TOÁN CAO CẤP A2 ĐẠI HỌC
(ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH)
PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH
Số tiết: 45

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Toán cao cấp* A2 – ĐH Công nghiệp TP. HCM.

2. Đỗ Công Khanh – *Toán cao cấp* A2 – NXB ĐHQG TP. HCM.
3. Nguyễn Viết Đông – *Toán cao cấp* A2 – NXB Giáo dục.
4. Lê Sĩ Đồng – *Toán cao cấp Đại số Tuyến tính* – NXB Giáo dục.
5. Bùi Xuân Hải – *Đại số tuyến tính* – ĐH KHTN TP. HCM.
6. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright – *Fundamental Methods of Mathematical Economics.*

➢ **Chương 1. Ma trận – Định thức**

§1. Ma trận

§2. Định thức

§1. MA TRẬN
(*Matrix*)

1.1. Các định nghĩa

a) Định nghĩa ma trận

- Ma trận A cấp $m \times n$ trên $\mathbb{R}$ là 1 hệ thống gồm $m \times n$ số $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ và được sắp thành bảng gồm m dòng và n cột:

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Các số a_{ij} được gọi là các phần tử của A ở dòng thứ i và cột thứ j.
- Cặp số $(m,\ n)$ được gọi là kích thước của A.
- Khi $m = 1$, ta gọi:
  $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$ là ma trận dòng.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

- Khi $n = 1$, ta gọi $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ là ma trận cột.
- Khi $m = n = 1$, ta gọi:
  $A = (a_{11})$ là ma trận gồm 1 phần tử.
- Ma trận $O = (0_{ij})_{m \times n}$ có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là ma trận *không*.
- Tập hợp các ma trận A trên $\mathbb{R}$ được ký hiệu là $M_{m,n}(\mathbb{R})$, để cho gọn ta viết là $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

- **Ma trận vuông**
  - Khi $m = n$, ta gọi A là ma trận vuông cấp n. Ký hiệu là $A = (a_{ij})_n$.
  - Đường chéo chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là ***đường chéo chính*** của $A = (a_{ij})_n$, đường chéo còn lại được gọi là ***đường chéo phụ***.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Các ma trận vuông đặc biệt

- Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ***ma trận chéo*** (*diagonal matrix*).
  Ký hiệu: $diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Ma trận chéo cấp n gồm tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 được gọi là ***ma trận đơn vị*** cấp n (*Identity matrix*). Ký hiệu là: I_n.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ma trận ma trận vuông cấp n có tất cả các phần tử ***nằm phía dưới*** (***trên***) đường chéo chính đều bằng 0 được gọi là ma trận ***tam giác trên*** (***dưới***).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ma trận vuông cấp n có tất cả các cặp phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính bằng nhau ($a_{ij} = a_{ji}$) được gọi là ***ma trận đối xứng***.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Ma trận bằng nhau

Hai ma trận $A = (a_{ij})$ và $B = (b_{ij})$ được gọi là ***bằng nhau***, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi chúng cùng kích thước và $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$.

VD 1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & 2 & t \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & u & 3 \end{pmatrix}$.

Ta có:

$A = B \Leftrightarrow x = 0;\ y = -1;\ z = 2;\ u = 2;\ t = 3.$

1.2. Các phép toán trên ma trận

a) Phép cộng và trừ hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$, ta có:

$$\boxed{A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}.}$$

VD 2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & -3 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}.$

Nhận xét

Phép cộng ma trận có tính giao hoán và kết hợp.

b) Phép nhân vô hướng

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\boxed{\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.}$$

VD 3. $-3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 12 \end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

Chú ý

- Phép nhân vô hướng có tính phân phối đối với phép cộng ma trận.
- Ma trận $-1.A = -A$ được gọi là ma trận đối của A.

c) Phép nhân hai ma trận

Cho hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{jk})_{n\times p}$, ta có:

$$\boxed{AB = (c_{ik})_{m\times p}.}$$

Trong đó, $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} \quad \left(i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,p}\right).$

VD 4. Thực hiện phép nhân $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Giải. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = (-1 + 4 - 15) = (-12).$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 5. Thực hiện phép nhân $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Giải. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 6. Tính $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Giải. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

Tính chất

Cho các ma trận $A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ và số $\lambda \in \mathbb{R}$.

Giả thiết các phép nhân đều thực hiện được, ta có:

1) $(AB)C = A(BC)$;

2) $A(B + C) = AB + AC$; 3) $(A + B)C = AC + BC$;

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; 5) $AI_n = A = I_m A$.

VD 7. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính: a) AB; b) BA.

VD 8. Thực hiện phép nhân:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét

Phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

- **Lũy thừa ma trận**

Cho ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- Lũy thừa ma trận A được định nghĩa theo quy nạp:

$$A^0 = I_n;\ A^0 = A;\ A^{k+1} = A^k.A,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

- Nếu $\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ thì A được gọi là ***ma trận lũy linh***.

Số $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$ bé nhất sao cho $A^k = (0_{ij})_n$ được gọi là ***cấp*** của ma trận lũy linh A.

VD 9. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ là lũy linh cấp 3.

