2) \\ 0 & \text{khi } x \notin (0;2) \end{cases}$$

**a.** Tính thời gian trung bình một người học rành nghề sửa tivi.

**b.** Tính $\mathbb{E}(2X+3)$.

**c.** Tính $\mathbb{E}(X^2)$.

*Giải.*

□

### 2.3.2 Phương sai - $\mathbb{V}arX$

**Định nghĩa 2.6** (Phương sai)**.** *Phương sai của biến ngẫu nhiên $X$, ký hiệu* $\mathbb{V}arX$

$$\mathbb{V}arX = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}X - X\right)^2 = \mathbb{E}X^2 - \left(\mathbb{E}X\right)^2$$

**Ví dụ 2.14.** Anh A nuôi 5 con lợn có cân nặng (kg) 55, 55, 60, 70, 70. Chọn ngẫu nhiên một con và mang cân, gọi $X$ là cân nặng. Tính phương sai của X.

*Giải.*

□

**Ý nghĩa phương sai:** Phương sai là trung bình của bình phương sai khác giữa các giá trị của $X$ so với trung bình của nó. Do đó phương sai dùng để đo độ phân tán các giá trị của $X$ so với trung bình của nó. Nghĩa là phương sai lớn thì độ phân tán lớn và ngược lại.

Do đơn vị của phương sai bằng bình phương đơn vị của $X$. Để có cùng đơn vị, ta định nghĩa độ lệch chuẩn

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}ar X}$$

**Ví dụ 2.15.** Giả thiết giống ví dụ 2.13. Thời gian học rành nghề sửa ti vi của một người là một biến ngẫu nhiên - $X$ (năm) có hàm mật độ.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{40}x^2 + \frac{1}{5} & \text{khi } x \in (0;2) \\ 0 & \text{khi } x \notin (0;2) \end{cases}$$

Tính phương sai của $X$.

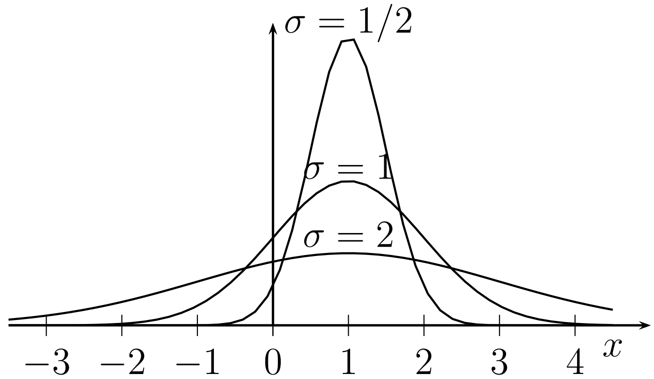
*Giải.* ____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

____________________________________________

$\square$




**Tính chất 2.7.** *Phương sai có các tính chất:*

*i.* $\mathbb{V}ar(c) = 0, c$ *là hằng số.*

*ii.* $\mathbb{V}ar(cX) = c^2\mathbb{V}ar X$.

*iii.* $\mathbb{V}ar(X+Y) = \mathbb{V}ar X + \mathbb{V}ar Y$, *nếu* $X$ *và* $Y$ *độc lập.*

### 2.3.3 ModX

**Định nghĩa 2.8.** *Mod của biến ngẫu nhiên* $S$, *ký hiệu* $ModX$

- *X là biến ngẫu nhiên rời rạc*

$$ModX = \{x_i | \mathbb{P}(X = x_i) \max\}$$

- *X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f(x)$*

$$ModX = \{x_0 | f(x_0) \max\}$$

**Ví dụ 2.16.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có bảng phân phối xác suất cho như sau:

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | 0,1 | 0,3 | 0,4 | 0,2 |

$ModX = 3$ vì $\mathbb{P}(X = 3) \max$ □

**Ví dụ 2.17.** Cho biến ngẫu nhiên liên tục $X$ có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{4} & \text{khi } x \in [0; 2] \\ 0 & \text{khi } x \notin [0; 2] \end{cases}$$

Xác định $ModX$.

*Giải.* ____________________________________________

□

## 2.4 Bài tập chương 2

**Bài tập 2.1.** Cho biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ có bảng phân phối xác suất

| $X$ | $a$ | $0,1$ | $0,3$ | $0,4$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $0,3$ | $0,2$ | $0,2$ | $0,2$ | $0,1$ |

**a.** Giá trị của tham số $a$ để $\mathbb{E}X = 0,3$. **(-0,2)**

**b.** Tìm hàm phân phối xác suất của $X$.

*Giải.*

**Bài tập 2.2.** Theo thống kê, một người Mỹ 25 tuổi sẽ sống thêm trên 1 năm có xác suất là 0,992 và người đó chết trong vòng 1 năm tới là 0,008. Một công ty bảo hiểm A đề nghị người đó bảo hiểm sinh mạng cho 1 năm với số tiền chi trả là 10000 USD, phí bảo hiểm là 100 USD. Hỏi trung bình công ty A lãi bao nhiêu khi bán bảo hiểm cho người đó? **(20USD)**

*Giải.*

**Bài tập 2.3.** Người thợ chép tranh mỗi tuần chép hai bức tranh độc lập A và B với xác suất hỏng tương ứng là 0,03 và 0,05. Biết rằng nếu thành công thì người thợ sẽ kiếm lời từ bức tranh A là 1,3 triệu đồng và B là 0,9 triệu đồng, nhưng nếu hỏng thì bị lỗ do bức tranh A là 0,8 triệu đồng và do B là 0,6 triệu đồng. Hỏi trung bình người thợ kiếm được bao nhiêu tiền chép tranh mỗi tuần? **(2,062)**

*Giải.*

**Bài tập 2.4.** Nhu cầu hằng ngày của 1 khu phố về 1 loại thực phẩm tươi sống có bảng phân phối xác suất

| Nhu cầu (kg) | 31 | 32 | 33 | 34 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $0,15$ | $0,25$ | $0,45$ | $0,15$ |

Một cửa hàng trong khu phố nhập về mỗi ngày 34 kg loại thực phẩm này với giá 25.000 đồng/kg và bán ra với giá 40.000 đồng/kg. Nếu bị ế, cuối ngày cửa hàng phải bán hạ giá còn 15.000 đồng/kg mới bán hết hàng. Tính tiền lời trung bình của cửa hàng này về loại thực phẩm trên trong 1 ngày. **(475 ngàn đồng)**

*Giải.*

**Bài tập 2.5.** Tuổi thọ (X-tuổi) của người dân ở một địa phương là biến ngẫu nhiên có hàm phân phối cho như sau

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{khi } 0 < x \end{cases} \quad \text{với } \lambda = 0,013$$

