Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán

(Chương trình nâng cao)

11

* Tóm tắt lí thuyết * Phân loại và phương pháp giải các dạng toán cơ bản và nâng cao
* Bài tập mẫu * Bài tập áp dụng
* Dành cho HS ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ bản

ĐHQG Hà Nội

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán

(Chương trình nâng cao)

11

* Tóm tắt lí thuyết * Phân loại và phương pháp giải các dạng toán cơ bản và nâng cao
* Bài tập mẫu * Bài tập áp dụng
* **Dành cho HS ban Khoa học tự nhiên và ban Cơ bản**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715013; (04) 7685236. Fax: (04) 9714899
***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập nội dung
MINH HẢI
Sửa bản in
HOÀNG VĨNH
Trình bày bìa
SƠN KỲ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN (chương trình nâng cao - tập 2)
Mã số: 1L - 175DH2007
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24 cm tại Công ti cổ phần Văn hoá Tân IBình.
Số xuất bản: 619- 2007/CXB/16 - 77/ĐHQG HN, ngày 3/08/2007..
Quyết định xuất bản số: 406/LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quí III năm 2007

LỜI GIỚI THIỆU

Xin giới thiệu đến bạn đọc cuốn: *Phân loại & Phương pháp giải các dạng bài tập Toán 11*, theo chương trình phân ban mới của bộ GD&ĐT.

Sách gồm 2 tập: - Tập 1: Đại số & giải tích

- Tập 2: Hình học

Nội dung sách bám sát theo sách giáo khoa mới, chương trình chuẩn và chương trình nâng cao. Nội dung mỗi bài gồm các phần sau:

A. Kiến thức cơ bản

B. Phân loại và phương pháp giải các dạng toán

- Bài tập tự luận

- Bài tập trắc nghiệm khách quan

Các bài tập trình bày trong các tập sách này được các tác giả chọn lọc kĩ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tốt các góc cạnh của mỗi phần kiến thức. Với các lời giải rõ ràng, dễ hiểu sẽ giúp các em học sinh tiếp cận và rèn luyện tốt các kĩ năng và phương pháp giải toán, đồng thời ôn tập các kiến thức đã được học qua các bài tập trắc nghiệm khách quan để chuẩn bị tốt cho các kì thi học kì, thi tốt nghiệp, tuyển sinh bằng phương pháp trắc nghiệm khách quan theo quy định của bộ GD&ĐT.

Hi vọng rằng các tập sách này sẽ là người bạn đồng hành giúp các em học sinh ngày càng yêu thích hơn môn Toán và vững vàng giải quyết các vấn đề trước các kì thi sắp đến.

Do thời gian biên soạn có hạn, có thể sách còn những khiếm khuyết. Rất mong nhận được những góp ý, đóng góp của quý đồng nghiệp và các em học sinh để trong lần tái bản sau, bộ sách sẽ hoàn chỉnh hơn.

Mọi góp ý xin gởi về: Trung tâm sách Giáo dục Alpha - 225C Nguyễn Tri Phương - Phường 9 - Q.5 - Tp.HCM. ĐT: 8107718 - 8547464.

Email: alphabookcenter@yahoo.com

Các tác giả

MỤC LỤC

Trang

Chương 1: Các phép biến hình trong mặt phẳng 5

§1. Phép biến hình – Phép tịnh tiến – Phép dời hình 5

§2. Phép đối xứng trục 14

§3. Phép quay và phép đối xứng tâm 25

§4. Phép vị tự 40

§5. Phép đồng dạng 56

§6. Hình bằng nhau – Hình đồng dạng 64

ÔN TẬP CHƯƠNG I 68

Chương II: Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song 74

§1. Đại cương về đường thẳng và mặt phẳng 74

§2. Hai đường thẳng song song 81

§3. Đường thẳng song song với mặt phẳng 84

§4. Hai mặt phẳng song song 87

ÔN TẬP CHƯƠNG II 93

Chương III: Véc tơ trong không gian. Quan hệ vuông góc trong không gian 95

§1. Vectơ trong không gian. Sự đồng phẳng của các véctơ 95

§2. Hai đường thẳng vuông góc 109

§3. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng 117

§4. Hai mặt phẳng vuông góc 127

§5. Khoảng cách 139

HƯỚNG DẪN GIẢI – ĐÁP SỐ 154

§1. PHÉP BIẾN HÌNH – PHÉP TỊNH TIẾN – PHÉP DỜI HÌNH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phép biến hình

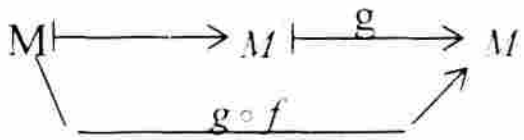
1. Định nghĩa: Phép biến hình là một quy tắc để mỗi điểm M trong mặt phẳng xác định được một điểm duy nhất M' của mặt phẳng đó.

2. Kí hiệu và thuật ngữ: Gọi **P** là tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng và một phép biến hình f : **P** $\to$ **P**

$$M \mapsto M' = f(M)$$

- Điểm M' gọi là ảnh của điểm M trong phép biến hình f
- Nếu H là một hình nào đó thì H' (gồm các điểm M' là ảnh của điểm M$\in$H) được gọi là ảnh của H qua phép biến hình f và viết f(H) = H'.

3. Tích của hai phép biến hình: Cho hai phép biến hình f và g. Gọi M là điểm bất kì trong mặt phẳng, M' là ảnh của M qua f, M'' là ảnh của M' qua g. Ta nói M'' là ảnh của M trong tích của hai phép biến hình f và g, kí hiệu $g \circ f$



II. Phép tịnh tiến

1. Định nghĩa: Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{u}$ là một phép biến hình biến điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Kí hiệu: T hoặc $T_{\vec{u}}$.

2. Phép tịnh tiến theo véctơ $\vec{0}$ còn gọi là phép đồng nhất, thường được kí hiệu id. id: **P** $\to$ **P**

$$M \mapsto id(M) = M$$

3. Các tính chất của phép tịnh tiến:

Định lí 1: Nếu phép tịnh tiến biến hai điểm M và N thành hai điểm M' và N' thì $M'N' = MN$

Định lí 2: Phép tịnh tiến biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng.

Hệ quả: Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn bằng nó, góc thành góc bằng nó.

III. Phép dời hình.

1. Định nghĩa: Phép dời hình là phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2. Định lí: Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn

thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn bằng nó, góc thành góc bằng nó.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm ảnh của một hình H cho trước qua một phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$

Phương pháp: 1. Lấy một điểm M tuỳ ý trên H

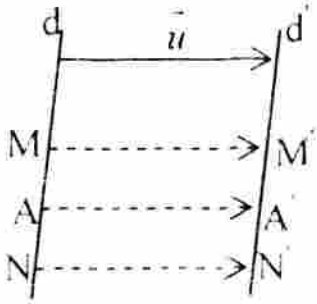
2. Dựng ảnh M' của M qua $T_{\vec{u}}$: $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

3. Tìm tập hợp các điểm M'.

Bài 1. Tìm ảnh của đường thẳng d (cho trước) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

a) d không cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.

b) d cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.



Giải

a) d không cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.

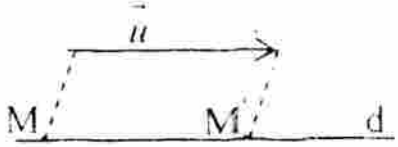
* Lấy điểm M∈d và $M' = T_{\vec{u}}(M)$ thì $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Lấy điểm cố định A ∈d thì $A' = T_{\vec{u}}(A)$ cố định và

$\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$, suy ra tứ giác AMM'A là hình bình hành $\Rightarrow$ AM // $A'M'$. Do đó $M' \in d'$, đường thẳng d đi qua điểm A' và song song với đường thẳng d.

* Lấy điểm $N' \in d'$ và gọi N∈d sao cho NN' // AA' và NN' = AA' nên $ANN'A'$ là hình bình hành. Suy ra: $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \Rightarrow N' = T_{\vec{u}}(N)$. Vậy $d' = T_{\vec{u}}(d)$.

b) d cùng phương với véc tơ $\vec{u}$.

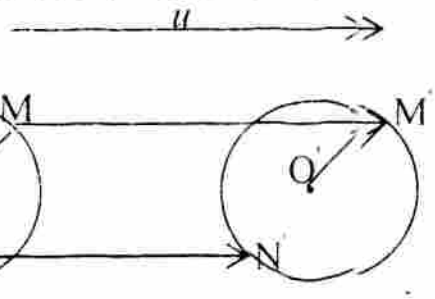


∀M∈d và $M' = T_{\vec{u}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow$ M∈d

Suy ra: $d' = T_{\vec{u}}(d) \equiv$ d.

Bài 2. Tìm ảnh của đường tròn (O; R) qua phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

Giải



* Ta có: $O' = T_{\vec{u}}(O) \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \vec{u}$

Lấy M ∈(O; R) thì $M' = T_{\vec{u}}(M)$ và $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Suy ra: $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM}$

$\Rightarrow O'M' = OM = R$ nên M' thuộc đường tròn (O'; R).

* ILấy N' ∈(O'; R) và gọi N∈(O; R) sao cho NN' // OO' và NN' = OO' thì tứ giácc OO'N'N là hình bình hành nên $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{OO'} = \vec{u} \Rightarrow N' = T_{\vec{u}}(N)$.

Vậyy, ảnh của đường tròn (O; R) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ là đường tròn (O'; R) sao cho $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.

Nhậận xét 1: Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$:

1. Nếu đường thẳng d không cùng phương với véc tơ $\vec{u}$ thì ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d' song song với đường thẳng d.
2. Nếu đường thẳng d cùng phương với véc tơ $\vec{u}$ thì ảnh của đường thẳng d là đường thẳng d.
3. Ảnh của đường tròn (O; R) là đường tròn (O'; R) ; hai đường tròn này bằng nhauu và $\overrightarrow{OO'} = \vec{u}$.

Dạmg 2. Xác định phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$

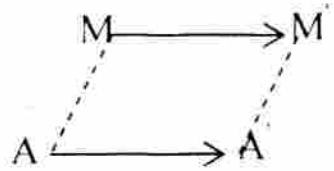
Phương pháp: 1. Xác định phép biến hình f.

2. f biến điểm cố định A → A' ; M (bất kì) → M'.

3. $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow T_{\vec{u}} = T_{\overrightarrow{AA'}}$

Bài 3. Cho phép biến hình biến điểm A (cố định) và điểm M (bất kì) thành A' và M'. Chứng minh phép biến hình trên là phép tịnh tiến khi và chỉ khi $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

Giải



* Xét phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

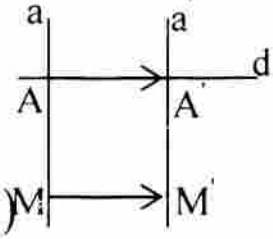
$$T_{\vec{u}} :: \begin{cases} A \mapsto A' \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \\ M \mapsto M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'} \end{cases}$$

* Một phép biến hình biến điểm A→ A', M → M' thoả mãn $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{MM'}$. Do A cố định nên $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ cố định. Vậy một phép biến hình biến điểm M → M' và $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ nên phép biến hình đó là một phép tịnh tiến.

Bài 4. Cho hai đường thẳng song song a và a'. Tìm tất cả các phép tịnh tiến biến a thành a'.

Giải



Gọi d là đường thẳng bất kì, không song song với a và cắt a, a' tại A và A'. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$ thì véc tơ $\vec{u} \neq \vec{0}$

Lấy M∈a và M'∈a' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'} = \vec{u} \Rightarrow M' = T_{\vec{u}}(M)$

Suy ra: $a' = T_{\vec{u}}(a)$. Vậy, phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ với $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$ biến đường thẳng a thành a'.

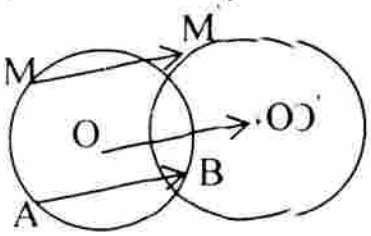
Dạng 3. Tìm quỹ tích (tập hợp điểm) bằng phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$

Phương pháp: 1. Xác định phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm M $\rightarrow M'$.

2. Tìm quỹ tích điểm M.

3. Từ quỹ tích của điểm M, dựa vào tính chất của phép tịnhh tiến để suy ra quỹ tích của điểm M'.

Bài 5. Trên đường tròn (O) cho hai điểm cố địnhA, B và một điểm M thay đổi. Tìm quỹ tích điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$.



Giải

Gọi O, R lần lượt là tâm, bán kính của đương tròn (O)

Ta có: $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$: M $\rightarrow M'$.

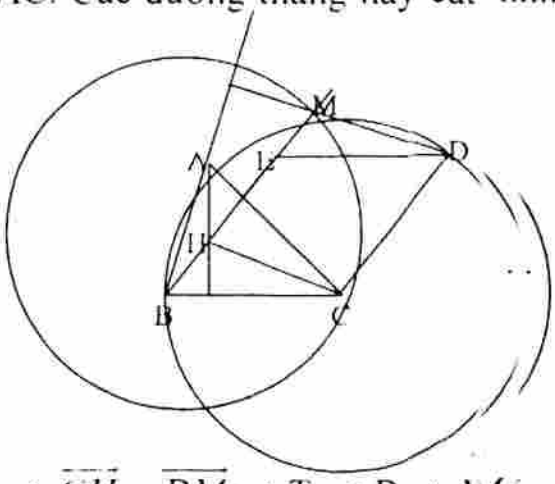
Điểm M chạy trên đường tròn (O) thì điểm M' vạch đường tròn (O', R) là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.

* Vẽ đường tròn (O', R): Vẽ tâm O' sao cho $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}$

Đường tròn (O', R) có tâm O' và bán kính R.

Quỹ tích điểm M' là đường tròn (O', R).

Bài 6. Cho tam giác ABC cố định có trục tâm H. Vẽ hình thoi BCDE, từ D và E vẽ các đường thẳng vuông góc với AB và AC. Các đường thẳng này cắt nnhau tại điểm M. Tìm quỹ tích của điểm M.



Giải

Tứ giác BCDE là hình thoi nên BC = CD, BC//ED. H là trực tâm của ΔABC nên

BH ⊥ AC, ME ⊥ AC

$\Rightarrow$ BH // ME. Suy ra: $\widehat{HBC} = \widehat{MED}$ (Góc có cạnh tương ứng song song)

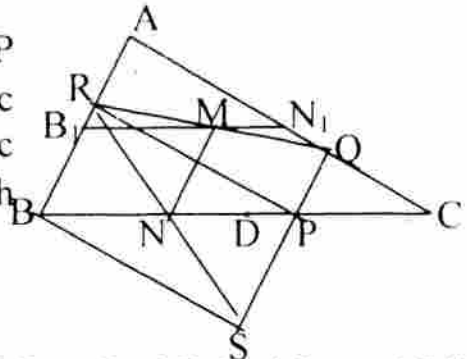
Tương tự: HC // DM và BC//ED

$\Rightarrow \widehat{HCB} = \widehat{MDE}$

Suy ra: ΔHBC = ΔMDE (góc -cạnh -góc) $\Rightarrow \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{DM} \Rightarrow T_{\overrightarrow{CH}}: D \rightarrow M$

Ta có: BC = CD nên điểm D chạy trên đường tròn (C), tâm C. bán kính R =BC, suy ra điểm M thuộc đường tròn (H), tâm H. bán kính R =BC là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{CH}}$.

Bài i 7. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 90^0$. Từ điểm P thayy đổi trên cạnh huyền BC của ΔABC vẽ các đường vuông góc PR. PQ với các cạnh góc vuông AB, AC (R∈AB, Q∈AC). Tìm quỹ tích trung điểm M của đoạn thẳng RQ .



Giải

DDựng hình chữ nhật ABSQ. Ta có: PR⊥AB, PQ⊥AC và RA⊥AQ ⇒ ARPQ làà hình chữ nhật suy ra RBSP cũng là hình chữ nhật. Gọi N là trung điểm ccạnh BP thì MN//SQ và MN= $\frac{1}{2}$ SQ ⇒ MN// BA và MN= $\frac{1}{2}$ BA.

ĐĐặt $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{NM} = \vec{u}$. Phép tịnh tiến $T_u : N \to M$. Khi P≡ C thì N ≡ D làà trung điểm cạnh BC nên khi P thay đổi trên cạnh huyền BC thì N cũng thhay đổi trên đoạn thẳng BD thuộc cạnh huyền BC.

$T_u : B \to B_1$ và $T_u : D \to N_1$ thì B_1 và N_1 là trung điểm cạnh AB, AC

SSuy ra quỹ tích của điểm M là đoạn thẳng B_1N_1

Dạng 4. Áp dụng phép tịnh tiến T_u vào dựng hình

PPhương pháp:

1. QQuy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai đđiều kkiện độc lập (α) và (β).
2. XXác định phép tịnh tiến để tìm điều kiện (α) gọi là H_α và điều kiện (β) gọi là H_β.
3. ĐĐiểm $M \in H_\alpha \cap H_\beta$.

Bài i 8. Cho đoạn thẳng AB cố định và hai đường thẳng cắt nhau d và d'. Tìm đđiểm M ∈d và điểm M' ∈d' sao cho tứ giác ABM'M là hình bình hành.

Giải

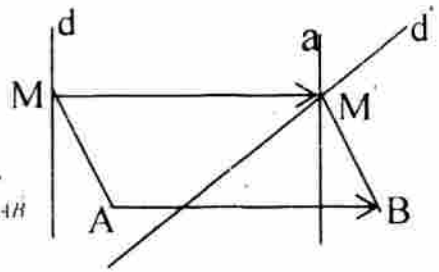
Phhân tích: Giả sử dựng được điểm M ∈d, M' ∈d' thỏoa mãn tứ giác ABM'M là hình bình hành nên

$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow T_{AB} : M \to M'$.

M∈∈d ⇒ M' ∈a, a là ảnh của d qua phép tịnh tiến T_{AB}

Mặặt khác M' ∈d' nên M' = a ∩ d'

Khhi đó $T_{BA} : M' \to M$.



Cáách dựng:

- Dựng đường thẳng a là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến T_{AB}
- Điểm M' = a ∩ d'

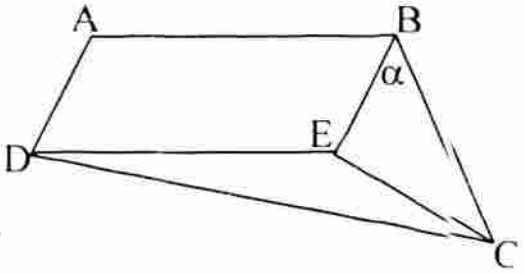
- Dựng điểm M là ảnh của M' qua phép tịnh tiến T_{BA}

Chứng minh: Ta có đường thẳng d cắt đường thẳng d' nên đường thẳng a cắt đường thẳng d' và $\overline{M'M} = \overline{BA}$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng d và a bằng AB nên M∈d.

Biện luận: Theo cách dựng, bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 9. Dựng một tứ giác lồi ABCD, biết các cạnh AB= a, BC = b, CD = c, AD =d và góc giữa AD và BC bằng α.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được tứ giác lồi ABCD thoả mãn yêu cầu bài toán. Khi đó, xét phép tịnh tiến

$T_{AB} : D \to E \Rightarrow BE = AD = d$ và $\widehat{EBC} = \alpha$

Ta có BC = b nên ΔBEC dựng được, suy ra ΔDEC dựng được. Từ đó, A là giao của hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a).

Cách dựng:

- Dựng ΔBEC khi biết BC = b, BE = d và góc xen giữa $\widehat{EBC} = \alpha$.
- Dựng ΔDEC khi biết ba cạnh DE = a, CD = c và EC = $\sqrt{d^2+b^2-2bd\cos\alpha}$.
- Dựng đường tròn (D, R=d) có tam D và bán kính R = d.
- Dựng đường tròn (B, r = a) có tâm B và bán kính r = a.
- Điểm A là giao của hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a).

Chứng minh: Theo cách dựng tứ giác lồi ABCD có các cạnh AB= a, BC = b, CD = c, AD =d và góc giữa AD và BC bằng α.

Biện luận:

* Khi $|DC - DE| \le EC \le DC + DE \Leftrightarrow |a-c| \le \sqrt{d^2+b^2-2bd\cos\alpha} \le a+c$ (1) và hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a) cắt nhau thì bài toán có một nghiệm hình

(vì tứ giác ABCD lồi nên chỉ chọn một giao điểm là đỉnh A).

* Khi điều kiện (1) không thoả mãn hoặc hai đường tròn (D, R=d) và (B, r = a) không cắt nhau thì bài toán vô nghiệm.

Dạng 5. Chứng minh hai hình bằng nhau; tính độ dài đoạn thẳng, độ lớn góc

Phương pháp:

1. Xác định phép tịnh tiến T_{XY}.

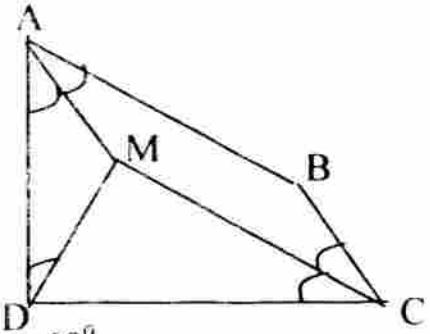
2. Áp dụng tính chất của phép tịnh tiến $T_{XY} : M \to M' \Rightarrow \overline{MM'} = \overline{XY}$

   - Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó; góc thành góc bằng nó;
   - Biến tam giác thành tam giác bằng nó; đường tròn thành đường tròn bằng nó.

Bài 9. Cho tứ giác ABCD có AB = $6\sqrt{3}$ cm, CD = 12cm, $\hat{A}=60^0$, $\hat{B}=150^0$, $\hat{D}=90^0$. Tính độ dài các cạnh BC và AD.

Giải

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BC}}: A \to M \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$



Suy ra: Tứ giác ABCM là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{BAM} = 180^0$

$\Rightarrow \widehat{BAM} = 180^0 - \widehat{ABC} = 180^0 - 150^0 = 30^0$

$\widehat{BCM} = \widehat{BAM} = 30^0$ và MC = AB = $6\sqrt{3}$

Trong tứ giác ABCD thì

$\hat{C} = 360^0 - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{D}) = 360^0 - (60^0 + 150^0 + 90^0) = 60^0$.

Suy ra: $\widehat{MCD} = \hat{C} - \widehat{BCM} = 60^0 - 30^0 = 30^0$. Áp dụng định lí cosin trong ΔDMC:

$MD^2 = MC^2 + DC^2 - 2MC.DC\cos 30^0 = 36 \Rightarrow MD = 6.$

Mặt khác: $MD^2 + MC^2 = 36 + 108 = 144$ và $CD^2 = 144$

$\Rightarrow CD^2 = MC^2 + MD^2$

Suy ra: ΔDMC vuông tại M nên $\widehat{MDC} = 60^0$ và $\widehat{MDA} = \hat{D} - \widehat{MDC} = 30^0$,

$\widehat{DAM} = \hat{A} - \widehat{BAM} = 30^0$. Suy ra: ΔMAD cân tại M $\Rightarrow$BC = MA = MD = 6cm

Áp dụng định lí cosin trong ΔADM:

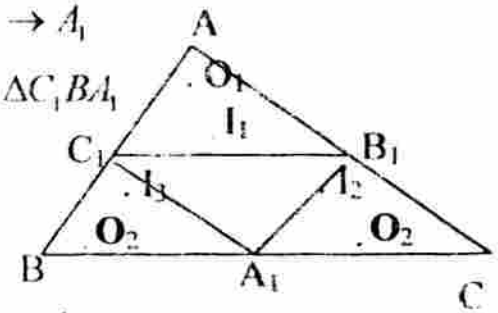
$AD^2 = AM^2 + MD^2 - 2AM.MD\cos\widehat{AMD}$

$= 36 + 36 - 72\cos 120^0 = 108 \Rightarrow AD = 6\sqrt{3}\ cm.$

Bài10. Cho tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB và I_1, I_2, I_3; O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp các ΔAC_1B_1, ΔCA_1B_1, ΔBC_1A_1. Chứng minh $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$.

Giải

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AC_1}}: A \to C_1; C_1 \to B; B_1 \to A_1$



Suy ra: $T_{\overrightarrow{AC_1}}: \Delta AC_1B_1 \to \Delta C_1BA_1 \Rightarrow \Delta AC_1B_1 = \Delta C_1BA_1$

Suy ra: $T_{\overrightarrow{AC_1}}: O_1 \to O_3; I_1 \to I_3 \Rightarrow \overrightarrow{O_1O_3} = \overrightarrow{I_1I_3}$

Suy ra: $O_1O_3 = I_1I_3$ (1)

Xét phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB_1}}: A \to B_1; B_1 \to C; C_1 \to A_1$

$\Rightarrow T_{\overrightarrow{AB_1}}: \Delta AB_1C_1 \to \Delta B_1CA_1 \Rightarrow \Delta AB_1C_1 = \Delta B_1CA_1$

$\Rightarrow T_{AB_1}: O_1 \to O_2;\ I_1 \to I_2 \Rightarrow \overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{I_1I_2} \Rightarrow O_1O_2 = I_1I_2$ (2)

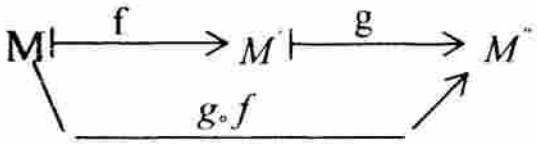
Xét phép tịnh tiến $T_{CA_1}: C \to A_1;\ A_1 \to B;\ B_1 \to C_1 \Rightarrow T_{CA_1}: \Delta CA_1B_1 \to \Delta A_1BC_1$

$\Rightarrow \Delta CA_1B_1 = \Delta A_1BC_1$ và $T_{CA_1}: O_2 \to O_3;\ I_2 \to I_3 \Rightarrow \overrightarrow{O_2O_3} = \overrightarrow{I_2I_3} \Rightarrow O_2O_3 = I_2I_3$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $\Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$ (cạnh – cạnh – cạnh).

Dạng 6. Tích của các phép tịnh tiến

Phương pháp: Áp dụng tích của các phép biến hình:



Bài 11. Cho hai phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ theo véc tơ $\vec{u}$ và $T_{\vec{v}}$ theo véc tơ $\vec{v}$. Với điểm bất kì M, $T_{\vec{u}}$ biến M thành M' và $T_{\vec{v}}$ biến M' thành M''. Chứng tỏ rằng phép biến hình biến điểm M thành điểm M'' là phép tịnh tiến .

Giải

$T_{\vec{u}}: M \to M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ và $T_{\vec{v}}: M' \to M'' \Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = \vec{v}$.

Ta có: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{u} + \vec{v}$ suy ra: $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}: M \to M''$ là một phép tịnh tiến theo véc tơ $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$

Dạng 7. Biểu thức giải tích của phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho $\vec{u} = (a;b)$ với $\vec{u} \neq \vec{0}$ và điểm M(x ; y). Xét phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}: M \to M'(x';y')$ thì $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Ta có: $\overrightarrow{MM'} = (x'-x;y'-y)$. Suy ra: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$ (1). Gọi công thức (1) là biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng d: $2x - y + 1 = 0$ và hai điểm A(1 ; – 2), B(5 ; 1). Xác định phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4;3)$ và biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$ $\begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y + 3 \end{cases}$

Lấy bất kì điểm M(x ; y) $\in$ d thì $2x - y + 1 = 0$ (*)

$T_{AB} : M(x;y) \to M'(x';y') \Rightarrow T_{AB} : d \to d'$ và M' $\in$ d'

Từ $\begin{cases} x' = x+4 \\ y' = y+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x'-4 \\ y = y'-3 \end{cases}$. Thay vào (*) ta có: $2x' - y' - 4 = 0$.

Phương trình của đường thẳng d' là: $2x - y - 4 = 0$.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho $\vec{u} = (2;3)$ và đường tròn (C): $x^2 + (y-1)^2 = 4$. Xác định phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

Giải

Cách 1: Biểu thức giải tích của phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$: $\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-3 \end{cases}$

$T_{\vec{u}} : M(x;y) \in (C) \to M'(x';y') \in (C_1) \Rightarrow T_{\vec{u}}(C) :\to (C_1)$

Thay vào phương trình của (C), ta có: $(x'-2)^2 + (y'-4)^2 = 4$.

Phương trình của đường tròn (C_1) là: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$.

Cách 2: Tâm và bán kính của đường tròn (C) là I(0 ; 1), R = 4.

Gọi I_1 là ảnh của I qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ thì $I_1(2 ; 4)$. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C_1) và bằng nó nên phương trình của đường tròn (C_1) là: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$.

BÀI TẬP.

Bài 1. Trong mặt phẳng P cho tam giác ABC. Chứng minh rằng tích của các phép tịnh tiến: $T_{AC} \circ T_{BA} \circ T_{CB} = id$ với $id: P \to P$

$M \mapsto id(M) = M$

Bài 2. Cho đường tròn cố định (O, R) và một dây cung cố định AB. M là điểm di động trên đường tròn (O, R). Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác MAB.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn cố định tâm O bán kính R. H là trực tâm tam giác. Các đỉnh B và C cố định, đỉnh A di động trên đường tròn. D là điểm đối xứng với A qua tâm O và I là trung điểm của BC.

a) Tứ giác BHCD là hình gì? b) Tìm quỹ tích điểm H.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Tìm điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC sao cho MN// BC và AM = CN.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD có tâm O, có cạnh bằng a. Tìm điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh CD sao cho OM + MN + NB ngắn nhất. Biết rằng MN//BCAM = CN. Tính độ dài ngắn nhất đó theo a.

Bài 6. Cho điểm A và một đường thẳng cố định d. Dựng đường tròn tâm O, bán kính R cho trước cắt đường thẳng d theo một dây cung MN có độ dài bằng a.

Bài 7. Cho đường tròn (O) với đường kính AB cố định, một đường kính MN thay đổi. Các đường thẳng AM và AN cắt tiếp tuyến tại B lần lượt tại P và Q. Tìm quỹ tích trực tâm các tam giác MPQ và NPQ.

Bài 8. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O, R), AD = R. Dựng các hình bình hành DABM, DACN. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN nằm trên đường tròn (O, R).

Bài 9. Cho hình thang ABCD có các đường chéo AC = a, BD = b, cạnh đáy CD = c và góc giữa AC và BD bằng α. Tính cạnh đáy AB.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD không phải là hình thang. Gọi M, N là trung điểm của AB và CD. Đường thẳng MN tạo với AD, BC những góc bằng nhau. Chứng minh AD = BC.

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm A(−3 ; 3), B(1 ; 3) và đường tròn (C) tâm I(3 ; 1), bán kính R = 1. Đường thẳng d: x + y − 1 = 0. Tìm trên d một điểm M và trên (C) điểm M sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm A(−3;3), B(−1; 6).

a) Tìm toạ độ điểm M' là ảnh của điểm M(4 ; −5) qua phép tịnh tiến T_{AB}.

b) Xác định phương trình tổng quát của đường thẳng d_1 là ảnh của đường thẳng d: $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -7 + 3t \end{cases}$ qua phép tịnh tiến T_{AB}.

c) Xác định phương trình của đường tròn (C_1) là ảnh của đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ qua phép tịnh tiến T_{AB}.

§2. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

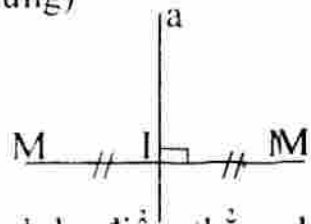
1. Định nghĩa: Phép đối xứng qua một đường thẳng là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng đó.

Kí hiệu: $Đ_a$ (Đường thẳng a gọi là trục đối xứng)

Phép đối xứng trục $Đ_a$: M → M'

* Nếu M∈a thì M' ≡ M và gọi M là điểm kép

* Nếu M∉a thì a là trung trực đoạn thẳng MM'



2. Định lí: Phép đối xứng trục là một phép dời hình

* Phép đối xứng trục biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, đường thẳng thành đường thẳng, tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, tam giác thành tam giác bằng nó, đường tròn thành đường tròn bằng nó, góc thành góc bằng nó.

* Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình H nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến hình H thành chính nó.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

Phương pháp: 1. Xác định phép đối xứng trục $Đ_a$: $M \to M'$.

2. $\forall I \in a$ thì $IM = IM'$.

3. Áp dụng bất đẳng thức: Với ba điểm bất kì A, B, C ta có

$$AB + BC \geq AC.$$

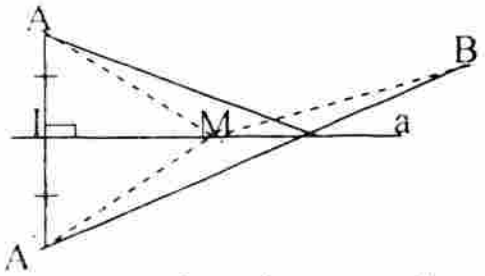
Bài 1. Cho đường thẳng a và hai điểm A và B nằm cùng phía đối với a. Tìm trên đường thẳng a điểm M sao cho MA + MB ngắn nhất.

Giải

Xét phép đối xứng trục $Đ_a$: $A \to A'$

$\forall M \in a$ thì $MA = MA'$

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.



Để MA + MB ngắn nhất thì chọn M sao cho ba điểm A', M, B thẳng hàng. Vậy M là giao điểm của hai đường thẳng a và A'B.

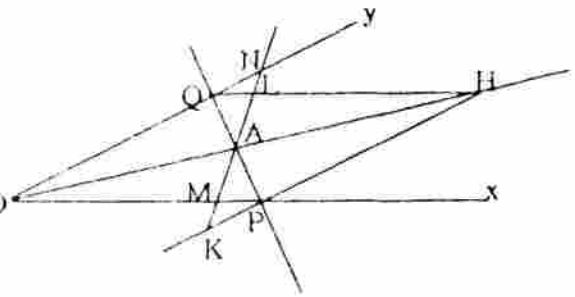
Bài 2. Cho góc nhọn xOy và một điểm A nằm trong góc đó. Qua A dựng đường thẳng d cắt Ox tại P và cắt Oy tại Q sao cho A là trung điểm của PQ.

a) Chứng minh rằng tam giác OPQ có diện tích lớn nhất.

b) Xác định điểm B trên Ox và C trên Oy sao cho tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất.

Giải

a) Gọi H đối xứng với O qua A. Qua H kẻ đường thẳng song song với Ox, cắt Oy tại Q và đường thẳng song song với Oy, cắt Ox tại P thì tứ giác OPHQ là hình bình hành nên A là trung điểm của PQ.



Vẽ một đường thẳng bất kì qua A cắt Ox, Oy, HQ, HP lần lượt tại M, N, L, K.

Ta có: $dt\Delta OMN + dt\Delta HLK > dt\ OPHQ \Rightarrow 2dt\Delta OMN > 2dt\Delta OPQ$

$\Rightarrow dt\Delta OMN > dt\Delta OPQ$. Vậy diện tích tam giác OPQ nhỏ nhất.