Tính chất

1) $(0_n)^k = 0_n;\ (I_n)^k = I_n,\ \forall k \in \mathbb{N}$

2) $A^{k+m} = A^k.A^m,\ \forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \forall k, m \in \mathbb{N}$

3) $A^{km} = (A^k)^m,\ \forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \forall k, m \in \mathbb{N}.$

Chú ý

1) Nếu $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì:

$$A^k = diag(a_{11}^k, a_{22}^k, \ldots, a_{nn}^k).$$

2) Nếu $A,\ B \in M_n(\mathbb{R})$ thỏa $AB = BA$ (giao hoán) thì các hằng đẳng thức quen thuộc cũng đúng với $A,\ B$. Khi $AB \neq BA$ thì các hằng đẳng thức đó không còn đúng nữa.

VD 10. Cho $f(x) = 2x^3 - 4x^2$ và $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính $f(A) + I_2$.

VD 11. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, giá trị của $(I_2 - A)^{2011}$ là:

A. $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 12. Tìm ma trận $D = (ABC)^5$, trong đó:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

VD 13. Cho ma trận $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Hãy tìm ma trận $\left[A(\alpha)\right]^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$?

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 14. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 40 có các phần tử $a_{ij} = (-1)^{i+j}$. Phần tử a_{25} của A^2 là:

A. $a_{25} = 0$; B. $a_{25} = -40$; C. $a_{25} = 40$; D. $a_{25} = -1$.

VD 15. Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp 100 có các phần tử $a_{ij} = (-1)^i.3^j$. Phần tử a_{34} của A^2 là:

A. $a_{34} = \dfrac{3^5}{4}(1 - 3^{100})$; B. $a_{34} = \dfrac{3^5}{4}(3^{100} - 1)$;

C. $a_{34} = \dfrac{3^5}{2}(3^{100} - 1)$; D. $a_{34} = \dfrac{3^5}{2}(1 - 3^{100})$.

d) Phép chuyển vị (*Transposed matrix*)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Khi đó, $A^T = (a_{ji})_{n\times m}$ được gọi là ma trận chuyển vị của A (nghĩa là chuyển tất cả các dòng thành cột).

VD 16. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Tính chất

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
2) $(\lambda A)^T = \lambda . A^T$;
3) $(A^T)^T = A$;
4) $(AB)^T = B^T A^T$;
5) $A^T = A \Leftrightarrow A$ là ma trận đối xứng.

VD 17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Tính $(AB)^T$.

b) Tính $B^T A^T$ và so sánh kết quả với $(AB)^T$.

1.3. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận (*Gauss – Jordan*)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ $(m \geq 2)$. Các phép biến đổi sơ cấp (PBĐSC) dòng e trên A là:

1) (e_1) : Hoán vị hai dòng cho nhau $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_k} A'$.

2) (e_2) : Nhân 1 dòng với số $\lambda \neq 0$, $A \xrightarrow{d_i \to \lambda d_i} A''$.

3) (e_3) : Thay 1 dòng bởi tổng của dòng đó với λ lần dòng khác, $A \xrightarrow{d_i \to d_i + \lambda d_k} A'''$.

Chú ý

1) Trong thực hành ta thường làm $A \xrightarrow{d_i \to \mu d_i + \lambda d_k} B$.

2) Tương tự, ta cũng có các phép biến đổi sơ cấp trên cột của ma trận.

➤ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 18. Dùng PBĐSC trên dòng để đưa ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ về } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

➤ Chương 1. Ma trận – Định thức

1.4. Ma trận bậc thang

- Một dòng của ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0 được gọi là dòng bằng 0 (hay ***dòng không***).
- Phần tử khác 0 đầu tiên tính từ trái sang của 1 dòng trong ma trận được gọi là phần tử ***cơ sở*** của dòng đó.
- Ma trận bậc thang là ma trận ***khác không*** cấp $m \times n$ $(m,\ n \geq 2)$ thỏa hai điều kiện:
  1) Các dòng bằng 0 (nếu có) ở phía dưới các dòng khác 0;
  2) Phần tử cơ sở của 1 dòng bất kỳ nằm ***bên phải*** phần tử cơ sở của dòng ở ***phía trên dòng đó***.

VD 19. Các ma trận bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Các ma trận không phải là bậc thang:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **Ma trận bậc thang rút gọn**

Ma trận bậc thang rút gọn là ma trận ***bậc thang*** có phần tử cơ sở của một dòng bất kỳ đều bằng 1 và là phần tử khác 0 ***duy nhất của cột*** chứa phần tử đó.

VD 20. I_n, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

là các ma trận bậc thang rút gọn.

Ma trận $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ không là bậc thang rút gọn.

1.5. Ma trận khả nghịch

a) Định nghĩa

- Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là ***khả nghịch*** nếu tồn tại ma trận $B \in M_n(\mathbb{R})$ sao cho:

$$\boxed{AB = BA = I_n.}$$

- Ma trận B được gọi là ma trận ***nghịch đảo*** của A.

Ký hiệu $B = A^{-1}$. Khi đó:

$$\boxed{A^{-1}A = AA^{-1} = I_n;\ (A^{-1})^{-1} = A.}$$

Chú ý

Nếu B là ma trận nghịch đảo của A thì B là duy nhất và A cũng là ma trận nghịch đảo của B.

VD 21. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ là hai ma trận nghịch đảo của nhau vì $AB = BA = I_2$.

VD 22. Cho biết ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ thỏa:

$A^3 - A^2 - A + I_3 = O_3$. Tìm A^{-1} ?