Tính:

**a.** Tỷ lệ người dân thọ từ 60 đến 70 tuổi. **(0,0559)**

**b.** Xác định hàm mật độ của $X$.

**c.** Tính tuổi thọ trung bình và $\mathbb{V}arX$. $\left(1/\lambda; 1/\lambda^2\right)$

*Giải.*

**Bài tập 2.6.** Tuổi thọ (X-tháng) của một bộ phận của một dây chuyền sản xuất là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{25}{2}(10+x)^{-2} & \text{khi } x \in (0;40) \\ 0 & \text{khi } x \notin (0;40) \end{cases}$$

**a.** Xác suất tuổi thọ của bộ phận này nhỏ hơn 6 tháng. **(0,4688)**

**b.** Tuổi thọ trung bình của dây chuyền này. **(10,118 tháng)**

**c.** Tìm hàm phân phối xác suất của $X$.

*Giải.*

**Bài tập 2.7.** Tuổi thọ của một loại côn trùng nào đó là một đại lượng ngẫu nhiên liên tục $X$ (đơn vị tháng) có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2(4-x) & \text{khi } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Tìm hằng số $k$. **(3/64)**

**b.** Tìm $F(x)$.

**c.** Tìm $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}ar(X)$ và $Mod(X)$. **(12/5; 16/25; 8/3)**

**d.** Tính xác suất để côn trùng chết trước một tháng tuổi. **(13/256)**

*Giải.*

**Bài tập 2.8.** X là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Tìm $k$ để hàm $f(x)$ là hàm mật độ khi đó tìm kỳ vọng và phương sai của $X$. **(3; 3/4; 3/80)**

**b.** Tính $\mathbb{P}(1/2 < X < 3/2), \mathbb{P}(X \leq 1/2)$. **(7/8)**

**c.** Biết $Y = X^3$, tìm $\mathbb{P}(1/64 < Y < 1/8)$. **(7/64)**

*Giải.*

**Bài tập 2.9.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} kx(2-x) & \text{khi } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Xác định giá trị của $k$ để $f(x)$ là hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $X$. Với $k$ vừa tìm được tính kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên $X$. **(3/2; 11/8; 19/320)**

**b.** Tìm hàm phân phối $F(x)$ của biến ngẫu nhiên $X$.

**c.** Tính xác suất $\mathbb{P}(Y > 2X)$ với $Y = X^3$. $\left(\mathbf{\frac{6}{5}\sqrt{2} - \frac{3}{5}}\right)$

*Giải.*

# Chương 3

# Một số phân phối xác suất thông dụng

## 3.1 Phân phối Bernoulli

Xét một phép thử, trong phép thử này ta chỉ qua tâm đến 2 biến cố $A$ và $\bar{A}$, với $\mathbb{P}(A) = p$. Phép thử như thế này còn gọi là phép thử Bernoulli. Đặt biến ngẫu nhiên

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Nếu } A \text{ xảy ra}; \mathbb{P}(X=1) = p \\ 0 & \text{Nếu } A \text{ không xảy ra}; \mathbb{P}(X=0) = 1-p = q \end{cases}$$

Biến ngẫu nhiên $X$ gọi là có phân phối nhị thức tham số $p$, ký hiệu $X \sim B(p)$. Ta có bảng phân phối xác suất của $X \sim B(p)$

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $q$ | $p$ |

**Tính chất 3.1.** *Các đặc trưng của $X \sim B(p)$*

*i.* $\mathbb{E}X = p$.

*ii.* $\mathbb{V}arX = pq$.

**Ví dụ 3.1.** Trả lời ngẫu nhiên một câu hỏi trắc nghiệm có 4 đáp án, trong đó chỉ có một đáp án đúng. Gọi biến ngẫu nhiên:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{Nếu trả lời đúng}; \mathbb{P}(X=1) = 1/4 \\ 0 & \text{Nếu trả lời sai}; \mathbb{P}(X=0) = 3/4 \end{cases}$$

$X \sim B(p); \mathbb{E}X = 1/4; \mathbb{V}arX = 3/16.$ □

## 3.2 Phân phối Nhị thức

Xét dãy $n$ phép thử Bernoulli độc lập và cùng phân phối,

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Lần } i\, A \text{ xảy ra}; \mathbb{P}(X_i = 1) = p \\ 0 & \text{Lần } i\, A \text{ không xảy ra}; \mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - p = q \end{cases}, i = \overline{1, n}$$

Đặt $X = X_1 + \cdots + X_n$ : gọi là số lần $A$ xảy ra trong $n$ lần thực hiện phép thử. $X$ được gọi là có phân phối Bernoulli tham số $n, p$; ký hiệu $X \sim B(n; p)$.

**Ví dụ 3.2.** Một xạ thủ bắn 3 phát đạn vào một mục tiêu một cách độc lập, xác suất trúng mục tiêu ở mỗi lần bắn là 0,7. Gọi các biến ngẫu nhiên:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Lần } i \text{ bắn trúng MT}; \mathbb{P}(X_i = 1) = 0,7 \\ 0 & \text{Lần } i \text{ bắn không trúng MT}; \end{cases}, i = 1, 2, 3$$

$X = X_1 + X_2 + X_3, X \sim B(3; 0,7)$. $X$ là số phát trúng mục tiêu trong 3 phát, giá trị có thể của $X$ là $0, 1, 2$. Xác suất có 2 phát trúng mục tiêu:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= + \left\| \begin{array}{ll} 0,7.0,7.0,3 = (0,7)^2.0,3 & \text{Phát 1,2 trúng MT} \\ 0,7.0,3.0,7 = (0,7)^2.0,3 & \text{Phát 1,3 trúng MT} \\ 0,3.0,7.0,7 = (0,7)^2.0,3 & \text{Phát 2,3 trúng MT} \end{array} \right. \\ &= 3.(0,7)^2.0,3 = C_3^2 (0,7)^2 0,3 \end{aligned}$$

□

**Công thức tính xác suất của $X \sim B(n; p)$**

Xác suất trong $n$ lầ thực hiện phép thử Bernoulli có $k$ lần $A$ xảy ra

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

**Tính chất 3.2.** *Các đặc trưng của $X \sim B(n; p)$*

*i.* $\mathbb{E}X = np$.

*ii.* $\mathbb{V}arX = npq$.

*iii.* $np - q \leq ModX \leq np - q + 1$.