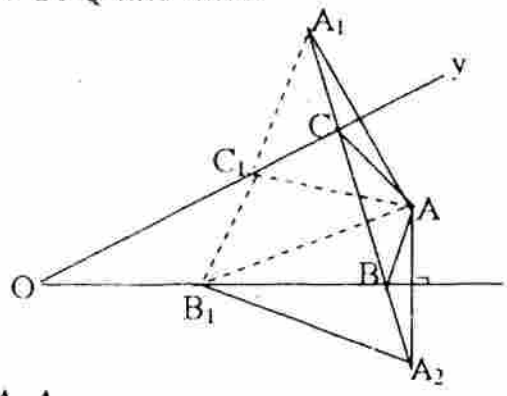
b) Gọi A_1, A_2 lần lượt là đối xứng của điểm A qua Oy, Ox. Gọi B, C lần lượt là giao điểm của đường thẳng A_1A_2 với Ox, Oy. Ta có chu vi tam giác ABC là:

$AB + BC + AC = BA_2 + Bc + CA_1 = A_1A_2$

Lấy bất kì $C_1 \in Oy$, $B_1 \in Ox$

ta có chu vi tam giác AB_1C_1 là:

$AB_1 + B_1C_1 + AC_1 = B_1A_2 + B_1C_1 + C_1A_1 \geq A_1A_2$.

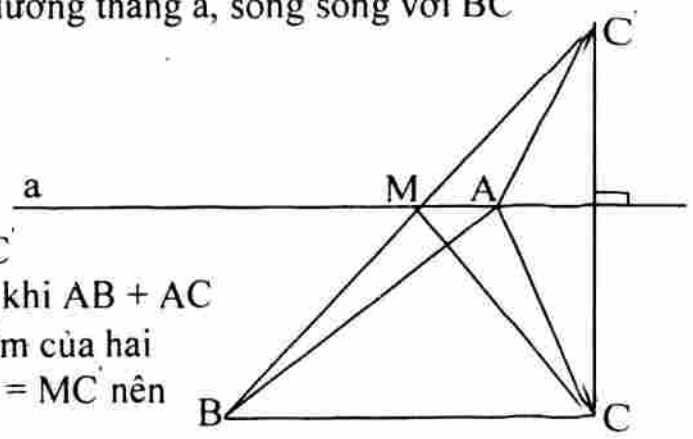


Suy ra, chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Bài 3. Trong tất cả các tam giác có cùng diện tích và có chung một cạnh. Chứng minh rằng tam giác cân có chu vi nhỏ nhất.

Giải

Gọi BC = b là cạnh chung của các tam giác ABC. Gọi diện tích của tam giác là S thì đỉnh A nằm trên đường thẳng a, song song với BC và cách BC một khoảng $h = \frac{2S}{b}$



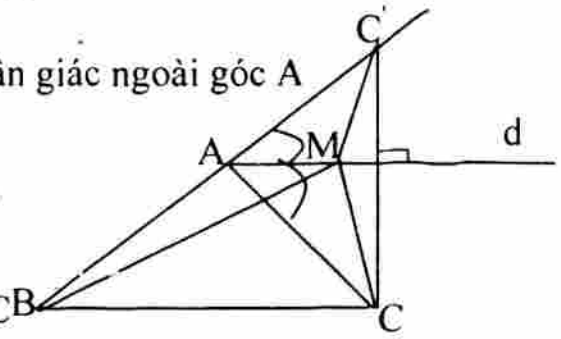
Xét phép đối xứng $Đ_a$: C → C'

Ta có: AB + AC = AB + AC' ≥ BC'

Tam giác ABC có chu vi nhỏ nhất khi AB + AC nhỏ nhất. Suy ra A ≡ M là giao điểm của hai đường thẳng BC' và a. Suy ra: MB = MC' nên tam giác BMC cân tại M.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi d là đường phân giác ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC và M là một điểm bất kì thuộc d. Chứng minh tam giác MBC có chu vi không nhỏ hơn chu vi tam giác ABC.

Giải



Xét phép đối xứng $Đ_d$: C → C' và d là phân giác ngoài góc A nên A nằm giữa hai điểm B và C'.

∀ M∈d thì MC = MC'

và MC + MB = MC' + MB ≥ BC'

BC' = BA + AC' = AB + AC

Suy ra: MB + MC + BC ≥ AB + AC + BC

Vậy, chu vi tam giác ABC nhỏ nhất.

Dạng 2. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép đối xứng $Đ_a$

Phương pháp: 1. Xác định phép đối xứng $Đ_a$ biến điểm M → M'.

2. Tìm quỹ tích điểm M.

3. Từ quỹ tích của điểm M, dựa vào tính chất của phép đối xứng để suy ra quỹ tích của điểm M'.

Bài 5. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm A, B thuộc đường tròn. Đường tròn (I, r) tiếp xúc ngoài với đường tròn (O, R) tại A. Một điểm M di động trên đường tròn (O, R), tia MA cắt đường tròn (I, r) tại điểm thứ hai C. Qua C vẽ đường thẳng song song với AB cắt đường thẳng MB tại D. Tìm quỹ tích của điểm D.

Giải

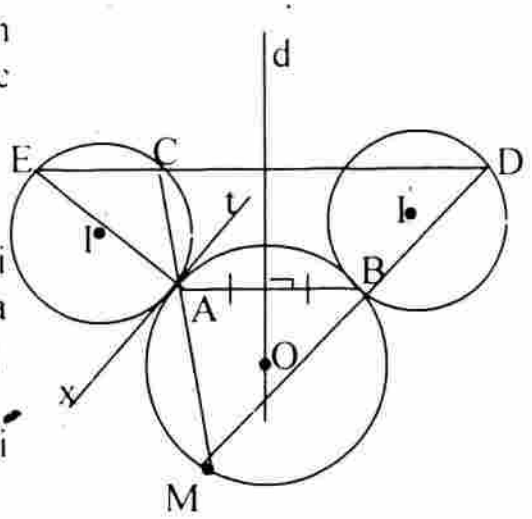
Gọi E là giao điểm của CD với đường tròn (I, r). Vẽ tiếp tuyến chung của (O, R) và (I, r) là xt.

Ta có: $\widehat{ABM} = \widehat{xAM}$, $\widehat{CEA} = \widehat{tAC}$ và $\widehat{xAM} = \widehat{tAC}$

$\widehat{ABM} = \widehat{EDB}$ (do CD // AB)

$\Rightarrow \widehat{CEA} = \widehat{EDB}$ nên tứ giác ABDE là hình thang cân. Gọi d là đường trung trực đoạn thẳng AB thì d cũng là đường trung trực đoạn thẳng ED.

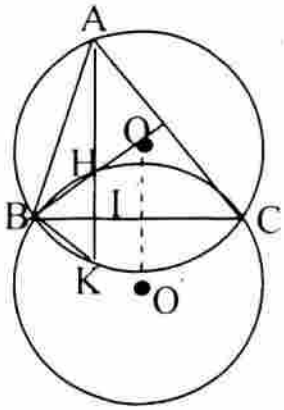
Phép đối xứng $Đ_d$: E → D.



Khi M di động trên đường tròn (O, R) thì E di động trên đường tròn (I, r) nên quỹ tích của điểm D là đường tròn (I', r) ảnh của đường tròn (I, r) qua phép đối xứng $Đ_d$ Do đường tròn (I, r) tiếp xúc với đường tròn (O, R) tại A nên đường tròn

(I', r) tiếp xúc với đường tròn (O, R) tại B.

Bài 6. Cho đường tròn (O) có dây cung BC cố định và điểm A di động trên đường tròn (O). Tìm quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC.



Giải

Ta có: $\widehat{HAC} = \widehat{CBH}$ (Góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\widehat{HAC} = \widehat{KBC}$ (Cùng chắn cung $\widehat{KC}$)

Suy ra: $\widehat{CBH} = \widehat{CBK}$ nên BC là phân giác góc $\widehat{KBH}$.

Mặt khác: AI ⊥ BC, suy ra: ΔBHK cân tại B⇒ HI = IK.

Xét phép đối xứng trục BC là $Đ_{BC}$: K → H.

Khi A chạy trên đường tròn (O) thì K cũng chạy trên đường tròn (O).

Nên quỹ tích của điểm H là đường tròn (O), ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng trục BC.

Dạng 3. Áp dụng phép đối xứng trục vào dựng hình

Phương pháp:

1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép đối xứng trục, tìm điều kiện (α), (β) gọi là H_α, H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O), (O_1) và đường thẳng d. Tìm trên d một điểm P sao cho tiếp tuyến vẽ từ P đến (O), (O_1) tạo thành một góc nhận d làm đường phân giác.

Giải

Phân tích: Giả sử dựng được điểm P∈d sao cho d là phân giác của các tiếp tuyến PT, PT_1 với đường tròn (O), (O_1). Suy ra PT và PT_1 đối xứng với nhau qua đường thẳng d.

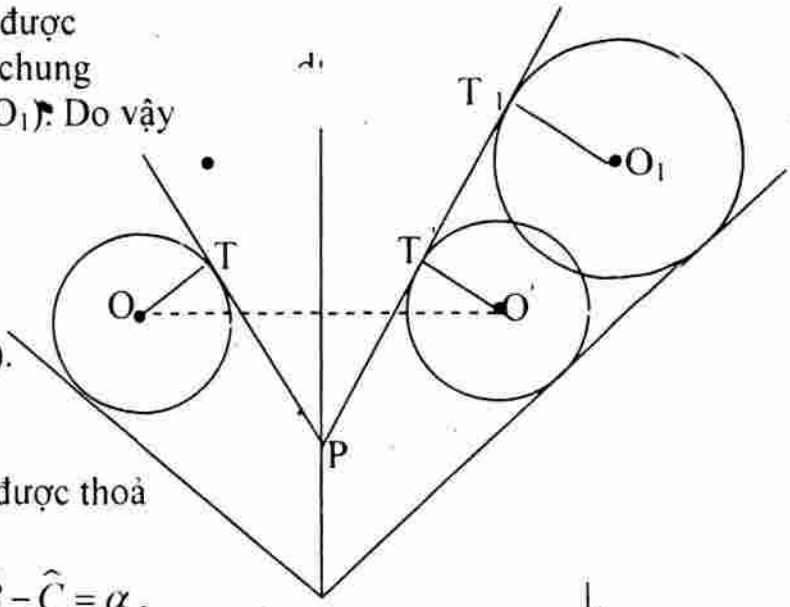
Phép đối xứng trục d là $Đ_d$: (O) → (O') nên PT_1 cũng là tiếp tuyến của (O').

Cách dựng:

- Dựng đường tròn (O') đối xứng với đường tròn (O) qua đường thẳng d.
- Dựng tiếp tuyến chung TT_1 của hai đường tròn (O') và (O_1).
- Dựng điểm P là giao của hai đường thẳng TT_1 và d.

Chứng minh: Theo cách dựng thì tiếp tuyến với đường tròn (O) là PT đối xứng tiếp tuyến chung TT_1 qua đường thẳng d nên d là phân giác góc $\widehat{TPT_1}$.

Biện luận: Số điểm P dựng được phụ thuộc vào số tiếp tuyến chung của hai đường tròn (O') và (O_1). Do vậy số điểm P là 1, 2, 3 hoặc 4.



Bài 8. Dựng tam giác ABC, biết AB = c, AC = b và $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$ (α là góc đã cho).

Giải

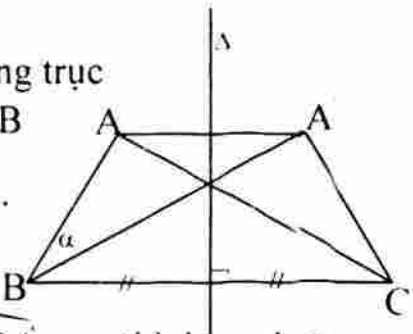
Phân tích:

Giả sử tam giác ABC dựng được thoả mãn điều kiện bài toán.

Ta có: AB = c, AC = b và $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$.

Gọi Δ là đường trung trực cạnh BC, xét phép đối xứng trục D_Δ: B → C, A → A' thì AC = A'B và ΔABC = ΔA'CB

$\Rightarrow \widehat{ABA'} = \widehat{ABC} - \widehat{A'BC} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \hat{B} - \hat{C} = \alpha$.



Cách dựng:

- Dựng tam giác ABA' khi biết AB = c, A'B = b, $\widehat{ABA'} = \alpha$ thì dựng được.
- Dựng đường trung trực Δ của cạnh AA'.
- Dựng điểm C đối xứng với điểm B qua Δ, tam giác ABC dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có AB = c, AC = A'B = b và

$$\hat{B} - \hat{C} = \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{ABC} - \widehat{A'BC} = \widehat{ABA'} = \alpha.$$

Biện luận:

* Nếu $0^0 < \alpha < 180^0$ thì dựng được một tam giác ABA' nên dựng được một tam giác ABC, bài toán có một nghiệm hình duy nhất.

* Nếu $\alpha \geq 180^0$ thì không dựng được tam giác ABA' nên không dựng được tam ABC. Bài toán vô nghiệm.

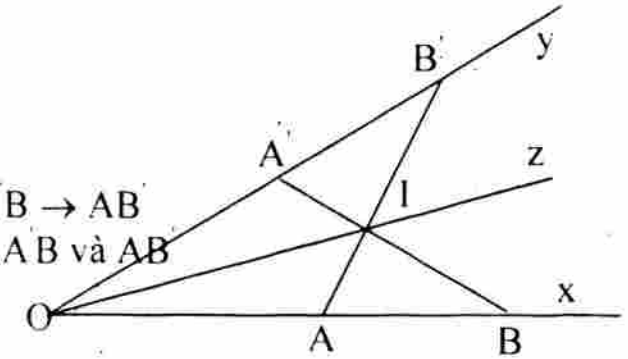
Dạng 4. Áp dụng phép đối xứng trục vào chứng minh

Phương pháp

1. Xác định phép đối xứng trục.
2. Tính chất của phép đối xứng trục biến một hình thành hình bằng nó.

Bài 9. Cho góc xOy, trên tia Ox lấy hai điểm A, B và trên tia Oy lấy hai điểm A', B' sao cho OA = OA', OB = OB'. Chứng minh giao điểm của AB' và BA' nằm trên tia phân giác của góc xOy.

Giải



Gọi Oz là tia phân giác của góc xOy.

Ta có OA = OA', OB = OB'

Suy ra: $Đ_{Oz}$: A → A', B → B' ⇒ $Đ_{Oz}$: A'B → AB'

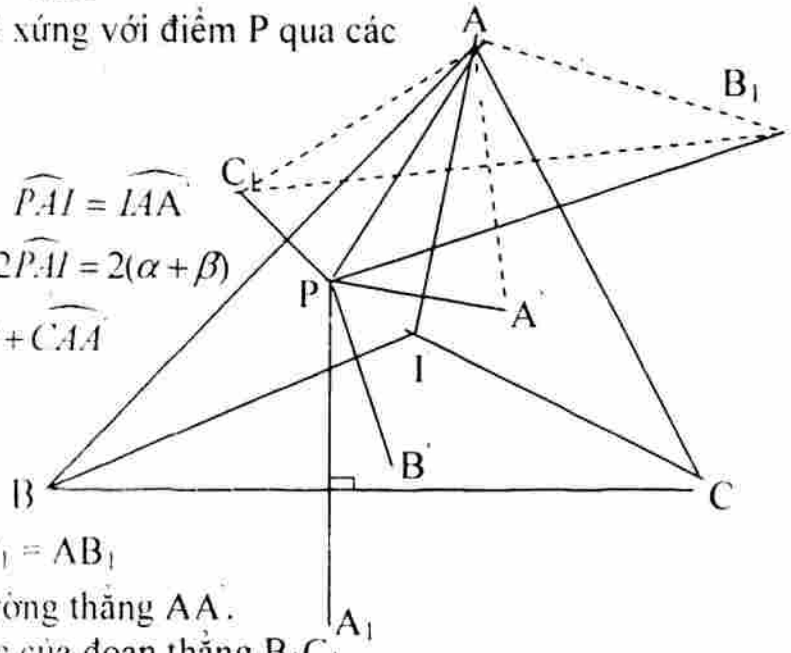
Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng A'B và AB'

Thì I là điểm kép của phép đối xứng trục Oz nên I thuộc Oz.

Bài 10. Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác và P là điểm nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng với P qua các đường thẳng AI, BI, CI. Chứng minh rằng các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

Giải

Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với điểm P qua các đường thẳng BC, AC, AB.



Đặt $\widehat{PAB} = \alpha$ và $\widehat{PAI} = \beta$

A' đối xứng với P qua AI nên $\widehat{PAI} = \widehat{IAA'}$

$\widehat{C_1AA'} = \widehat{C_1AP} + \widehat{PAA'} = 2\widehat{PAB} + 2\widehat{PAI} = 2(\alpha + \beta)$

$\widehat{B_1AA'} = \widehat{B_1AC} + \widehat{CAA'} = \widehat{CAP} + \widehat{CAA'}$

$= \widehat{PAA'} + \widehat{A'AC} + \widehat{CAA'}$

$= 2\beta + 2\alpha = 2(\beta + \alpha)$

Suy ra: $\widehat{C_1AA'} = \widehat{B_1AA'}$ và $AC_1 = AB_1$

Nên C_1 và B_1 đối xứng qua đường thẳng AA'.

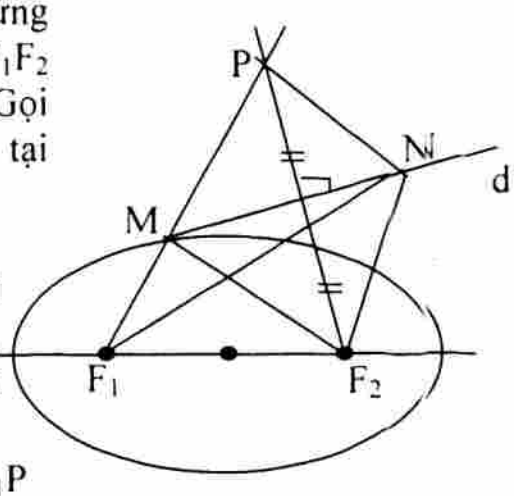
Suy ra AA' là đường trung trực của đoạn thẳng B_1C_1

Tương tự, ta cũng chứng minh được BB', CC' lần lượt là đường trung trực của các đoạn thẳng C_1A_1, A_1B_1. Suy ra: AA', BB', CC' là các đường trung trực của Δ $A_1B_1C_1$ nên chúng đồng quy tại điểm I là tâm đường tròn ngoại tiếp Δ $A_1B_1C_1$.

Bài 11. Cho một elip (E) với hai tiêu điểm F_1, F_2.

Gọi M là điểm bất kì nằm trên elip nhưng

không nằm trên đường thẳng F_1F_2. Chứng minh rằng phân giác ngoài của tam giác MF_1F_2 tại đỉnh M cắt elip tại một điểm duy nhất. (Gọi phân giác ngoài đó là tiếp tuyến của elip tại điểm M).



Giải

Gọi d là phân giác ngoài của ΔMF_1F_2 tại đỉnh M và $M \in (E)$ nên $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Phép đối xứng trục $Đ_d$: $F_2 \to P$ suy ra: M nằm giữa hai điểm P và F_1 và $MF_2 = MP$.

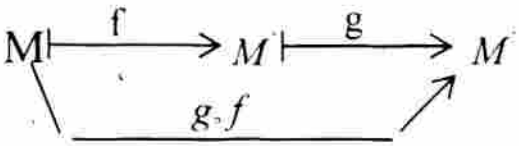
$\forall N \in d$, ta có $NF_1 + NF_2 = NF_1 + NP \geq F_1P$

Mặt khác: $F_1P = F_1M + MP = MF_1 + MF_2 = 2a$

Suy ra: $NF_1 + NF_2 \geq 2a$. Dấu bằng xảy ra khi $N \equiv M$. Vậy, phân giác ngoài của tam giác MF_1F_2 tại đỉnh M cắt elip tại một điểm duy nhất M.

Dạng 5. Tích của các phép đối xứng trục

Phương pháp:



Bài 12. a) Chứng minh rằng tích của hai phép đối xứng trục, có trục song song là một phép tịnh tiến.

b) Chứng minh rằng tích của ba phép đối xứng trục, có trục song song là một phép đối xứng trục.

c) Chứng minh rằng tích của phép đối xứng trục $Đ_a$ với phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ có đường thẳng chứa véc tơ $\vec{v}$ vuông góc với trục a là một phép đối xứng trục.

Giải

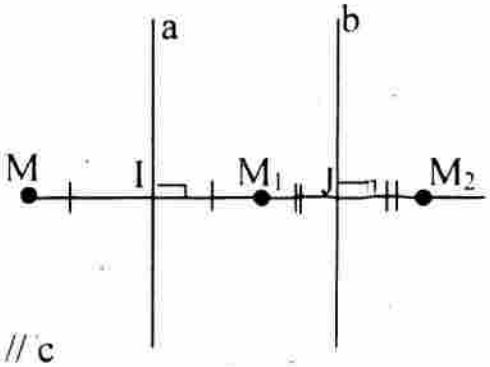
a) Xét hai phép đối xứng trục D_a, D_b với a // b.

Giả sử: $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{D_b} M_2$

$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

$= 2\overrightarrow{IM_1} + 2\overrightarrow{M_1J} = 2(\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1J}) = 2\overrightarrow{IJ}$

Suy ra: $D_b \circ D_a = T_{2\overrightarrow{IJ}}$: M → M_2



b) Xét ba phép đối xứng trục D_a, D_b, D_c với a // b // c

Giả sử: $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{D_b} M_2 \xrightarrow{D_c} M_3$

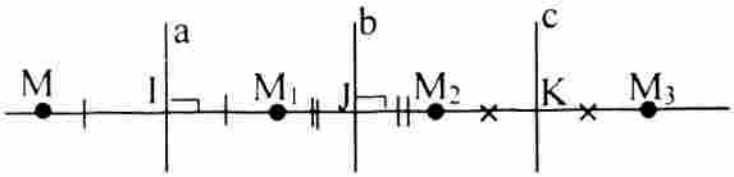
Ta có: $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} = \vec{0}$; $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{JM_2}$; $\overrightarrow{M_2M_3} = 2\overrightarrow{M_2K}$

Gọi H là trung điểm của MM_3 thì $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM_3} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \overrightarrow{M_2M_3} = \vec{0}$

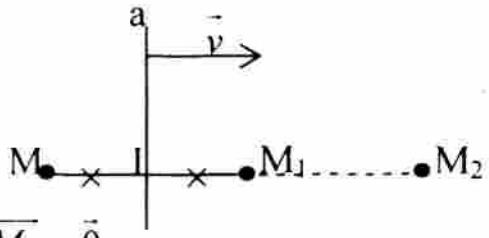
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + 2\overrightarrow{JM_2} + 2\overrightarrow{M_2K} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{JK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \overrightarrow{JK}$



Suy ra: $T_{JK} : I \to H \Rightarrow T_{JK} : a \to \Delta$ với Δ // a

Vậy, $D_c \circ D_b \circ D_a = D_\Delta$ với Δ // a // b // c.



c) * Giả sử $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{T_v} M_2$

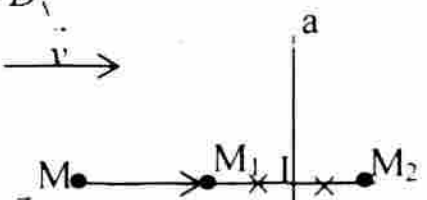
Ta có: $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM_1} = \vec{0}$; $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$

Gọi H là trung điểm của MM_2 thì $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM_2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{1}{2}\vec{v}$

Suy ra: $T_{\frac{1}{2}v} : I \to H \Rightarrow T_{\frac{1}{2}v} : a \to \Delta \Rightarrow T_v \circ D_a = D_\Delta$



* Giả sử $M \xrightarrow{T_v} M_1 \xrightarrow{D_a} M_2$

Ta có: $\overrightarrow{IM_1} + \overrightarrow{IM_2} = \vec{0}$; $\overrightarrow{MM_1} = \vec{v}$

Gọi H là trung điểm của MM_2 thì $\overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM_2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{IM_2} - \overrightarrow{IM_1} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{HI} + \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\vec{v}$. Suy ra: $T_{-\frac{1}{2}v} : I \to H \Rightarrow T_{-\frac{1}{2}v} : a \to \Delta \Rightarrow D_a \circ T_v = D_\Delta$

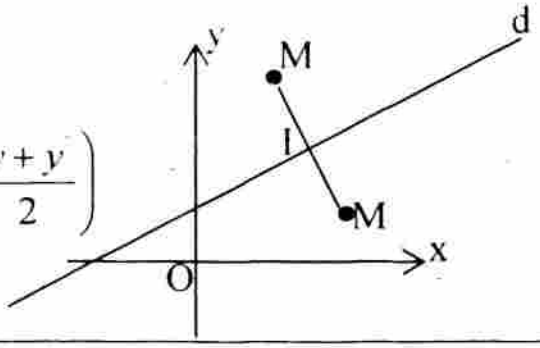
Dạng 6. Biểu thức giải tích của phép đối xứng trục

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy cho đường thẳng d: Ax + By + C = 0

với $A^2 + B^2 \neq 0$ và một điểm M(x, y). Gọi M' (x', y') đối xứng với M qua phép đối xứng trục d. Tìm biểu thức liên hệ x, y và x', y'

Ta có. $\overrightarrow{MM'} = (x' - x ; y' - y)$ cùng phương với $\vec{n} = (A ; B)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x + At \\ y' = y + Bt \end{cases} \text{ với } t \in R$$



Gọi I là trung điểm của MM' thì $I\left(\frac{x+x'}{2} ; \frac{y+y'}{2}\right)$

thì I∈d nên

$$A\left(\frac{x+x'}{2}\right)+B\left(\frac{y+y'}{2}\right)+C=0 \Leftrightarrow A(x+x+At)+B(y+y+Bt)+2C=0.$$

$$\Leftrightarrow (A^2+B^2)t=-2(Ax+By+C) \Leftrightarrow t=-\frac{2(Ax+By+C)}{A^2+B^2}$$

Vậy, $\begin{cases} x'=x-\dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \\ y'=y-\dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2} \end{cases}$ (1)

Gọi (1) là biểu thức giải tích của phép đối xứng trục d.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy cho đường thẳng d:

$2x - y - 3 = 0$.

a) Viết biểu thức giải tích của phép đối xứng trục $Đ_d$.

b) Tìm ảnh điểm M' của điểm M (4 ; – 1) qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' là ảnh của đường thẳng Δ: $x - 3y + 11 = 0$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

d) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 27 = 0$ qua phép đối xứng trục $Đ_d$.

Giải

a) Biểu thức giải tích của phép đối xứng trục $Đ_d$:

$$\begin{cases} x'=x-\dfrac{4(2x-y-3)}{5} \\ y'=y+\dfrac{2(2x-y-3)}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{12}{5} \\ y'=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{6}{5} \end{cases}$$

b) Toạ độ điểm M' là ảnh của M qua $Đ_d$ là $M'\left(-\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$.

c) Lấy $M(x;y)\in\Delta \xrightarrow{Đ_d} M'(x';y')\in\Delta'$, ta có:

$$\begin{cases} x'=-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y+\dfrac{12}{5} \\ y'=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{3}{5}y-\dfrac{6}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{3}{5}x'+\dfrac{4}{5}y'+\dfrac{12}{5} \\ y=\dfrac{4}{5}x'+\dfrac{3}{5}y'-\dfrac{6}{5} \end{cases} \quad (*)$$

Ta có M∈Δ nên $x - 3y + 11 = 0$ (* *).

Thay (*) vào (* *), ta có $3x' + y' - 17 = 0$

Phương trình đường thẳng Δ' là: $3x + y - 17 = 0$.

d) Phương trình của đường tròn (C): $(x-5)^2+(y-2)^2=2$ có tâm I (5 ; 2) và bán kính $R=\sqrt{2}$. Ta có: $Đ_d$: I → I' nên I' 1 ; 4), suy ra: $Đ_d$: (C) → (C'), (C') có tâm I' và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C') là: $(x-1)^2+(y-4)^2=2$.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ vuông góc Oxy, một phép biến hình f biến M(x ; y)→ M'(x' ; y') có biểu thức giải tích:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \quad (1)$$

a) Tìm tập hợp Δ các điểm kép của phép biến hình f.

b) Xác định biểu thức giải tích của phép biến hình g biến M'(x' ; y')→ M(x ; y). Có nhận xét gì?

c) Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng trục, có trục là đường thẳng Δ.

Giải

a) Gọi $M(x_0 ; y_0)$ là điểm kép của phép biến hình f thì f:$M(x_0 ; y_0) \to M(x_0 ; y_0)$ thay vào (1), ta có: $x_0 - \sqrt{3}y_0 = 0$.

Tập hợp các điểm kép của f là đường thẳng Δ có phương trình: $x - \sqrt{3}y = 0$

b) Phép biến hình g biến M'(x' ; y')→ M(x ; y)

$$\text{Từ } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \end{cases} \quad (2)$$

So sánh hai biểu thức (1) và (2) ta có f = g.

c) f: M(x ; y)→ M'(x' ; y') nên $\overrightarrow{MM'} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y ; \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y\right)$

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{\Delta} = \left(\sqrt{3} ; 1\right)$.

$$\overrightarrow{MM'}.\vec{\Delta} = \left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\sqrt{3} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2}y\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{MM'} \perp \vec{\Delta} \Rightarrow MM' \perp \Delta.$$

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MM' thì $I\left(\frac{3x + y\sqrt{3}}{4} ; \frac{\sqrt{3}x + y}{4}\right)$ thay vào phương trình của đường thẳng Δ, ta có:

$\left(\frac{3x+y\sqrt{3}}{4}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x+y}{4}\right)=\frac{3x+y\sqrt{3}-3x-y\sqrt{3}}{4}=0$ nên $I\in\Delta$.

Vậy, f là phép đối xứng trục, với trục đối xứng là đường thẳng Δ.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho một đường thẳng a và hai điểm A, B nằm khác phía đối với a. Tìm trên đường thẳng a một điểm M sao cho hiệu các khoảng cách MA, MB là lớn nhất.

Bài 2. Cho tứ giác lồi ABCD có diện tích S và độ dài các cạnh AB = a, BC = b, CD = c và AD = d. Chứng minh $S\le\frac{ac+bd}{2}$.

Bài 3. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC, đi qua điểm cố định P và hai đỉnh B, C thuộc đường thẳng cố định, trực tâm H cố định.

a) Tìm quỹ tích tâm O của đường tròn (O).

b) Dựng tam giác ABC, biết N là trung điểm của cạnh AB.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O), (O_1) và một đường thẳng Δ. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho các tiếp tuyến kẻ từ M đến hai đường tròn đó tạo với đường thẳng Δ các góc bằng nhau.

Bài 5. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Dựng tam giác MNP với M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BC, AC và AB sao cho chu vi tam giác MNP nhỏ nhất.

Bài 6. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC và H là trực tâm của tam giác. Gọi (O_1), (O_2), (O_3) là các đường tròn tâm O_1, O_2, O_3 đối xứng với đường tròn (O) qua các cạnh của tam giác ABC. Chứng minh các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đi qua H và $\Delta ABC=\Delta O_1O_2O_3$.

Bài 7. Cho tam giác ABC có AB = AC nội tiếp đường tròn (O). Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các đường thẳng CI, BI cắt đường tròn (O) lần lượt tại M, N. Tứ giác AMIN là hình gì? Tại sao?

Bài 8. Cho hypebol (H) với hai tiêu điểm F_1, F_2. Gọi M là điểm nằm trên (H) nhưng không nằm trên đường thẳng F_1F_2 và d là phân giác trong của tam giác MF_1F_2 tại M. Chứng minh rằng đường thẳng d chỉ cắt (H) tại điểm duy nhất M.

Bài 9. Cho tam giác ABC, đường cao AH ($H\in BC$). Gọi D, E lần lượt là các điểm đối xứng với H qua AB, AC. Đường thẳng DE cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh AH là đường phân giác của góc $\widehat{MHN}$.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm M(3;–5), đường thẳng d: $3x + 2y - 6 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$. Tìm ảnh của M, đường thẳng d và đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Δ.

a) Δ là trục hoành. b) Δ là trục tung.

c) Δ là đường thẳng $x - y + 1 = 0$.

Bài 11. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai đường thẳng

d_1: x – 5y + 7 = 0 và d_2: 5x – y – 13 = 0.

Tìm phép đối xứng trục biến đường thẳng d_1 thành đường thẳng d_2

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy. Một phép biến hình f: M(x ; y)→ M'(x' ; y') có biểu thức giải tích:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}x + \dfrac{2}{3}y \\ y' = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{\sqrt{5}}{3}y \end{cases}$$

a) Tìm tập hợp Δ các điểm kép của phép biến hình f.

b) Xác định biểu thức giải tích của phép biến hình g biến M(x' ; y')→ M(x ; y). Có nhận xét gì?

c) Chứng tỏ rằng f là phép đối xứng trục, có trục là đường thẳng Δ.

§3. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

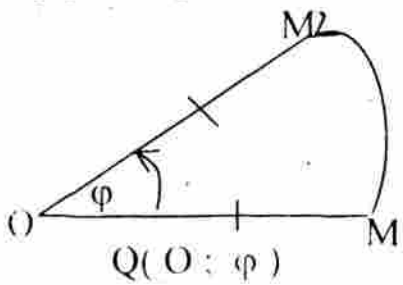
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

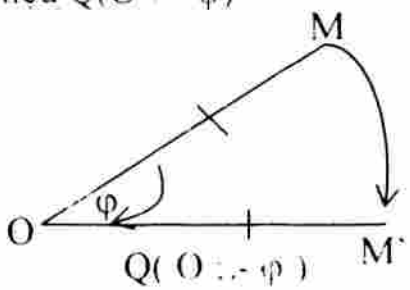
I. Phép quay

1. Định nghĩa: Trong mặt phẳng, cho điểm O cố định và một góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho OM' = OM và (OM, OM') = φ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ.

Kí hiệu: Q(O ; φ)

2. Chiều dương của phép quay Q(O ; φ) theo chiều dương của đường tròn lượng giác. Ngược lại là chiều âm và còn kí hiệu Q(O ; -φ)





3. Định lí: Phép quay là một phép dời hình

$$Q(O ; \varphi): AM \to A'M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = A'M' \\ (AM, A'M') = \varphi \end{cases}$$

II. Phép đối xứng tâm

1. Định nghĩa: Phép đối xứng qua điểm O là một phép quay tâm O với góc quay 180^0, tức là biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$$

Kí hiệu: $Đ_O$

– Điểm O gọi là tâm của phép đối xứng.

2. Tâm đối xứng của một hình: Điểm **O** gọi là tâm đối xứng của một hình **H** nếu phép đối xứng $Đ_O$ biến hình **H** thành chính nó, tức là $Đ_O(H) = H$.