Chú ý

1) Nếu ma trận A có 1 dòng (hay cột) bằng 0 thì không khả nghịch.

2) $I^{-1} = I$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Nếu $ac - bd \neq 0$ thì:

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac - bd}.\begin{pmatrix} c & -b \\ -d & a \end{pmatrix}.}$$

VD 23. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Thực hiện phép tính: a) $(AB)^{-1}$; b) $B^{-1}A^{-1}$.

Giải. a) Ta có: $AB = \begin{pmatrix} 19 & 12 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$ và $19.7 - 11.12 = 1$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

VD 24. Cho hai ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận X thỏa $AX = B$.

Giải. Ta có:

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Vậy $X = -\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

b) Tìm ma trận nghịch đảo bằng phép biến đổi sơ cấp trên dòng (tham khảo)

Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch, ta tìm A^{-1} như sau:

***Bước* 1.** Lập ma trận $\left(A \middle| I_n\right)$ (ma trận chia khối) bằng cách ghép ma trận I_n vào bên phải của A.

***Bước* 2.** Dùng phép biến đổi sơ cấp trên dòng để đưa $\left(A \middle| I_n\right)$ về dạng $\left(I_n \middle| B\right)$.

Khi đó: $A^{-1} = B$.

VD 25. Tìm nghịch đảo của $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

Giải. Ta có: $\left(A \middle| I_4\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[\substack{d_2 \to d_3 - d_2 \\ d_1 \to d_1 + d_2 - d_4}]{d_3 \to d_3 - d_4} \left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_4} \middle| \underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}}_{A^{-1}}\right).$$

§2. ĐỊNH THỨC

2.1. Định nghĩa

a) Ma trận con cấp *k*

Cho $A = (a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$.

- Ma trận vuông cấp k được lập từ các phần tử nằm trên giao của k dòng và k cột của A được gọi là *ma trận con cấp* k của A.
- Ma trận M_{ij} có cấp $n-1$ thu được từ A bằng cách bỏ đi dòng thứ i và cột thứ j được gọi là ma trận con của A ứng với phần tử a_{ij}.

VD 1. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ có các ma trận con ứng với các phần tử a_{ij} là:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix},\ M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix},\ M_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},\ M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

b) Định thức (*Determinant*)

Định thức của ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu $\det A$ hay $|A|$, là 1 số thực được định nghĩa:

- Nếu $A = (a_{11})$ thì $\det A = a_{11}$.
- Nếu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Nếu $A = (a_{ij})_n$ (cấp $n \geq 3$) thì:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

trong đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ và số thực A_{ij} được gọi là ***phần bù đại số*** của phần tử a_{ij}.

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

Chú ý

1) $\det I_n = 1,\ \det O_n = 0.$

2) Tính $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \quad \text{hoặc} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(Tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét liền trừ đi tổng của tích các phần tử trên đường chéo nét đứt).

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

<u>VD 2.</u> Tính định thức của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>VD 3.</u> Tính định thức của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

2.2. Các tính chất cơ bản của định thức

Cho ma trận vuông $A = \left(a_{ij}\right)_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các tính chất cơ bản sau:

a) Tính chất 1

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A.}$$

<u>VD 4.</u> $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$

b) Tính chất 2

Nếu hoán vị hai dòng (hoặc hai cột) cho nhau thì định thức đổi dấu.

VD 5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$

Hệ quả. Nếu định thức có ít nhất 2 dòng (hoặc 2 cột) giống nhau thì bằng 0.

VD 6. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^5 \\ 1 & y^2 & y^5 \end{vmatrix} = 0.$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

c) Tính chất 3

Nếu nhân 1 dòng (hoặc 1 cột) với số thực λ thì định thức tăng lên λ lần.

VD 7. $\begin{vmatrix} 3.1 & 0 & 3.(-1) \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x^3 \\ x+1 & y & y^3 \\ x+1 & z & z^3 \end{vmatrix} = (x+1)\begin{vmatrix} 1 & x & x^3 \\ 1 & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix}.$$

➢ Chương 1. Ma trận – Định thức

Hệ quả

1) Nếu định thức có ít nhất 1 dòng (hoặc 1 cột) bằng 0 thì bằng 0.

2) Nếu định thức có 2 dòng (hoặc 2 cột) tỉ lệ với nhau thì bằng 0.

VD 8. $\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & y \\ x^3 & 0 & y^2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} 6 & -6 & -9 \\ 2 & 2 & -3 \\ -8 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 0.$

d) Tính chất 4

Nếu định thức có 1 dòng (hoặc 1 cột) mà mỗi phần tử là tổng của 2 số hạng thì ta có thể tách thành tổng 2 định thức.

VD 9. $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x & x \\ x & y & y^3 \\ 1 & z & z^3 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} \cos^2 x & 2 & 3 \\ \sin^2 x & 5 & 6 \\ \sin^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin^2 x & 2 & 3 \\ \cos^2 x & 5 & 6 \\ \cos^2 x & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

e) Tính chất 5

Định thức sẽ không đổi nếu ta cộng vào 1 dòng (hoặc 1 cột) với λ lần dòng (hoặc cột) khác.

VD 10. Sử dụng tính chất 5 để đưa định thức sau về dạng bậc thang: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Chú ý

Phép biến đổi $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \overset{d_3 \to 4d_3 + d_2}{=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ là sai

vì dòng 3 (trước khi thay đổi) đã nhân với số 4.