**Ví dụ 3.3.** Một đề thi có 10 câu hỏi, mỗi câu có 4 đáp án trong đó chỉ có một đáp án đúng. Sinh viên A trả lời một cách ngẫu nhiên tất cả các câu. Gọi $X$ là số câu trả lời đúng trong 10 câu:

**a.** Xác định phân phối xác suất của $X$.

**b.** Tính xác suất sinh viên A trả lời đúng từ 2 đến 3 câu.

**c.** Tính xác suất sinh viên A trả lời đúng ít nhất một câu.

**d.** Số câu trung bình sinh viên A trả lời đúng và $\mathbb{V}arX$.

**e.** Số câu sinh viên A có khả năng trả lời đúng lớn nhất.

**f.** Đề thi cần có ít nhất bao nhiêu câu để xác suất sinh viên A trả lời đúng ít nhất một câu $\geq 0,99$.

*Giải.*

□

## 3.3 Phân phối Siêu bội

**Ví dụ 3.4.** Từ một lọ có 3 bi trắng và 7 bi đen lấy ra 4 bi. Gọi $X$ là số bi đen lẫn trong 4 bi lấy ra, lập bảng phân phối xác suất của $X$.

$$10 \text{ bi} \begin{cases} 3 & \text{bi trắng} \\ 7 & \text{bi đen} \end{cases} \xrightarrow[\text{có } k \text{ bi đen}]{\text{Lấy ra 4 bi}} \begin{cases} 4-k & \text{bi trắng} \\ k & \text{bi đen} \end{cases}$$

**Mô hình siêu bội:** Từ một tập có $N$ phần tử gồm:

- $N_A$ phần tử $A$.
- $N - N_A$ phần tử khác phần tử $A$.

Từ tập $N$ lấy ra $n$ phần tử. Gọi $X$ là số phần tử $A$ lẫn trong $n$ phần tử lấy ra, $X$ gọi là có phân phối siêu bội tham số $N, N_A, n$, ký hiệu $X \sim H(N, N_A, n)$

$$N \begin{cases} N_A & \text{Phần tử A} \\ N - N_A & \text{Phần tử } \bar{A} \end{cases} \xrightarrow[\text{được } kPTA]{\text{Lấy ra } n \text{ PT}} \begin{cases} k & \text{Phần tử } A \\ n-k & \text{Phần tử } \bar{A} \end{cases}$$

**Công thức tính xác suất cho $X \sim H(N, N_A, n)$**

Xác suất trong $n$ phần tử lấy ra từ tập $N$ có $k$ phần tử $A$ :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{N_A}^{k} C_{N-N_A}^{n-k}}{C_N^n}, \text{trong đó} \begin{cases} 0 \leq k \leq n \\ n - (N - N_A) \leq k \leq N_A \end{cases}$$

**Tính chất 3.3.** *Các đặc trưng của* $X \sim H(N, N_A, n)$

*i.* $\mathbb{E}X = np; \left(p = \dfrac{N_A}{N}\right).$

*ii.* $\mathbb{V}arX = npq\dfrac{N-n}{N-1}.$

**Ví dụ 3.5.** Có 20 chi tiết máy, trong đó có 15 chi tiết máy tốt. Từ 20 chi tiết này lấy ra ngẫu nhiên 4 chi tiết máy (lấy một lần), gọi $X$ là số chi tiết tốt lẫn trong 4 chi tiết lấy ra.

**a.** Xác định phân phối xác suất của $X$.

**b.** Tính xác suất lấy được 3 chi tiết tốt.

**c.** Tính trung bình số chi tiết tốt lấy được và $\mathbb{V}arX$.

*Giải.*

□

## 3.4 Phân phối Poisson

**Định nghĩa 3.4** (Phân phối Poisson)**.** *Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là có phân phối Poisson tham số $\lambda$ (ký hiệu $X \sim P(\lambda)$ nếu biến ngẫu nhiên $X$ nhận giá trị $k = 0, 1, \ldots$ với*

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

**Tính chất 3.5.** *Các đặc trưng của $X \sim P(\lambda)$*

*i.* $\mathbb{E}X = \lambda$.

*ii.* $\mathbb{V}arX = \lambda$.

*iii.* $\lambda - 1 \leq ModX \leq \lambda$.

**Chú ý:** Biến ngẫu nhiên $X$ là số lần xuất hiện $A$ tại những thời điểm ngẫu nhiên trong khoảng $(t_1; t_2)$ thỏa 2 điều sau:

- Số lần xuất hiện biến cố $A$ trong khoảng $(t_1; t_2)$ không ảnh hưởng đến xác suất xuất hiện $A$ trong khoảng thời gian kế tiếp.
- Số lần xuất hiện biến cố $A$ trong 1 khoảng thời gian bất kỳ tỉ lệ với độ dài của khoảng đó.

Khi đó biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối Poisson.

**Ví dụ 3.6.** Tại một siêu thi, trung bình cứ 5 phút có 10 khách đến quầy tính tiền.

**a.** Tính xác suất để trong 1 phút có 3 khách đến quầy tính tiền.

**b.** Tính xác suất để trong 1 phút có từ 1 đến 3 khách đến quầy tính tiền.

**c.** Số khách có khả năng đến quầy tính tiền lớn nhất trong 1 giờ.

*Giải.*

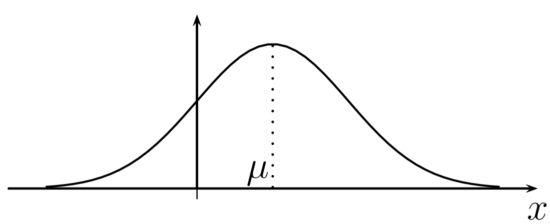
□

## 3.5 Phân phối Chuẩn

**Định nghĩa 3.6** (Phân phối chuẩn)**.** *Biến ngẫu nhiên $X$ được gọi là có phân phối chuẩn tham số $\mu$ và $\sigma^2$, ký hiệu $X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$, nếu $X$ có hàm mật độ:*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Đồ thị hàm mật độ của $X \sim N(\mu;\sigma^2)$




**Nhận xét:** Đồ thị hàm mật độ chuẩn có dạng hình "chuông" đối xứng qua $x = \mu$

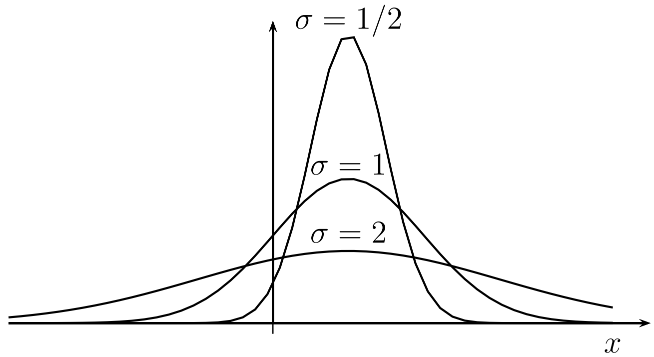
**Tính chất 3.7.** *Các đặc trưng của $X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$*

*i.* $\mathbb{E}X = \mu$.