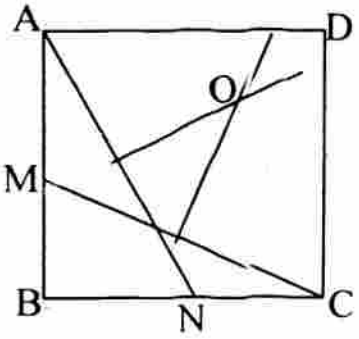
B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Xác định phép quay

Phương pháp: 1. Phép biến hình biến AM thành A' M'

2. AM = A' M' và (AM, A' M') = φ

3. Tâm quay O là giao của hai trong các đường sau: Đường trung trực của AA' ; đường trung trực của MM' ; đường tròn (IAA') ; đường tròn (IMM') với I là giao điểm của hai đường thẳng AM, A'M'.



Bài 1. Cho hình vuông ABCD có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC.

Xác định phép quay biến $\overrightarrow{AM}$ thành $\overrightarrow{NC}$.

Giải

Ta có: AM = NC và (AM, NC) = 90^0. Suy ra NC là ảnh của AM qua phép quay tâm O, góc quay 90^0. Tâm O là giao điểm của hai đường trung trực của AN, CM.

Dạng 2. Tìm ảnh của một hình (H) cho trước qua phép quay Q(O ; φ)

Phương pháp:

1. Lấy bất kì điểm M ∈ (H).
2. Dựng ảnh M' của M qua phép quay Q(O ; φ) OM = OM' và (OM, OM') = φ.
3. Dựa vào tính chất của phép quay để tìm tập hợp các điểm M'. Từ đó suy ra hình H'.

Bài 2. Cho phép quay Q(O ; φ) và đường thẳng d không đi qua O.

a) Gọi H là hình chiếu của O trên d. Dựng ảnh H' của H qua phép quay Q(O ; φ).

b) Nêu cách dựng đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d phép quay Q(O ; φ).

c) Có nhận xét gì về góc tạo bởi hai đường thẳng d', d trong các trường hợp:

$0 < φ \leq 90^0$ và $90^0 < φ < 180^0$

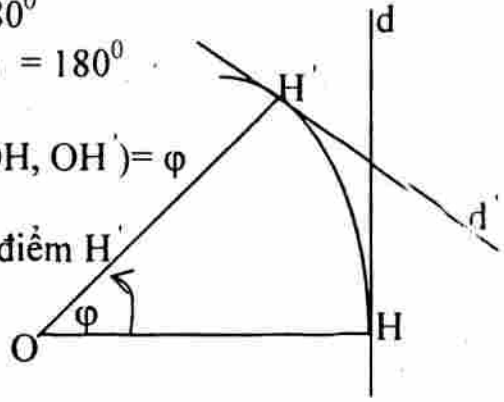
d) Nhận xét gì về hai đường thẳng d', d khi $φ = 180^0$

Giải

a) Ta có: Q(O ; φ): H → H' ⇒ OH = OH' và (OH, OH') = φ

– Vẽ cung tròn tâm O, bán kính R = OH.

– Trên cung tròn, theo chiều quay dương lấy điểm H'



sao cho $\widehat{HOH'} = \varphi$

- Điểm H' dựng được.

b) Ta có: OH ⊥ d nên d là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R) với bán kính R = OH.

Q(O ; φ): d → d' ⇒ d' là tiếp tuyến của đường tròn (O ; R) tại H'.

- Dựng điểm H' là ảnh của điểm H qua phép quay Q(O ; φ).
- Dựng đường thẳng d' vuông góc với OH' tại H'.

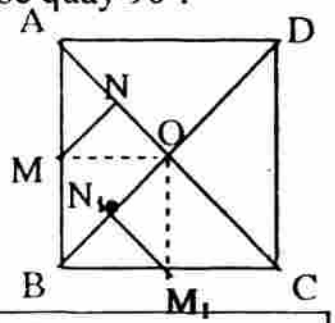
c) Góc tạo bởi hai đường thẳng d và d' bằng góc φ hoặc bù với góc φ.

* Khi $0 < \varphi \leq 90^0$ thì (d, d') = φ.
* Khi $90^0 < \varphi < 180^0$ thì (d, d') = $180^0 - \varphi$.

d) Khi $\varphi = 180^0$ thì Q(O ; φ): H → H' ⇒ $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OH'} = \vec{0}$ ⇒ O **là trung điểm** của HH' nên Q(O ; φ): d → d' ⇒ d' ⊥ HH' và d ⊥ HH' ⇒ **d' // d và** cách đường thẳng d một khoảng bằng 2OH.

Bài 3. Cho hình vuông ABCD tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, OA. Tìm ảnh của tam giác AMN qua phép quay tâm O, góc quay 90^0.

Giải



Xét phép quay Q(O ; 90^0): A → B, M → M_1

⇒ Q(O ; 90^0): N → N_1.

N là trung điểm của OA thì N_1 là trung điểm của OB.

Suy ra: Q(O ; 90^0): ΔAMN → Δ BM_1N_1

và ΔAMN = Δ BM_1N_1.

Dạng 3. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép quay Q(O ; φ)

Phương pháp: 1. Xác định phép quay biến điểm M thành điểm M'

2. Xác định quỹ tích của điểm M.

3. Dựa vào tính chất của phép quay để tìm quỹ tích của điểm M'.

Bài 4. Cho điểm I cố định. Gọi M, M' là hai điểm sao cho tam giác IMM' vuông cân tại I.

a) Cho điểm M chạy trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích các điểm M'.

b) Cho điểm M chạy trên đường thẳng d. Tìm quỹ tích các điểm M'. Gọi H là hình chiếu của I xuống MM'. Tìm quỹ tích các điểm H.

Giải

Ta có: ΔIMM' vuông cân tại I nên IM = IM'

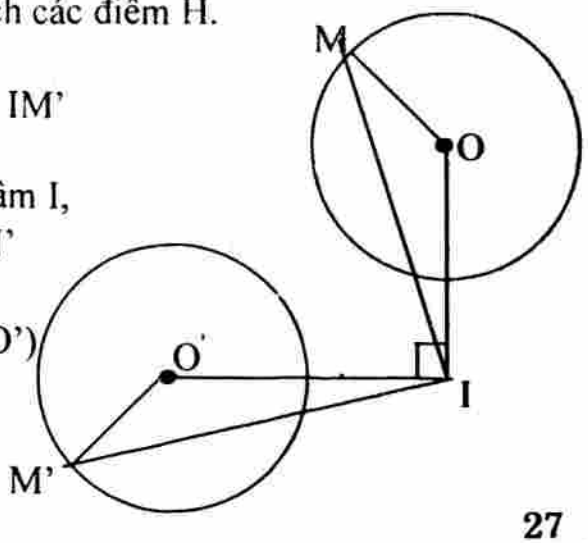
và (IM, IM') = 90^0.

Suy ra, M' là ảnh của M qua phép quay tâm I, góc quay 90^0. Tức là: Q(I ; 90^0): M → M'

a) Khi M ∈(O)

Q(I ; 90^0): O → O' ⇒ Q(I ; 90^0): (O)→(O')

Suy ra: M' ∈(O').



Vậy, quỹ tích điểm M' là đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép quay $Q(I ; 90^0)$

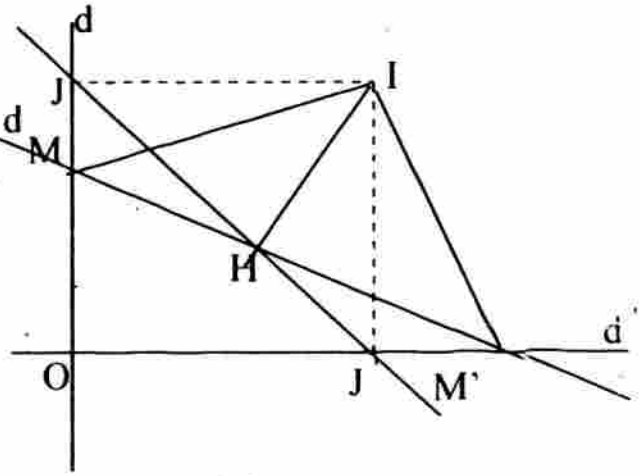
b) Khi $M \in d$

Gọi J là hình chiếu vuông góc của I lên d

$Q(I ; 90^0): J \to J'$

$\Rightarrow Q(I ; 90^0): d \to d'$ và d' vuông góc với IJ' tại J', $d \perp d'$

$M \in d \Rightarrow M \in d'$. Vậy, quỹ tích



điểm M' là đường thẳng d' đi qua J' và vuông góc với d.

* Tìm quỹ tích điểm H.

Kẻ $IH \perp MM' \Rightarrow \widehat{MIH} = 45^0$

(Do $\Delta IMM'$ vuông cân tại I).

Suy ra: Tứ giác IJMH nội tiếp đường tròn, đường kính MI.

$\Rightarrow \widehat{MJH} = \widehat{MIH} = 45^0$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{MH}$).

Ta có: $\widehat{MJJ'} = 45^0$ (JJ' là đường chéo hình vuông OJIJ') $\Rightarrow \widehat{MJH} = \widehat{MJ'J'}$.

Hai điểm H và J' nằm cùng phía đối với đường thẳng d nên $H \in JJ'$.

Suy ra, quỹ tích của điểm H là đường thẳng JJ'.

Bài 5. Cho ba điểm A, B, C cố định trên đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 đối xứng với M qua A, M_2 đối xứng với M_1 qua B và M_3 đối xứng với M_2 qua C. Tìm quỹ tích của điểm M_3.

Giải

Gọi D là trung điểm của M và M_3 thì AD là đường trung bình của ΔMM_1M_3

$\Rightarrow AD // M_1M_3$ và $AD = \frac{1}{2} M_1M_3$ (1)

Ta có: BC là đường trung bình $\Delta M_1M_2M_3$

$\Rightarrow BC // M_1M_3$ và $BC = \frac{1}{2} M_1M_3$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra

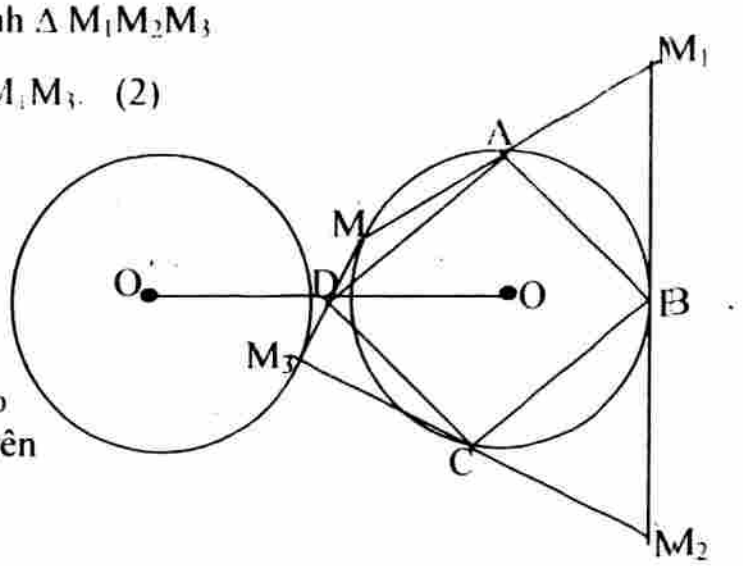
AD // BC và AD = BC

nên ABCD là hình bình hành

Ta có: A, B, C cố định nên D cố định.

Xét phép đối xứng tâm D là $Đ_D$

$Đ_D: M \to M_3$. Điểm M chạy trên đường tròn (O)



nên điểm M_3 chạy trên đường tròn (O'), (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm D. Vậy, quỹ tích các điểm M_3 là đường tròn (O').

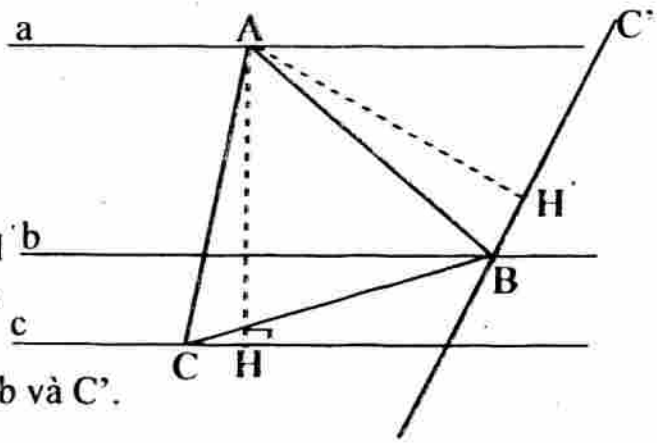
Dạng 4. Áp dụng phép quay vào dựng hình

Phương pháp:

1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép quay để tìm điều kiện (α) gọi là H_α và điều kiện (β) gọi là H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 6. Dựng tam giác đều có ba đỉnh nằm trên ba đường thẳng song song cho trước.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được tam giác đều ABC, A ∈ a, B ∈ b, C ∈ c

Ta có: AC = AB và (AC, AB) = 60^0

Suy ra: $Q(A ; 60^0)$: C → B

Kẻ AH ⊥ c tại H thì $Q(A ; 60^0)$: H → H'

⇒ $Q(A ; 60^0)$: c → C' và C' vuông góc với AH' tại H'

⇒ B là giao điểm của hai đường thẳng b và C'.

Cách dựng:

- Lấy một điểm A bất kì trên đường thẳng a.
- Dựng đường thẳng C' là ảnh của đường thẳng c qua phép quay $Q(A ; 60^0)$.
- Dựng điểm B giao điểm của hai đường thẳng b và C'.
- Dựng điểm C là ảnh của điểm B qua phép quay $Q(A ; -60^0)$.
- Tam giác ABC dựng được.

Chứng minh:

Theo cách dựng, ta có: AB = AC và $\widehat{BAC} = 60^0$ nên tam giác ABC đều.

Biện luận:

Đường thẳng c' là ảnh của đường thẳng c qua phép quay $Q(A ; 60^0)$ hoặc $Q((A ; -60^0)$. Từ đó ta dựng được hai điểm B và B_1 nên bài toán có hai nghiệm hình.

Bài 7. Cho hai đường tròn (O; R) và (O_1; R_1) cắt nhau tại hai điểm A và B. Hãy dựng một đường thẳng d đi qua A, cắt đường tròn (O;R) và (O_1; R_1) lần lượt tại M, M_1 sao cho A là trung điểm MM_1.

Giải.

Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng d đi qua A, cắt đường tròn (O;R)

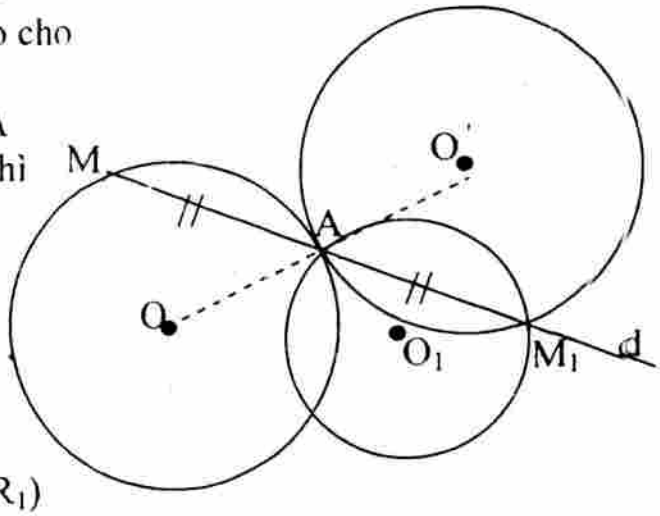
và $(O_1; R_1)$ lần lượt tại M, M_1 sao cho A là trung điểm MM_1.

Suy ra: M_1 đối xứng với M qua A

Gọi $Đ_A$ là phép đối xứng tâm A thì

$Đ_A$: $M \to M_1$

M thuộc đường tròn (O; R) nên M_1 thuộc đường tròn (O'; R) là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng $Đ_A$ Suy ra: M_1 là giao điểm thứ hai của đường tròn (O'; R) với đường tròn $(O_1; R_1)$ nên đường thẳng d đi qua A và M_1.



Cách dựng:

– Dựng đường tròn (O'; R) là ảnh của đường tròn (O; R) qua phép đối xứng $Đ_A$.

– Dựng điểm M_1 là giao điểm thứ hai của đường tròn (O'; R) với đường tròn $(O_1; R_1)$ (M_1 khác điểm A).

– Dựng đường thẳng d đi qua A và M_1 là đường thẳng cần dựng.

Chứng minh:

Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng d với đường tròn (O; R) ($M \neq A$)

Theo cách dựng, ta có:

ΔOMA cân tại O $\Rightarrow$ OA = OM = R và $\widehat{OAM} = \widehat{OMA}$

$\Delta O'M_1A$ cân tại O' $\Rightarrow$ O'A = O'M_1 = R và $\widehat{O'AM_1} = \widehat{O'M_1A}$

$\widehat{OAM} = \widehat{O'AM_1}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{AO'M_1}$; $\widehat{OMA} = \widehat{O'M_1A}$ và OM = O'M_1

$\Rightarrow \Delta OMA = \Delta O'M_1A \Rightarrow MA = M_1A$.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Bài 8. Cho hình vuông ABCD và một điểm M nằm trên một cạnh hình vuông. Tìm các điểm N, P nằm trên cạnh hình vuông sao cho tam giác MNP là tam giác đều.

Giải

Phân tích: Giả sử dựng được tam giác đều MNP sao cho $M \in AD$, $N \in AB$ và $P \in DC$.)

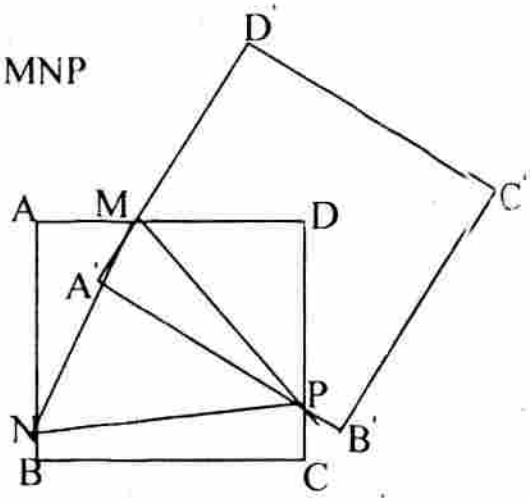
Ta có: MN = MP và $(MN, MP) = 60^0$

$Q(M ; 60^0)$: $N \to P$

$\Rightarrow Q(M ; 60^0)$: $AB \to A'B'$.

Suy ra, P là giao điểm của hai đường thẳng A'B' và CD.

Cách dựng:



– Lấy điểm M bất kì trên cạnh AD.
– Dựng đường thẳng A'B' là ảnh của đường thẳng AB qua phép quay Q(M ; 60^0).
– Dựng điểm P là giao điểm của hai đường thẳng A'B' và CD.
– Dựng điểm N là ảnh của điểm P qua phép quay Q(M ; – 60^0).
– Tam giác MNP dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng, ta có: MN = NP và $\widehat{NMP} = 60^0$.

Mặt khác: P thuộc cạnh A'B' nên N cũng thuộc cạnh AB.

Biện luận: Cạnh A'B' cắt cạnh DC tại một điểm duy nhất P nên bài toán có một nghiệm hình.

Dạng 5. Áp dụng phép quay vào chứng minh

Phương pháp: 1. Xác định phép quay Q(O ; φ)

2. Áp dụng tính chất của phép quay: Biến một hình thành một hình bằng nó.

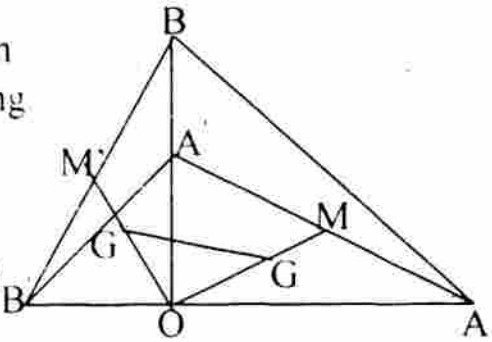
Bài 9. Cho tam giác vuông cân OAB và OA'B' có chung đỉnh O sao cho O nằm trên đoạn thẳng AB' và nằm ngoài đoạn thẳng A'B. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác OAA' và OBB'. Chứng minh GOG' là tam giác vuông cân.

Giải

Ta có: OA = OB và $\widehat{AOB} = 90^0$, OA' = OB' và $\widehat{A'OB'} = 90^0$

$\Rightarrow$ Q(O ; 90^0): A $\rightarrow$ B ; A' $\rightarrow$ B'

$\Rightarrow$ Q(O ; 90^0): AA' $\rightarrow$ BB'. Gọi M là trung điểm của AA' thì Q(O ; 90^0): M $\rightarrow$ M' và M' là trung điểm của BB'.



$\Rightarrow$ OM = OM' và $\widehat{MOM'} = 90^0$.

G là trọng tâm tam giác OAA' thì $OG = \frac{2}{3}OM$

G' là trọng tâm tam giác OBB' thì $OG' = \frac{2}{3}OM'$.

Suy ra: OG = OG' và $\widehat{GOG'} = 90^0 \Rightarrow \Delta GOG'$ là tam giác vuông cân.

Bài 10. Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh AB, BC, CA lấy các điểm K, L, M sao cho $\frac{AK}{KB} = \frac{BL}{LC} = \frac{CM}{MA}$. Nối AL, BM, CK các đường thẳng này đôi một cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều và có tâm trùng với tâm của tam giác ABC.

Giải

Gọi tam giác tạo thành là DEF và O là tâm Δ ABC cũng là trọng tâm tam giác (Do Δ ABC đều).

$\Rightarrow$ OA = OB = OC và $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 120^0$

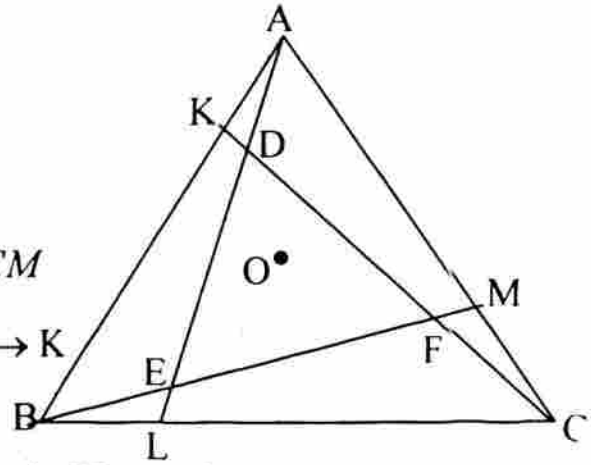
Xét phép quay Q(O ; 120^0): A $\rightarrow$ B ; B $\rightarrow$ C và

C→ A. Ta có: $\frac{AK}{KB}=\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}$

$\Rightarrow \frac{AK}{AK+KB}=\frac{BL}{BL+LC}=\frac{CM}{CM+MA}$

$\Leftrightarrow \frac{AK}{AB}=\frac{BL}{BC}=\frac{CM}{CA} \Leftrightarrow AK=BL=CM$

$\Rightarrow$ Q (O; 120^0): K → L ; L → M ; M → K



$\Rightarrow$ Q (O; 120^0): AL → BM ; BM → CK và CK → AL

$\Rightarrow$ Q (O; 120^0): E → F ; F → D và D → E $\Rightarrow$ ΔDEF là tam giác đều và có tâm O

Bài 11. Cho tam giác ABC. Dựng phía ngoài của tam giác ABC các tam giác vuông cân ABO_1, ACO_2 có đỉnh góc vuông ở O_1, O_2. Gọi O là trung điểm cạnh BC. Chứng minh tam giác OO_1O_2 vuông cân.

Giải

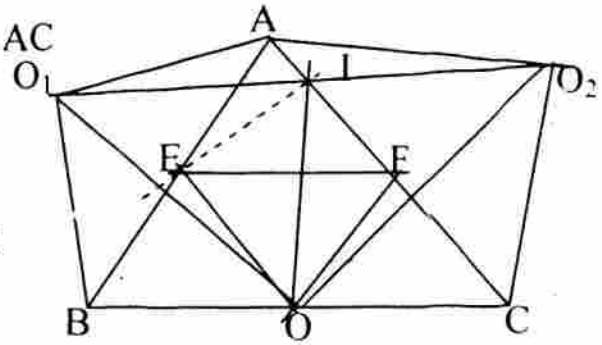
Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC

Ta có: ΔABO_1 vuông cân tại O_1

$\Rightarrow O_1E \perp AB$ và $O_1E=\frac{1}{2}AB$

ΔACO_2 vuông cân tại O_2 $\Rightarrow O_2F \perp AC$

và $O_2F=\frac{1}{2}AC$.



Mặt khác: OF là đường trung bình của ΔABC $\Rightarrow$ OF // AB và $OF=\frac{1}{2}AB$

$\Rightarrow O_1E \perp OF$ và $O_1E=OF$.

Tương tự OE là đường trung bình của ΔABC $\Rightarrow$ OE // AC và $OE=\frac{1}{2}AC$

$\Rightarrow OE \perp O_2F$ và $OE=O_2F$.

Xét phép quay Q(I ; 90^0): $O_1 \to O$; $E \to F$; $O \to O_2$ với tâm quay I là giao điểm của hai đường trung trực OO_1 và EF.

Suy ra: $IO_1=IO=IO_2$ và $\widehat{O_1IO}=\widehat{OIO_2}=90^0$ $\Rightarrow OI=\frac{1}{2}O_1O_2$ và $OI \perp O_1O_2$

$\Rightarrow$ tam giác OO_1O_2 vuông cân tại O.

Cách khác Ta có: $O_1E=OF$, $OE=O_2F$ và $O_1E \perp OF$, $OE \perp O_2F$

$\Rightarrow \widehat{O_1EO}=\widehat{OFO_2}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta O_1EO=\Delta OFO_2 \Rightarrow OO_1=OO_2$ và $\widehat{EO_1O}=\widehat{FOO_2}$ (*)

Mặt khác: $O_1E \perp OI' \Rightarrow OO_1 \perp OO_2$.

Vậy, tam giác OO_1O_2 vuông cân tại O.

Dạng 6. Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất

Phương pháp: 1. Xác định phép quay Q(O ; φ).
2. Áp dụng tính chất của phép quay.
3. Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác.

Bài 12. Cho tam giác ABC. M là điểm tuỳ ý trong tam giác. Xác định vị trí của điểm M sao cho MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải

Xét phép quay $Q(B ; 60^0)$: $M \to M' \Rightarrow BM = BM'$ và $\widehat{MBM'} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta BMM'$ đều $\Rightarrow BM = MM'$ và $\widehat{BMM'} = 60^0$.

Mặt khác: $Q(B ; 60^0)$: $C \to C' \Rightarrow MC = M'C'$ và $(MC, M'C') = 60^0$

Ta có: $MA + MB + MC = MA + MM' + M'C' \geq AC'$

MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất khi $MA + MB + MC = AC'$

Suy ra: A, M, M', C' thẳng hàng.

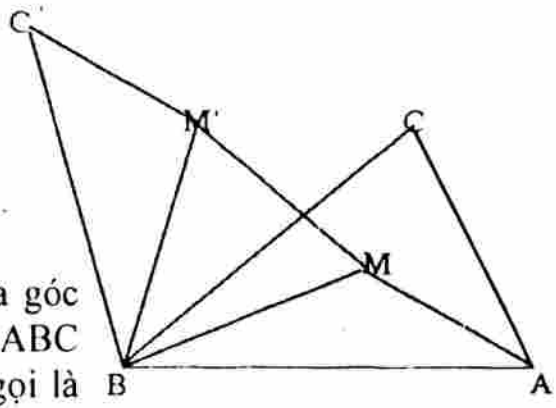
$\Rightarrow (MC, M'C') = (MC, MM') = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{BMM'} + \widehat{M'MC} = 120^0$

$\widehat{BMA} = \widehat{BM'M} + \widehat{MBM'} = 120^0$

$\widehat{AMC} = 360^0 - (\widehat{BMA} + \widehat{BMC}) = 120^0$

Vậy, M là giao điểm của ba cung chứa góc 120^0 dựng trên ba cạnh của tam giác ABC (Điểm M được xác định như trên còn gọi là điểm Tôrixeli)



Bài 13. Cho tam giác đều ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh BM ≤ CM + AM. Khi nào thì dấu đẳng thức xảy ra?

Giải

Xét phép quay $Q(A ; 60^0)$: $M \to M'$

$\Rightarrow AM = AM'$ và $\widehat{MAM'} = 60^0 \Rightarrow AM = MM'$

Phép quay $Q(A ; 60^0)$: $C \to B \Rightarrow MC = BM'$

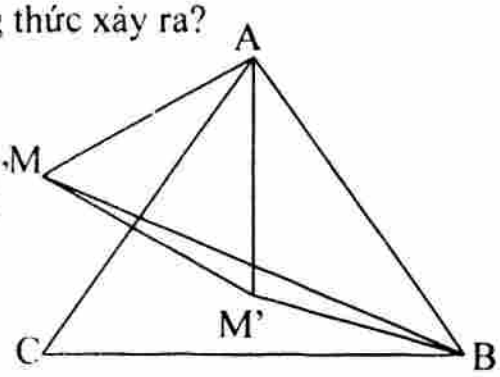
$BM \leq BM' + MM' = MC + AM$

$\Rightarrow BM \leq MC + AM$.

Dấu đẳng thức xảy ra thì $MC + AM = BM$

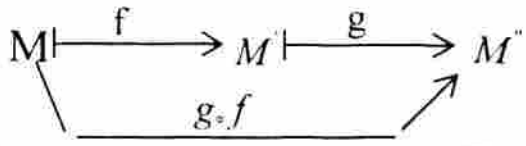
$\Rightarrow BM' + MM' = BM \Rightarrow B, M', M$ thẳng hàng.

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 60^0 \Rightarrow$ M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



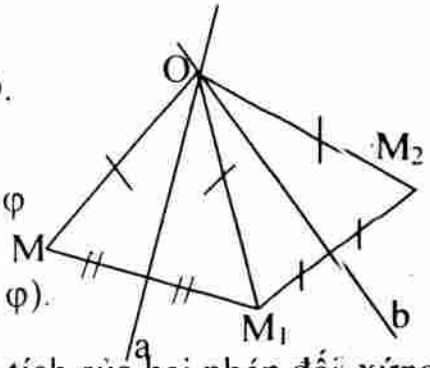
Dạng 7. Tích của các phép quay

Phương pháp:



Bài 14. Chứng minh rằng tích của hai phép đối xứng trục có trục không song song là một phép quay.

Giải



Xét hai phép đối xứng trục D_a, D_b với a cắt b tại O.

Giả sử $M \xrightarrow{D_a} M_1 \xrightarrow{D_b} M_2$

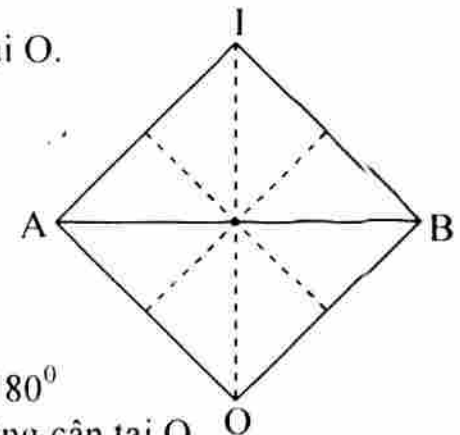
Thì $OM = OM_1 = OM_2$ và $(OM, OM_2) = 2(a, b) = \varphi$ với (a, b) là góc giữa hai đường thẳng a và b.

Suy ra: $Q(O ; \varphi)$: $M \to M_2$. Vậy, $D_b \circ D_a = Q(O ; \varphi)$.

Nhận xét: Mọi phép quay $Q(O ; \varphi)$ có thể xem là tích của hai phép đối xứng trục D_a, D_b với a cắt b tại O là tâm quay, góc quay $\varphi = 2(a, b)$.

Bài 15. Cho hai phép quay Q_A, Q_B có tâm quay là A, B phân biệt và có cùng góc quay 90^0. Gọi $F = Q_A \circ Q_B$ và $F' = Q_B \circ Q_A$. Chứng minh rằng F, F' là những phép đối xứng tâm. Nêu rõ cách xác định tâm đối xứng của các phép đó.

Giải



Lấy điểm O sao cho tam giác OAB vuông cân tại O.

Ta có: $(OA, AB) = (OB, BA) = 45^0$.

Suy ra: $Q_A = Q(A ; 90^0) = D_{AO} \circ D_{AB}$

$Q_B = Q(B ; 90^0) = D_{BA} \circ D_{BO}$

$F = Q_A \circ Q_B = (D_{AO} \circ D_{AB}) \circ (D_{BA} \circ D_{BO})$

$= D_{AO} \circ (D_{AB} \circ D_{BA}) \circ D_{BO} = D_{AO} \circ D_{BO}$

$= Q(O ; 180^0)$ vì $\varphi = 2(OB, OA) = 2.90^0 = 180^0$

Tương tự, lấy điểm I sao cho tam giác OAB vuông cân tại O.

Khi đó: $Q_B = Q(B ; 90^0) = D_{BI} \circ D_{BA}$; $Q_A = Q(A ; 90^0) = D_{AB} \circ D_{AI}$

$F = Q_B \circ Q_A = (D_{BI} \circ D_{BA}) \circ (D_{AB} \circ D_{AI}) = D_{BI} \circ D_{AI} = Q(I ; 180^0)$

vì $\varphi = 2(IA, IB) = 2.90^0 = 180^0$.

Bài 16. Cho tam giác ABC. Dựng phía ngoài của tam giác các hình vuông BCMN, ACPQ có tâm O và O'.

a) Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho điểm C thay đổi thì các đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác IOO' vuông cân.

Giải

a) Chứng minh đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

Ta có: $(AQ, AC) = 90^0 \Rightarrow Q_A = Q(A : 90^0) = D_{AQ} \circ D_{AC}$

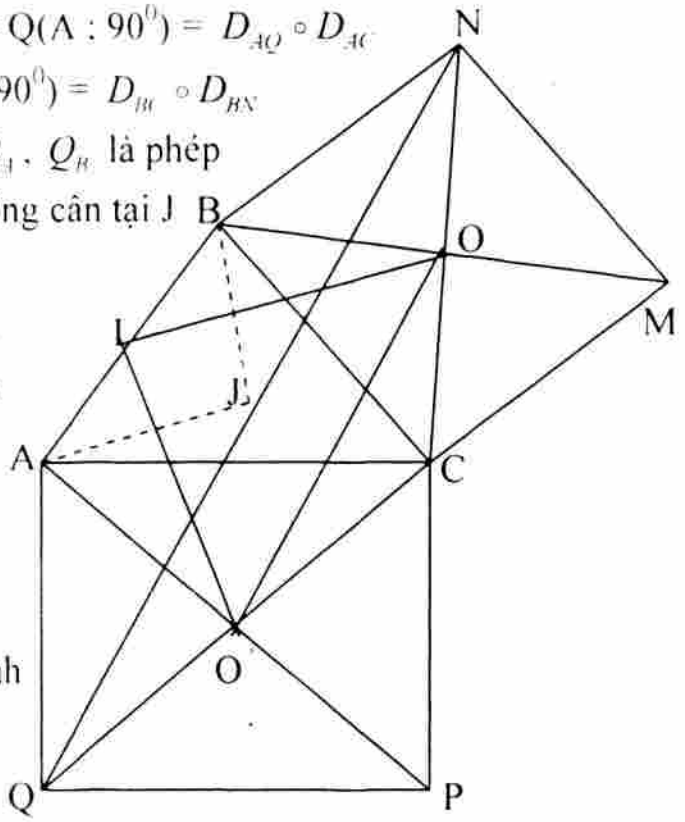
$(BC, BN) = 90^0 \Rightarrow Q_B = Q(B : 90^0) = D_{BC} \circ D_{BN}$

Suy ra, tích của hai phép quay Q_A, Q_B là phép đối xứng tâm D_J với ΔABJ vuông cân tại J

$Q_A : Q \to C$ và $Q_B : C \to N$

$\Rightarrow D_J : Q \to N \Rightarrow \overrightarrow{JQ} + \overrightarrow{JN} = \vec{o}$

Suy ra, đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định J.



b) Chứng minh tam giác IOO' vuông cân.