VD 11. Sử dụng tính chất 5 để tính $\Delta = \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}$.

2.3. Định lý (***khai triển Laplace***)

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_n \in M_n(\mathbb{R})$, ta có các khai triển Laplace của định thức A:

a) Khai triển theo dòng thứ *i*

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Trong đó, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\det(M_{ij})$.

b) Khai triển theo cột thứ *j*

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

VD 12. Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ bằng hai cách khai triển theo dòng 1 và khai triển theo cột 2.

VD 13. Áp dụng tính chất và định lý Laplace, hãy tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Các kết quả đặc biệt cần nhớ

1) Dạng tam giác

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

2) Dạng tích: $\boxed{\det(AB) = \det A.\det B.}$

3) Dạng chia khối

$$\begin{vmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \dots & \dots \\ O_n & \vdots & C \end{vmatrix} = \det A.\det C, \text{ với } A,\ B,\ C \in M_n(\mathbb{R}).$$

VD 14. Tính $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 7 & 19 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

VD 15. Tính $\det B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 7 & 19 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$

VD 16. Tính $\det C = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right|.$

VD 17. Tính $\det D = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T\right|.$

VD 18. Phương trình $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 2 & x & x & -2 \\ 3 & 8 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$ có nghiệm

là: A. $x = \pm 1$; B. $x = 1$; C. $x = -1$; D. $\left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$.

2.4. Ứng dụng định thức tìm ma trận nghịch đảo

a) Định lý

Ma trận vuông A khả nghịch khi và chỉ khi:

$$\boxed{\det A \neq 0.}$$

VD 19. Giá trị của tham số m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m^2 \end{pmatrix}$$

khả nghịch là:

A. $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$; B. $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$; C. $m \neq 0$; D. $m \neq 1$.

b) Thuật toán tìm A^{-1}

- ***Bước* 1.** Tính $\det A$. Nếu $\det A = 0$ thì kết luận A không khả nghịch. Ngược lại, ta làm tiếp bước 2.
- ***Bước* 2.** Lập ma trận $(A_{ij})_n$, $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$.

  Suy ra ma trận ***phụ hợp (adjunct matrix)*** của A là:

  $$\boxed{adjA = \left[(A_{ij})_n\right]^T.}$$

- ***Bước* 3.** Ma trận nghịch đảo của A là:

  $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}.adjA.}$$

VD 20. Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

VD 21. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Tìm A^{-1}.

2.5. Hạng của ma trận

a) Định thức con cấp *k*

Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Định thức của ma trận con cấp k của A được gọi là *định thức con cấp* k của A.

Định lý

Nếu ma trận A có tất cả các định thức con cấp k đều bằng 0 thì các định thức con cấp $k+1$ cũng bằng 0.

b) Hạng của ma trận (*rank of matrix*)

Cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A được gọi là ***hạng*** của ma trận A.

Ký hiệu là $r(A)$.

Chú ý

- Nếu $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ khác 0 thì $1 \le r(A) \le \min\{m, n\}$.
- Nếu A là *ma trận không* thì ta quy ước $r(A) = 0$.

c) Thuật toán tìm hạng của ma trận

- **Bước 1.** Đưa ma trận cần tìm hạng về bậc thang.
- **Bước 2.** Số dòng khác 0 của ma trận bậc thang chính là hạng của ma trận đã cho.
- **Đặc biệt**

Nếu A là ma vuông cấp n thì:

$$\boxed{r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0.}$$

VD 22. Điều kiện của tham số m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ có hạng bằng 3 là:}$$

A. $m \neq 1$; B. $m \neq -1$; C. $m \neq \pm 1$; D. $m \neq 0$.

VD 23. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 4 \\ 3 & -8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Tìm $r(A)$.

VD 24. Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Tìm $r(A)$.

Chú ý

Ta có thể hoán vị cột của ma trận rồi đưa về bậc thang.

VD 25. Giá trị của tham số m để ma trận

$$A = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & 3 \\ 2 & m+2 & 0 \\ 2m & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ có } r(A) = 2 \text{ là:}$$

A. $\left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 1 \end{array}\right.$; B. $m = 1$; C. $m = -2$; D. $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 0 \end{array}\right.$.

VD 26. Tùy theo giá trị m, tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ m & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & m & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§1. Hệ phương trình tổng quát
§2. Hệ phương trình thuần nhất

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT

1.1. Định nghĩa

Hệ gồm n ẩn x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ và m phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (I)$$

trong đó, hệ số $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$, được gọi là ***hệ phương trình tuyến tính tổng quát***.

Đặt: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & \ldots & b_m \end{pmatrix}^T \text{ và } X = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^T$$

lần lượt là ma trận hệ số, ma trận cột hệ số tự do và ma trận cột ẩn.

Khi đó, hệ (I) trở thành $\boxed{AX = B}$.

- Bộ số $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}^T$ hoặc $\alpha = (\alpha_1; \ldots; \alpha_n)$ được gọi là nghiệm của (I) nếu $A\alpha = B$.

VD 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$$

Hệ phương trình được viết lại dưới dạng ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

và $\alpha = (1; -1; -1; 1)$ là 1 nghiệm của hệ.

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

1.2. Định lý Crocneker – Capelli

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$. Gọi ma trận mở rộng là $\overline{A} = \left(A \middle| B\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$.