*ii.* $\mathbb{V}arX = \sigma^2$.

*iii.* $ModX = \mu$.

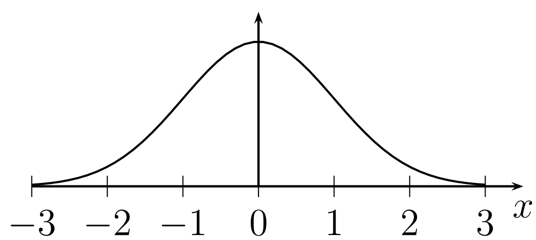
Các đồ thị hàm mật độ biến ngẫu nhiên chuẩn với trung bình là $\mu$ và $\sigma = 2, \sigma = 1, \sigma = 1/2$.




**Định nghĩa 3.8** (Phân phối chuẩn: $\mu = 0; \sigma^2 = 1$)**.** *Hàm mật độ của biến ngẫu nhiên $Z \sim N(0;1)$ có dạng*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}$$

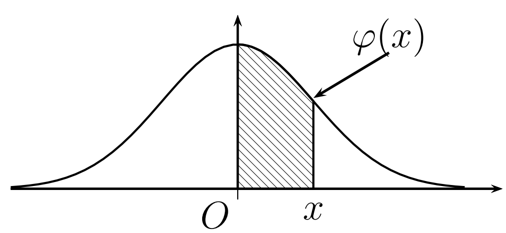
Hình sau là đồ thị hàm mật độ của $z \sim N(0;1)$




**Định nghĩa 3.9** (Hàm Laplace)**.** *Cho biến ngẫu nhiên $Z \sim N(0;1)$. Đặt hàm*

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \quad x \geq 0$$

*gọi là hàm Laplace. (Giá trị của $\varphi(x)$ được cho trong bảng A.2)*




**Tính chất 3.10.** *Hàm Laplace $\varphi(x)$ có các tính chất:*

*i.* $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

*ii.* $\varphi(+\infty) = 0,5; \varphi(-\infty) = -0,5$.

*iii. Nếu $Z \sim N(0;1)$ thì $\mathbb{P}(a < Z < b) = \varphi(b) - \varphi(a)$.*

*iv. Nếu* $X \sim N\left(\mu;\sigma^2\right)$ *thì biến ngẫu nhiên* $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0;1)$. *và*

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

**Ví dụ 3.7.** Cho biến ngẫu nhiên $X \sim N(0;1)$, tính các xác suất.

**a.** $\mathbb{P}(-1 < X < 2)$.
**b.** $\mathbb{P}(1,5 < X)$.
**c.** $\mathbb{P}(X < -1)$.

$\square$

**Ví dụ 3.8.** Cho biến ngẫu nhiên $X \sim N\left(3;2^2\right)$. Tính các xác suất:

**a.** $\mathbb{P}(1 < X)$.
**b.** $\mathbb{P}(|X-1| < 2)$.
**c.** $\mathbb{P}(|X-1| > 1)$.

□

**Ví dụ 3.9.** Điểm Toeic của sinh viên sắp tốt nghiệp ở trường đại học có phân phối chuẩn với giá trị trung bình 560 và độ lệch chuẩn 78. Tính:

**a.** Tỷ lệ sinh viên có điểm nằm giữa 600 và 700.

**b.** Tỷ lệ sinh viên có điểm Toeic trên 500.

**c.** Giả sử nhà trường muốn xác định điểm Toeic tối thiểu để sinh viên có thể ra trường với tỉ lệ 80%. Tính điểm Toeic tối thiểu (lấy phần nguyên).

*Giải.*

□

**Ví dụ 3.10.** Tuổi thọ của máy cắt cỏ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình là 82 tháng. Nhà sản xuất bảo hành sản phẩm khi bán ra là 33 tháng. Giả sử 2,5% sản phẩm bị trả lại (hỏng) trong thời gian bảo hành. Tính:

**a.** Độ lệch chuẩn của tuổi thọ sản phẩm này.

**b.** Xác suất một máy loại này có tuổi thọ trên 50 tháng.

**c.** Một cửa hàng bán 10 máy cắt cỏ loại này. Tính:

i) Xác suất có 2 máy hỏng trong thời gian bảo hành.

ii) Số máy trung bình hỏng trong thời gian bảo hành.

*Giải.*

□

## 3.6 Bài tập chương 3

**Bài tập 3.1.** Một nhà vườn trồng 121 cây mai với xác suất nở hoa của mỗi cây trong dịp tết năm nay là 0,75. Giá bán 1 cây mai nở hoa là 0,5 triệu đồng.

**a.** Tính số cây trung bình nở hoa trong dịp tết. **(90,75 cây)**

**b.** Giả sử nhà vườn bán hết những cây mai nở hoa, tính số tiền trong dịp tết năm nay nhà vườn thu được chắc chắn nhất. **(45,5 triệu đồng)**

*Giải.*

**Bài tập 3.2.** Chủ vườn lan đã để nhầm 20 chậu lan có hoa màu đỏ với 100 chậu lan có hoa màu tím (lan chưa nở hoa). Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 15 chậu từ 120 chậu lan đó (chọn 1 lần).

**a.** Tính xác suất có từ 5 đến 6 chậu lan có hoa màu đỏ. **(0,0723)**

**b.** Gọi X là số chậu lan có hoa màu đỏ khách chọn được. Tính giá trị của $\mathbb{E}X$ và $\mathbb{V}arX$. **(5/2; 125/68)**

*Giải.* ______________________________

**Bài tập 3.3.** Tại bệnh viện A trung bình 3 giờ có 8 ca mổ. Tính

**a.** Số ca mổ chắc chắn nhất sẽ xảy ra tại bệnh viện A trong 25 giờ. **(66 ca)**

**b.** Tính xác suất trong 5 giờ có từ 10 đến 12 ca mổ. **(0,2821)**

*Giải.* ______________________________

**Bài tập 3.4.** Một lô hàng chứa 20 sản phẩm trong đó có 4 phế phẩm. Chọn liên tiếp 3 lần (có hoàn lại) từ lô hàng, mỗi lần chọn ra 4 sản phẩm. Tính xác suất để trong 3 lần chọn có:

**a.** Đúng 1 lần chọn được không quá 1 phế phẩm. **(0,066)**

**b.** Trung bình số lần chọn được không quá 1 phế phẩm. **(2,514)**

*Giải.*

**Bài tập 3.5.** Giá cà phê trên thị trường là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình là 26000 đồng/kg và độ lệch chuẩn 2000 đồng. $k$ là giá trị tại đó cà phê có giá lớn hơn $k$ với xác suất 90%. Tính giá trị $k$. **(23420 đồng)**

*Giải.*

**Bài tập 3.6.** Thời gian mang thai của sản phụ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 280 ngày. Cho biết tỷ lệ một sản phụ mang thai trên 290 ngày là 25,14%, tính độ lệch chuẩn của thời gian mang thai. **(15 ngày)**

*Giải.*

**Bài tập 3.7.** Chiều dài của loại linh kiện điện tử A tại cửa hàng B là biến ngẫu nhiên X (mm) có phân phối chuẩn $N(12; 2,5)$. Một công ty cần mua loại linh kiện này với chiều dài từ 11,98mm đến 13mm và họ chọn lần lượt 7 chiếc từ cửa hàng B. Tính xác suất để trong 7 chiếc được chọn có:

**a.** Từ 5 đến 6 chiếc sử dụng được. **(1,06%)**

**b.** Ít nhất một chiếc sử dụng được. **(0,8531)**

*Giải.*

**Bài tập 3.8.** Thời gian chơi thể thao trong một ngày của một thanh niên là biến ngẫu nhiên $X$ (giờ/ngày) có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} A\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x\right) & \text{khi } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Tính hằng số A. ($2\pi/3$)

**b.** Tính thời gian chơi thể thao trung bình. **(0,6530 giờ/ngày)**

**c.** Tính xác suất một thanh niên có thời gian chơi thể thao chưa tới 30 phút/ngày. **(0,2679)**

**d.** Trung bình có bao nhiêu thanh niên chơi thể thao hơn 30 phút/ngày trong 100 thanh niên. **26,79 thanh niên**

**e.** Ta phải chọn ít nhất bao nhiêu thanh niên để gặp được ít nhất 1 người có thời gian chơi thể thao chưa tới 30 phút/ngày xảy ra với xác suất hơn 95%. **(10 thanh niên)**

*Giải.*

**Bài tập 3.9.** Tuổi thọ của người dân ở một địa phương là một biến ngẫu nhiên - $X$ (tuổi) có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}, \quad \lambda = 0,013$$

**a.** Tính tuổi thọ trung bình của người dân ở địa phương. **(76,9231 tuổi)**

**b.** Tính tỉ lệ người dân thọ trên 60 tuổi. **(0,4584)**

**c.** Trung bình có bao nhiêu người thọ trên 60 tuổi tuổi trong 1000 dân. **(458,4)**

*Giải.*

**Bài tập 3.10.** Thời gian học rành nghề sửa ti vi của một người là một biến ngẫu nhiên - $X$ (năm) có hàm mật độ.

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + \dfrac{1}{5} & \text{khi } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Xác định hằng số $A$. **(9/40)**

**b.** Thời gian học rành nghề trung bình của một người. **(1,3 năm)**

**c.** Tính xác suất một người học rành nghề dưới 6 tháng. **(0,1094)**

**d.** Chọn ngẫu nhiên 5 học viên, tính xác suất có 2 người học rành nghề dưới 6 tháng. **(0,0845)**

*Giải.*

# Chương 4

# Luật số lớn và các định lý giới hạn

## 4.1 Hội tụ theo xác suất và phân phối

**Định nghĩa 4.1** (Hội tụ theo xác suất)**.** *Cho dãy biến ngẫu nhiên* $\{X_n\}$ *và biến ngẫu nhiên* $X$*. Ta nói* $\{X_n\}$ *hội tụ theo xác suất đến* $X$*, ký hiệu* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$*, nếu với mọi* $\varepsilon > 0$ *thì*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$$

Nếu $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ thì với $n$ lớn chúng ta có $X_n \approx X$ với xác suất gần 1. Thông thường, $X_n$ hội tụ theo xác suất đến biến ngẫu nhiên $X$ là hằng số ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$, $\theta$ là hằng số) nghĩa là khi $n$ lớn thì hầu như biến ngẫu nhiên $X_n$ không có sự thay đổi.

**Định nghĩa 4.2** (Hội tụ theo phân phối)**.** *Định nghĩa hội tụ theo phân phối Cho dãy biến ngẫu nhiên* $\{X_n\}$ *và biến ngẫu nhiên* $X$*. Ta nói* $\{X_n\}$ *hội tụ theo phân phối đến* $X$*, ký hiệu* $X_n \xrightarrow{F} X$*, nếu*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(X_n < x\right) = \mathbb{P}\left(X < x\right) = F(x)$$

*tại mọi điểm liên tục của hàm phân phối* $F(x)$

Nếu $X_n \xrightarrow{F} X$ thì với $n$ đủ lớn chúng ta có thể xấp xỉ phân phối của $X_n$ bởi phân phối của $X$. Vậy hội tụ theo phân phối rất tiện lợi cho việc xấp xỉ phân phối của biến ngẫu nhiên $X_n$.

**Định nghĩa 4.3** (Hội tụ hầu chắc chắn)**.** *Cho dãy biến ngẫu nhiên* $\{X_n\}$ *và biến ngẫu nhiên* $X$*. Ta nói* $\{X_n\}$ *hội tụ hầu chắc chắn đến* $X$*, ký hiệu* $X_n \xrightarrow{a.s.} X$*, nếu* $X_n \not\to X$ *với xác suất là không.*

## 4.2 Bất đẳng thức Markov, Chebyshev

### 4.2.1 Bất đẳng thức Markov

Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm thì với mọi hằng số dương $\varepsilon$ ta có

$$\mathbb{P}\left(X \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(X\right)}{\varepsilon}$$

*Chứng minh.* $X$ là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ $f(x)$ thì

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X\right) = \int\limits_{0}^{+\infty} xf(x)dx &= \int\limits_{0}^{\varepsilon} xf(x)dx + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} xf(x)dx \geq \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \varepsilon f(x)dx = \varepsilon\mathbb{P}\left(X \geq \varepsilon\right)\end{aligned}$$

Nhân hai vế của bất phương trình với $1/\varepsilon$ thì ta đươc kết quả. □

### 4.2.2 Bất đẳng thức Chebyshev

Nếu $X$ là biến ngẫu nhiên có kỳ vọng là $\mu$ và phương sai $\sigma^2$ hữu hạn thì với mọi hằng số dương $\varepsilon$ bé tùy ý ta có

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}ar\left(X\right)}{\varepsilon^2}$$

hay tương đương

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| < \varepsilon\right) > \frac{\mathbb{V}ar\left(X\right)}{\varepsilon^2}$$