$Q(C; 90^0)$: $A \to P$, $M \to B$

$\Rightarrow AM = PB$ và $AM \perp PB$ (1)

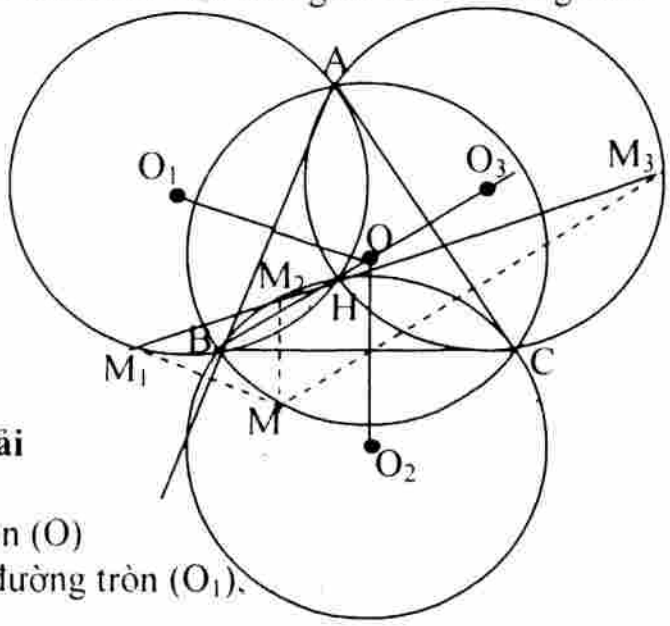
Mặt khác, OI là đường trung bình của $\Delta AMB \Rightarrow OI \,//\, AM$

và $OI = \frac{1}{2} AM$ (2)

Tương tự, O'I là đường trung bình của $\Delta ABP \Rightarrow O'I \,//\, BP$ và $O'I = \frac{1}{2} BP$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có: $OI = O'I$ và $OI \perp O'I$ nên tam giác IOO' vuông cân.

Bài 17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), có trực tâm H và điểm M thuộc đường tròn (O). Gọi M_1, M_2, M_3 là các điểm lần lượt đối xứng với M qua các cạnh AB, BC, AC. Chứng minh các điểm M_1, M_2, M_3 và H thẳng hàng.
(Gọi là đường thẳng Steiner).



Giải

Gọi (O_1), (O_2), (O_3) lần lượt là các đường tròn đối xứng với đường tròn (O) qua các cạnh AB, BC, AC thì các đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) đi qua điểm H.

Ta có: $M \in (O)$ nên $D_{AB} : M \to M_1 \in (O_1)$

$D_{BC} : M \to M_2 \in (O_2)$

$D_{AC} : M \to M_3 \in (O_3)$.

Xét tích $D_{AC} \circ D_{AB} = Q(A ; \varphi)$ với $\varphi = 2(AB, AC)$

$Q(A;\varphi)$: $M_1 \to M_3 \Rightarrow (O_1) \to (O_3)$ và $(O_1) = (O_3)$

$\Rightarrow AM_1 = AM_3 \Rightarrow \overset{\frown}{AM_1} = \overset{\frown}{AM_3} \Rightarrow \overset{\frown}{M_1HA} + \overset{\frown}{AHM_3} = \pi \Rightarrow M_1, H, M_3$ thẳng hàng.

Tương tự, ta cũng chứng minh được M_1, H, M_2 thẳng hàng.

Suy ra. M_1, M_2, M_3 và H thẳng hàng.

Dạng 8. Biểu thức giải tích của phép quay

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy xét phép quay $Q(I;\varphi)$

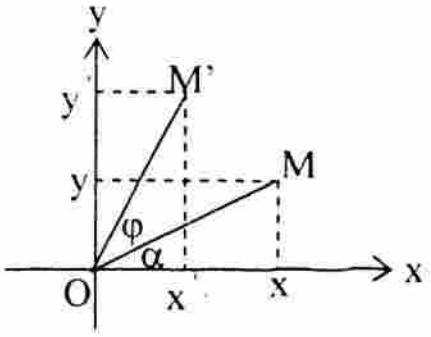
Trường hợp 1: Khi tâm quay I trùng với gốc tọa độ O.

$Q(O;\varphi)$: $M(x;y) \to M'(x';y')$

Đặt $OM = r$ và $(Ox, OM) = \alpha$.

Ta có: $M \begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$

$(Ox, OM') = \alpha + \varphi \Rightarrow M' \begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\varphi) \\ y' = r\sin(\alpha+\varphi) \end{cases}$



$\Rightarrow M' \begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$ (1)

$Q(O;-\varphi)$: $M'(x';y') \to M(x;y) \Rightarrow M \begin{cases} x = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi \\ y = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$ (2)

Các công thức (1) và (2) được tóm tắt ở bảng sau:

	x	y
x	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
y	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$

Trường hợp 2: Khi tâm quay I $(x_0; y_0)$

Ta có: $\begin{cases} x' - x_0 = (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi \\ y' - y_0 = (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi \end{cases}$ (3)

$\begin{cases} x - x_0 = (x' - x_0)\cos\varphi + (y' - y_0)\sin\varphi \\ y - y_0 = -(x' - x_0)\sin\varphi + (y' - y_0)\cos\varphi \end{cases}$ (4)

Công thức (3) và (4) được tóm tắt ở bảng sau:

	$x - x_0$	$y - y_0$
$x - x_0$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
$y - y_0$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$

Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép quay tâm O, góc quay $\frac{\pi}{4}$. Tìm ảnh qua phép quay Q $(O : \frac{\pi}{4})$:

a) Điểm A (2 : 2). b) Đường tròn (C): $(x - 1)^2 + y^2 = 4$.

Giải

Biểu thức giải tích của phép quay Q $(O; \frac{\pi}{4})$: M (x : y) → M' (x' : y')

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{4} - y\sin\frac{\pi}{4} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{4} + y\cos\frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

a) Q $(O : \frac{\pi}{4})$: A (2 ; 2) → A (x' : y') thì $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}.2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.2 = 0 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}.2 + \frac{\sqrt{2}}{2}.2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy, A' $\left(0 : 2\sqrt{2}\right)$

b) Đường tròn (C): $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ có tâm I (1 ; 0) và bán kính R = 2

Q $(O : \frac{\pi}{4})$: I (1 ; 0) → I' (x' ; y') ⇒ Q $(O : \frac{\pi}{4})$: (C) → (C') với (C') là đường tròn tâm I' và có bán kính R = 2.

Ta có I' $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ nên phương trình của đường tròn (C') là:

$$\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4.$$

Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép biến hình f có biểu thức giải tích: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$. f là phép gì?

Giải

Ta có f: M(x ; y) → M'(x' ; y') với

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{3} - y\sin\frac{\pi}{3} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{3} + y\cos\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Suy ra, f là phép quay tâm O, góc quay $\frac{\pi}{3}$.

Bài 20 (Khối B - 2007) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, cho điểm A (2 ; 2) và các đường thẳng: d_1: x + y - 2 = 0, d_2: x + y - 8 = 0.
Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Giải

Phép quay Q (A; 90^0), Q (A; -90^0) có biểu thức giải tích là:

$$\begin{cases} x' = -y + 4 \\ y' = x \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 4 \end{cases}$$

Phép quay Q (A; 90^0): $d_1 \to a_1$, phương trình đường thẳng a_1: x - y - 2 = 0.
Q (A; 90^0): $B \in d_1 \to C \in a_1$ và $C \in d_2$ nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C\ (5\ ;\ 3)\ .$$

Q (A; -90^0) : $C \to B$ thì $B(3\ ;\ -1) \in d_1$.
Phép quay Q (A; -90^0): $d_1 \to a_2$, phương trình đường thẳng a_2: x - y - 2 = 0
Q (A; -90^0) $B \in d_2 \to C \in a_2$ nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow C(3\ ;\ 5).$$

Q (A; 90^0): $C \to B$ thì $B\ (-1\ ;\ 3) \in d_1$.
Vậy B (- 1 ; 3), C(3 ; 5) hoặc B (3 ; - 1), C (5 ; 3).

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng $\sqrt{2}$ và có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Các đường chéo cắt nhau tại I. Trên cạnh BC lấy điểm J sao cho BJ = 1. Xác định phép quay biến $\overrightarrow{AI}$ thành $\overrightarrow{BJ}$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O, R) và (O' R') cắt nhau ở M, N. Qua M vẽ ba đường thẳng lần lượt cắt đường tròn (O, R) tại A, B, C và (O' R') tại A', B', C'. Xác định phép quay biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

Bài 3. Cho đường tròn (O) và điểm I không nằm trên đường tròn. Với mỗi điểm A thay đổi trên đường tròn, xét hình vuông ABCD có tâm I. Tìm quỹ tích các điểm B, C, D.

Bài 4. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R và M là điểm chuyển động trên nửa đường tròn đó. Dựng phía ngoài tam giác AMB một hình vuông MBCD.

a) Tìm quỹ tích của điểm C.

b) Trên tia Bx vuông góc với AB tại B và nằm cùng phía với nửa đường tròn lấy điểm O' sao cho BO' = BO. Chứng minh OM vuông góc với O'C.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD có tâm O và M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của B lên các đường thẳng AM, AN. Gọi I, J lần lượt là hình chiếu của D lên các đường thẳng AM, AN.

a) Xác định phép quay biến ADJ thành tam giác BAF.

b) Xác định ảnh của tam giác BAE.

c) Chứng minh EF vuông góc với IJ.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC và một điểm M sao cho $\widehat{AMB} = 120^0$, AM = 1, BM = 2. Tính độ dài đoạn thẳng CM.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD có AC vuông góc với CD và AC = CD, AB = 1, BC = $\sqrt{2}$, CD = $\sqrt{3}$. Tính các góc của tứ giác.

Bài 8. Cho đường tròn (O) nội tiếp tam giác ABC. Các tiếp điểm thuộc AB, BC, CA lần lượt là I, J, K. Chứng minh $\overrightarrow{OA}\sin A + \overrightarrow{OB}\sin B + \overrightarrow{OC}\sin C = \vec{0}$

Bài 9. Cho tam giác ABC có góc A nhọn. Dựng phía ngoài tam giác ABC các hình vuông ABMN, ACPQ, BCEF.

a) Chứng minh BQ = CN và BQ vuông góc với CN.

b) Gọi D là trung điểm của BC và K, H, G theo thứ tự là tâm các hình vuông ABMN, ACPQ, BCEF. Chứng minh ΔDKH vuông cân và KH = AG.

Bài 10. Cho hai hình vuông có tâm trùng nhau. Tìm chu vi bé nhất của giao hai hình vuông trên.

Bài 11. Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và hai điểm B, C thay đổi sao cho AB = 2, AC = 5. Dựng tam giác đều BCD sao cho D nằm khác phía với A đối với đường thẳng BC. Xác định góc $\varphi = \widehat{BAC}$ để AD có độ dài lớn nhất.

Bài 12. Cho góc nhọn $\widehat{AOx}$. Dựng một hình vuông ABCD sao cho điểm O nằm trên cạnh BC và O nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{BAE}$ với E là giao điểm của Ox với CD.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép biến hình f xác định bởi:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x - \dfrac{1}{2}y + 1 \\ y' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y - 2 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng f là một phép quay, xác định tâm và góc quay của f.

b) Phân tích phép quay f thành tích của một phép quay và một phép tịnh tiến. Xác định biểu thức của phép quay và phép tịnh tiến đó.

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép quay Q (O ; 45^0).

a) Viết biểu thức giải tích của phép quay đó.

b) Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 14 = 0$ qua phép quay Q (O ; 45^0).

§4. PHÉP VỊ TỰ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Cho điểm O cố định và một số k không đổi, $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.

Kí hiệu: V(O ; k)

V(O ; k): $M \to M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$

* Khi $k > 0$, M và M' nằm cùng phía đối với điểm O
* Khi $k < 0$, M và M' nằm khác phía đối với điểm O
* Khi $k = -1$, M và M' đối xứng nhau qua tâm O nên **V (O ; -1) = D_O**
* Khi $k = 1$, thì $M \equiv M'$ nên **V (O ; 1) = id.**

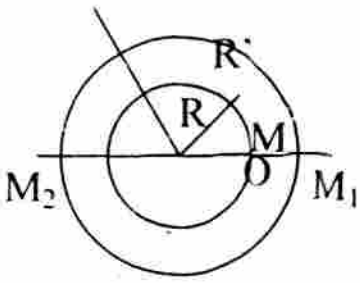
2. Tính chất:

Định lí 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N lần lượt thành hai điểm M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|MN$.

Định lí 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.

Hệ quả: Phép vị tự tỉ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

Định lí 3: Phép vị tự biến đường tròn thành đường tròn.



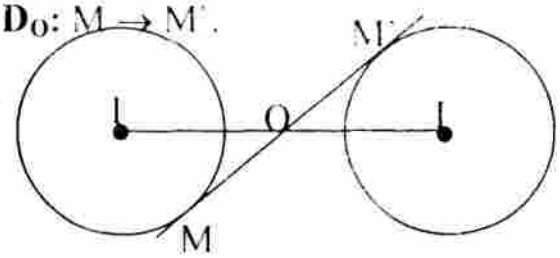
3. Tâm vị tự của hai đường tròn.

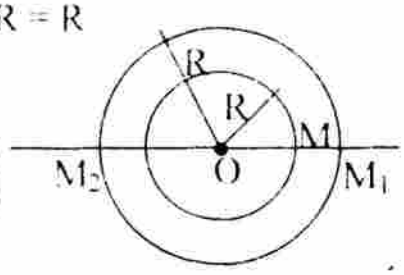
* Khi hai đường tròn (I; R) và (I'; R') đồng tâm

$V\left(O;\frac{R'}{R}\right): M \to M_1$ và $V\left(O;-\frac{R'}{R}\right): M \to M_2$

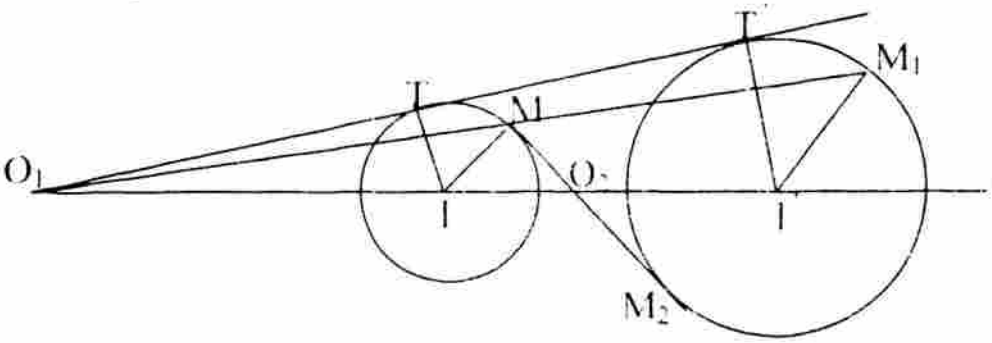
* Khi hai đường tròn (I ; R) và (I' ; R') cùng bán kính R = R'

$V(O;-1) = D_O: M \to M'$.





* Khi hai đường tròn (I; R) và (I' ; R') với I không trùng I' và R ≠ R'



$V\left(O_1; \frac{R'}{R}\right): M \to M_1$ và $V\left(O_2; -\frac{R'}{R}\right): M \to M_2$

* Phép vị tự tâm O biến đường tròn này thành đường tròn kia thì O được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn đó.
* Nếu phép vị tự đó có tỉ số dương thì điểm O gọi là tâm vị tự ngoài, nếu vị tự đó có tỉ số âm thì điểm O gọi là tâm vị tự trong

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Xác định phép vị tự

Phương pháp: 1. Phép biến hình f: $A \to A'$ và $M \to M'$

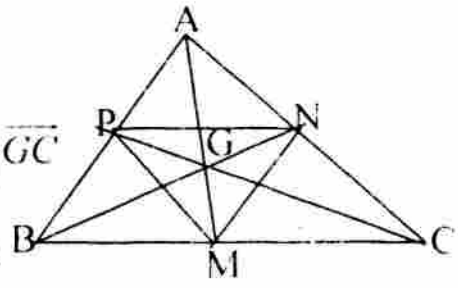
2. $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ với $k \neq 0$ và $k \neq 1$.
3. f là phép vị tự V (O; k) với tâm O là giao điểm của hai đường thẳng AA' và MM'.

Bài 1. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh rằng có một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó:

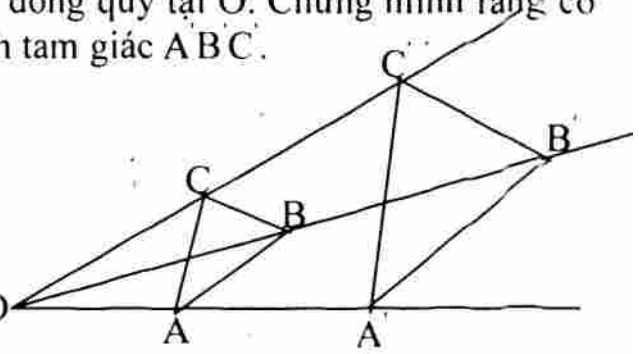
$\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$



Suy ra, phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

Bài 2. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có AB // A'B', BC // B'C' và AC // A'C' sao cho các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại O. Chứng minh rằng có một phép vị tự biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

Giải



Ta có: $AB // A'B' \Rightarrow \frac{OB'}{OB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'B'}{AB}$

$BC // B'C' \Rightarrow \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{B'C'}{BC}$

$AC // A'C' \Rightarrow \frac{OC'}{OC} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'C'}{AC}$

Suy ra: $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{A'B'}{AB} = k$ với $k > 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}} = \frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OC}} = k$

Suy ra: $V(O ; k): \Delta ABC \rightarrow \Delta A'B'C'$

Dạng 2. Áp dụng phép vị tự vào chứng minh

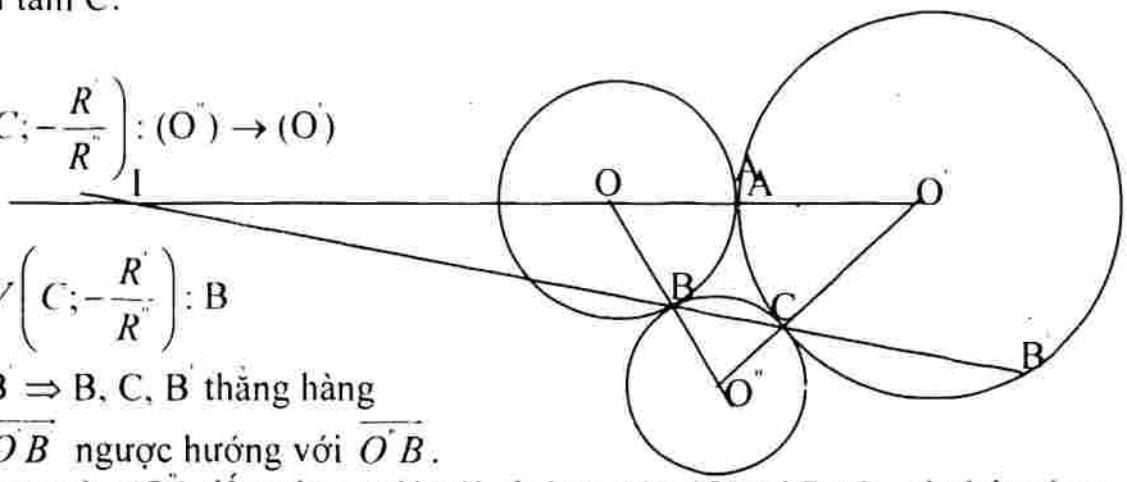
Phương pháp: 1. Xác định phép vị tự V (O; k).

2. Áp dụng tính chất của phép vị tự.

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài tại A. Một đường tròn (O'') tiếp xúc ngoài với hai đường tròn (O) và (O') lần lượt tại B, C. Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

Ta có: Đường tròn (O'') tiếp xúc ngoài với đường tròn (O') tại C nên có phép vị tự tâm C:



$V\left(C; -\frac{R'}{R''}\right): (O'') \rightarrow (O')$

$\Rightarrow V\left(C; -\frac{R'}{R''}\right): B$

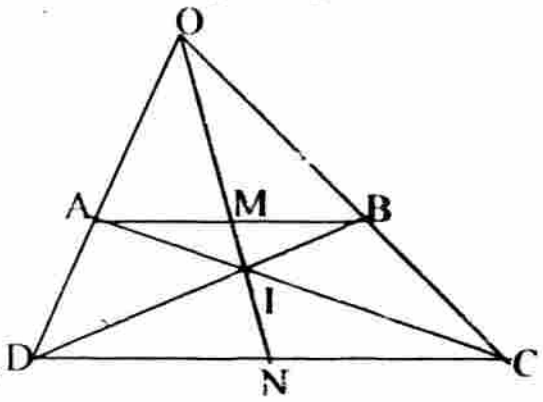
$\rightarrow B' \Rightarrow B, C, B'$ thẳng hàng

và $\overrightarrow{O''B}$ ngược hướng với $\overrightarrow{O'B'}$.

Đường tròn (O'') tiếp xúc ngoài với đường tròn (O) tại B nên có phép vị tự tâm B: $V\left(B; -\frac{R''}{R}\right): (O) \rightarrow (O'') \Rightarrow \overrightarrow{BO}$ ngược hướng với $\overrightarrow{BO''}$.

Suy ra: $\overrightarrow{O'B'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{OB}$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng OO' và BB' thì $\overrightarrow{IO'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{IO} \Rightarrow$ I cố định. Vậy đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Chứng minh rằng các trung điểm của hai đáy, giao của hai đường chéo, giao của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên hình thang thẳng hàng.



Giải

Ta có: AB // CD $\Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OM}{ON} = \frac{AB}{DC}$

$\Rightarrow V\left(O; \frac{AB}{DC}\right)$: M $\rightarrow$ N

$\Rightarrow$ O, M, N thẳng hàng. (1)

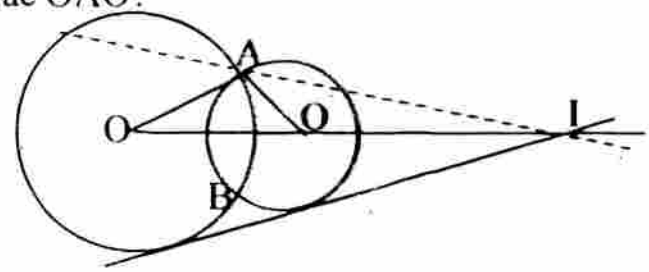
Ta có: AB // CD $\Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{IB}{ID} = \frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IN}$

$\Rightarrow V\left(I; -\frac{DC}{AB}\right)$: M $\rightarrow$ N $\Rightarrow$ I, M, N thẳng hàng. (2).

Từ (1) và (2) ta có O, M, N, I thẳng hàng.

Bài 5. Cho hai đường tròn (O ; R) và (O'; R') cắt nhau tại A và B. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn cắt đường thẳng OO' tại I. Chứng minh rằng AI là phân giác ngoài góc $\widehat{OAO'}$ của tam giác OAO'.

Giải



Ta có: $\frac{IO'}{IO} = \frac{R'}{R}$, Xét phép vị tự

$V\left(I; \frac{R'}{R}\right)$: O $\rightarrow$ O' $\Rightarrow \overrightarrow{IO'} = \frac{R'}{R}\overrightarrow{IO}$

$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{IO'}}{IO} = \frac{R'}{R} = \frac{AO'}{AO} \Rightarrow$ AI là phân giác ngoài góc $\widehat{OAO'}$ của tam giác OAO'.

Bài 6. (Đường thẳng Euler - đường tròn Euler).

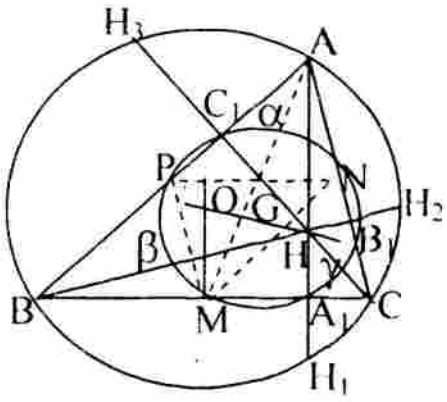
Cho M, N, P lần lượt là trung điểm ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP.

a) Chứng minh bốn điểm H, G, O và I thẳng hàng (đường thẳng đi qua ba điểm H, G, O gọi là đường thẳng Euler).

b) Chứng minh các điểm M, N, P; chân các đường cao và các trung điểm các đoạn thẳng HA, HB, HC ở trên một đường tròn (gọi là đường tròn Euler).

Giải

a) Phép vị tự $V\left(G:-\frac{1}{2}\right): \Delta ABC \to \Delta MNP$



Ta có: PN // BC, MO ⊥ BC ⇒ MO ⊥ PN

PM // AC, NO ⊥AC ⇒ NO ⊥ PM

⇒ O là trực tâm của ΔMNP

$V\left(G:-\frac{1}{2}\right): H \to O \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

⇒ H, G, O thẳng hàng (1)

Ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP nên $V\left(G;-\frac{1}{2}\right): O \to I$

$\Rightarrow \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \Rightarrow$ I, G, O thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) ta có bốn điểm H, G, O và I thẳng hàng.

b) Ta có: $V\left(G:-\frac{1}{2}\right): H \to O, O \to I \Rightarrow \overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HO} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OI} \Rightarrow$ I là trung điểm của OH $\Rightarrow V\left(H;\frac{1}{2}\right): (O) \to (I)$.

Gọi α, β, γ lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HA, HB, HC và H_1, H_2, H_3 đối xứng với H qua BC, AC và AB : A_1, B_1, C_1 chân đường cao hạ từ đỉnh A, B, C.

Ta có: A, B, C thuộc đường tròn (O) $\xrightarrow{V\left(H;\frac{1}{2}\right)}$ α, β, γ thuộc đường tròn (I).

Ta có: H_1, H_2, H_3 đối xứng với H qua BC, AC và AB thì H_1, H_2, H_3 thuộc đường tròn (O) $\xrightarrow{V\left(H;\frac{1}{2}\right)}$ A_1, B_1, C_1 thuộc đường tròn (I).

Suy ra, đường tròn (I) đi qua chín điểm M, N, P, A_1, B_1, C_1 và α, β, γ.

Bài 7. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy các điểm M, N sao cho AM = MN =NB.

Gọi A_1, B_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC và P là giao điểm của hai đường thẳng AA_1, CM. Chứng minh PK // AB.

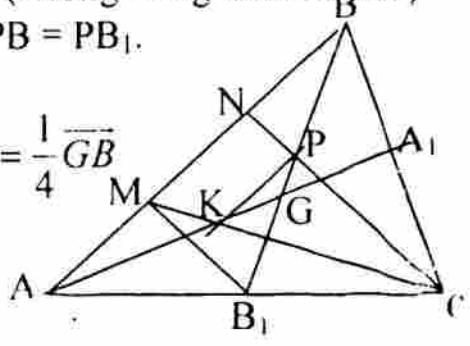
Giải

Ta có:AM = MN và $AB_1 = CB_1$, MB_1 // NC (đường trung bình ΔANC)

⇒ NP là đường trung bình của $\Delta BMB_1 \Rightarrow PB = PB_1$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GB}$$

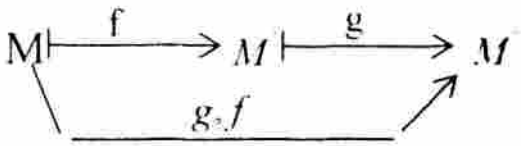


Tương tự, $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GA}$.

Phép vị tự $V\left(G;\frac{1}{4}\right)$: B → P , A → K ⇒ $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ ⇒ PK // AB.

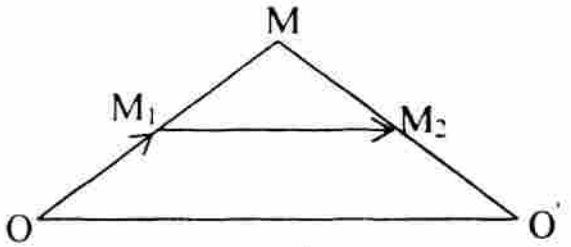
Dạng 3. Tích của các phép vị tự

Phương pháp:



1. Tích của phép vị tự và phép tịnh tiến.

Cho phép vị tự V(O ; k) với k ≠ 1 và phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$. Chứng minh rằng $T_{\vec{v}} \circ V(O ; k)$ và $V(O ; k) \circ T_{\vec{v}}$ là một phép vị tự. Xác định tâm và tỉ số của các phép vị tự đó.



Trường hợp 1 $T_{\vec{v}} \circ V(O ; k)$

Giả sử $M \xrightarrow{V(O,k)} M_1 \xrightarrow{T_{\vec{v}}} M_2$

Ta có: $\overrightarrow{OM_1} = k\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{v}$.

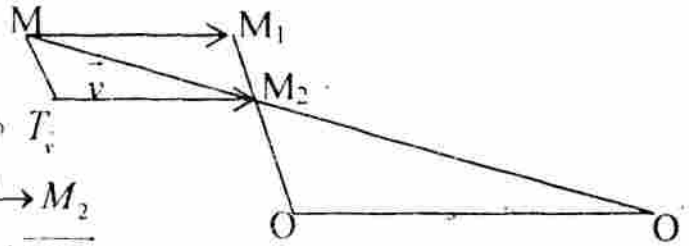
Gọi O' là giao điểm của đường thẳng MM_2 và đường thẳng đi qua O, có phương $\vec{v}$. Ta có $\frac{\overrightarrow{O'M_2}}{\overrightarrow{O'M}} = \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OM}} = k \Rightarrow \overrightarrow{O'M_2} = k\overrightarrow{O'M}$ (1)

Mặt khác $\frac{\overrightarrow{OO'}}{\vec{v}} = \frac{\overrightarrow{OO'}}{\overrightarrow{M_1M_2}} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{M_1M}} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}} = \frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{OM}} = \frac{1}{1-k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{1}{1-k}\vec{v}$ (2) thì O' cố định.

Từ (1) và (2) ta có: $T_{\vec{v}} \circ V(O ; k) = V(O' ; k)$

với $\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{1-k}\vec{v}$



Trường hợp 2 $V(O ; k) \circ T_{\vec{v}}$

Giả sử $M \xrightarrow{T_{\vec{v}}} M_1 \xrightarrow{V(O,k)} M_2$

Ta có: $\overrightarrow{MM_1} = \vec{v}$ và $\overrightarrow{OM_2} = k\overrightarrow{OM_1}$

Gọi O' là giao điểm của đường thẳng MM_2 và đường thẳng đi qua O, có phương $\vec{v}$. Ta có $\frac{\overrightarrow{O'M_2}}{\overrightarrow{O'M}} = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OM_1}} = k \Rightarrow \overrightarrow{O'M_2} = k\overrightarrow{O'M}$ (3)

Mặt khác $\frac{\overrightarrow{OO'}}{\vec{v}} = \frac{\overrightarrow{OO'}}{\overrightarrow{MM_1}} = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{M_2M_1}} = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}} = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\frac{1}{k}\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_2}} = \frac{k}{1-k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OO'} = \frac{k}{1-k}\vec{v}$ (4) thì O' cố định.

Từ (3) và (4) ta có: $V(O ; k) \circ T_{\vec{v}} = V(O' ; k)$ với $\overrightarrow{OO'} = \frac{k}{1-k}\vec{v}$

2. Tích của hai phép vị tự.

Cho hai phép vị tự $V(O_1 ; k_1)$, $V(O_2 ; k_2)$ với $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$. Chứng minh rằng tích của hai phép vị tự trên là:

a) Một phép vị tự khi $k_1k_2 \neq 1$. Xác định tâm của phép vị tự đó.

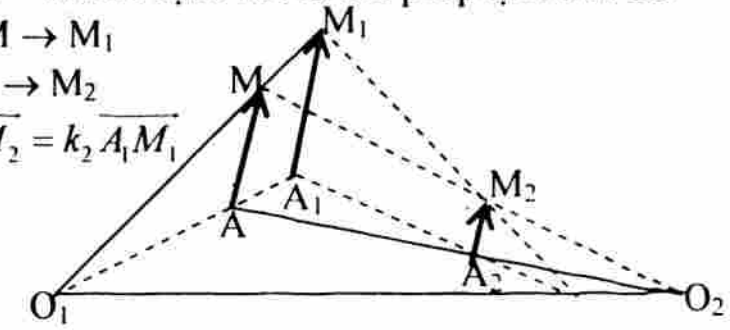
b) Một phép tịnh tiến khi $k_1k_2 = 1$. Xác định véc tơ của phép tịnh tiến đó.

Giả sử $V(O_1 ; k_1)$: $A \to A_1$, $M \to M_1$

$V(O_2 ; k_2)$: $A_1 \to A_2$, $M_1 \to M_2$

Ta có: $\overrightarrow{A_1M_1} = k_1\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{A_2M_2} = k_2\overrightarrow{A_1M_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{A_2M_2} = k_1k_2\overrightarrow{AM}$



a) <u>Khi $k_1k_2 \neq 1$</u> Đặt $k_1k_2 = k$

Khi đó có một phép vị tự V(O ; k): $\overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{A_2M_2}$.

*** Xác định tâm O của phép vị tự V (O; k)**

$V(O_1 ; k_1)$: $O \to I$ và $V(O_2 ; k_2)$: $I \to O$ (Tâm vị tự là điểm kép)

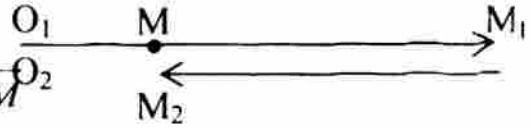
Suy ra: $\overrightarrow{O_1I} = k_1\overrightarrow{O_1O}$ và $\overrightarrow{O_2O} = k_2\overrightarrow{O_2I}$

$\Rightarrow \overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{O_2O} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1I})$ (*)

Thay $\overrightarrow{O_1I} = k_1\overrightarrow{O_1O}$ vào (*), ta có $\overrightarrow{O_2O_1} + \overrightarrow{O_1O} = k_2(\overrightarrow{O_2O_1} + k_1\overrightarrow{O_1O})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{O_1O} = \frac{1-k_2}{1-k_1k_2}\overrightarrow{O_1O_2}$ Suy ra O, O_1, O_2 thẳng hàng và O cố định

b) <u>Khi $k_1k_2 = 1$</u>: *** Nếu $O_1 \equiv O_2$**



thì **$V(O_1 ; k_1)$**: $M \to M_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_1} = k_1\overrightarrow{O_1M}$

$V(O_1 ; k_2)$: $M_1 \to M_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1}$

$\overrightarrow{O_1M_2} = k_2\overrightarrow{O_1M_1} = k_1k_2\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1M} \Leftrightarrow \overrightarrow{O_1M_2} - \overrightarrow{O_1M} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_2} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv M_2$.