Định lý

Hệ $AX = B$ có nghiệm ***khi và chỉ khi*** $\boxed{r(A) = r(\overline{A}).}$

Trong trường hợp hệ $AX = B$ có nghiệm thì:

- Nếu $r(A) = n$: kết luận ***hệ có nghiệm duy nhất***;
- Nếu $r(A) < n$: kết luận ***hệ có vô số nghiệm*** phụ thuộc vào $n - r$ tham số.

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

VD 2. Tùy theo điều kiện tham số m, hãy biện luận số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + my - 3z = 0 \\ \quad (1 - m^2)z = m - 1. \end{cases}$$

VD 3. Điều kiện của tham số m để hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx \qquad + 8z - 7t = m - 1 \\ 3x + my + 2z + 4t = m \\ \qquad\qquad mz + 5t = m^2 - 1 \\ \qquad\qquad 5z - mt = 2m + 2 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất là:

A. $m \neq 0$; B. $m \neq 1$; C. $m \neq \pm 1$; D. $m \neq \pm 5$.

1.3. Phương pháp giải hệ phương trình tổng quát

a) Phương pháp ma trận (tham khảo)

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$, với A là ma trận vuông cấp n khả nghịch.

Ta có:

$$\boxed{AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.}$$

VD 4. Giải hệ phương trình tuyến tính sau bằng phương pháp ma trận:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \quad y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1. \end{cases}$$

b) Phương pháp định thức (*hệ Cramer*)

Cho hệ $AX = B$, với A là ma trận vuông cấp n.

- ***Bước* 1.** Tính các định thức:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ j = \overline{1, n}$$

(thay cột thứ j trong Δ bởi cột tự do).

- ***Bước* 2.** Kết luận:
  - Nếu $\Delta \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất:

$$\boxed{x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ \forall j = \overline{1, n}.}$$

  - Nếu $\Delta = \Delta_j = 0, \ \forall j = \overline{1, n}$ thì hệ có vô số nghiệm (ta thay tham số vào hệ và tính trực tiếp).
  - Nếu $\Delta = 0$ và $\exists \Delta_j \neq 0, \ j = \overline{1, n}$ thì hệ vô nghiệm.

VD 5. Giải hệ phương trình sau bằng định thức:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \quad y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1. \end{cases}$$

VD 6. Hệ phương trình $\begin{cases} (m+1)x + y = m + 2 \\ x + (m+1)y = 0 \end{cases}$

có nghiệm khi và chỉ khi:

A. $m = -2$; B. $m \neq -2 \wedge m \neq 0$;

C. $m \neq 0$; D. $m \neq -2$.

c) Phương pháp ma trận bậc thang

(phương pháp Gauss)

Xét hệ phương trình tuyến tính $AX = B$.

- ***Bước* 1.** Đưa ma trận mở rộng $\left(A\middle|B\right)$ về dạng bậc thang bởi PBĐSC trên dòng.
- ***Bước* 2.** Giải ngược từ dòng cuối cùng lên trên.

Chú ý. Trong quá trình thực hiện bước 1, nếu:

- có 2 dòng tỉ lệ thì xóa đi 1 dòng;
- có dòng nào bằng 0 thì xóa dòng đó;
- có 1 dòng dạng $\left(0 \ldots 0\middle|b\right)$, $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

VD 7. Giải hệ sau bằng phương pháp Gauss:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ \quad y + 3z = 3 \\ 2x + y + z = -1. \end{cases}$$

VD 8. Giải hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

VD 9. Tìm nghiệm của hệ $\begin{cases} \text{x} + 4y + 5z = -1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 1 \end{cases}$.

A. $x = 15, y = -4, z = 0$; B. Hệ có vô số nghiệm;

C. $\begin{cases} x = 15 - 79\alpha \\ y = -4 - 21\alpha; \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 15 + 79\alpha \\ y = -4 - 21\alpha. \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

VD 10. Tìm nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 7 \end{cases}$.

A. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 - 2\alpha; \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

C. Hệ có vô số nghiệm; D. Hệ vô nghiệm.

VD 11. Giá trị của tham số m để hệ phương trình

tuyến tính $\begin{cases} x + 2y + (7 - m)z = 2 \\ 2x + 4y - 5z = 1 \\ 3x + 6y + mz = 3 \end{cases}$

có vô số nghiệm là:

A. $m = \pm 1$; B. $m = 1$; C. $m = -7$; D. $m = 7$.

Chú ý

- Khi hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm, ta gọi nghiệm phụ thuộc tham số là ***nghiệm tổng quát***.

  Nếu cho các tham số bởi các giá trị cụ thể ta được ***nghiệm riêng*** hay còn gọi là ***nghiệm cơ bản***.
- Muốn tìm điều kiện tham số để 2 hệ phương trình có nghiệm chung, ta ghép chúng thành 1 hệ rồi tìm điều kiện tham số để hệ chung đó có nghiệm.

VD 12. Tìm điều kiện của tham số m để 2 hệ phương trình sau có nghiệm chung:

$$\begin{cases} x+y-z+t=2m+1 \\ x+7y-5z-t=-m \end{cases}, \begin{cases} 2x+5y-2z+2t=2m+1 \\ 3x+7y-3z+3t=1 \end{cases}.$$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH THUẦN NHẤT

2.1. Định nghĩa

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là trường hợp đặc biệt của hệ phương trình tổng quát, có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (II).$$

Hệ (II) tương đương với $AX = (0_{ij})_{m\times 1}$.