*Chứng minh.* Ta thấy $\left(X-\mu^2\right)$ là biến ngẫu nhiên không âm và $\varepsilon > 0$. Sử dụng bất đẳng thức *Markov* với $\varepsilon := \varepsilon^2$ ta được

$$\mathbb{P}\left[\left(X-\mu\right)^2 \geq \varepsilon^2\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left(X-\mu\right)^2}{\varepsilon}$$

Vì $\left(X-\mu\right)^2 \geq \varepsilon^2$ khi và chỉ khi $|X-\mu| \geq \varepsilon$ nên

$$\mathbb{P}\left(|X-\mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}ar\left(X\right)}{\varepsilon^2}$$

Bất đẳng thức *Markov* và *Chebyshev* cho ta phương tiện thấy được giới hạn xác suất khi biết kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên chưa biết phân phối xác suất. □

**Ví dụ 4.1.** Giả sử số phế phẩm của một nhà máy làm ra trong một tuần là một biến ngẫu nhiên với kỳ vọng là $\mu = 50$.

**a.** Có thể nói gì về xác suất sản phẩm hư tuần này vượt quá 75.

**b.** Nếu phương sai của phế phẩm trong tuần này là $\sigma^2 = 25$ thì có thể nói gì về xác suất sản phẩm tuần này sẽ ở giữa 40 và 60.

*Giải.*

a. Theo bất đẳng thức *Markov* $\mathbb{P}(X > 75) \geq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{75} = \dfrac{50}{75} = \dfrac{2}{3}$

b. Theo bất đẳng thức *Chebyshev* $\mathbb{P}(|X - 50| \geq 10) \leq \dfrac{\sigma^2}{10^2} = \dfrac{25}{100} = \dfrac{1}{4}$. Do đó

$$\mathbb{P}(40 < X < 60) = \mathbb{P}(|X - 50| < 10) > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

□

## 4.3 Luật số lớn

**Định lý 4.4** (Luật số lớn)**.** *Gọi $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối xác suất với kỳ vọng $\mu = \mathbb{E}(X)$ và phương sai $\sigma^2 = \mathbb{V}ar(X)$ hữu hạn. Đặt $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$$

*khi $n \to +\infty$.*

*Chứng minh.* Bởi vì $X_1, \ldots, X_n$ là độc lập và cùng phân phối, ta có $\mathbb{V}ar\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ và $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_n}{n}\right) = \mu$. Áp dụng bất đẳng thức *Chebyshev*, với mọi $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Cố định $\varepsilon$ và khi $n \to +\infty$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$$

$S_n/n$ là trung bình của các biến ngẫu nhiên $X_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, do đó người ta thường gọi luật số lớn là luật “trung bình”. □

## 4.4 Định lý giới hạn trung tâm

**Định lý 4.5.** *Cho $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối với kỳ vọng $\mu$ và phương sai $\sigma^2$ hữu hạn. Ta đặt*

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

*Khi $n \to \infty$ thì biến ngẫu nhiên*

$$S_n \xrightarrow{F} X, \qquad \text{với } X \sim N\left(\mathbb{E}\left(S_n\right); \mathbb{V}ar\left(S_n\right)\right)$$

**Nhận xét:** Định lý trên cho ta kết quả là khi $n$ lớn phân phối của biến ngẫu nhiên $S_n$ được xấp xỉ bằng phân phối chuẩn $N\left(\mathbb{E}\left(S_n\right); \mathbb{V}ar\left(S_n\right)\right)$. Để đơn giản ta viết $S_n \dot\sim N\left(\mathbb{E}\left(S_n\right); \mathbb{V}ar\left(S_n\right)\right)$, dấu “$\dot\sim$” nghĩa là “xấp xỉ phân phối”.

**Ví dụ 4.2.** Tung 1000 lần 1 xúc sắc, tính xác suất tổng số chấm trong 1000 lần tung lớn hơn 3600.

*Giải.*

$\square$

## 4.5 Liên hệ giữa các phân phối xác suất

### 4.5.1 Liên hệ giữa phân phối nhị thức và chuẩn

Cho $X_1, \ldots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và $X_i \sim B(p)$. Ta có

$$X = X_1 + \cdots + X_n \sim B(n;p)$$

Theo định lý giới hạn trung tâm $X \dot{\sim} N(np; \sqrt{npq}^2)$ khi $n \to \infty$. Khi đó:

- $\mathbb{P}\left(a \leq X \leq b\right) = \varphi\left(\dfrac{b-np}{\sqrt{npq}}\right) - \varphi\left(\dfrac{a-np}{\sqrt{npq}}\right)$
- $\mathbb{P}\left(X = k\right) = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} f(z)$, ($f(x)$-A.1) trong đó $z = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$

**Chú ý:** Xấp xỉ trên chúng ta thường sử dụng khi $p$ không quá gần 0 hoặc 1.

**Ví dụ 4.3.** Trong một kho lúa giống có tỉ lệ hạt lúa lai là 20%. Tính xác suất sao cho khi chọn lần lượt 1000 hạt lúa giống trong kho thì có:

**a.** Đúng 192 hạt lúa lai.

**b.** Có từ 185 đến 195 hạt lúa lai.

*Giải.*

$\square$

### 4.5.2 Liên hệ giữa siêu bội và nhị thức

Cho $X \sim H(N, N_A, n)$. Nếu cố định $n$, $N \to \infty$ và $\dfrac{N_A}{N} \to p$ thì $X \dot{\sim} B(n,p), p = \dfrac{N_A}{N}$

**Nhận xét:** Khi $X \sim H(N, N_A, n)$, nếu $N$ khá lớn và $n << N, (n < 0,05N)$ thì

$$\mathbb{P}\left(X = k\right) = \frac{C_{N_A}^{k} C_{N-N_A}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k p^k q^{n-k}, \left(p = \frac{N_A}{N}\right)$$

**Ví dụ 4.4.** Một ao cá có 10.000 cá da trơn, trong đó có 1.000 con cá tra.

- **a.** Tính xác suất để khi bắt ngẫu nhiên 20 con từ ao thì được 5 con cá tra.
- **b.** Tính xác suất để khi bắt ngẫu nhiên 50 con từ ao thì được 10 con cá tra.