Suy ra: Tích của hai phép vị tự $V(O_1 ; k_1)$, $V(O_1 ; k_2)$ là phép đồng nhất id.

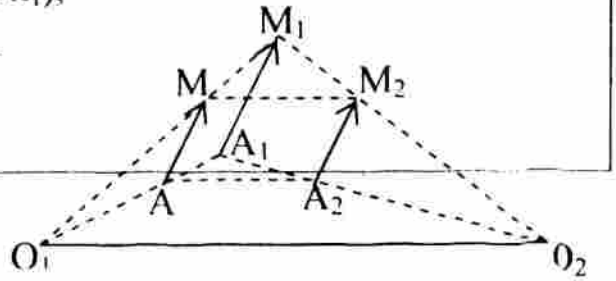
*** Nếu O_1 không trùng với O_2.**

Ta có $\overrightarrow{A_1M_1} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA_2} = \overrightarrow{MM_2}$

Suy ra: Tích của hai phép vị tự $V(O_1 ; k_1)$,

$V(O_1 ; k_2)$ là phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AA_2}$.

<u>Nhận xét</u>



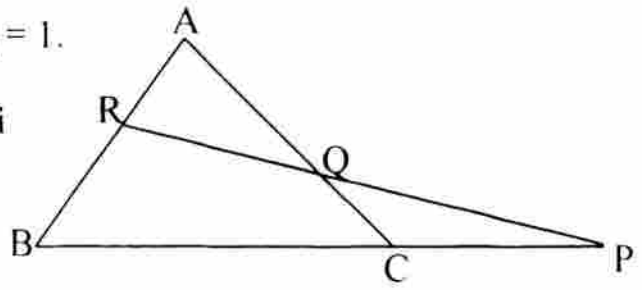
1. Tích của một phép vị tự và một phép tịnh tiến là một phép vị tự.

2. Tích của hai phép vị tự $V(O_1 ; k_1)$, $V(O_1 ; k_2)$:

* Nếu $k_1k_2 \neq 1$ thì tích là một phép vị tự tỉ số $k = k_1k_2$ và tâm O thẳng hàng với O_1, O_2 nếu O_1, O_2 phân biệt; trùng với O_1 và O_2 nếu $O_1 \equiv O_2$.

* Nếu $k_1k_2 = 1$ thì tích là một phép tịnh tiến nếu O_1 không trùng với O_2; một phép đồng nhất nếu $O_1 \equiv O_2$.

Bài 8. (Định lí Menelauyt) Gọi P, Q, R là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để P, Q, R thẳng hàng là $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$.



Giải

Xét các phép vị tự:

$V_1 = V\left(P; \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\right) : B \to C$

$V_2 = V\left(Q; \frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right) : C \to A$.

Suy ra: Tích của hai phép vị tự V_1 và V_2 biến $B \to A$

Nếu $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \Rightarrow PQ \,//\, AB$ (trái với giả thiết).

vậy $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \neq 1$ nên tích của hai phép vị tự V_1 và V_2 là một phép vị tự có tâm thuộc đường thẳng PQ.

* Điều kiện cần Nếu P, Q, R thẳng hàng

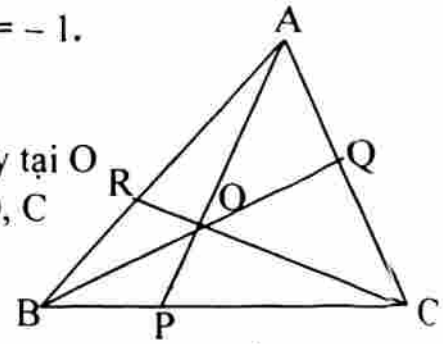
Xét phép vị tự $V\left(R; \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right) : B \to A$

$\Rightarrow \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}} \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}.\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1$

* Điều kiện đủ Giả sử $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}$

Khi đó: $V\left(R; \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right) : B \to A$ suy ra $V\left(R; \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\right)$ là tích của hai phép vị tự V_1 và V_2 nên $R \in PQ$.

Bài 9. (Định lí Ceva) Gọi P, Q, R là ba điểm lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng AP, BQ, CR đồng quy là $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$.



Giải

* Điều kiện cần: Giả sử AP, BQ, CR đồng quy tại O

Trong ΔABP, theo định lí Menelauyt khi R, O, C thẳng hàng thì $\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = 1$ (*)

Tương tự, trong ΔACP, theo định lí Menelauyt khi Q, O, B thẳng hàng thì $\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1$ (* *)

Nhân (*) và (**) với vế theo vế:

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}\frac{\overline{CB}}{\overline{CP}}\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}}\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$$

* Điều kiện đủ: Gọi O là giao điểm của AP và BQ.

Trong ΔACP, theo định lí Menelauyt khi Q, O, B thẳng hàng thì

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = 1 \quad (1)$$

Mặt khác: $\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1$ (2). Từ (1) và (2) chia vế theo vế ta có:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}}\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}}\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}}\frac{\overline{QA}}{\overline{QC}}\frac{\overline{RB}}{\overline{RA}} = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{RB}}{\overline{RA}}\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}\frac{\overline{CP}}{\overline{CB}} = 1.$$

Suy ra: R, O, C thẳng hàng. Vậy AP, BQ, CR đồng quy tại O.

Dạng 4. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép vị tự

Phương pháp: 1. Xác định phép vị tự biến điểm M thành điểm M'.

2. Tìm quỹ tích của điểm M.

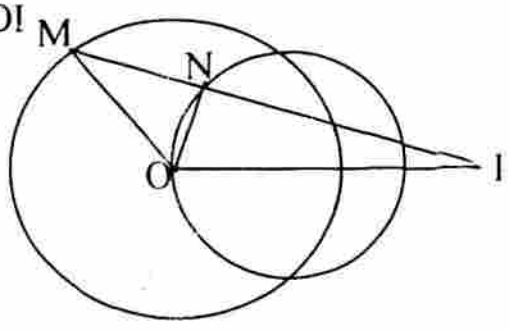
3. Dựa vào tính chất của phép vị tự để tìm quỹ tích của điểm M.

Bài 10. Cho đường tròn (O) và một điểm I cố định khác O. Một điểm M hay đổi trên đường tròn, tia phân giác của góc $\widehat{MOI}$ cắt tia IM tại N. Tìm quỹ tích điểm N

Giải

Gọi R là bán kính đường tròn (O) và d = OI

ON là phân giác góc $\widehat{MOI}$, ta có:



$$\frac{\overrightarrow{NI}}{\overrightarrow{NM}} = -\frac{OI}{\text{OM}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IN}}{\overrightarrow{NM}} = \frac{OI}{\text{OM}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overrightarrow{IN}}{\overrightarrow{IN}+\overrightarrow{NM}} = \frac{OI}{OI+\text{OM}} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IN}}{\overrightarrow{IM}} = \frac{d}{\text{d}+\text{R}}$$

Suy ra: $\overrightarrow{IN} = \frac{d}{d+R}\overrightarrow{IM}$ thì $V\left(I;\frac{d}{\text{d}+\text{R}}\right)$: M $\rightarrow$ N.

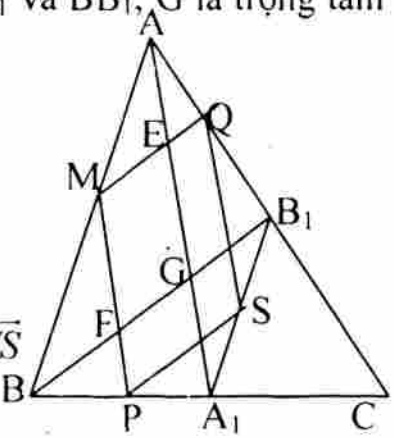
M thuộc đường tròn (O) suy ra N thuộc đường tròn (O'), ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự $V\left(I;\frac{d}{\text{d}+\text{R}}\right)$.

Tâm O' được xác định: $\overrightarrow{IO'} = \frac{d}{d+R}\overrightarrow{IO}$ và bán kính $R' = \frac{Rd}{d+R}$.

Bài 11. Cho tam giác ABC và điểm M thuộc cạnh AB. Qua M vẽ các đường thẳng song song với trung tuyến AA_1 và BB_1 cắt BC, CA tại P và Q. Tìm quỹ tích các điểm S sao cho tứ giác MPSQ là hình bình hành.

Giải

Gọi E, F lần lượt là giao điểm của MQ, MP với AA_1 và BB_1, G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó:



$$\frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{BG}} = \frac{\overrightarrow{MQ}}{\overrightarrow{BB_1}} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{MQ}} = \frac{\overrightarrow{BG}}{\overrightarrow{BB_1}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \overrightarrow{ME} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ}$$

Tương tự, $\overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$

$$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MQ} + \frac{2}{3}\overrightarrow{MP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MS}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GS} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM}$$

Suy ra S là ảnh của M qua phép vị tự tâm G, tỉ số $k = -\frac{1}{2}$.

Khi M thuộc cạnh AB thì S thuộc đoạn thẳng A_1B_1 là ảnh của AB qua $V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$

Vậy quỹ tích H là đoạn thẳng A_1B_1.

Bài 12. Gọi P, Q, R là các điểm đối xứng với điểm M qua trung điểm các cạnh của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng các đoạn thẳng AP, BQ, CR cắt nhau tại trung điểm I của chúng.

b) Khi M chạy trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tìm quỹ tích các điểm I.

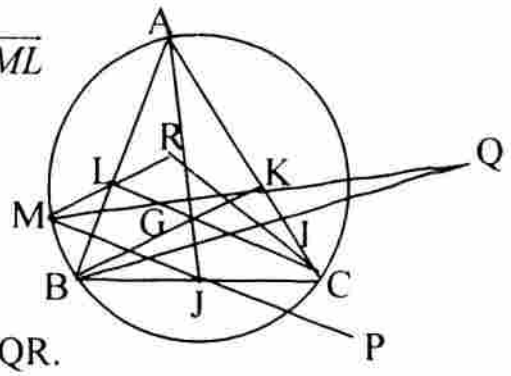
Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MP} = 2\overrightarrow{MJ}$, $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{MR} = 2\overrightarrow{ML}$

$\Rightarrow$ V(M ; 2): ΔJKL $\rightarrow$ ΔPQR.

Gọi G là trọng tâm ΔABC thì

$V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: ΔABC$\rightarrow$ ΔJKL



Suy ra: $V(M ; 2) \circ V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: ΔABC$\rightarrow\Delta$PQR.

Mà $V(M ; 2) \circ V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$ = V(I ; – 1) = D_I là phép đối xứng tâm I. Suy ra I là trung điểm các đoạn thẳng AP, BQ, CR.

b) Ta có G, M và I thẳng hàng $\Rightarrow$ MI cắt AJ tại G $\Rightarrow$ G là trọng tâm tam giác AMP $\Rightarrow \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GM} \Rightarrow V\left(G;-\frac{1}{2}\right)$: M $\rightarrow$ I.

M thuộc đường tròn (O), ngoại tiếp ΔABC nên quỹ tích các điểm I là đường tròn (O'), ngoại tiếp ΔJKL.

Dạng 5. Áp dụng phép vị tự vào dựng hình.

Phương pháp:

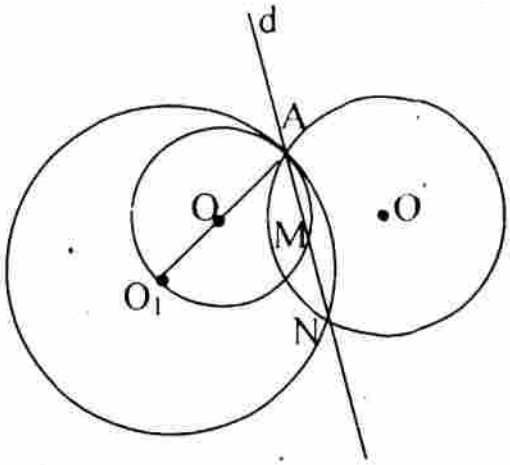
1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép quay để tìm điều kiện (α) gọi là H_α và điều kiện (β) gọi là H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 13. Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A và B. Hãy dựng qua A một đường thẳng d cắt đường tròn (O), (O') lần lượt tại M, N sao cho M là trung điểm của AN.

Giải

Phân tích: Giả sử dựng được đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại M và cắt đường tròn (O') tại N sao cho AM =MN

$\Rightarrow$ AN = 2AM $\Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow$ V (A ; 2): M $\rightarrow$ N $\Rightarrow$ V (A ; 2): (O) $\rightarrow$ (O_1). Suy ra N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O') và (O_1).



Cách dựng:

– Dựng đường tròn (O_1) là ảnh của đường tròn (O) qua phép vị tự V(A ; 2).

– Đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O) tại giao điểm thứ hai N.

- Dựng đường thẳng AN.

Chứng minh:

Gọi M là giao điểm thứ hai của đường thẳng AN với đường tròn (O). Theo cách dựng ta có: $V(A\ ;\ 2)$: $(O) \to (O_1) \Rightarrow V(A\ ;\ 2)$: $M \to N$

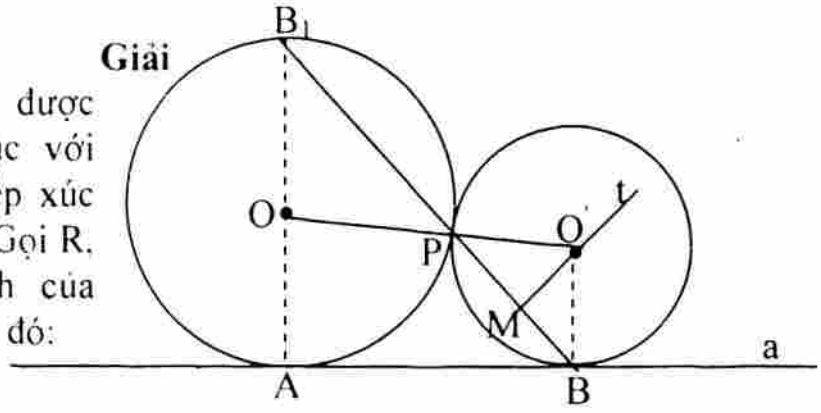
$$\Rightarrow \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow AM = MN.$$

Biện luận:

Ta có đường tròn (O) cắt đường tròn (O') tại hai điểm phân biệt A, B nên đường tròn (O_1) cắt đường tròn (O') tại hai điểm phân biệt A, N. Suy ra bài toán có một nghiệm hình.

Bài 14. Cho đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng a tại A và điểm P thuộc (O). Dựng một đường tròn tiếp xúc với đường tròn (O) tại P và tiếp xúc với đường thẳng a.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được đường tròn (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại P, tiếp xúc với đường thẳng a tại B. Gọi R, R' lần lượt là bán kính của đường tròn (O), (O') . Khi đó:

$$V\left(P; -\frac{R}{R'}\right): (O') \to (O)$$

Đường tròn (O') tiếp xúc với đường thẳng a tại B nên đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng a' tại B_1 là ảnh của a qua phép vị tự $V\left(P; -\frac{R}{R'}\right)$ và a' // a.

Ta có: Đường tròn (O) tiếp xúc với đường thẳng a tại A. Suy ra B_1 đối xứng với A qua tâm O.

Cách dựng:

- Dựng điểm B_1 đối xứng với A qua tâm O.
- Dựng đường thẳng B_1P cắt đường thẳng a tại B.
- Dựng trung trực Mt của đoạn thẳng PM cắt đường thẳng OP tại O'.
- Dựng đường tròn tâm O', bán kính R' = O'B.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có: O'P = O'B = R' và O'B ⊥ a nên (O') tiếp xúc với đường thẳng a.

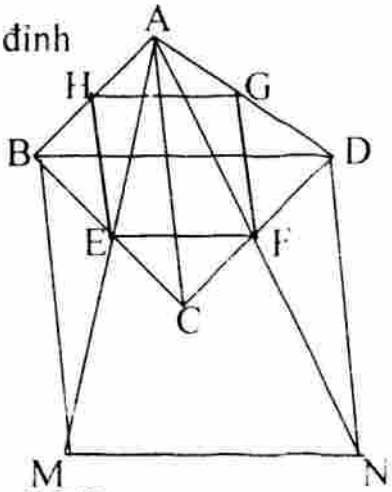
Mặt khác: OO' = OP + PO' = R + R' ⇒ (O') tiếp xúc với đường tròn (O) tại P.

Biện luận:

- Khi P ≡ A bài toán có vô số nghiệm hình: Những đường tròn có tâm O' thuộc đường thẳng AB_1 tiếp xúc với đường tròn (O) và đường thẳng tại P.
- Khi P không trùng với A, bài toán có một nghiệm hình.

Bài 15. Dựng hình thoi có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của một tứ giác lồi sao cho các cạnh của hình thoi song song với các đường chéo của tứ giác.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được hình thoi EFGH có bốn đỉnh nằm trên bốn cạnh của tứ giác ABCD sao cho FE // GH // BD và EH // FG //AC.

Xét hình thoi BDNM có BM // AC $\Rightarrow$ A, E, M thẳng hàng và A, F, N thẳng hàng.

$\Rightarrow V\left(A;\frac{\overline{AE}}{\overline{AM}}\right)$: BDNM $\rightarrow$ HGFE.

Cách dựng

– Dựng hình thoi BDNM có BM // AC.

– Dựng điểm E là giao điểm của hai đường thẳng AM và BC.

– Dựng điểm F là giao điểm của hai đường thẳng AN và DC.

– Dựng FG song song với AC, G $\in$ AD.

– Dựng EH song song với AC, H $\in$ AD.

– Hình thoi EFGH dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng ta có: BDNM là hình thoi có BM // AC.

Khi đó: $\frac{BE}{EC}=\frac{BM}{AC}$, $\frac{DF}{FC}=\frac{DN}{AC}$ và BM = DN $\Rightarrow \frac{BE}{EC}=\frac{DF}{FC}\Rightarrow$ EF // DB (1)

Mặt khác: $\frac{BE}{EC}=\frac{BH}{HA}$, $\frac{DF}{FC}=\frac{DG}{GA}\Rightarrow \frac{BH}{HA}=\frac{DG}{GA}\Rightarrow$ HG // BD (2)

Suy ra EFGH là hình bình hành $\Rightarrow$ HG = EF (3)

Từ (1), (2) và (3): $\frac{AE}{AM}=\frac{AF}{AN}=\frac{EF}{MN}=\frac{HG}{BD}=\frac{AG}{AD}=\frac{AH}{AB}$

Suy ra: $V\left(A;\frac{\overline{AE}}{\overline{AM}}\right)$: BDNM $\rightarrow$ HGFE mà BDNM là hình thoi nên HGFE cũng là hình thoi.

Biện luận: Bài toán có một nghiệm hình.

Dạng 6. Biểu thức giải tích của phép vị tự

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép vị tự V(I ; k) với I (x_0 ; y_0).

Ta có: V(I ; k): M (x ; y) $\rightarrow$ M' (x' ; y') $\Rightarrow \overrightarrow{IM'}=k\overrightarrow{IM}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx+(1-k)x_0 \\ y' = ky+(1-k)y_0 \end{cases}$ (I). Khi I $\equiv$ O thì $\Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Gọi (I) là biểu thức giải tích của phép vị tự V (I ; k).

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép **vị tự tâm I** (1;3), tỉ số k = – 2. Tìm hình biến của các đường sau qua V (I ; k)

a) Đường thẳng d: $2x + y - 1 = 0$

b) Đường tròn (C): $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3$

c) Parabol (P): $y = x^2 - 3x + 2$.

Giải

V (I ; k): M (x ; y) → M' (x' ; y') có biểu thức giải tích: $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 9 \end{cases}$

Suy ra: $x = \dfrac{-x' + 3}{2}$ và $y = \dfrac{-y' + 9}{2}$ (*)

a) V (I ; k): M (x ; y)∈ d → M' (x' ; y')∈ d'. Thay (*) vào phương **trình của d ta** có: $2x' + y' - 13 = 0$.

Vậy, phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua V(I ; k): $2x + y - 13 = 0$.

b) V(I ; k): M (x ; y)∈ (C) → M' (x' ; y')∈ (C'). Thay (*) vào **phương trình của** đường tròn (C) ta có: $(x' + 1)^2 + (y' - 11)^2 = 12$.

Phương trình của đường tròn (C') là: $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 12$.

Cách khác: Tâm và bán kính của (C) là J(2 ; – 1), $R = \sqrt{3}$.

V(I ; k): J → J' (x' ; y') ⇒ J' (– 1 ; 11) và V(I ; k): (C) → (C') **có bán kính** $R' = 2\sqrt{3}$. Phương trình của đường tròn (C') là: $(x + 1)^2 + (y - 11)^2 = 12$.

c) V(I ; k): M (x ; y)∈ (P) → M' (x' ; y')∈ (P'). Thay (*) vào **phương trình của** (P) ta có: $y' = -\dfrac{1}{2}(x')^2 + \dfrac{19}{2}$ nên phương trình của **parabol (P)** $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{19}{2}$.

Bài 17. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai **đường tròn** (C): $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 14 = 0$ và (C'): $x^2 + y^2 + 2y - 11 = 0$. **Xác định phép** vị tự biến đường tròn (C) thành đường tròn (C').

Giải

Phương trình của đường tròn (C): $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 27$ có **tâm $I_1(5 ; 4)$,** bán kính $R_1 = 3\sqrt{3}$. Phương trình của đường tròn (C'): $x^2 + (y + 1)^2 = 12$, **có** tâm $I_2(0 ; - 1)$ và bán kính $R_2 = 2\sqrt{3}$.

Xét V(I ; k): M (x ; y)∈ (C) → M' (x' ; y')∈ (C') có biểu thức là:

$$\begin{cases} x' = kx + (1 - k)x_0 \\ y' = ky + (1 - k)y_0 \end{cases}$$

Ta có $R_2 = |k| R_1$ nên $2\sqrt{3} = |k| 3\sqrt{3} \Leftrightarrow |k| = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{2}{3}$

* Khi $k = \frac{2}{3}$ thì ta có: $\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x_0 \\ y' = \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}y_0 \end{cases}$ (1) V (I ; k): I_1 (5 ; 4) $\rightarrow$ I_2 (0; – 1)

Thay vào (1), ta có: $x_0 = -10$, $y_0 = -11$.

Phép vị tự V (I ; k) có I (– 10 ; – 11), tỉ số $k = \frac{2}{3}$.

* Khi $k = -\frac{2}{3}$ thì ta có: $\begin{cases} x' = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}x_0 \\ y' = -\frac{2}{3}y + \frac{5}{3}y_0 \end{cases}$ (2) V (I ; k): I_1 (5 ; 4) $\rightarrow$ I_2 (0; –1)

Thay vào (2), ta có: $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Phép vị tự V (I ; k) có I (2 ; 1), tỉ số $k = -\frac{2}{3}$.

BÀI TẬP

Bài 1. (Định lí Gergonne). Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi P, Q, R lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh BC, AC và AB. Chứng minh rằng:

a) AP, BQ, CR đồng quy. b) $\frac{\overline{PI}}{\overline{PA}} + \frac{\overline{QI}}{\overline{QB}} + \frac{\overline{RI}}{\overline{RC}} = 1$.

Bài 2. (Định lí Pascal). Trên đường tròn (O) lấy các điểm A, B, C, D, E, F sao cho AB cắt CD tại R ; CD cắt EF tại P; EF cắt AB tại Q. Giả sử AF cắt CD tại I, AB cắt DE tại J và CB cắt EF tại H. Chứng minh I , J , H thẳng hàng.

Bài 3. (Bài toán Phecmar). Cho hình chữ nhật ABCD với AB = 2a, BC = $a\sqrt{2}$. Về phía ngoài hình chữ nhật dựng nửa đường tròn đường kính AB. Các đường thẳng MD và MC cắt cạnh AB tại N và L. Tính $AL^2 + BN^2$.

Bài 4. Cho đường tròn (O_1) tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại A. Tiếp tuyến bất kì của đường tròn (O_1) tại M cắt đường tròn (O) tại hai điểm C và D.

Chứng minh $\widehat{DAM} = \widehat{MAC}$

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là trung điểm cạnh BC. B và C di động trên đường tròn (O), A cố định.

a) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Phân giác góc $\widehat{BAC}$ cắt BC tại I và cắt đường tròn (O) tại D. Tìm quỹ tích điểm G khi I và D cố định.

Bài 6. Cho tam giác ABC có hai điểm cố định B và C. Các đường trung tuyến BN và CN vuông góc với nhau.

a) Tìm quỹ tích các điểm A. b) Chứng minh $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$.

Bài 7. Cho đoạn thẳng AB cố định và M là điểm di động trên đoạn thẳng. Vẽ cùng phía đối với đường thẳng AB các tam giác đều AMP, QMB. AP cắt BQ tại C.

a) Tìm quỹ tích trung điểm I của PQ.

b) Tìm quỹ tích tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CPQ.

Bài 8. Cho hai đường thẳng xOx, yOy và một điểm A không nằm trên hai đường thẳng đó. Dựng một đường thẳng đi qua A cắt xOx, yOy lần lượt tại B, C sao cho AB = 2AC.

Bài 9. Cho hai đường tròn đồng tâm (C_1), (C_2). Từ điểm A trên đường tròn lớn (C_1) dựng một dây cung ABCD cắt đường tròn (C_2) tại B và C; cắt đường tròn (C_1) tại P và Q sao cho AB = BC = CD.

Bài 10. Cho tam giác ABC với B là góc nhỏ nhất. Dựng hình thoi MNPQ sao cho $\widehat{NMQ} = 60^0$, cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P, Q theo thứ tự thuộc hai cạnh AC, AB.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Tìm trên cạnh AB điểm E, trên cạnh AC điểm F sao cho BE = EF = FC.

Bài 12. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép vị tự tâm O, tỉ số $k = \frac{1}{2}$. Tìm hình biến của các đường sau qua phép vị tự trên

a) Đường thẳng d: $3x - 2y + 1 = 0$

b) Đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

c) Đường cong (S): $y = \frac{2x+1}{1-x}$.

Bài 13. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai đường tròn (C_1): $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ và (C_2): $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$. Xác định phép vị tự biến đường tròn (C_1) thành đường tròn (C_2).

Bài 14. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho điểm A(- a ; 0), B(a ; 0) với a > 0. Gọi (C) là đường tròn đường kính AB và M là điểm di động trên (C). Gọi S đối xứng với A qua M.

a) Tìm quỹ tích các điểm S.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔASB. Tìm quỹ tích các điểm I.

§5. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Một phép biến hình f được gọi là phép đồng dạng với tỉ số k (k > 0) nếu với hai điểm bất kì M và N có ảnh M' và N' thì $M'N' = kMN$.

2. Tính chất:

1. Mọi phép đồng dạng f, tỉ số k (k > 0) là tích của một phép vị tự tỉ số k và một phép dời hình.

Đặc biệt: Phép đồng dạng có một điểm kép O duy nhất là tích giao hoán của một phép vị tự và một phép quay có cùng tâm O. Khi đó, kí hiệu

$$Z(O;k;\varphi) = Q(O;\varphi) \circ V(O;k) = V(O;k) \circ Q(O;\varphi)$$

O được gọi là tâm đồng dạng.

2. Phép đồng dạng, tỉ số k (k > 0):

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là k.
- Biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính kR.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

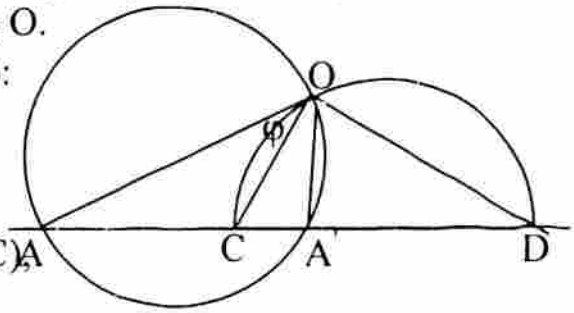
Dạng 1. Xác định phép đồng dạng

Phương pháp: 1. Xác định phép quay Q(O; φ) và phép vị tự V(O; k).

2. Xác định tâm đồng dạng O.

* Nếu biết một cặp điểm A→ A' thì ta có:

$$\begin{cases} OA = kOA' \\ (OA, OA') = \varphi \end{cases}$$

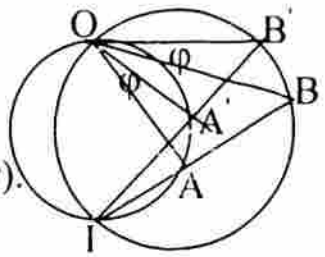


Từ OA = kOA' ⇒ O thuộc đường tròn (C) đường kính CD với $\frac{\overline{CA}}{\overline{CA'}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DA'}} = k$

Từ (OA, OA') = φ

⇒ O thuộc cung (γ) chứa góc φ, dây cung AA'

Suy ra: O là giao điểm của đường tròn (C) và cung (γ).



* Nếu biết hai cặp điểm A→ A', B→ B' thì ta có:

$$\begin{cases} A'B' = kAB \\ (AB; A'B') = \varphi \end{cases}$$

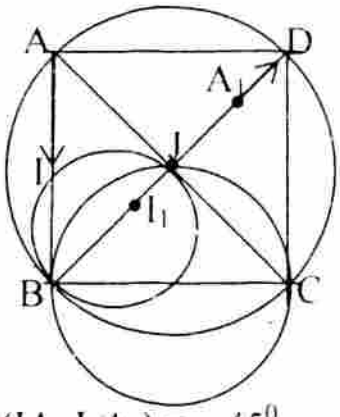
- Gọi I là giao điểm của AB và A'B' thì ta có $\begin{cases} (OA; OA') = (IA; IA') = \varphi \\ (OB; OB') = (IB; IB') = \varphi \end{cases}$

– Suy ra: O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAA' và IBB'.

Bài 1. Cho hình vuông ABCD có các đỉnh được xếp theo chiều dương. Gọi I là trung điểm của AB và J là giao của hai đường chéo AC và BD. Xác định phép đồng dạng

a) Biến $\overrightarrow{IA}$ thành $\overrightarrow{JD}$.

b) Biến $\overrightarrow{BA}$ thành $\overrightarrow{JD}$.



Giải

a) Ta có: JD = $\sqrt{2}$ IA và (IA, JD) = – 45°.

Suy ra: $\overrightarrow{JD}$ là ảnh của $\overrightarrow{IA}$ qua phép đồng dạng Z(O ; $\sqrt{2}$; -45°) với tâm đồng dạng O là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp ΔBIJ và ΔBAD ⇒ O ≡ B.

Ta có: Q(B ; –45°): I → I₁ và A → A₁ ⇒ I₁A₁ = IA và (IA, I₁A₁) = – 45°

V(B ; $\sqrt{2}$): I₁ → J và A₁ → D ⇒ $\overrightarrow{JD} = \sqrt{2}\ \overrightarrow{I_1A_1}$ ⇒ JD = $\sqrt{2}$ IA và

(IA, JD) = (IA, I₁A₁) = – 45° nên Z(O ; $\sqrt{2}$; – 45°) = V(B ; $\sqrt{2}$) ∘ Q(B ; –45°).

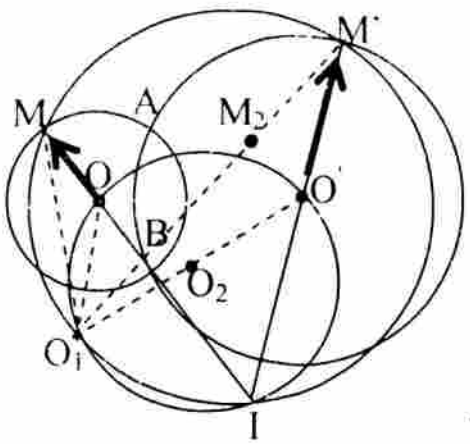
b) Ta có: JD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ BA và (BA, JD) = – 45°. Suy ra: $\overrightarrow{JD}$ là ảnh của $\overrightarrow{BA}$ qua phép đồng dạng Z(O ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; – 45°) với tâm đồng dạng O là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp ΔBAD và đường tròn đi qua J, tiếp xúc với AB tại B ⇒ O ≡ C.

Ta có: Q(C ; –45°): B → B₁ và A → A₁ ⇒ B₁A₁ = BA và (BA, B₁A₁) = – 45°

V(C ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$): B₁ → J và A₁ → D ⇒ $\overrightarrow{JD} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \overrightarrow{B_1A_1}$ ⇒ JD = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ IA và

(BA, JD) = (BA, B₁A₁) = – 45° nên Z(O ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; – 45°) = V(B; $\frac{\sqrt{2}}{2}$) ∘ Q(C; –45°)

Bài 2. Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; 2R) cắt nhau ở A và B. Gọi M, M' lần lượt trên đường tròn (O; R) và (O'; R') sao cho $\left(OM;O'M'\right) = -\frac{\pi}{3}$. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{OM}$ thành $\overrightarrow{O'M'}$.



Giải

Ta có: O'M' = 2OM và $\left(OM;O'M'\right) = -\frac{\pi}{3}$

Suy ra: $\overrightarrow{O'M'}$ là ảnh của $\overrightarrow{OM}$ qua phép đồng dạng $Z(O_1; 2; -\frac{\pi}{3})$ với tâm đồng dạng O_1

là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp $\Delta OO'I$ và $\Delta MM'I$.

Ta có: $Q(O_1; -\frac{\pi}{3})$: $O \to O_2$ và $M \to M_2 \Rightarrow O_2M_2 = OM$ và $(OM; O_2M_2) = -\frac{\pi}{3}$.

$V(O_1; 2)$: $O_2 \to O'$ và $M_2 \to M' \Rightarrow \overrightarrow{O'M'} = 2\overrightarrow{O_2M_2} \Rightarrow O'M' = 2OM$ và

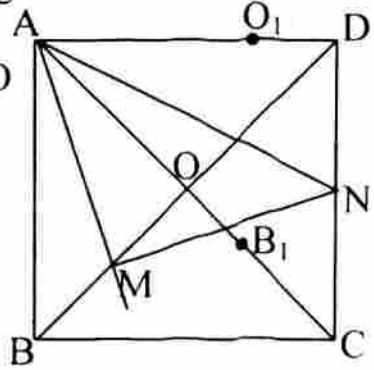
$(OM; O'M') = (OM; O_2M_2) = -\frac{\pi}{3}$ nên $Z(O_1; 2; -\frac{\pi}{3}) = V(O_1; 2) \circ Q(O_1; -\frac{\pi}{3})$.

Dạng 2. Ứng dụng phép đồng dạng vào chứng minh

Phương pháp: 1. Xác định phép đồng dạng

2. Áp dụng tính chất của phép đồng dạng

Bài 3. Cho hình vuông ABCD có tâm O. Gọi M là trung điểm của BO, N là trung điểm của CD. Chứng minh tam giác AMN vuông cân.