Chú ý

- Do $r(\overline{A}) = r(A)$ nên hệ thuần nhất luôn có nghiệm.
- Nghiệm (0; 0;…; 0) được gọi là ***nghiệm tầm thường***.

2.2. Định lý 1

Hệ (II) chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi:

$$\boxed{\det A \neq 0.}$$

VD 1. Tìm điều kiện tham số m để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau chỉ có nghiệm tầm thường:

$$\begin{cases} 3x + m^2 y + (m-5)z = 0 \\ (m+2)y + z = 0 \\ 4y + (m+2)z = 0. \end{cases}$$

2.3. Định lý 2

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát $AX = B$ (I) và hệ phương trình thuần nhất $AX = O$ (II).

Khi đó:

- Hiệu 2 nghiệm bất kỳ của (I) là 1 nghiệm của (II);
- Tổng 1 nghiệm bất kỳ của (I) và 1 nghiệm bất kỳ của (II) là 1 nghiệm của (I).

➢ Chương 2. Hệ phương trình tuyến tính

VD 2. Cho 2 hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = -1 \\ 2x + 7y - 11z = 2 \\ 3x + 11y - 6z = 1 \end{cases} \text{(I) và } \begin{cases} x + 4y + 5z = 0 \\ 2x + 7y - 11z = 0 \\ 3x + 11y - 6z = 0 \end{cases} \text{(II).}$$

Xét 2 nghiệm của (I) và 1 nghiệm của (II) lần lượt là:

$\alpha_1 = (15; -4; 0)$, $\alpha_2 = (-64; 17; -1)$

và $\beta = (-158; 42; -2)$, ta có:

- $\alpha_1 - \alpha_2 = (79; -21; 1)$ là 1 nghiệm của (II);
- $\alpha_1 + \beta = (-143; 38; -2)$ là 1 nghiệm của (I).

………………………………………………………

➢ Chương 3. Không gian vector

§1. Khái niệm không gian vector
§2. Sự độc lập tuyến tính và phụ thuộc tuyến tính
§3. Cơ sở, số chiều của kgvt – Tọa độ của vector
§4. Không gian sinh bởi hệ vector
§5. Không gian Euclide

………………………………………………………

§1. KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN VECTOR
(*Vector space*)

1.1. Định nghĩa

- Cho tập V khác rỗng, mỗi phần tử thuộc V được gọi là một vector. Xét hai phép toán sau:

$$\begin{aligned} V \times V &\to V \\ (x, y) &\mapsto x + y; \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\to V \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x. \end{aligned}$$

➢ Chương 3. Không gian vector

- Ta nói V cùng với hai phép toán trên là một ***không gian vector*** (viết tắt là kgvt) trên $\mathbb{R}$, hay $\mathbb{R}$ – không gian vector, nếu thỏa 8 tính chất sau:

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$, $\forall x, y, z \in V$;
2) $\exists \theta \in V : x + \theta = \theta + x = x$, $\forall x \in V$;
3) $\forall x \in V$, $\exists (-x) \in V : (-x) + x = x + (-x) = \theta$;
4) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$;
5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $\forall x, y \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, $\forall x \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
7) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$, $\forall x \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
8) $1.x = x$, $\forall x \in V$.

Trong đó, $\theta \in V$ được gọi là ***vector không***.

VD 1.

- Tập $\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \middle| x_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1, n}\right\}$ các bộ số thực là một không gian vector.
- Tập nghiệm V của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là một không gian vector.
- Tập $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ với hai phép toán cộng ma trận và nhân vô hướng là một không gian vector.
- Tập $P_n[x]$ các đa thức có bậc n:

$\{p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n\}$

với phép cộng đa thức và nhân số thực với đa thức là một không gian vector.

1.2. Không gian vector con (*Vectorial subspace*)

▪ **Định nghĩa**

Cho kgvt V, tập $W \subset V$ được gọi là ***không gian vector con*** của V nếu W cũng là một kgvt.

▪ **Định lý**

Cho kgvt V, tập $W \subset V$ là kgvt con của V nếu:

$$\forall x, y \in W,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ thì } (x + \lambda y) \in W.$$

VD 2.

- Tập $W = \{\theta\}$ là kgvt con của mọi kgvt V.
- Tập $W = \left\{(\alpha, 0, \ldots, 0) \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ là kgvt con của $\mathbb{R}^n$.

§2. SỰ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

2.1. Định nghĩa

Trong kgvt V, xét n vector u_i ($i = 1, \ldots, n$).

Khi đó:

- Tổng $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}$, được gọi là một ***tổ hợp tuyến tính*** của n vector u_i.
- Hệ gồm n vector $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là ***độc lập tuyến tính*** (viết tắt là *đltt*) nếu:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta \text{ thì } \lambda_i = 0, \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Hệ $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ không là độc lập tuyến tính thì được gọi là ***phụ thuộc tuyến tính*** (viết tắt là *pttt*).