*Giải.*

□

### 4.5.3 Liên hệ giữa nhị thức và Poisson

Cho $X \sim B(n,p)$ và khi $n \to \infty$ thì $X \dot{\sim} P(\lambda)$ trong đó $\lambda = np$

**Nhận xét:** Khi $X \sim B(n,p)$ và khi $n$ khá lớn thì

$$\mathbb{P}(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

**Chú ý:** Xấp xỉ trên chúng ta thường dùng khi $n$ lớn và $p$ gần 0 hoặc 1.

**Ví dụ 4.5.** Một lô hàng thịt đông lạnh đóng gói nhập khẩu có chứa 0,6% bị nhiễm khuẩn. Tìm xác suất để khi chọn ngẫu nhiên 1.000 gói thịt từ lô hàng này có:

- **a.** Không quá 2 gói bị nhiễm khuẩn.
- **b.** Đúng 40 gói bị nhiễm khuẩn.

*Giải.*

□

# Chương 5

# Véctơ ngẫu nhiên

## 5.1 Khái niệm véctơ ngẫu nhiên

- Một bộ có thứ tự $n$ biến ngẫu nhiên $(X_1, \ldots, X_n)$ gọi là một véctơ ngẫu nhiên $n$ chiều.
- Véctơ ngẫu nhiên $n$ chiều là liên tục hay rời rạc nếu, các biến ngẫu nhiên thành phần là liên tục hay rời rạc.

**Ví dụ 5.1.** Năng xuất lúa ở một thửa ruộng ở địa phương A là biến ngẫu nhiên $X$, nếu xét đến lượng phân $Y$ thì ta có véctơ ngẫu nhiên hai chiều $(X, Y)$, còn nếu xét thêm lượng nước $Z$ thì ta có véctơ ngẫu nhiên 3 chiều $(X, Y, Z)$. $\square$

Trong giới hạn của chương trình ta chỉ xét véctơ ngẫu nhiên hai chiều, ký hiệu $(X, Y)$.

## 5.2 Phân phối xác suất của $(X, Y)$

### 5.2.1 $(X, Y)$ là véctơ ngẫu nhiên rời rạc

**a) Phân phối xác suất đồng thời:** Véctơ ngẫu nhiên rời rạc $(X, Y)$ được biểu diễn bằng bảng phân phối xác suất đồng thời:

| X \ Y | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ | $y_n$ | Tổng dòng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $f(x_1, y_1)$ | $f(x_1, y_2)$ | $\cdots$ | $f(x_1, y_j)$ | $\cdots$ | $f(x_1, y_n)$ | $f(x_1, \bullet)$ |
| $x_2$ | $f(x_2, y_1)$ | $f(x_2, y_2)$ | $\cdots$ | $f(x_2, y_j)$ | $\cdots$ | $f(x_2, y_n)$ | $f(x_2, \bullet)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_i$ | $f(x_i, y_1)$ | $f(x_i, y_2)$ | $\cdots$ | $f(x_i, y_j)$ | $\cdots$ | $f(x_i, y_n)$ | $f(x_i, \bullet)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\cdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_m$ | $f(x_m, y_1)$ | $f(x_m, y_2)$ | $\cdots$ | $f(x_m, y_j)$ | $\cdots$ | $f(x_m, y_n)$ | $f(x_m, \bullet)$ |
| Tổng cột | $f(\bullet, y_1)$ | $f(\bullet, y_2)$ | $\cdots$ | $f(\bullet, y_j)$ | $\cdots$ | $f(\bullet, y_n)$ | 1 |

Trong đó:

- $f(x_i, y_j) = \mathbb{P}(X = x_i; Y = y_j)$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i; y_j) = 1$

**Ví dụ 5.2.** Biến ngẫu nhiên rời rạc $X$ nhận các giá trị 6, 7 và 8. Biến ngẫu nhiên $Y$ nhận các giá trị 1, 2, 3. Phân phối đồng thời của véctơ ngẫu nhiên $(X, Y)$ cho bởi bảng

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 6 | 0,1 | 0,15 | 0,05 |
| 7 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 8 | 0,05 | 0,2 | 0,05 |

Tính:

**a.** $\mathbb{P}(X = 6; Y = 2)$; $\mathbb{P}(X = 4; Y = 6)$.

**b.** $\mathbb{P}(X \geq 7; Y \geq 2)$.

*Giải.* ______________________________

$\square$

**b) Phân phối xác suất thành phần (lề)**

- Bảng phân phối xác suất của $X$

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x)$ | $f(x_1, \bullet)$ | $f(x_3, \bullet)$ | $\cdots$ | $f(x_m, \bullet)$ |

Trong đó $f(x_i, \bullet)$ là tổng dòng $i$.

- Bảng phân phối xác suất của $Y$

| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y)$ | $f(\bullet, y_1)$ | $f(\bullet, y_2)$ | $\cdots$ | $f(\bullet, y_n)$ |

Trong đó $f(\bullet, y_j)$ là tổng cột $j$.

**Ví dụ 5.3.** Cho bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 6 | 0,1 | 0,15 | 0,05 |
| 7 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 8 | 0,05 | 0,2 | 0,05 |

**a.** Lập bảng phân phối xác suất của $X$.

**b.** Tính $\mathbb{P}(X > 6)$.

**c.** Lập bảng phân phối xác suất của $Y$.

**d.** Tính $\mathbb{P}(Y < 3)$.

*Giải.*

$\square$

### c) Phân phối xác suất có điều kiện

- Bảng phân phối xác suất của $X$ với điều kiện $Y = y_j$

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = x \mid Y = y_j)$ | $\dfrac{f(x_1, y_j)}{f(\bullet, y_j)}$ | $\dfrac{f(x_2, y_j)}{f(\bullet . y_j)}$ | $\cdots$ | $\dfrac{f(x_m, y_j)}{f(\bullet, y_j)}$ |

- Bảng phân phối xác suất của $Y$ với điều kiện $X = x_i$

| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}(Y = y \mid X = x_i)$ | $\dfrac{f(x_i, y_1)}{f(x_i, \bullet)}$ | $\dfrac{f(x_i, y_2)}{f(x_i, \bullet)}$ | $\cdots$ | $\dfrac{f(x_i, y_n)}{f(x_i, \bullet)}$ |

**Ví dụ 5.4.** Cho bảng phân phối xác suất đồng thời như sau:

| X \ Y | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 6 | 0,1 | 0,15 | 0,05 |
| 7 | 0,1 | 0,2 | 0,1 |
| 8 | 0,05 | 0,2 | 0,05 |

**a.** Lập bảng phân phối xác suất của $X$ biết $Y = 2$.

**b.** Tính xác suất $\mathbb{P}(X > 6|Y = 2)$.

**c.** Lập bảng phân phối xác suất của $Y$ biết $X = 6$.

**d.** Tính xác suất $\mathbb{P}(Y > 1|X = 6)$.

*Giải.*

□

### 5.2.2 $(X, Y)$ là véctơ ngẫu nhiên liên tục

#### a) Hàm mật độ đồng thời

**Định nghĩa 5.1** (Hàm mật độ đồng thời)**.** *Hàm số $f(x, y) \geq 0, \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ được gọi là hàm mật độ đồng thời của $(X, Y)$ nếu*