Giải

Phép quay $Q(A; 45^0)$: $B \to B_1$, $O \to O_1 \Rightarrow B_1O_1 = BO$

Phép vị tự $V(A; \sqrt{2})$: $B_1 \to C$, $O_1 \to D$

$\Rightarrow \overrightarrow{CD} = \sqrt{2}\overrightarrow{B_1O_1} \Rightarrow CD = \sqrt{2}\ B_1O_1 = \sqrt{2}\ BO$

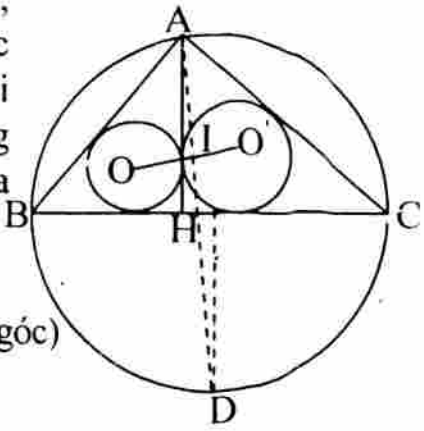
$\Rightarrow Z(A; \sqrt{2}; 45^0) = V(A; \sqrt{2}) \circ Q(A; 45^0)$:

$\Delta ABO \to \Delta ACD$

M là trung điểm BO có ảnh N là trung điểm CD

$\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ADC$, mà ΔADC vuông cân tại D nên ΔAMN vuông cân tại M.

Bài 4. Một điểm A thay đổi trên nửa đường tròn, đường kính BC, AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi O, O' lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp tam giác AHB, AHC. Chứng minh đường vuông góc hạ từ A xuống đường thẳng OO' đi qua một điểm cố định.



Giải

Ta có: $\widehat{BAH} = \widehat{HAC}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta CHA \Rightarrow \frac{CH}{AH} = \frac{HA}{HB} = \frac{CA}{AB}$

Phép quay $Q(H; -90^0)$: $A \to A_1$, $B \to B_1$

Phép vị tự $V\left(H; \frac{HC}{HA}\right)$: $A_1 \to C$, $B_1 \to A$

$\Rightarrow Z\left(H; \frac{HC}{HA}; -90^0\right) = V\left(H; \frac{HC}{HA}\right) \circ Q\left(H; -90^0\right)$: $\Delta AHB \to \Delta CHA$

$\Rightarrow Z\left(H;\frac{HC}{HA};-90^0\right):(O)\to(O')\Rightarrow \Delta HOO'\sim\Delta HBA$

$\Rightarrow \frac{HO}{HB}=\frac{OO'}{BA}=\frac{HO'}{HA}$ và $(HB\,;HO)=-45^0$.

Phép quay Q (H ; -45^0): $B\to B_2$, $A\to A_2$

Phép vị tự $V\left(H;\frac{HC}{HA}\right)$: $B_2\to O$, $A_2\to O'$

$\Rightarrow Z\left(H;\frac{HC}{HA};-45^0\right):BA\to OO'$ và $(BA, OO')=-45^0$.

Suy ra: Đường thẳng AI vuông góc với OO' thì tạo với AB một góc 45^0 nên AI đi qua trung điểm D của nửa đường tròn phía dưới tam giác ABC.

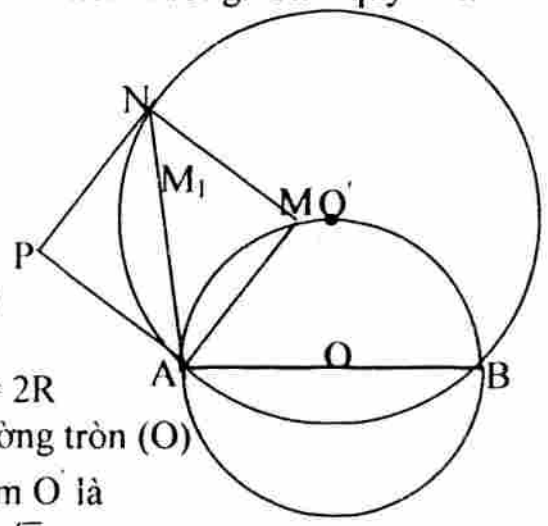
Dạng 3. Tìm quỹ tích (Tập hợp điểm) bằng phép đồng dạng

Phương pháp: 1. Xác định phép đồng dạng biến điểm M thành điểm M'.

2. Tìm quỹ tích của điểm M.

3. Dựa vào tính chất phép đồng dạng để tìm quỹ tích của điểm M'

Bài 5. Cho đường tròn (O), đường kính AB = 2R. M là một điểm bất kì trên(O). Dựng hình vuông AMNP có các đỉnh theo chiều dương. Tìm quỹ tích các điểm N.



Giải

Ta có: $AN=\sqrt{2}\,AM$ và $(AM, AN)=45^0$.

Phép quay Q(A ; 45^0): $M\to M_1$

Phép vị tự V(A, $\sqrt{2}$): $M_1\to N$

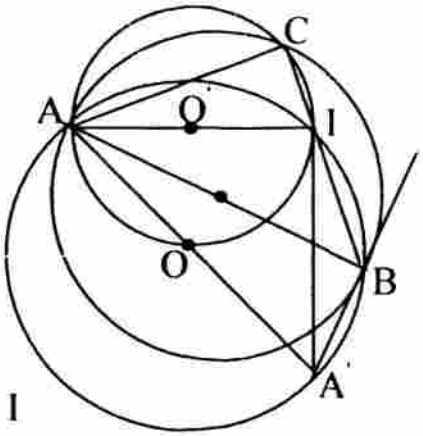
$\Rightarrow Z(A\,;\sqrt{2}\,;45^0)=V(A\,;\sqrt{2})\circ Q(A\,;45^0)$: $M\to N$

M thuộc đường tròn (O), đường kính AB = 2R nên N thuộc đường tròn (O'), là ảnh của đường tròn (O) qua phép đồng dạng Z (A ; $\sqrt{2}$; 45^0) có tâm O' là trung điểm của cung AB và bán kính $R'=\sqrt{2}\,R$.

Bài 6. Cho điểm A cố định chạy trên đường tròn (O) và tam giác ABC vuông cân tại C, B di động trên đường tròn (O).

a) Chứng minh đường thẳng BC luôn đi qua một điểm cố định.

b) Tìm quỹ tích các điểm C.



Giải

a) Gọi A' đối xứng với A qua tâm O và BC cắt (O) tại I

Phép quay $Q(A ; 45^0)$: $B \to B_1$, $A \to I_1$

Thì $BA = B_1I_1$ và $(BA, B_1I_1) = 45^0$

Phép vị tự $V\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $B_1 \to C$; $I_1 \to I_2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB_1} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$$

$$\Rightarrow Z\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2};45^0\right) = V\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \circ Q(A ; 45^0): B \to C,\ A \to I_2.$$

Ta có ΔABC vuông cân tại C nên ΔAAI_2 vuông cân tại $I_2 \Rightarrow I_2$ là trung điểm của cung $\overset{\frown}{AA}$ thì I_2 cố định.

Mặt khác: $(BA, CI_2) = 45^0$ và $(BA, CB) = 45^0 \Rightarrow I_2 \in BC \Rightarrow I_2 \equiv I$.

Vậy đường thẳng BC luôn đi qua điểm cố định I.

b) Ta có: $Z\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2};45^0\right)$: $B \to C$. Điểm B thuộc đường tròn (O) nên điểm C thuộc đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép đồng dạng trên. Vậy quỹ tích của điểm C là đường tròn (O'), đường kính AI.

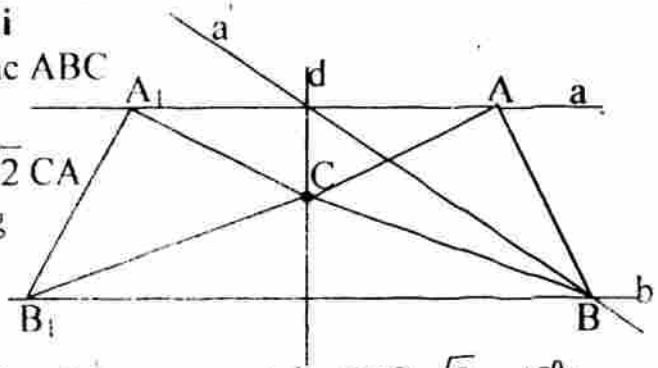
Dạng 4. Áp dụng phép đồng dạng vào dựng hình.

Phương pháp:

1. Quy bài toán dựng hình về bài toán dựng điểm M nào đó phụ thuộc vào hai điều kiện độc lập (α) và (β).
2. Xác định phép đồng dạng để tìm điều kiện (α) là H_α và điều kiện (β) là H_β.
3. Điểm M là giao của H_α và H_β.

Bài 7. Dựng tam giác ABC vuông cân tại A có đỉnh C cho trước và hai đỉnh A, B lần lượt thuộc hai đường thẳng song song a và b cho trước.

Giải



Phân tích: Giả sử dựng được tam giác ABC vuông cân tại A, $A \in a$, $B \in b$.

Khi đó: $(CA, CB) = -45^0$ và $CB = \sqrt{2}\,CA$

Suy ra, B là ảnh của A qua phép đồng dạng $Z(C;\sqrt{2};-45^0)$.

Cách dựng:

- Dựng đường thẳng a' là ảnh của đường thẳng a qua phép $Z(C;\sqrt{2};-45^0)$.
- Dựng điểm B là giao của hai đường thẳng a' và b.

– Dựng điểm A là ảnh của B qua phép đồng dạng $Z\left(C;\frac{\sqrt{2}}{2};45^0\right)$

– Tam giác ABC dựng được.

Chứng minh: Theo cách dựng, ta có A ∈ a và $CA = \frac{\sqrt{2}}{2}CB \Rightarrow CB = \sqrt{2}CA$

(CA, CB) = 45^0. Trong tam giác CAB, theo định lí cosin:
$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB\cos(CA, CB) = CA^2 + 2CA^2 - 2CA^2 = CA^2$

$\Leftrightarrow AB = CA \Rightarrow \Delta ABC$ cân tại A. Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^0$ **nên ΔABC vuông cân** tại A.

Biện luận: Ta dựng được hai đường thẳng a', a'' **đối xứng nhau qua đường** thẳng d, đi quaC và vuông góc với một trong hai **đường thẳng a, b.** Suy ra, bài toán có hai nghiệm hình.

Dạng 5. Biểu thức giải tích của phép đồng dạng

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho **phép đồng dạng Z** (I ; k ; φ)

Z (I ; k ; φ): M (x ; y) → M' (x' ; y').

a) Khi tâm I trùng với gốc tọa độ O.

Đặt OM = r và $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) = \alpha$ thì $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}$ **và OM' = kOM**

Tọa độ của M' là $\begin{cases} x' = k\left(x\cos\varphi - y\sin\varphi\right) \\ y' = k\left(x\sin\varphi + y\cos\varphi\right) \end{cases}$ (1)

Để tính x, y theo x', y' ta dùng phép đồng dạng $Z\left(O;\frac{1}{k};-\varphi\right)$:

M' (x' ; y') → M (x ; y)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{k}\left(x'\cos\varphi + y'\sin\varphi\right) \\ y = \frac{1}{k}\left(-x'\sin\varphi + y'\cos\varphi\right) \end{cases} \quad (2)$$

a) Khi tâm I(x_0 ; y_0)

Ta có: $\begin{cases} x' - x_0 = k[(x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi] \\ y' - y_0 = k[(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi] \end{cases}$ (3)

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{k}\left[\left(x' - x_0\right)\cos\varphi + \left(y' - y_0\right)\sin\varphi\right] \\ y - y_0 = \frac{1}{k}\left[-\left(x' - x_0\right)\sin\varphi + \left(y' - y_0\right)\cos\varphi\right] \end{cases} \quad (4)$$

Gọi (1), (2), (3), (4) là biểu thức giải tích của **phép đồng dạng.**

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho góc $\varphi = 45^0$ và $k = 2$.

a) Viết biểu thức giải tích của phép đồng dạng $Z(O ; k ; \varphi)$.

b) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ qua phép đồng dạng $Z(O ; k ; \varphi)$.

Giải

a) Phép đồng dạng $Z(O ; k ; \varphi) = Z(O ; 2 ; 45^0)$: $M(x : y) \to M'(x' ; y')$

$$\begin{cases} x' = 2\left(x\cos 45^0 - y\sin 45^0\right) \\ y' = 2\left(x\sin 45^0 + y\cos 45^0\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x\sqrt{2} - y\sqrt{2} \\ y' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \end{cases} \quad (*)$$

b) $Z(O ; 2 ; 45^0)$: $M(x ; y) \in (C) \to M'(x' ; y') \in (C')$

Từ (*) ta có: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x' + y'\right) \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(x' - y'\right) \end{cases}$ thay vào phương trình của đường tròn (C)

ta có: $(x')^2 + (y')^2 - 2\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' - 12 = 0$.

Phương trình đường tròn (C'): $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 12 = 0$.

Cách khác: Tâm và bán kính của đường tròn (C) là $I(1 ; 0)$, $R = 2$.

$Z(O ; 2 ; 45^0)$: $I(1 ; 0) \in (C) \to I'(x' ; y')$

Thay vào (*) ta có: $\begin{cases} x' = \sqrt{2} \\ y' = \sqrt{2} \end{cases}$ nên $I'(\sqrt{2} ; \sqrt{2})$, Bán kính $R' = 2R = 4$.

Phương trình đường tròn (C'): $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 16$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 12 = 0$.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD có các đỉnh vẽ theo chiều dương, $AD = 2AB$. M là giao điểm của hai đường chéo. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{AB}$ thành $\overrightarrow{DM}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A, có góc B bằng 30^0. Xác định phép đồng dạng biến $\overrightarrow{CA}$ thành $\overrightarrow{AB}$.

Bài 3. Cho hai tia Ox, Oy sao cho $(Ox, Oy) = 45^0$. Trên tia Ox lấy một đoạn thẳng MN nhận điểm cố định A làm trung điểm. Trên tia Oy lấy một đoạn thẳng PQ nhận điểm cố định B làm trung điểm, B khác O.

1) Xác định phép đồng dạng.

a) Biến $\overrightarrow{MN}$ thành $\overrightarrow{PQ}$. Gọi I_1 là tâm của phép đồng dạng đó.

b) Biến $\overrightarrow{MN}$ thành $\overrightarrow{QP}$. Gọi I_2 là tâm của phép đồng dạng đó.

2) Chứng minh rằng I_1, I_2 cùng nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại B, đường cao BE. Xác định phép đồng dạng biến tam giác AEB thành tam giác BEC.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác BPC, CQA, ARB sao cho $\widehat{CBP} = \widehat{CAQ} = 45^0$, $\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^0$, $\widehat{ABR} = \widehat{BAR} = 15^0$

Chứng minh $\widehat{QRP} = 90^0$ và QR = RP.

Bài 6. Cho tam giác ABC và điểm M di động trên đường thẳng chứa cạnh BC. Gọi O, O' lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác MAB, MAC.

a) Chứng minh tam giác AOO' đồng dạng với tam giác ABC.

b) Gọi I là điểm thuộc đường thẳng OO' sao cho $\frac{\overline{IO}}{\overline{IO'}} = k$ (k cho trước).

Tìm quỹ tích các điểm I.

Bài 7. Cho đường thẳng d cố định và một điểm A cố định không nằm trên d. Tam giác ABC vuông cân tại B, có đỉnh B di động trên d.

a) Tìm quỹ tích đỉnh C.

b) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Bài 8. Cho đường thẳng d, đường tròn (C) và một điểm O không thuộc hai đường đó. Trên đường thẳng d lấy một điểm A, trên đường tròn (C) lấy điểm B. Dựng tam giác OAB biết tam giác vuông cân tại A.

Bài 9. Cho tam giác OAA' vuông cân tại A sao cho $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{\pi}{4}$, điểm O cố định, điểm A thuộc đường thẳng cố định d không đi qua O.

a) Tìm quỹ tích điểm A'.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác OAA'. Tìm quỹ tích điểm G.

Bài 10. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho phép biến hình

f: M (x ; y) → M' (x' ; y')

$$\begin{cases} x' = 2x - 2\sqrt{3}y \\ y' = 2\sqrt{3}x + 2y \end{cases}$$

a) Chứng minh f là một phép đồng dạng.

b) Tìm ảnh của đường thẳng d: 2x + y − 1 = 0 qua phép đồng dạng f.

§ 6. HÌNH BẰNG NHAU – HÌNH ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hai hình gọi là **bằng nhau** nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

2. Hai hình gọi là **đồng dạng với nhau** nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

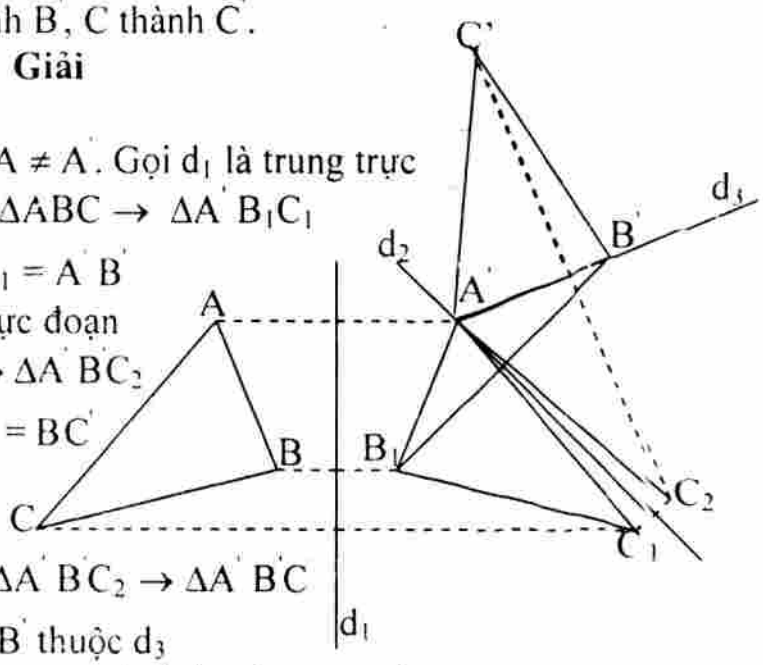
B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1. Chứng minh hai hình H và H_1 bằng nhau

Phương pháp: Xác định một phép dời hình biến hình H thành H_1 hoặc ngược lại.

Bài 1. Cho hai tam giác ABC, A'B'C' có các cạnh tương ứng bằng nhau: AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A'. Chứng minh rằng có duy nhất một phép dời hình f biến A thành A', B thành B', C thành C'.

Giải



* Xây dựng phép dời hình f:

Giả sử ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có $A \neq A'$. Gọi d_1 là trung trực đoạn thẳng AA'. Khi đó $D_{d_1} : \Delta ABC \to \Delta A'B_1C_1$

$\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B_1C_1 \Rightarrow AB_1 = A'B'$

Nếu $B_1 \neq B'$, gọi d_2 là trung trực đoạn thẳng $B_1B' \Rightarrow D_{d_2} : \Delta A'B_1C_1 \to \Delta A'B'C_2$

$\Rightarrow \Delta A'B'C_2 = \Delta A'B_1C_1 \Rightarrow B'C_2 = B'C'$

$A'C_2 = A'C'$ và $A' \in d_2$.

Nếu $C_2 \neq C'$, gọi d_3 là trung trực đoạn thẳng $C_2C' \Rightarrow D_{d_3} : \Delta A'B'C_2 \to \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow \Delta A'B'C_2 = \Delta A'B'C'$ và A', B' thuộc d_3

Suy ra: $D_{d_3} \circ D_{d_2} \circ D_{d_1} : \Delta ABC \to \Delta A'B'C'$. Nếu $B_1 \equiv B'$ thì bỏ qua phép D_{d_2}; nếu $C_2 \equiv C'$ thì bỏ qua phép D_{d_3}. Vậy, $f = D_{d_3} \circ D_{d_2} \circ D_{d_1}$ là một phép dời hình.

* Chứng minh tính duy nhất:

Giả sử có hai phép dời hình f và g biến $A \to A', B \to B', C \to C'$

Với bất kì điểm M và gọi $M' = f(M)$, $M_1 = g(M)$ và $M' \neq M_1$.

Khi đó: $A'M' = AM$ và $A'M_1 = AM \Rightarrow A'M' = A'M_1 \Rightarrow A'$ thuộc đường trung trực đoạn thẳng M_1M'.

Tương tự: $B'M' = B'M_1 \Rightarrow B'$ thuộc đường trung trực đoạn thẳng M_1M'.

$C'M' = C'M_1 \Rightarrow C'$ thuộc đường trung trực đoạn thẳng M_1M'.

Suy ra: A', B', C' thẳng hàng. Trái với giả thiết $\Rightarrow M' \equiv M_1 \Rightarrow f(M) = g(M)$ $\Rightarrow f \equiv g$.

Bài 2. Chứng minh rằng hai hình chữ nhật có cùng kích thước (cùng chiều dài và chiều rộng) thì bằng nhau.

Giải

Xét hai hình chữ nhật ABCD và A' B' C' D' có AB = CD = A'B' = C'D' và AD = BC = A'D' = B'C' $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$. Suy ra, có một phép dời hình f: $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$. Gọi O là trung điểm của AC thì f: O → O' và O' là trung điểm của A'C'. Mặt khác O, O là trung điểm của BD, B'D' nên f: D → D'.

Suy ra: f: ABCD → A'B'C'D'. Vậy hai hình chữ nhật ABCD và A'B'C'D' bằng nhau.

Bài 3. Chứng minh rằng.

a) Hai đoạn thẳng có độ dài bằng nhau thì bằng nhau.

b) Hai góc có cùng số đo thì bằng nhau.

c) Hai đường tròn có bán kính bằng nhau thì bằng nhau.

Giải

a) Xét hai đoạn thẳng AB và A'B' có độ dài bằng nhau, khi đó lấy điểm C không thẳng hàng với AB và điểm C' sao cho $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.

Suy ra, có một phép dời hình f: $\Delta ABC \to \Delta A'B'C' \Rightarrow$ f: AB → A'B' ⇒ AB = A'B'.

b) Xét hai góc $\widehat{xOy}$ và góc $\widehat{x'O'y'}$ có cùng số đo φ. Khi đó trên tia Ox lấy điểm A, trên tia Oy lấy điểm B và trên tia O'x', O'y' lấy hai điểm A', B' sao cho OA = O'A' và OB = O'B', suy ra: $\Delta OAB = \Delta O'A'B'$. Suy ra có một phép dời hình f: $\Delta OAB \to \Delta O'A'B' \Rightarrow$ f: $\widehat{AOB} \to \widehat{A'O'B'} \Rightarrow$ f: $\widehat{xOy} \to \widehat{x'O'y'} \Rightarrow \widehat{xOy} = \widehat{x'O'y'}$.

c) Xét hai đường tròn (O, R) và (O', R). Khi đó, xét phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{OO'}$.

Ta có: $T_{\overrightarrow{OO'}}$: (O, R) → (O', R). Suy ra, hai đường tròn (O, R) và (O', R) bằng nhau.

Bài 4. a) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp đường chéo tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

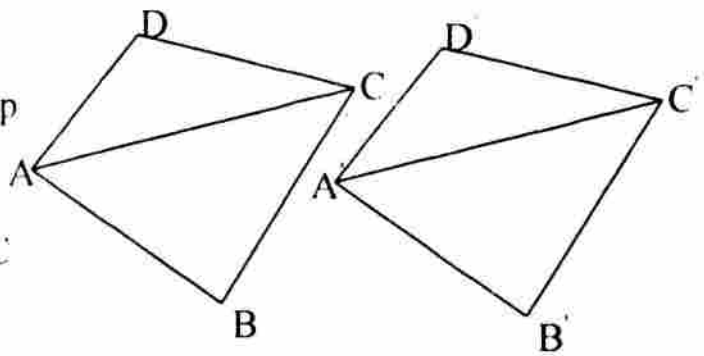
b) Chứng minh rằng hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau và một cặp góc tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

c) Hai tứ giác lồi có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau thì có bằng nhau không?

Giải

Xét hai tứ giác lồi ABCD và A'B'C'D' có AB = A'B', BC = B'C', CD = C'D', DA = D'A'

a) Khi AC = A'C', ta có $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ nên có một phép dời hình f: A → A', B → B', C → C'. Gọi D_1 đối xứng với D qua A'C' Khi đó $\Delta ADC = \Delta A'D'C'$ ⇒ $\Delta ADC = \Delta A'D_1C'$ ⇒ f: D → D' hoặc D → D_1.



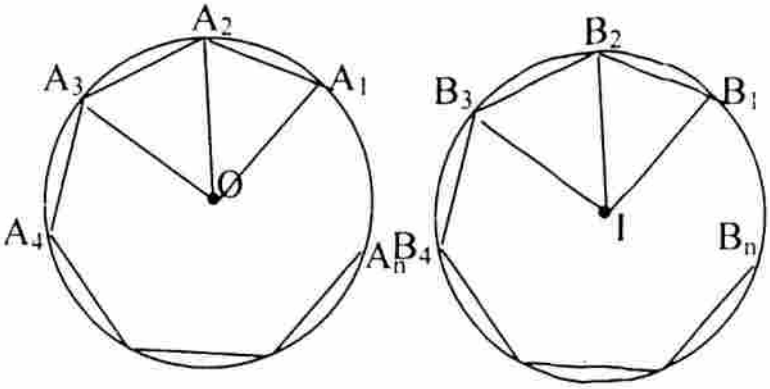
Ta có: AC và DB cắt nhau và A'C' và D'B' cắt nhau $\Rightarrow$ A'C' và D_1B' không cắt nhau nên f: D $\rightarrow$ D' $\Rightarrow$ f: ABCD $\rightarrow$ A'B'C'D'. Vậy, hai tứ giác bằng nhau.

b) Khi $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$ (cạnh - góc - cạnh) $\Rightarrow$ AC = A'C' $\Rightarrow$ f: ABCD $\rightarrow$ A'B'C'D'. Vậy, hai tứ giác bằng nhau.

c) Lấy hình vuông, hình thoi có cạnh bằng a thì hai tứ giác đó có các cạnh tương ứng bằng nhau nhưng hai tứ giác đó không bằng nhau.

Bài 5. Đa giác lồi n cạnh gọi là n - giác đều nếu tất cả các cạnh của nó bằng nhau và tất cả các góc của nó bằng nhau. Chứng minh rằng hai n - giác đều bằng nhau khi và chỉ khi chúng có các cạnh bằng nhau.

Giải



* Khi hai n - giác đều bằng nhau, theo định nghĩa ta có: các cạnh tương ứng bằng nhau.

* Khi hai n - giác đều có các cạnh tương ứng bằng nhau Xét hai n - giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ nội tiếp đường tròn tâm O, tâm I và cùng bán kính R. Khi đó, ta có: $A_1A_2 = B_1B_2 \Rightarrow \Delta OA_1A_2 = \Delta OB_1B_2$

Suy ra, có một phép dời hình f: $\Delta OA_1A_2 \rightarrow \Delta OB_1B_2$.

Mặt khác: $\Delta OA_2A_3 = \Delta OB_2B_3 \Rightarrow$ f: $A_3 \rightarrow B_3$, ... tương tự, ta có: f: $A_n \rightarrow B_n$ $\Rightarrow$ f: $A_1A_2...A_n \rightarrow B_1B_2...B_n$. Vậy, hai là n - giác đều bằng nhau.

Bài 6. Hình H_1 gồm ba đường tròn $(O_1;R_1)$, $(O_2;R_2)$, $(O_3;R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Hình H_2 gồm ba đường tròn $(I_1;R_1)$, $(I_2;R_2)$, $(I_3;R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng tỏ rằng hai hình H_1 và H_2 bằng nhau.

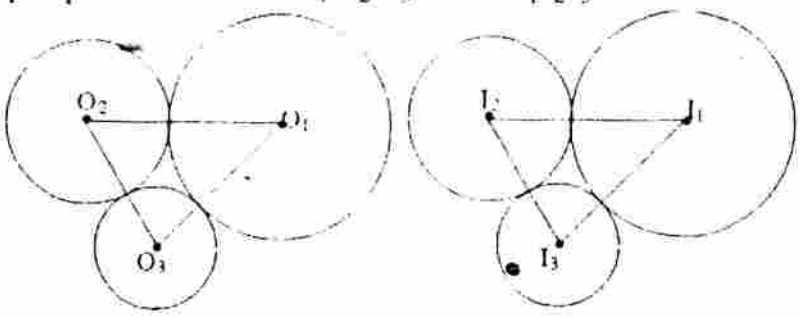
Giải

Ta có: $O_1O_2 = R_1 + R_2$, $O_2O_3 = R_2 + R_3$, $O_3O_1 = R_3 + R_1$

và $I_1I_2 = R_1 + R_2$, $I_2I_3 = R_2 + R_3$, $I_3I_1 = R_3 + R_1$.

Suy ra: $O_1O_2 = I_1I_2$, $O_2O_3 = I_2I_3$, $O_3O_1 = I_3I_1 \Rightarrow \Delta O_1O_2O_3 = \Delta I_1I_2I_3$.

Suy ra, có một phép dời hình f: $\Delta O_1O_2O_3 \rightarrow \Delta I_1I_2I_3$



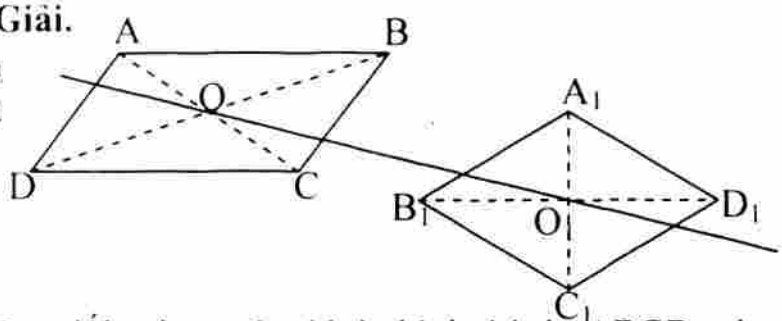
Suy ra: f: $O_1 \rightarrow I_1$, $O_2 \rightarrow I_2$, $O_3 \rightarrow I_3$ $\Rightarrow$ f: $(O_1;R_1) \rightarrow (I_1;R_1)$

f: $(O_2;R_2) \to (I_2;R_2)$ và f: $(O_3;R_3) \to (I_3;R_3) \Rightarrow$ f: $H_1 \to H_2$. Vậy hai hình H_1 và H_2 bằng nhau.

Bài 7. Cho hai hình bình hành. Hãy vẽ một đường thẳng chia mỗi hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Giải.

Ta xét hai hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ lần lượt có tâm O, O_1.



Ta có: O, O_1 lần lượt là tâm đối xứng của hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ nên một đường thẳng bất kì đi qua tâm thì chia hình bình hành đó thành hai hình bằng nhau.

Suy ra: Đường thẳng OO_1 chia mỗi hình bình hành ABCD và $A_1B_1C_1D_1$ thành hai hình bằng nhau.

Dạng 2. Chứng minh hai hình H và H_1 đồng dạng

Phương pháp: Xác định một phép đồng dạng biến hình H thành H_1.

Bài 8. Cho hai tam giác ABC và A'B'C' có các cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau. Chứng minh có duy nhất một phép đồng dạng biến A thành A', B thành B', C thành C'.

Giải

Đặt $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = k$. Xét phép vị tự V(A ; k): $\Delta ABC \to \Delta AB_1C_1$

$\Rightarrow AB_1 = k\,AB$, $B_1C_1 = k\,BC$ và $AC_1 = kAC \Rightarrow \Delta AB_1C_1 = \Delta A'B'C'$

Xét phép dời hình g: $\Delta AB_1C_1 \to \Delta A'B'C' \Rightarrow f = g \circ V(A ; k)$: $\Delta ABC \to \Delta A'B'C'$

Ta có: V(A ; k) và g là duy nhất nên f duy nhất.

Bài 9. Chứng minh rằng hai hình vuông bất kì đồng dạng với nhau.

Giải

Xét hai hình vuông ABCD và A'B'C'D' với AB = a và A'B' = b.

Phép vị tự $V\left(A; \frac{b}{a}\right)$: $ABCD \to AB_1C_1D_1 \Rightarrow AB_1 = \frac{b}{a}AB = b$,

$AD_1 = \frac{b}{a}AD = b$

Suy ra: hình vuông $AB_1C_1D_1$ bằng hình vuông A'B'C'D'. Gọi $\varphi = (AB, A'B')$.

Phép quay $Q(A, \varphi)$: $AB_1C_1D_1 \to AB_2C_2D_2$.

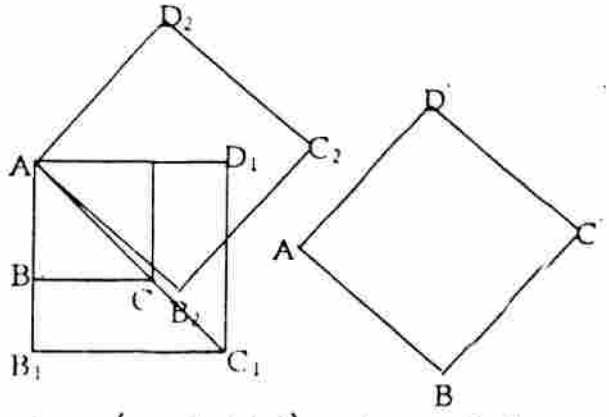
Suy ra: hình vuông $AB_1C_1D_1$ bằng hình vuông $AB_2C_2D_2$.

Phép tịnh tiến theo véc tơ $\overrightarrow{AA'}$

$T_{\overrightarrow{AA'}}: AB_2C_2D_2 \to A'B'C'D'$

$Z = T_{\overrightarrow{AA'}} \circ Q(A, \varphi) \circ V\left(A; \frac{b}{a}\right)$

là phép đồng dạng tâm A biến hình vuông ABCD thành hình vuông A'B'C'D' nên hình vuông ABCD và A'B'C'D' đồng dạng với nhau.



Bài 10. Chứng tỏ rằng các đa giác đều có có cùng số cạnh thì đồng dạng với nhau.

Giải

Xét hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ có tâm O, O'.

Đặt: $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{O'B_1}{OA_1}$. Khi đó, phép vị tự $V(O; k)$: $A_1A_2...A_n \to C_1C_2...C_n$

$\Rightarrow C_1C_2 = kA_1A_2 = B_1B_2$ $C_2C_3 = kA_2A_3 = B_2B_3$ ... $C_nC_1 = k A_nA_1 = B_nB_1$

Suy ra: n – giác đều $C_1C_2...C_n$ bằng n – giác đều $B_1B_2...B_n$.

Một phép dời hình Đ: $C_1C_2...C_n \to B_1B_2...B_n$.

Suy ra: Phép đồng dạng Z = Đ ∘ V (O ; k): $A_1A_2...A_n \to B_1B_2...B_n$

Vậy, hai n – giác đều $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ đồng dạng với nhau.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt P và Q, hai điểm A và B nằm về một phía của d. Hãy xác định trên d hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ và AM + BN nhỏ nhất.