VD 1. Trong $\mathbb{R}^2$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ 2 vector:

$$A = \{u_1 = (1; -1),\ u_2 = (2;\ 3)\}.$$

VD 2. Trong $\mathbb{R}^3$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ 3 vector:

$$B = \{u_1 = (-1;\ 3;\ 2), u_2 = (2;\ 0;\ 1), u_3 = (0;\ 6;\ 5)\}.$$

VD 3. Trong $M_{2,3}(\mathbb{R})$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ:

$$\left\{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

VD 4. Trong $P_n[x]$, xét sự *đltt* hay *pttt* của hệ:

$$\{u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2, \ldots,\ u_n = x^{n-1},\ u_{n+1} = x^n\}.$$

2.2. Định lý

Hệ gồm n vector là ***pttt*** khi và chỉ khi tồn tại một vector là tổ hợp tuyến tính của $n-1$ vector còn lại.

Nghĩa là:

$$\boxed{u_j = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{j-1} u_{j-1} + \lambda_{j+1} u_{j+1} + \ldots + \lambda_n u_n.}$$

- **Hệ quả**

- Hệ có ***vector không*** thì phụ thuộc tuyến tính.
- Nếu có một bộ phận của hệ ***pttt*** thì hệ ***pttt***.

VD 5. Hệ $\{v_1 = x^2, v_2 = -3x^2, v_3 = (x-1)^3, v_4 = x^4\}$

là pttt vì bộ phận $\{v_1 = x^2,\ v_2 = -3x^2\}$ pttt.

2.3. Hệ vector trong $\mathbb{R}^n$

Xét m vector $u_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}),\ i = \overline{1, m}$ trong $\mathbb{R}^n$.

Ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ được gọi là ***ma trận dòng*** của hệ m vector $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_m\}$.

VD 6. Hệ $\{u_1 = (1; -1; -2),\ u_2 = (4;\ 2; -3)\}$

có ma trận dòng là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

▪ **Định lý**

Trong $\mathbb{R}^n$, cho hệ gồm m vector $\{u_1, u_2, ..., u_m\}$ có ma trận dòng là A.

Khi đó:

- Hệ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\boxed{r(A) = m.}$
- Hệ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\boxed{r(A) < m.}$

▪ **Hệ quả**

- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ có nhiều hơn n vector thì ***pttt***.
- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ n vector ***đltt*** $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det A \neq 0.}$

<u>VD 7.</u> Xét sự *đltt* hay *pttt* của các hệ vector:

a) $B_1 = \{(-1;\ 2;\ 0),\ (2;\ 1;\ 1)\}$;

b) $B_2 = \{(-1;\ 2;\ 0),\ (1;\ 5;\ 3),\ (2;\ 3;\ 3)\}$.

<u>VD 8.</u> Trong $\mathbb{R}^3$, tìm điều kiện m để hệ sau là *pttt*:

$$\{(-m;\ 1;\ 1),\ (1-4m;\ 3;\ m+2)\}.$$

<u>VD 9.</u> Trong $\mathbb{R}^3$, tìm điều kiện m để hệ sau là *đltt*:

$$\{(m;\ 1;\ 1),\ (1;\ m;\ 1),\ (1;\ 1;\ m)\}.$$

<u>VD 10.</u> Trong $\mathbb{R}^4$, cho 4 vector:

$$u_1 = (1;-1;\ 0;\ 1),\ u_2 = (m;\ m;-1;\ 2),$$

$$u_3 = (0;\ 2;\ 0;\ m),\ u_4 = (2;\ 2;-m;\ 4).$$

Điều kiện m để u_1 là tổ hợp tuyến tính của $u_2,\ u_3,\ u_4$?

<u>Giải.</u> Ta có:

u_1 là tổ hợp tuyến tính của $u_2,\ u_3,\ u_4$

$\Leftrightarrow$ hệ $\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\}$ là phụ thuộc tuyến tính.

§3. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KGVT TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

3.1. Cơ sở của không gian vector

- **Định nghĩa**

Trong kgvt V, hệ n vector $F = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là một ***cơ sở*** (*basic*) của V nếu hệ F là *đltt* và mọi vector của V đều được biểu diễn tuyến tính qua F.

VD 1. Trong $\mathbb{R}^2$, xét hệ $F = \{u_1 = (1; -1),\ u_2 = (0;\ 1)\}$.

Ta có: hệ F là độc lập tuyến tính.

Mặt khác, xét vector tùy ý $x = (a;\ b) \in \mathbb{R}^2$ ta có:

$$x = au_1 + (a+b)u_2.$$

Vậy hệ F là 1 cơ sở của $\mathbb{R}^2$.

VD 2. Trong $\mathbb{R}^3$, xét hệ 2 vector:

$$B = \{u_1 = (1;\ 0;\ 0),\ u_2 = (0;\ 1;\ 0)\}.$$

Ta có: $\alpha u_1 + \beta u_2 \neq (1;\ 1;\ 1),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vậy hệ B không phải là cơ sở của $\mathbb{R}^3$.

VD 3.

- Trong $\mathbb{R}^n$, hệ n vector:

$$E = \{e_i = (a_{i1};\ a_{i2}; \ldots;\ a_{in}),\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

trong đó: $a_{ij} = 1$ nếu $i = j$, $a_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$

được gọi là ***cơ sở chính tắc***.

- Không gian vector $P_4[x]$ có 1 cơ sở là:

$$\{1;\ x-1;\ (x-1)^2;\ (x-1)^3;\ (x-1)^4\}.$$

- ***Chú ý***

Một không gian vector có thể có nhiều cơ sở và số vector (hữu hạn) trong các cơ sở là không đổi.