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y)dxdy, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

*Chú ý.* Với định nghĩa hàm mật độ đồng thời của véctơ ngẫu nhiên ta có

i. Nếu $(X, Y)$ là véctơ ngẫu nhiên liên tục thì xác suất $(X, Y)$ thuộc một tập $A \subset \mathbb{R}^2$ được tính bằng tích phân của hàm mật độ $f(x, y)$ trên tập $A$.

ii. Mọi hàm mật độ đồng thời của véctơ ngẫu nhiên (X,Y) phải thỏa hai điều kiện $f(x, y) \geq 0$ và

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in R^2\right) = \iint\limits_{R^2} f(x, y)dxdy = 1$$

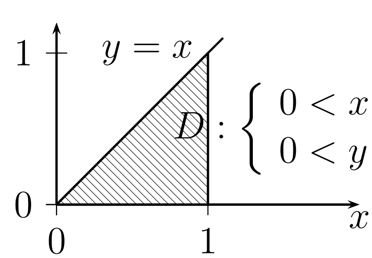
**Ví dụ 5.5.** Cho hàm số

$$f(x, y) = \begin{cases} 10x^2y & \text{khi } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

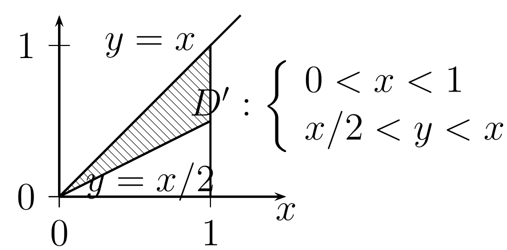
**a.** Chứng tỏa $f(x, y)$ là hàm mật độ $(X, Y)$.

**b.** Tính $\mathbb{P}(2Y > X)$.

*Giải.*




$$D : \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < x \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} 0 < y < 1 \\ y < x < 1 \end{cases}$$




$\square$

**b) Hàm mật độ thành phần (lề)**

- Hàm mật độ của $X$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$$

- Hàm mật độ của $Y$.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

**Ví dụ 5.6.** Cho véctơ ngẫu nhiên $(X, Y)$ có hàm mật độ

$$f(x, y) = \begin{cases} 10x^2y & \text{khi } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

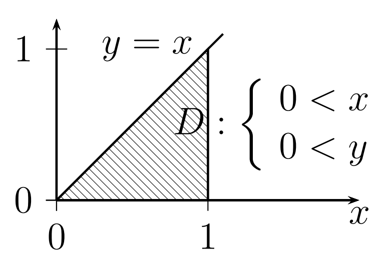
**a.** Tìm hàm mật độ của $X$.

**b.** Tìm hàm mật độ của $Y$.

**c.** Tính $\mathbb{P}(X > 1/2)$ và $\mathbb{E}X$.

**d.** Tính $\mathbb{P}(Y < 1/2)$ và $\mathbb{E}X$.

*Giải.*




$$D : \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < x \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0 < y < 1 \\ y < x < 1 \end{cases}$$

□

### c) Hàm mật độ có điều kiện

- Hàm mật độ của $X$ với điều kiện $Y = y$

$$f_X(x|Y = y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

- Hàm mật độ của $Y$ với điều kiện $X = x$

$$f_Y(y|X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

**Ví dụ 5.7.** Cho véctơ ngẫu nhiên $(X, Y)$ có hàm mật độ

$$f(x, y) = \begin{cases} 10x^2y & \text{khi } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Tìm hàm mật độ của $X$ với điều kiện $Y = 1/2$.
**b.** Tìm hàm mật độ của $Y$ với điều kiện $X = 1/3$.
**c.** Tính $\mathbb{P}(X > 2/3|Y = 1/2)$ và $\mathbb{E}(X|Y = 1/2)$.

**d.** Tính $\mathbb{P}(Y < 1/4|X = 1/3)$ và $\mathbb{E}(Y|X = 1/3)$.

$\square$

## 5.3 Bài tập chương 5

**Bài tập 5.1.** Chi phí quảng cáo ($X$: triệu đồng) và doanh thu ($Y$: triệu đồng) của một cửa hàng có bảng phân phối đồng thời cho như sau:

| $X \backslash Y$ | 500 (400-600) | 700 (600-800) | 900 (800-1000) |
|---|---|---|---|
| 30 | 0,10 | 0,05 | 0 |
| 50 | 0,15 | 0,20 | 0,05 |
| 80 | 0,05 | 0,05 | 0,35 |

**a.** Lập bảng phân phối xác suất chi phí chi cho quảng cáo.

**b.** Cho doanh thu là 500 triệu, lập bảng phân phối xác suất chi phí quảng cáo.

**c.** Lập bảng phân phối xác suất doanh thu của cửa hàng.

**d.** Cho biết chi phí quảng cáo là 30 triệu, lập bảng phân phối xác suất của doanh thu.

**e.** Tính chi phí chi cho quảng cáo trung bình.

**f.** Cho doanh thu là 500 triệu, tính chi phí quảng cáo trung bình.

**g.** Tính doanh thu trung bình của cửa hàng.

**h.** Cho chi phí quảng cáo là 30 triệu, tính doanh thu trung bình.

*Giải.*

**Bài tập 5.2.** Năng suất lúa X(tấn/ha) và lượng phân Urê Y(x 100 kg) có hàm mật độ đồng thời

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{40}y^2 + \dfrac{xy}{20} & \text{khi } 0 \le 3y \le x \le 6 \\ 0 & \text{nơi khác} \end{cases}$$

**a.** Tìm hàm mật độ xác suất của năng suất lúa.
**b.** Tìm hàm mật độ xác suất của lượng phân Urê.
**c.** Tính năng suất lúa trung bình.
**d.** Tính lượng phân bón trung bình.
**e.** Tìm hàm mật độ xác suất của năng suất khi lượng phân bón 1 (x 100kg).
**f.** Tìm hàm mật độ xác suất của lượng phân bón khi năng suất 3 (tấn/ha).
**g.** Cho biết lượng phân bón 1(x100kg), tính xác suất năng suất lúa dưới 4(tấn/ha).
**h.** Cho biết lượng phân bón 1(x100 kg), tính năng suất lúa trung bình.
**i.** Cho biết năng suất lúa 3(tấn/ha), tính lượng phân bón trung bình.

*Giải.*