Bài 2. Cho véc tơ $\vec{u}$ và một điểm O. Với điểm M bất kì, ta gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua O và M' là điểm sao cho $M_1M' = \vec{u}$. Gọi F là phép biến hình biến M thành M'.

a) F có phải là một phép dời hình không?

b) Chứng tỏ rằng F là một phép đối xứng tâm.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và một điểm M thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng với M qua A, M_2 là điểm đối xứng với M_1 qua B, M_3 là điểm đối xứng với M_2 qua C.

a) Chứng tỏ rằng phép biến hình F biến điểm M thành M_3 là một phép đối xứng tâm.

b) Tìm quỹ tích điểm M_3.

Bài 4. Gọi F là một phép biến hình có tính chất sau đây: Với mỗi cặp điểm M, N và ảnh M', N' của chúng, ta có: $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ ($k \neq 0$). F là phép biến hình gì?

Bài 5. Gọi F là một phép biến hình có tính chất sau đây:Với mỗi cặp điểm M, N và ảnh M' N' của chúng, ta có: $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$. Chứng minh rằng F là phép đối xứng tâm.

Bài 6. Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Gọi C là điểm đối xứng với A qua B và PQ là đường kính thay đổi không trùng với AB. Đường thẳng CQ cắt PA, PB lần lượt tại M, N.

a) Chứng minh rằng Q là trung điểm của CM, N là trung điểm của CQ.

b) Chứng minh rằng khi PQ thay đổi, các điểm M, N nằm trên những đường tròn cố định.

Bài 7. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cố định. Một đây cung BC thay đổi của (O;R) có độ dài không đổi. BC = m ($m < 2R$). Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC nằm trên một đường tròn cố định.

Bài 8. Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

a) Xét bốn tam giác APN, PBM, NCM, MNP. Tìm những phép dời hình biến tam giác APN thành một trong ba tam giác còn lại.

b) Phép vị tự nào biến tam giác ABC thành tam giác MNP?

c) Xét tam giác có các đỉnh là *trực tâm* của ba tam giác APN, PBM, NCM Chứng tỏ rằng tam giác đó bằng tam giác APN. Chứng tỏ rằng điều đó cũng đúng khi thay *trực tâm* bằng trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp hoặc tâm đường tròn nội tiếp.

d) Với điểm O nào đó, gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với O lần lượt qua các điểm M, N và P. Tìm phép vị tự biến tam giác MNP thành tam giác $A_1B_1C_1$.

e) Chứng tỏ có phép đối xứng tâm biến tam giác $A_1B_1C_1$ thành tam giác ABC.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC, M là điểm bất kì nằm trong tam giác.

a) Gọi C', M' theo thứ tự là ảnh của C, M qua phép quay tâm A, góc quay 60^0. Chứng minh MA + MB + MC = MM' + MB + M'C'

b) Tìm vị trí điểm M để MA + MB + MC nhỏ nhất.

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông ở A, H là chân đường cao đi qua đỉnh A.

a) Tìm một phép quay tâm H và một phép vị tự tâm H để tích của hai phép đó biến tam giác HCA thành tam giác HAB.

b) Gọi O, O_1 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác HCA và HAB. Chứng minh tam giác HOO_1 đồng dạng với tam giác ACB

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Một phép biến hình f: $\overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{A'M'}$, điểm A cố định, M lưu động. f là một phép dời hình khi và chỉ khi thoả mãn điều kiện nào sau đây?

A) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A'M'}$ B) $\overrightarrow{A'M'} = k\overrightarrow{AM}$

C) A'M' = AM và $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \varphi$ D) Một điều kiện khác.

(ở đây k và φ là những hằng số cho trước).

2. Một phép quay biến $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AB và A'B'. Tâm quay không ở trên đường nào sau đây?

A) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAA'.

B) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBB'.

C) Đường trung trực đoạn thẳng AA'.

D) Đường trung trực đoạn thẳng BB'

E) Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB'

3. Cho hình thang ABCD có các đỉnh vẽ theo chiều dương, đáy lớn AB = 8 cm, đáy nhỏ CD = 4 cm. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo và J là giao điểm của hai cạnh bên. Phép biến hình biến $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{CD}$ là phép vị tự:

A) $V\left(I;\frac{1}{2}\right)$ B) $V\left(J;\frac{1}{2}\right)$ C) $V\left(I;-\frac{1}{2}\right)$ D) $V\left(J;-\frac{1}{2}\right)$.

4. Cho điểm M di động trên nửa đường tròn, đường kính AB. Vẽ dây cung AM. Trên nửa đường thẳng BM lấy điểm M' sao cho AM = BM'. Tâm của phép biến hình f: $\overrightarrow{AM} \to \overrightarrow{BM'}$ là:

A) Trung trực đoạn thẳng AB. B) Trung điểm cung $\overset{\frown}{AB}$

C) Điểm A' đối xứng với A qua B. D) Một điểm khác.

5. Cho hai điểm cố định O và I. Với mỗi điểm M có ảnh là M' sao cho tam giác OMM' nhận I là trọng tâm. Phép biến hình f: M → M' là tích của hai phép vị tự:

A) $V\left(O;\frac{1}{2}\right) \circ V(I;-2)$ B) $V\left(O;-\frac{1}{2}\right) \circ V(I;2)$

C) $V(O;2) \circ V\left(O;-\frac{1}{2}\right)$ D) $V(I;-2) \circ V\left(O;\frac{1}{2}\right)$.

6. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Đường thẳng Euler của tam giác là:

A) Đường trung tuyến BM. B) Đường trung trực cạnh AB.

C) Đường phân giác trong góc C. D) Đường cao AH.

Bài toán 1 Cho phép biến hình f: $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{A'B'}$ sao cho AB = kA'B' và $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \varphi$. Trong đó k > 0, $0 \le \varphi \le \pi$ là các hằng số.

Dùng giả thiết này để giải các câu 7), 8), 9).

7. f là một phép tịnh tiến khi:

A) $k = 1$ và $\varphi = 0$ B) $k > 1$ và $\varphi \neq 0$ C) $k = 1$

D) $k \neq 1$ và $\varphi \neq 0$ E) $k = 1$ và $\varphi = \pi$.

8. f là một phép quay khi:

A) $k = 1$ và $\varphi = 0$ B) $k = 1$ và $\varphi \neq 0$ C) $k \neq 1$ và $\varphi = 0$

D) $k \neq 1$ và $\varphi \neq 0$ E) $k \neq 1$ và $\varphi = 0$.

9. f là một phép vị tự có tỉ số âm khi:

A) $k = 1$ và $\varphi = 0$ B) $k = 1$ và $\varphi > 0$ C) $k \neq 1$ $\varphi < 0$

D) $k \neq 1$ và $\varphi = \pi$ E) $k \neq 1$ và $\varphi \neq 0$.

10. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC. Phép đồng dạng biến tam giác ABC thành tam giác AMN là:

A) $Z\left(A; \frac{1}{2}; 0^0\right)$ B) $Z(A; 2; 0^0)$

C) $Z\left(A; \frac{1}{2}; 90^0\right)$ D) $Z(A; 2; 180^0)$.

11. Nếu đường thẳng Euler của tam giác ABC là đường trung tuyến AM thì tam giác ABC là:

A) Tam giác cân tại A B) Tam giác vuông tại A

C) Tam giác vuông và cân tại A D) Tam giác vuông hoặc cân tại A.

12. Cho tam giác đều ABC, trực tâm H, A' là trung điểm của BC. Phép đồng dạng biến tam giác A'HC thành tam giác A'AB là:

A) $Z\left(A'; \sqrt{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ B) $Z\left(A'; 3; \frac{\pi}{4}\right)$ C) $Z\left(H; \sqrt{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ D) $Z\left(H; \sqrt{3}; \frac{\pi}{4}\right)$

13. Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và các góc cho trước, B di động trên đường thẳng d. Quỹ tích của điểm C là:

A) Đường tròn B) Nửa đường thẳng C) Đường thẳng

D) Cung tròn E) Đoạn thẳng.

Bài toán 2 Cho tam giác đều ABC, có các đỉnh vẽ theo chiều dương. Trên đường thẳng BC lấy hai điểm E và F sao cho: $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -2$ và $\frac{\overline{FB}}{\overline{FC}} = 2$. Gọi M là điểm di động trên cạnh BC và M' trên cạnh CA sao cho: $BM = 2CM'$.

Dùng giả thiết này để giải các câu 14), 15), 16).

14. Phép biến hình nào biến điểm M thành điểm M':

A) Phép dời B) Phép đồng dạng

C) Phép vị tự D) Không phải ba phép trên

15. Gọi f là phép biến hình biến điểm M thành điểm M' Tâm của f nếu có là điểm nào?

A) Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

B) Giao điểm của cung lớn BAC và đường tròn, đường kính EF.

C) Giao điểm của cung nhỏ BC và đường tròn, đường kính EF.

D) Tâm là trung điểm của đoạn thẳng EF.

E) Tâm là một điểm khác.

16. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tam giác ABC bất biến trong phép quay nào?

A) $Q\left(O;\frac{\pi}{3}\right)$ B) $Q\left(O;\frac{2\pi}{3}\right)$ C) $Q(O;\pi)$ D) $Q\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$ E) $Q\left(A;\frac{3\pi}{2}\right)$.

17. Điểm kép của phép biến hình f:M(x ; y) → M'(x' ; y'): $\begin{cases} x' = \frac{1}{x} \\ y' = \frac{1}{y} \end{cases}$ có tọa độ là.

A) K (1 ; 2) B) K (– 1 ; - 2) C) K (–1 ; 2)

D) K (1 ; - 2) E) Cả bốn câu trên.

18. Một phép biến hình f: M(x ; y) → M'(x' ; y'): $\begin{cases} x' = x + 3 \\ y' = y - 5 \end{cases}$ là một phép tịnh tiến thì véc tơ của phép tịnh tiến có tọa độ là:

A) (–3 ; 5) B) (3 ; - 5) C) (3 ; 5) D) (- 3 ; - 5).

19. Trong mặt phăng với hệ tọa độ vuông góc Oxy. Hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 - 4x = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 8x = 0$ tương ứng nhau trong phép vị tụ nào?

A) Tâm O, tỉ số 2 B) Tâm O, tỉ số - 2

C) Tâm O, tỉ số $-\frac{1}{2}$ D) Tâm O, tỉ số $\frac{1}{2}$.

20. Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2 ; - 1)$ biến đường thẳng d: x – y + 1 = 0 thành đường thẳng d' có phương trình:

A) x – y – 2 = 0 B) x + y - 2 = 0 C) x – y + 2 = 0

D) x + y + 2 = 0 E) Một phương trình khác.

21. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng Δ: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Tích của hai phép đối xứng trục $D_\Delta \circ D_{Ox}$ là phép quay:

A) $Q\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ B) $Q\left(O;-\frac{\pi}{3}\right)$ C) $Q\left(O;\frac{\pi}{3}\right)$ D) $Q\left(O;\frac{\pi}{6}\right)$ E) $Q\left(O;-\frac{\pi}{6}\right)$.

22. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường thẳng Δ: y = 2x và đường thẳng d: $y = -\frac{1}{2}x$. Tích của hai phép đối xứng trục $D_\Delta \circ D_d$ là phép quay:

A) $Q\left(O;\frac{\pi}{2}\right)$ B) $Q\left(O;-\frac{\pi}{2}\right)$ C) $Q(O;\pi)$ D) $Q\left(O;\frac{3\pi}{4}\right)$ E) $Q\left(O;\frac{\pi}{4}\right)$.

23. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho đường tròn

(C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ và phép quay $Q\left(I;\frac{\pi}{4}\right)$: (C) →(C). Tâm quay I là:

A) I (0 ; 0) B) I (2 ; 1) C) I (1 ; 2) D) I (1 ; 1)

24. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, một phép vị tự V(I ;k) có biểu thức $\begin{cases} x' = 5x - 12 \\ y' = 5y \end{cases}$ có tâm I và tỉ số k là:

A) I (3 ; 0) và k = 5 B) I (3 ; 0) và k = $\frac{12}{5}$

C) I (0 ; 3) và k = 5 D) I (5 ; 0) và k = $\frac{1}{5}$.

25. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy, một phép vị tự tỉ số k = 2 biến A(1 ; 3) thuộc đường tròn (C) thành điểm A(– 4 ; 6) thuộc đường tròn (C').
Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại A là y = x + 2 thì phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C') tại A' là:

A) y = 2x + 4 B) y = x + 10 C) y = –x + 2

D) y = 2x + 14 E) y = x + 4.

Chương II:

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

Môn học nghiên cứu các tính chất của những hình có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng gọi là Hình học không gian.

1. Điểm và mặt phẳng: *Với một điểm A và một mặt phẳng (P) có hai khả năng*

** Hoặc điểm A thuộc mp(P). Kí hiệu: $A \in mp(P)$ hay $A \in (P)$.*

** Hoặc điểm A không thuộc mp(P). Kí hiệu: $A \notin mp(P)$ hay $A \notin (P)$.*

2. Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

Hình	***Hình biểu diễn trong không gian***
Đường thẳng	*Đường thẳng*
Đoạn thẳng	*Đoạn thẳng*
Hai đường thẳng song song	*Hai đường thẳng song song*
Hai đường thẳng cắt nhau	*Hai đường thẳng cắt nhau*
Điểm A thuộc đường thẳng a	*Điểm A' thuộc đường thẳng a' (a' là hình biểu diễn của a)*
Đường trông thấy	———————
Đường bị khuất	- -

3. Các tính chất thừa nhận của Hình học không gian.

Tính chất 1. *Có một và chỉ một đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt cho trước.*

Tính chất 2. *Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước.*

Tính chất 3. *Tồn tại 4 điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.*

Tính chất 4. *Nếu 2 mặt phẳng phân biệt có 1 điểm chung thì chúng có 1 đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của 2 mặt phẳng đó.*

Đường thẳng này được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.

Tính chất 5. *Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.*

Định lí: *Nếu một đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt của một mặt phẳng thì đường thẳng ấy nằm trên mặt phẳng đó.*

4. Điều kiện xác định mặt phẳng:

* *Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng.*

* *Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 1 đường thẳng và 1 điểm không thuộc đường thẳng đó.*

* *Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 2 đường thẳng cắt nhau.*

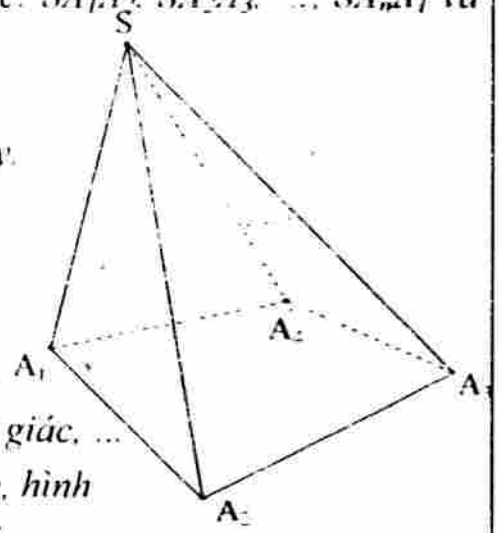
Ký hiệu: – Mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C: mp(ABC).

– Mặt phẳng đi qua đường thẳng a và điểm $A \notin a$: mp(a, A).

– Mặt phẳng đi qua đường thẳng cắt nhau a và b: mp(a, b).

5. Hình chóp và hình tứ diện:

* *Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và điểm S nằm ngoài mp(P) chứa đa giác. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$. Hình tạo bởi n tam giác: $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ và đa giác gọi là hình chóp. Ký hiệu: $S.A_1A_2...A_n$.*



– S: đỉnh của hình chóp.

– Đa giác $A_1A_2...A_n$ và các điểm trong nó: mặt đáy.

Các cạnh của đa giác: cạnh đáy.

– Các đoạn thẳng: $SA_1, SA_2, ..., SA_n$: cạnh bên.

Mỗi tam giác và các điểm trong nó:

$SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$: mặt bên.

– Nếu đáy của hình chóp là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...

* *Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng (tức là không cùng nằm trên một mặt phẳng). Hình gồm 4 tam giác: ABC, ACD, ADB và BCD gọi là hình tứ diện (tứ diện).*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh nhiều đường thẳng đồng qui.***

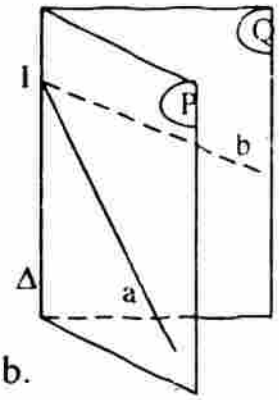
Phương pháp:

PP 1: Chứng minh các đường thẳng đó đôi một cắt nhau và **không đồng phẳng**.

PP 2: Chứng tỏ các đường thẳng đó cùng chia một đoạn thẳng trong các đường đó theo một tỉ số không đổi.

Thí dụ 1: **Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ. Trên (P) cho đường thẳng a và trên (Q) cho đường thẳng b. Chứng minh nếu a và b cắt nhau thì giao điểm phải nằm trên Δ.**

Giải



Gọi I là giao điểm của a và b Khi đó:

$I \in a$: $a \subset (P) \Rightarrow I \in (P)$:

$I \in b$: $b \subset (Q) \Rightarrow I \in (Q)$

$\Rightarrow I \in (P) \cap (Q) \Rightarrow I \in \Delta$.

Vậy giao điểm của a và b nằm trên Δ.

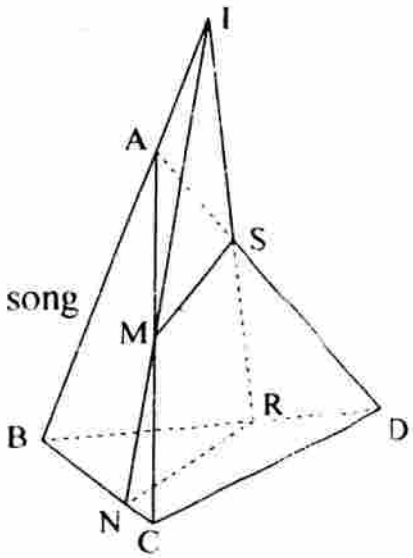
Chú ý: Ở đây ta sử dụng PP1 đối với 3 đường thẳng Δ, a và b.

Vì vậy để chứng minh 3 đường thẳng đồng qui ta có thể làm như sau:

Chứng minh 1 trong 3 đường thẳng đó là giao tuyến của hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng còn lại và hai đường thẳng đó cắt nhau.

Thí dụ 2: **Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (P) không chứa AB, cắt các cạnh AC, BC, AD, BD lần lượt tại M, N, R, S và AB, MN, RS không song song với nhau. Chứng minh AB, MN, RS đồng qui.**

Giải



Ta có: * $A \in (ABC)$: $A \in (ABD)$;

$B \in (ABC)$: $B \in (ABD)$;

$\Rightarrow$ AB là giao tuyến của (ABC) và (ABD).

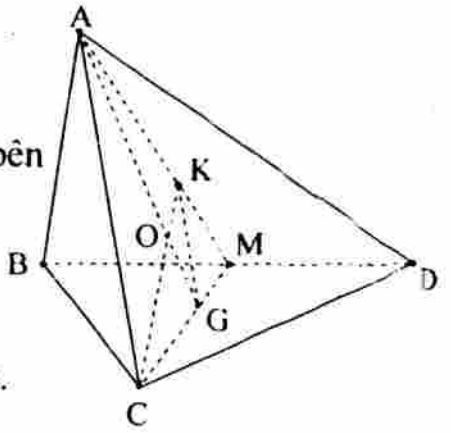
* $MN \subset (ABC)$; $RS \subset (ABD)$

MN, RS cùng nằm trong mp(P) và MN không song song với RS $\Rightarrow$ MN và RS cắt nhau.

Vậy AB, MN, RS đồng qui.

Thí dụ 3: **Chứng minh trong một tứ diện, các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện đều đồng qui.**

Giải



Gọi G, I, K, H lần lượt là trọng tâm của các mặt bên BCD, ACD, ABD, ABC.

Ta cần chứng minh AG, BI, CK, DH đồng qui.

Gọi M là trung điểm của BD. Khi đó: AG và CK cùng nằm trong (AMC) nên chúng cắt nhau tại O.

Vì G là trọng tâm ΔBCD nên: $\frac{MG}{MC}=\frac{1}{3}$;

Vì K là trọng tâm ΔABD nên: $\frac{MK}{MA}=\frac{1}{3}$;

Suy ra: KG // AC $\Rightarrow \frac{MK}{MA}=\frac{KG}{AC}=\frac{OG}{OA}\Rightarrow\frac{OG}{OA}=\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ CK chia đoạn **AG theo** tỉ số $\frac{1}{3}$

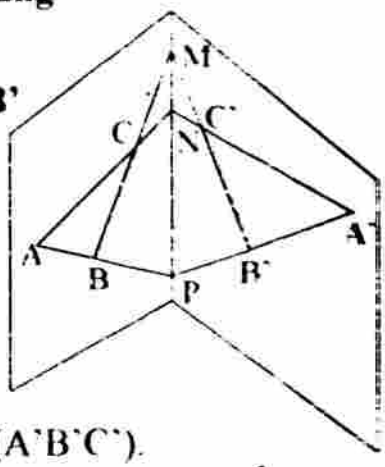
Chứng minh tương tự ta có: BI, DH cũng chia đoạn AG theo tỉ số $\frac{1}{3}$, **tức là** BI và DH cũng đi qua O.

Vậy AG, BI, CK, DH đồng qui.

Dạng 2: ***Chứng minh nhiều điểm thẳng hàng.***

Phương pháp: Để chứng minh nhiều điểm thẳng hàng, ta chứng minh **chúng cùng** nằm trên hai mặt phẳng phân biệt $\Rightarrow$ chúng nằm trên giao tuyến **của hai mặt** phẳng đó.

Thí dụ: Cho hai tam giác ABC và A'B'C' không cùng nằm trong một mặt phẳng. Giả sử BC và B'C' cắt nhau tại M, AC và A'C' cắt nhau tại N, AB và A'B' cắt nhau tại P. Chứng minh: M, N, P thẳng hàng.



Giải

Ta có: $M \in BC$, $BC \subset (ABC) \Rightarrow M \in (ABC)$;

$M \in B'C'$, $B'C' \subset (A'B'C') \Rightarrow M \in (A'B'C')$

$\Rightarrow M \in (ABC) \cap (A'B'C')$.

Tương tự: N, P cũng là điểm chung của (ABC) và (A'B'C').

Lại có: hai tam giác ABC và A'B'C' không cùng nằm trong một mặt phẳng $\Rightarrow$ hai mặt phẳng (ABC) và (A'B'C') là hai mặt phẳng phân biệt

Vậy M, N, P nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt (ABC), (A'B'C') hay M, N, P thẳng hàng.

Dạng 3: ***Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng.***

Phương pháp: Tìm hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng. Giao tuyến của chúng là đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Thí dụ: Cho tứ diện ABCD và một điểm I thuộc cạnh AB. Một đường thẳng a không song song với BD cắt hai cạnh BC và CD lần lượt tại J và

K. Tìm giao tuyến của mp(I, a) lần lượt với mp(ABC), mp(ABD), mp(ACD).

Giải

*** Giao tuyến của mp(I, a) với mp(ABC).**

+ I ∈ AB, AB ⊂ (ABC) ⇒ I ∈ (ABC);

I ∈ (I, a); ⇒ I là điểm chung của (ABC) và (I, a).

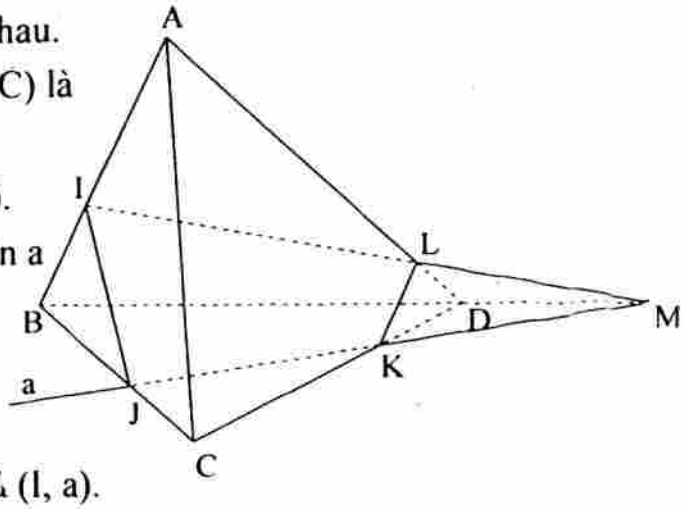
+ Vì J là giao điểm của a và BC nên J ∈ a, a ⊂ (I, a) ⇒ J ∈ (I, a);

J ∈ BC, BC ⊂ (ABC) ⇒ J ∈ (ABC);

⇒ J là điểm chung của (ABC) và (I, a).

+ Rõ ràng I, J là hai điểm khác nhau.

Vậy giao tuyến của (I, a) và (ABC) là đường thẳng IJ.



*** Giao tuyến của (I, a) và (ABD).**

Vì a không song song với BD nên a cắt BD tại M. Khi đó:

+ I ∈ AB, AB ⊂ (ABD)

⇒ I ∈ (ABD); I ∈ (I, a);

⇒ I là điểm chung của (ABD) và (I, a).

+ Vì M là giao điểm của a và BD nên: M ∈ a, a ⊂ (I, a)

⇒ M ∈ (I, a); M ∈ BD, BD ⊂ (ABD) ⇒ M∈ (ABD);

⇒ M là điểm chung của (ABD) và (I, a).

+ Rõ ràng I, M là hai điểm khác nhau.

Vậy giao tuyến của (I, a) và (ABD) là đường thẳng IM.

*** Giao tuyến của (I, a) và (ACD).** Gọi L là giao điểm của IM và AD. Khi đó:

+ L ∈ IM, IM ⊂ (I, a) ⇒ I ∈ (I, a); L ∈ AD, AD ⊂ (ACD)

⇒ L là điểm chung của (ACD) và (I, a).

+ Vì K là giao điểm của a và CD nên:

K ∈ a. a ⊂ (I. a) ⇒ K ∈ (I, a); K ∈ CD, CD ⊂ (ACD) ⇒ K∈ (ACD);

⇒ K là điểm chung của (ACD) và (I, a).

+ Rõ ràng K, L là hai điểm khác nhau.

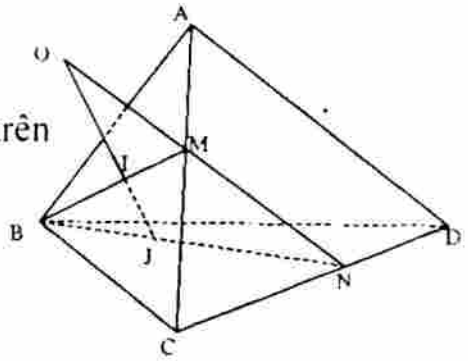
Vậy giao tuyến của (I, a) và (ACD) là đường thẳng KL.

Dạng 4: ***Tìm giao điểm của một đường thẳng với một mặt phẳng.***

Phương pháp: Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), ta tìm trong (P) một đường thẳng a cắt d. Giao điểm của d và a chính là giao điểm của d và (P).

Chú ý: Đường thẳng a thường là giao tuyến của (P) và một mặt phẳng chứa d.

Thí dụ: Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là hai điểm nằm trong hai mặt phẳng (ABC), (BCD). Giả sử IJ cắt mp(ACD), hãy xác định giao điểm của chúng.



Giải

Ta có: IJ ⊂ (AIJ) ⇒ giao của IJ và (ACD) nằm trên giao tuyến của (AIJ) và (ACD).

Kéo dài BI, BJ lần lượt cắt AC, CD tại M, N.

Dễ thấy MN là giao tuyến của (AIJ) và (ACD).

Vì IJ và MN cùng thuộc (AIJ) nên cắt nhau.

Gọi O là giao điểm của IJ và MN, khi đó O là giao điểm của IJ và (ACD).

Dạng 5: ***Tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng.***

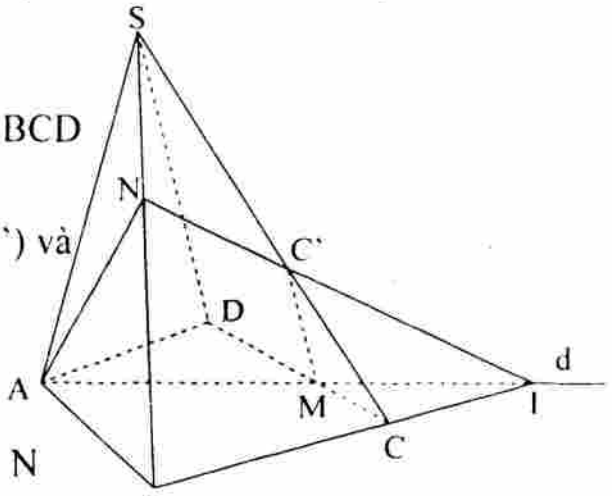
Cho hình chóp S. $A_1A_2...A_n$ và mặt phẳng (P). Nếu (P) cắt một mặt nào đó của hình chóp thì sẽ cắt mặt đó theo một đoạn thẳng gọi là đoạn giao tuyến của (P) với mặt đó. Các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau nằm trên (P) tạo thành một đa giác gọi là thiết diện của hình chóp với (cắt bởi) (P).

Phương pháp: Để tìm thiết diện của hình chóp S. $A_1A_2...A_n$ và mặt phẳng (P). ta cần tìm các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp.

Chú ý: – (P) có thể không cắt tất cả các mặt của hình chóp.

– Hai mặt phẳng nếu có 1 điểm chung thì chúng cắt nhau theo một giao tuyến.

Thí dụ: Cho hình chóp tứ giác S. ABCD. Trong mặt phẳng (ABCD) vẽ đường thẳng d qua A và không song song với các cạnh của tứ giác ABCD. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(d, C').



Giải

Vì d không song song với các cạnh của ABCD nên d cắt DC, BC lần lượt tại M, I.

Ta có: – AM là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt đáy ABCD.

– MC' là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt bên SDC.

– I, C' nằm trên (SBC), nối IC' cắt SB tại N

⇒ NC' là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt bên SBC.

– AN là đoạn giao tuyến của (d, C') và mặt bên SAB.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác AMC'N.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Cho ba đường thẳng Ox, Oy, Oz không đồng phẳng. Trên Ox lấy hai điểm A, A'; trên Oy lấy hai điểm B, B'; trên Oz lấy hai điểm C, C' sao cho các cặp đường thẳng AB và A'B', BC và B'C', AC và A'C' lần lượt cắt nhau tại M, N, P. Chứng minh: M, N, P thẳng hàng

Bài 2. Hai mặt phẳng (P), (Q) có giao tuyến d. Một đường thẳng qua A, B nằm trong (P) cắt d tại C. Gọi M là một điểm ở ngoài (P) và (Q), MA và MB cắt (Q) tại E, F. Chứng minh: C, E, F thẳng hàng.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD nằm trên mặt phẳng (P) và một điểm S không thuộc (P). Hãy xác định giao tuyến của mp(SAC) và mp(SBD). Nếu ABCD không phải là hình thang, hãy xác định giao tuyến của mp(SAB) và (SCD), mp(SAD) và mp(SBC).

Bài 4. Cho hình chóp S. ABCD, M là một điểm trên cạnh BC, N là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SMN) và (SAC); (MAN) và (NBD).

b) Xác định giao điểm của MN và mp(SAC).

Bài 5. Cho tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của cạnh AB, M là một điểm di động trên cạnh CD, P là trung điểm của đoạn BM.

a) Chứng minh rằng IM và AP mỗi đường đều nằm trong một mặt phẳng cố định khi M di chuyển trên cạnh CD.

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cố định nói trên.

Bài 6. Cho hình chóp S. ABCD, trong tam giác SCD ta lấy một điểm M.

a) Tìm giao tuyến của mp(SBM) và (SAC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng BM và mp(SAC).

c) Tìm thiết diện của hình chóp với mp(ABM).

Bài 7. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh CB và CD, M là điểm bất kì trên cạnh SA. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(MKH).

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC. Trên cạnh BD ta lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm E của CD và mp(IJK). Chứng minh: DE = DC.

b) Tìm giao điểm F của AD và mp(IJK). Chứng minh: FA = 2FD.

c) Chứng minh: FK // IJ.

d) Gọi M, N là 2 điểm bất kì lần lượt nằm trên 2 cạnh AB, CD. Tìm giao điểm của MN và mp(IJK).

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt.

Hai đường thẳng phân biệt a và b trong không gian có các vị trí tương đối sau:

* *a, b đồng phẳng:*

+ Hoặc a và b không có điểm chung: a // b.

+ Hoặc a và b có điểm chung duy nhất I: a và b cắt nhau tại I (I là giao điểm).

* *a và b không đồng phẳng: a và b chéo nhau.*

2. Hai đường thẳng song song: $a // b \Leftrightarrow \begin{cases} a, b \text{ đồng phẳng} \\ a, b \text{ không có điểm chung} \end{cases}$

Tính chất:

- *$A \notin a \Rightarrow$ có một và chỉ một b: $A \in b$, $b // a$.*
- *$a \neq b$: $a // c$, $b // c \Rightarrow a // b$*
- *(P), (Q), (R): $(P) \cap (Q) = a$; $(Q) \cap (R) = b$; $(R) \cap (P) = c$; $a \neq b$; $b \neq c$; $c \neq a$*

  $\Rightarrow$ hoặc $a // b // c$, hoặc a, b, c đồng qui.
- *$(P) \neq (Q)$: $a \subset (P)$, $b \subset (Q)$, $a // b$: $(P) \cap (Q) = c \Rightarrow$ hoặc $a // b // c$, hoặc a trùng c, hoặc b trùng c.*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

<u>Dạng 1:</u> ***Chứng minh hai đường thẳng song song.***

Phương pháp:

PP 1. Dùng định nghĩa: Để chứng minh a // b, ta chứng minh:

- a, b đồng phẳng;
- a, b không có điểm chung.

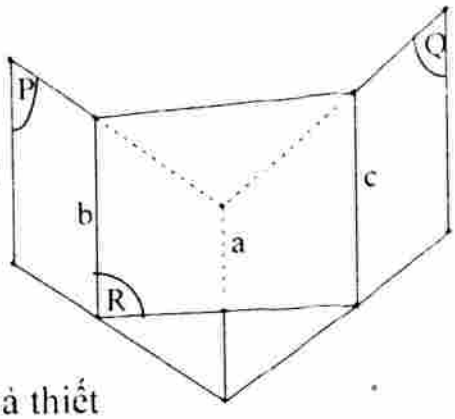
PP 2. Chứng minh chúng cùng song song với một đường thẳng thứ ba:

Để chứng minh a // b, ta chứng minh: $\exists$ c, $c \neq a$, $c \neq b$: a // c và b // c.

<u>Thí dụ 1:</u> Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) đôi một cắt nhau và không có một điểm chung nào của cả ba mặt phẳng. Chứng minh những giao tuyến của chúng song song với nhau.

Giải

Gọi a, b, c lần lượt là giao tuyến của (P) và (Q), (P) và (R), (Q) và (R). Ta cần chứng minh: a // b // c // a.



* Xét hai giao tuyến a và b ta có: a, b ⊂ (P):

+ Nếu a và b có điểm chung O thì

O ∈ a ⇒ O ∈ (P), O ∈ (Q);

O ∈ b ⇒ O ∈ (P), O ∈ (R)

⇒ O là điểm chung của (P), (Q), (R): trái giả thiết

(P), (Q), (R) không có điểm chung. Vậy a và b không có điểm chung.

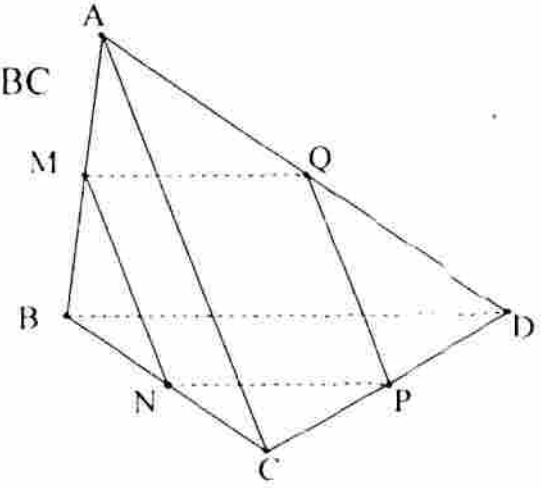
Suy ra a // b.

* Tương tự, ta chứng minh được: b // c, c // a.

Vậy: a // b // c // a.

<u>Thí dụ 2:</u> Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.

Giải



Ta có: * MN là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow$ MN // AC; MN = $\frac{1}{2}$AC (1);

* PQ là đường trung bình của ΔACD

$\Rightarrow$ PQ // AC; PQ = $\frac{1}{2}$AC (2);

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MN // PQ; MN = PQ.

Vậy MNPQ là hình bình hành.

<u>Dạng 2:</u> ***Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song.***

Phương pháp: Cho 2 mặt phẳng (P) ≠ (Q): a ⊂ (P), b ⊂ (Q), a // b.

Nếu (P) và (Q) cắt nhau thì ta xác định giao tuyến như sau: Tìm 1 điểm chung của (P) và (Q). Khi đó giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng qua điểm chung đó và song song với a và b.

<u>Thí dụ:</u> Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình bình hành.

a) Hãy xác định giao tuyến của các mặt phẳng: (SAB) và (SCD), (SBC) và (SAD).

b) M là một điểm thuộc cạnh SC, tìm thiết diện của hình chóp với mp(ABM). Thiết diện đó là hình gì ?

Giải

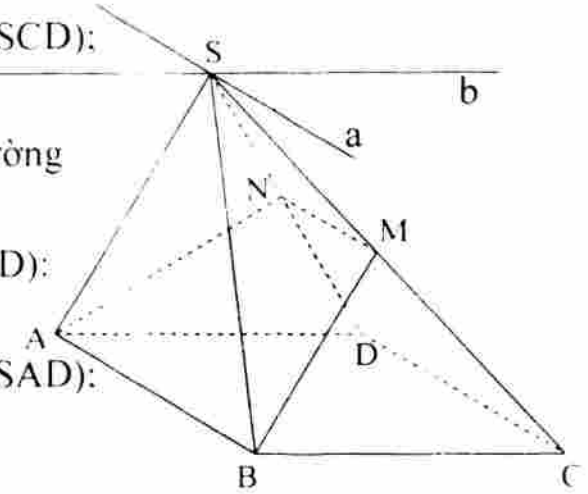
a) * Xác định giao tuyến của (SAB) và (SCD):

Ta có: – S là điểm chung của (SAB) và (SCD);

– AB ⊂ (SAB); CD ⊂ (SCD); AB // CD

⇒ Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng a qua S, song song với AB và CD.

* Xác định giao tuyến của (SBC) và (SAD):



Ta có: – S là điểm chung của (SBC) và (SAD);

– BC ⊂ (SBC); AD ⊂ (SAD); BC // AD

⇒ Giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng b qua S, song song với AD và BC.

b) Ta có: – AB là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt đáy ABCD;

– BM là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt bên SBC;

– M là điểm chung của (ABM) và (SDC); AB ⊂ (ABM), CD ⊂ (SDC), AB // CD ⇒ giao tuyến của (ABM) và (SDC) là đường thẳng qua M, song song với AB và DC. Gọi N là giao điểm của đường thẳng đó và SD, ta có MN là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt bên SDC.

– Từ kết quả trên AN là đoạn giao tuyến của (ABM) và mặt bên SAD.

Vậy thiết diện của hình chóp và (ABM) là tứ giác ABMN.

Rõ ràng: ABMN là hình thang vì MN // AB.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Chứng minh trong một tứ diện, các đoạn nối trung điểm các cặp cạnh đối đồng qui.

Bài 2. Cho hình chóp S. ABCD với đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD.

a) Chứng minh MNPQ là hình bình hành.

b) Gọi I là một điểm trên cạnh BC. Tìm thiết diện của hình chóp với mp(MNI). Thiết diện là hình gì ?

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. P, Q, R, S lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh nếu P, Q, R, S đồng phẳng thì:

a) PQ, RS, AC hoặc song song hoặc đồng qui.

b) PS, RQ, BD hoặc song song hoặc đồng qui.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm ở ngoài mp(ABCD); A', B' là trung điểm của SA, SB. Một mp(P) di động nhưng luôn chứa A'B', cắt SC, SD tại C', D'.

a) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

b) Gọi I là giao của A'D' và B'C'. Chứng minh I luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 5. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật. Gọi G_1; G_2; G_3. G_4 lần lượt là trọng tâm của bốn mặt bên SAB, SBC, SCD, SDA.
Chứng minh: $G_1G_2S_3G_4$ là hình thoi.

§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng:
Đường thẳng a và mp(P) trong không gian có các vị trí tương đối sau:

- *a và (P) có 2 điểm chung phân biệt: $a \subset (P)$.*
- *a và (P) có 1 điểm chung duy nhất: a và (P) cắt nhau.*
- *a và (P) không có điểm chung: $a \parallel (P)$.*

2. Đường thẳng song song với mặt phẳng:

$a \parallel (P) \Leftrightarrow$ *a và (P) không có điểm chung.*

Điều kiện để một đường thẳng song song với một mặt phẳng:

$b \subset (P)$: $a \not\subset (P)$: $a \parallel b \Rightarrow a \parallel (P)$.

Tính chất:

- $a \parallel (P) \Rightarrow$ *Có* $b \subset (P)$: $b \parallel a$.
- $a \parallel (P)$, $\forall (Q)$: $a \subset (Q)$, $(P) \cap (Q) = b \Rightarrow a \parallel b$.
- $(P) \neq (Q)$, $a \parallel (P)$, $a \parallel (Q)$, $(P) \cap (Q) = b \Rightarrow a \parallel b$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

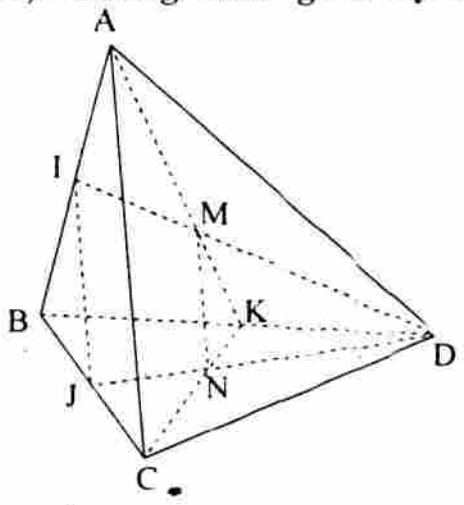
Dạng 1: ***Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng.***
Phương pháp: Để chứng minh d // (P) (d không nằm trong (P)), ta cần chứng minh: $\exists$ a $\subset$ (P): a // d.

Thí dụ 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD và BCD.
a) Chứng minh rằng MN // (ACD), MN // (ABC).
b) Xác định giao tuyến của (DMN) và (ABC). Chứng minh giao tuyến này song song với MN. Tính: $\frac{MN}{IJ}$.

Giải

a) Gọi K là trung điểm của BD. Vì M, N là trọng tâm của các tam giác ABD, BCD nên A, M, K thẳng hàng và C, N, K thẳng hàng tức là AM và CN cắt nhau tại K.

Ta có: $\frac{KM}{KA} = \frac{1}{3}; \frac{KN}{KC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{KM}{KA} = \frac{KN}{KC}$



$\Rightarrow$ MN // AC.

Từ đó: * MN // AC, AC $\subset$ (ACD) $\Rightarrow$ MN // (ACD).

* MN // AC, AC $\subset$ (ABC) $\Rightarrow$ MN // (ABC).

b) Trong mp(ABD): DM cắt AB tại I; trong mp(BCD): DN cắt BC tại J.

Khi đó: I, J là hai điểm chung của (DMN) và (ABC) $\Rightarrow$ IJ là giao tuyến của (DMN) và (ABC).

Ta có: vì M là trọng tâm của tam giác ABD nên I là trung điểm của AB.

Vì N là trọng tâm của tam giác BCD nên J là trung điểm của BC

$\Rightarrow$ IJ là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow$ IJ // AC; IJ = $\frac{1}{2}$AC.

Mặt khác: MN // AC (theo câu a) nên MN // IJ.

Ta có: IJ = $\frac{1}{2}$AC;

$\frac{MN}{AC} = \frac{KM}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{1}{3}AC$.

Từ đó: $\frac{MN}{IJ} = \frac{\frac{1}{3}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{2}{3}$.

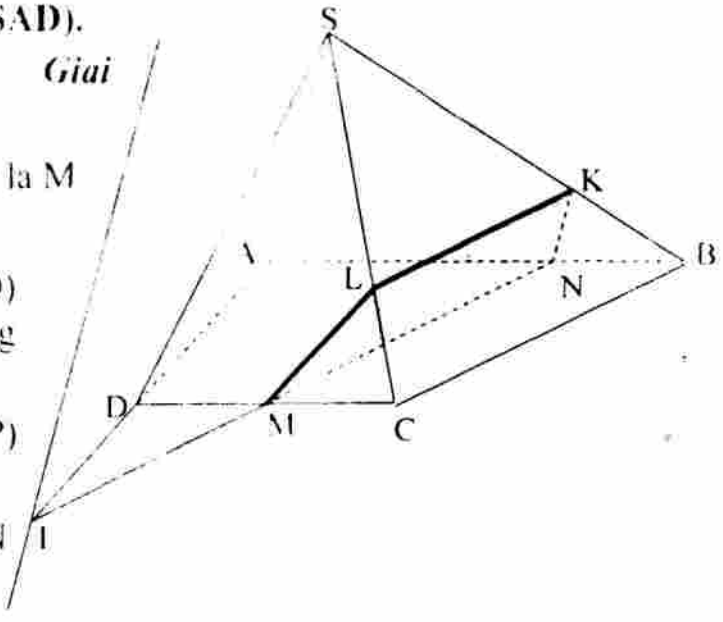
Dạng 2: ***Tìm thiết diện của một hình chóp với một mặt phẳng cho trước.***

Phương pháp: Chú ý tính chất: a // (P), $\forall$(Q): a $\subset$ (Q), (P) $\cap$ (Q) = b $\Rightarrow$ a // b.

Thí dụ: Cho hình thang ABCD, đáy lớn AB và một điểm S ở ngoài mặt phẳng (ABCD). Gọi M là một điểm trên đoạn CD (M không trùng C và D), (P) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC.

a) Tìm thiết diện của hình chóp S. ABCD với (P). Thiết diện là hình gì ?

b) Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).



Giải

a) Ta có:

* (P) và (ABCD) có điểm chung là M

(P) // BC; BC $\subset$ (ABCD)

$\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (ABCD) là đường thẳng qua M và song song với BC, cắt AB tại N

$\Rightarrow$ MN là đoạn giao tuyến của (P) và mặt đáy ABCD

* (P) và (SAB) có điểm chung là N

(P) // SA; SA $\subset$ (SAB)

$\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng qua N và song song với SA, cắt SB

tại K $\Rightarrow$ NK là đoạn giao tuyến của (P) và mặt bên SAB.

* (P) và (SBC) có điểm chung là K; (P) // BC; BC $\subset$ (SBC)

$\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua K và song song với BC, cắt SC

tại L $\Rightarrow$ KL là đoạn giao tuyến của (P) và mặt bên SBC.

* M, L là 2 điểm chung của (P) và (SCD) $\Rightarrow$ ML là đoạn giao tuyến của (P) và mặt bên SCD.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác MNKL.

Theo trên ta có: MN // BC // KL $\Rightarrow$ MN // KL hay MNKL là hình thang

b) Trong mp(ABCD) kéo dài MN và AD cắt nhau tại I. Khi đó:

- I là điểm chung của (P) và (SAD);
- SA // (P), SA $\subset$ (SAD)

$\Rightarrow$ giao tuyến của (P) và (SAD) là đường thẳng qua I và song song với SA.

C – BÀI TẬP.

Bài 1. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) Gọi P là trung điểm của cạnh SA. Chứng minh SB, SC đều song song với mp(MNP).

Bài 2. Cho hình chóp S. ABCD, đáy là tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng qua O, song song với AB và SC. Thiết diện là hình gì ?

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Một mặt phẳng (P) chuyển động luôn song với BC và đi qua trung điểm C' của cạnh bên SC cắt các cạnh SA, SB, SD lần lượt tại A', B' D'.

a) A'B'C'D' là hình gì ?

b) Chứng minh (P) luôn đi qua một đường thẳng cố định.

c) Gọi M là giao của A'C' và B'D'. Chứng minh khi (P) thay đổi như trên, M luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 4. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành, G là trọng tâm của tam giác SBD. Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) qua G, song song với SB và AC.

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD và điểm M trên cạnh SC. Mặt phẳng (P) qua AM và song song với BD.

a) Chứng minh (P) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi M chuyển động trên SC.

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (P) (gọi giao điểm của (P) với SB, SD lần lượt là K, H).

c) Gọi giao của MK và BC là E; MH và CD là F. Chứng minh: A, E, F thẳng hàng.

Bài 6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M và N là hai điểm chạy trên AD và BE sao cho: $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NE}$.

Chứng minh đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng phân biệt:

Hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) có các vị trí tương đối sau:

- *(P) và (Q) có điểm chung: (P) và (Q) cắt nhau theo một đường thẳng (giao tuyến).*
- *(P)và (Q) không có điểm chung: (P) // (Q).*

2. Hai mặt phẳng song song:

(P) // (Q) ⇔ (P) và (Q) không có điểm chung.

Điều kiện để hai mặt phẳng song song:

a, b ⊂ (P): a và b cắt nhau, a // (Q), b // (Q) ⇒ (P) // (Q).

Tính chất:

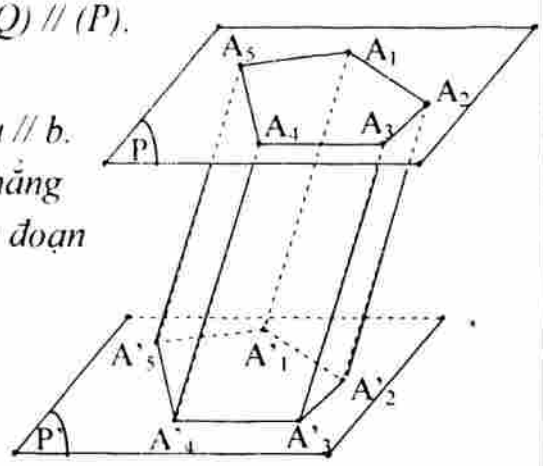
- *Với A ∉ (P), có một và chỉ một (Q): A ∈ (Q), (Q) // (P).*
- *a // (P) ⇒ có một và chỉ một (Q): a ⊂ (Q), (Q) // (P).*
- *(P) ≠ (Q): (P) // (R), (Q) // (R) ⇒ (P) // (Q).*
- *(P) // (Q), (R) ∩ (P) = a ⇒ (R) ∩ (Q) = b; a // b.*

3. Định lí Ta-let trong không gian: *Ba mặt phẳng song song chắn ra trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.*

(P) // (Q) // (R):

a ∩ (P) = A; a ∩ (Q) = B; a ∩ (R) = C;

b ∩ (P) = A'; b ∩ (Q) = B'; b ∩ (R) = C';



$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$

4. Hình lăng trụ và hình hộp:

** (P) // (P'): Đa giác $A_1A_2...A_n$ trên (P). Qua $A_1, A_2, ...A_n$ vẽ các đường thẳng song song cắt(P') tại $A'_1, A'_2, ...A'_n$. Hình hợp bởi các hình bình $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hình lăng trụ. Ký hiệu: $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.*

** Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh hai mặt phẳng song song.***

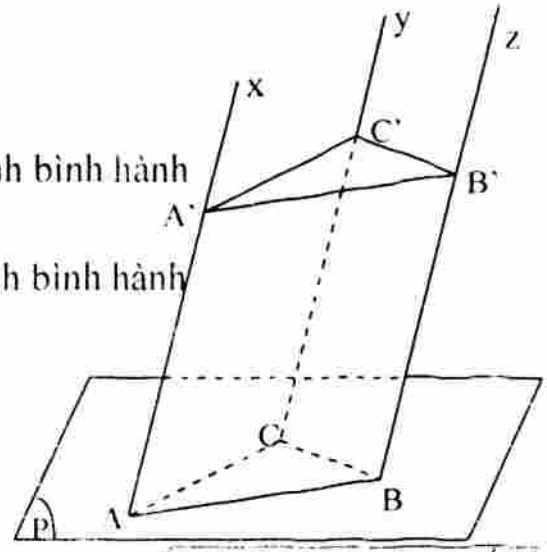
Phương pháp: Để chứng minh (P) // (Q) ta cần chứng minh:

PP 1. Trong (P) (hoặc (Q)) có hai đường thẳng cắt nhau a và b sao cho a // (Q), b // (Q) (hoặc a // (P), b // (P)).

PP 2. Có a, b ⊂ (P): a cắt b; a', b'⊂ (Q): a' cắt b' và a // a', b // b'.

Thí dụ: Cho tam giác ABC nằm trong mp(P). Trên ba nửa đường thẳng Ax, By, Cz cùng nằm về một phía đối với (P) lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho AA' = BB' = CC'.

Chứng minh: (P) // (A'B'C').



Giải

Vì Ax // By; AA' = BB' nên ABB'A' là hình bình hành

⇒ A'B' // AB (1)

Vì Ax // Cz; AA' = CC' nên ACC'A' là hình bình hành

⇒ A'C' // AC (2)

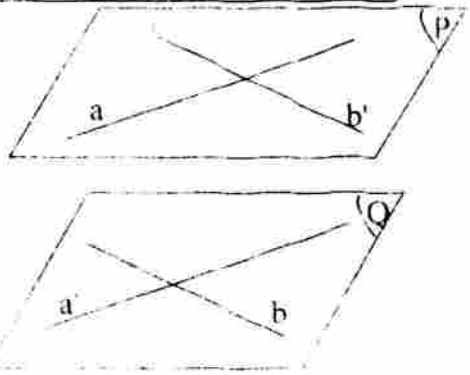
Mặt khác: AB, AC thuộc mp(ABC);

A'B', A'C' thuộc mp(A'B'C') (3)

Từ (1), (2) và (3) ⇒ (A'B'C') // (P).

Thí dụ 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Gọi (P) là mặt phẳng chứa a và song song với b, (Q) là mặt phẳng chứa b và song song với a.

Chứng minh: (P) // (Q).



Giải

Ta có: b // (P) $\Rightarrow$ có b'$\subset$ (P) sao cho b' // b.

Mặt khác: b $\subset$ (Q) nên b' // (Q).

Vì a và b chéo nhau nên a cắt b'.

Như vậy ta có: a, b' $\subset$ (P)

a // (Q); b' // (Q) và a cắt b'

$\Rightarrow$ (P) // (Q).

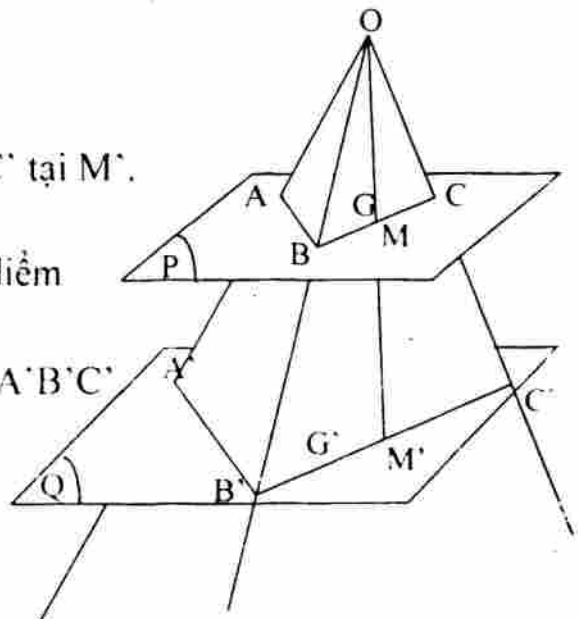
Dạng 2: ***Định lí Talet trong không gian.***

Phương pháp: Sử dụng định lí.

Thí dụ: Mặt phẳng (P) cắt 3 đường thẳng không đồng phẳng Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C; mặt phẳng (Q) song song với mp(P) cắt các đường thẳng trên lần lượt tại A', B', C'.

a) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, chứng minh rằng OG đi qua trọng tâm của tam giác A'B'C'.

b) Chứng minh $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.



Giải

a) Gọi M là trung điểm của BC, OM cắt B'C' tại M'.

Khi đó: M' là trung điểm của B'C'.

Nối OG cắt A'M' tại G' ta có G' là giao điểm của OG và mp(A'B'C').

Ta cần chứng minh G' là trọng tâm của $\Delta A'B'C'$

Vì (P) // (Q) nên AM // A'M'.

Khi đó, xét tam giác OA'M', ta có:

$$\frac{AG}{A'G'} = \frac{OG}{OG'} = \frac{GM}{G'M'}$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{A'G'} = \frac{GM}{G'M'} \Rightarrow \frac{GM}{AG} = \frac{G'M'}{A'G'} \Rightarrow \frac{G'M'}{A'G'} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ G' là trọng tâm của tam giác A'B'C'.

b) Vì (P) // (Q) nên: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Dạng 3: ***Một số bài toán liên quan đến hình lăng trụ – hình hộp.***

Phương pháp: Chú ý các tính chất sau của hình lăng trụ:

- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau.
- Các mặt bên là các hình bình hành.

- Hai đa giác đáy có các cạnh đôi một song song và bằng nhau ⇒ hai đa giác đó bằng nhau.

Thí dụ 1: Cho hình lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, A'B'C', A'CC'. Chứng minh rằng:

a) Mp(IKG) song song với mp(BB'CC')

b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mp(IKG). Thiết diện là hình gì?

c) Gọi H là trung điểm của BB', chứng minh (AHI) // (A'KG).

Giải

a) Gọi N, L lần lượt là trung điểm của B'C' và BC.

Ta có: NL // BB' // AA' ⇒ NL // AA' ⇒ AA'NL là hình bình hành ⇒ AL = A'N.

Vì K, I lần lượt là trọng tâm của ΔA'B'C' và ΔABC nên:

$KN = \frac{1}{3}A'N = \frac{1}{3}AL = IL$ ⇒ KNLI là hình bình hành ⇒ KI // NL.

Suy ra: KI // (BB'C'C) (vì NL ⊂ (BB'C'C)) (1)

Trong mp(A'CC') gọi M là giao điểm của A'G và CC'.

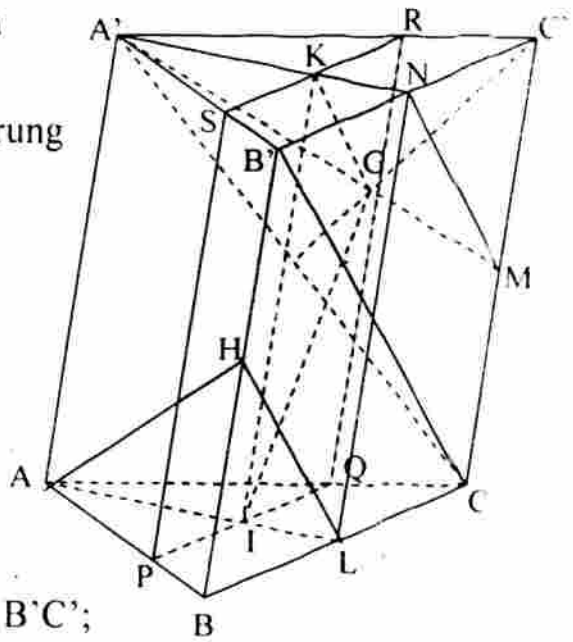
Vì G là trọng tâm của ΔA'CC' nên M là trung điểm của CC'. Khi đó: Xét ΔA'MN có:

$\frac{A'K}{A'N} = \frac{2}{3} = \frac{A'G}{A'M}$ ⇒ KG // MN

Suy ra: KG // (BB'C'C)

(vì MN ⊂ (BB'C'C)) (2)

Từ (1) và (2) ⇒ (IKG) // (BB'C'C).



b) Ta có:

* (IKG) // (BB'C'C).

Giao tuyến của (BB'C'C) và (A'B'C') là B'C';

K ∈ (A'B'C')

⇒ giao tuyến của (IKG) và (A'B'C') là đường thẳng qua K và song song với B'C', giả sử cắt A'B', A'C' lần lượt tại R, S.

* Tương tự: giao tuyến của (IKG) và (ABC) là đường thẳng qua I và song song với BC, giả sử cắt AB, AC lần lượt tại P, Q.

Vậy thiết diện của lăng trụ và mp(IKG) là tứ giác PQRS.

Khi đó: vì RS // B'C', PQ // BC, B'C' // BC ⇒ RS // PQ (3)

Mặt khác: $\frac{PQ}{BC} = \frac{AI}{AL} = \frac{2}{3} = \frac{A'K}{A'N} = \frac{RS}{B'C'} \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{RS}{B'C'}$

$\Rightarrow PQ = RS$ (vì $BC = B'C'$) (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ PQRS là hình bình hành.

c) Theo câu b, ta có: KG // MN, mà MN // CB' // LH $\Rightarrow$ KG // LH (5)

Mặt khác: A'N // AL (theo a) (6)

Rõ ràng: AL và LH nằm trên (AHI), KG và A'N nằm trên (A'KG) (7)

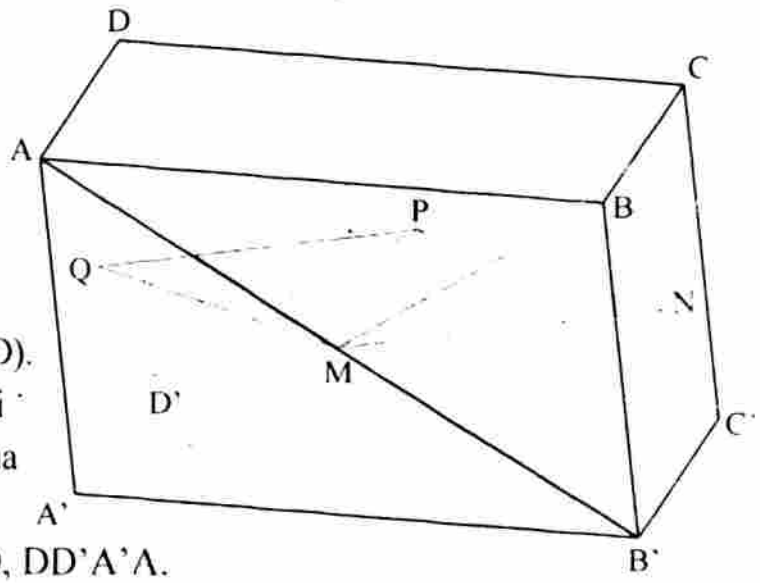
Từ (5), (6) và (7) $\Rightarrow$ (AHI) // (A'KG).

Thí dụ 2: Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) (AB'D') // (C'BD).

b) Bốn tâm đối xứng của bốn mặt bên là bốn đỉnh của một hình bình hành.

Giải



a) Ta có: AB // D'C'; AB = D'C'

$\Rightarrow$ ABC'D' là hình bình hành

$\Rightarrow$ AD' // C'B (1).

Tương tự: BB'D'D là hình bình hành

$\Rightarrow$ B'D' // BD (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (AB'D') // (C'BD).

b) Gọi M, N, P, Q lần lượt là tâm đối xứng (giao của hai đường chéo của các hình bình hành) của các mặt bên AA'B'B, BB'C'C, CC'D'D, DD'A'A.

Khi đó:

Xét tam giác AB'D': QM là đường trung bình

$\Rightarrow$ QM // D'B' và $QM = \frac{1}{2}B'D'$.

Xét tam giác C'D'B': PN là đường trung bình $\Rightarrow$ PN // B'D' và $PN = \frac{1}{2}B'D'$.

Vậy QM // PN và QM = PN hay MNPQ là hình bình hành.

C - BÀI TẬP.

Bài 1. Trong mp(P) cho tam giác ABC. Ta lấy điểm S ở ngoài (P) sao cho SA = SB = SC. Chứng minh các đường phân giác ngoài tại S của các tam giác SAB, SBC, SCA cùng nằm trong một mặt phẳng.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD, ta dựng các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song với nhau và nằm về một phía đối với mp(ABCD). Mp(P) cắt bốn nửa đường thẳng trên lần lượt tại A', B', C', D'.

a) Chứng minh mp(AA', BB') // mp(CC', DD').

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

c) Chứng minh: AA' + CC' = BB' + DD'.

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD, đáy ABCD là hình bình hành. Mp (P) qua điểm M của cạnh bên SA và song song với mặt đáy. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(P). Thiết diện là hình gì ?

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD và điểm M trên cạnh SC. Xác định thiết diện của hình chóp với mp(P) qua M và song song với (SAB).

Bài 5. Cho hình chóp tứ giác S. ABCD, M là trung điểm của cạnh bên SA, N là trung điểm của cạnh bên SC.

a) Xác định mặt phẳng qua M, song với (SBD); mặt phẳng qua N, song song với (SBD).

b) Gọi I, J là giao của hai mặt phẳng trên với AC. Chứng minh: AC = 2IJ.

Bài 6. Cho hình lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi I, I' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, B'C'.

a) Chứng minh AI // A'I'.

b) Tìm giao của IA' và (AB'C').

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

Bài 7. Cho hình lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AA', AC.

a) Xác định thiết diện của lăng trụ với mp(MNB').

b) Gọi P là trung điểm của B'C'. Xác định thiết diện của lăng trụ với mp(MNP).

Bài 8. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' có các cạnh AA', BB', CC', DD' song song với nhau.

a) Chứng minh mp(ACB') // mp(A'C'D).

b) Chứng minh đường chéo BD' đi qua trọng tâm G_1, G_2 của hai tam giác ACB' và A'C'D

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn BD' thành ba phần bằng nhau.

Bài 9. Cho lăng trụ tứ giác ABCD. A'B'C'D', hai đường chéo AC' và A'C cắt nhau tại I, hai đường chéo BD' và B'D cắt nhau tại J. Chứng minh khoảng cách II bằng độ dài đoạn nối trung điểm hai đường chéo đáy.

Bài 10. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D' và một điểm M trên đoạn AD. Xác định thiết diện của hình hộp với mp(P) qua M, song song với BD, AC'

Bài 11. Cho ba mặt phẳng (P), (Q), (R) song song với nhau. Hai đường thẳng a, a' cắt ba mặt phẳng ấy theo thứ tự tại A, B, C và A', B', C'. Biết AB = m; BC = n, A'C' = k. Tính độ dài A'B' và B'C'.

Bài 12. (Định lí đảo của định lí Talet).

Cho hai đường thẳng a và a'. Trên a lấy ba điểm phân biệt A, B, C; trên a' lấy ba điểm phân biệt A', B', C' sao cho: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$. Chứng minh rằng AA', BB', CC' nằm trong các mặt phẳng song song.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Trên hai đường chéo AC và BF ta lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Từ M và N vẽ những đường thẳng song song với AB, lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'.

a) Chứng minh MN // DE.

b) Chứng minh M'N' // (DEF).

c) Chứng minh (DEF) // (MNN'M').

Bài 2. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tại các đỉnh của hình vuông kẻ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt song song, cùng nằm về một phía của mp(ABCD). Gọi I là điểm đối xứng của D qua A. Trên Ax, By lần lượt lấy A', B' sao cho AA' = $\frac{a}{2}$, BB' = a. Mp(IA'B') cắt Cz, Dt lần lượt tại C', D'.

a) Tứ giác A'B'C'D' là hình gì ?

b) B'C' và A'B' cắt mp(ABCD) lần lượt tại J và K. Chứng minh I, J, K thẳng hàng.

c) Tính theo a các cạnh và diện tích tứ giác IABJ.

Bài 3. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình thang ABCD (AD // BC). Gọi M, N và G lần lượt là trung điểm của AB, CD và trọng tâm tam giác SAD.

a) Xác định giao tuyến của mp(SAB) và (SCD).

b) Xác định thiết diện của hình chóp S. ABCD với mp(MNG).

c) Gọi O là giao của AC và BD. Giả sử đường thẳng SO cắt mp(MNG) tại E. Hãy xác định điểm E.

Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều S. ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng b. Gọi M, N là trung điểm của AB và BC. Tính diện tích thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (P) đi qua M và N, song song với SB.

Bài 5. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng chéo nhau a, b cắt (P) tại A, B. Gọi m là đường thẳng thay đổi luôn luôn song song với (P), tựa lên a, b và cắt a tại M, cắt b tại N. Qua M vẽ đường thẳng c song song với b, cắt (P) tại C.

a) Tứ giác MNBC là hình gì ?

b) Chứng minh C luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

c) Xác định vị trí đường thẳng m để độ dài MN ngắn nhất.

Bài 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi (P) là mặt phẳng luôn đi qua các trung điểm I, K của cạnh DA và DB. Các cạnh CA, CB lần lượt cắt (P) tại M, N.

a) Tứ giác MNIK là hình gì ? Khi nào tứ giác đó là hình bình hành.

b) Gọi O là giao của MI và NK. Chứng minh: O luôn nằm trên một đường thẳng cố định.

c) Gọi d là giao tuyến của (P) và (OAB). Chứng minh khi (P) thay đổi thì d luôn nằm trong một mặt phẳng cố định.

Bài 7. Cho tứ diện ABCD. Một mặt phẳng (α) song song với AC và BD cắt tứ diện theo thiết diện PQRS.

a) Chứng minh PQRS là hình bình hành.

b) Xác định (α) để PQRS là hình thoi.

Bài 8. Cho lăng trụ tam giác ABC. A'B'C'. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, A'B'C', ABB'. Chứng minh: (IKG) // (BB'C'C); (A'KG) // (AIC').

Bài 9. Cho hình lăng trụ ABC. A'B'C', đáy ABC là tam giác đều cạnh a. M là một điểm trên đường chéo AB' của mặt bên AA'B'B sao cho $\frac{AM}{MB'} = \frac{5}{4}$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M, song song với A'C và BC'. Xác định thiết diện của lăng trụ với (P) và tìm tỷ số mà (P) chia cạnh CC'.