3.2. Số chiều của không gian vector

- **Định nghĩa**

Số vector có trong 1 cơ sở bất kỳ của không gian vector V được gọi là ***số chiều*** (*dimension*) của V.

Ký hiệu là: $\dim V$.

VD 4. Ta có: $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim P_4[x] = 5$.

- ***Chú ý***

• Trong $\mathbb{R}^n$, mọi hệ gồm n vector *đltt* đều là cơ sở.

• Số chiều của kgvt có thể vô hạn. Trong chương trình, ta chỉ xét những kgvt hữu hạn chiều.

3.3. Tọa độ của vector

a) Định nghĩa

Trong kgvt V, cho cơ sở $F = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Vector $x \in V$ tùy ý có biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua cơ sở F là $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Ta nói x có ***tọa độ đối với cơ sở*** F là $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n)$.

Ký hiệu là: $[x]_F = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n)^T$.

- ***Quy ước***

Ta viết tọa độ của vector x đối với cơ sở chính tắc E trong $\mathbb{R}^n$ là $[x]$ hoặc viết dưới dạng $x = (\alpha_1; \ldots; \alpha_n)$.

VD 5. Trong $\mathbb{R}^2$, cho $x = (3; -5)$ và 1 cơ sở:

$B = \{u_1 = (2; -1),\ u_2 = (1; 1)\}$. Tìm $[x]_B$?

VD 6. Trong $P_4[x]$, cho vector $p(x) = x^4 + x^3$ và một cơ sở:

$$A = \{u_1 = 1;\ u_2 = x - 1;\ u_3 = (x-1)^2;\ u_4 = (x-1)^3;\ u_5 = (x-1)^4\}.$$

Hãy tìm $[p(x)]_A$?

VD 7. Trong $\mathbb{R}^2$, cho 2 cơ sở:

$$B_1 = \{u_1 = (1;\ 0),\ u_2 = (0; -1)\},$$

$$B_2 = \{v_1 = (2; -1),\ v_2 = (1;\ 1)\}.$$

Cho biết $[x]_{B_2}$ là (1; 2). Hãy tìm $[x]_{B_1}$?

b) Tọa độ của vector trong các cơ sở khác nhau

- **Ma trận chuyển cơ sở**

Trong kgvt V, cho 2 cơ sở:

$$B_1 = \{u_i\},\ B_2 = \{v_i\},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Ma trận $\left([v_1]_{B_1}\ [v_2]_{B_1} \dots [v_n]_{B_1}\right)$ được gọi là ***ma trận chuyển cơ sở*** từ B_1 sang B_2.

Ký hiệu là: $P_{B_1 \to B_2}$.

Đặc biệt

Trong $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$\boxed{P_{E \to B_1} = \left([u_1]\ [u_2] \dots [u_n]\right)}$$

(ma trận cột của các vector trong B_1).

- **Công thức đổi tọa độ**

$$\boxed{[x]_{B_1} = P_{B_1 \to B_2} . [x]_{B_2}.}$$

VD 8. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hai cơ sở B_1 và B_2.

Cho biết $P_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ và $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Tìm tọa độ của vector v trong cơ sở B_2 ?

VD 9. Tìm ma trận chuyển cơ sở $P_{B_1 \to B_2}$ trong VD 7.

- **Định lý**

  Trong kgvt V, cho 3 cơ sở B_1, B_2 và B_3. Khi đó:

- $P_{B_i \to B_i} = I_n$ $(i = 1, 2, 3)$;
- $P_{B_1 \to B_3} = P_{B_1 \to B_2}.P_{B_2 \to B_3}$;
- $P_{B_1 \to B_2} = \left(P_{B_2 \to B_1}\right)^{-1}$.

- **Hệ quả**

  Trong $\mathbb{R}^n$, ta có:

$$\boxed{P_{B_1 \to B_2} = P_{B_1 \to E} P_{E \to B_2} = \left(P_{E \to B_1}\right)^{-1} P_{E \to B_2}.}$$

VD 10. Dựa vào hệ quả, giải lại VD 7.

§4. KHÔNG GIAN SINH BỞI HỆ VECTOR

4.1. Định nghĩa

Trong kgvt V cho hệ gồm m vector $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là ***không gian con sinh bởi*** S.

Ký hiệu là: $< S >$ hoặc $spanS$.

4.2. Hệ vector trong $\mathbb{R}^n$

Trong kgvt $\mathbb{R}^n$, xét hệ $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ ta có:

$$< S > = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Gọi A là ma trận dòng m vector của S.
Khi đó:

- $\dim < S > = r(A)$ và $\dim < S > \le n$.
- Nếu $\dim < S > = k$ thì mọi hệ con gồm k vector ***đltt*** của S đều là cơ sở của $< S >$.

VD 1. Trong $\mathbb{R}^3$, cho hệ vector:

$$S = \{u_1 = (1;\, 0; -1),\ u_2 = (0;\, 1; -1)\}.$$

Hãy tìm dạng tọa độ của vector $v \in < S >$?

VD 2. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector:

$$S = \{(1;2;3;4),\ (2;4;9;6),\ (1;2;5;3),\ (1;2;6;3)\}.$$

Tìm số chiều của không gian sinh $< S >$?

VD 3. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ vector S:

$$\{u_1 = (-2;4;-2;-4), u_2 = (2;-5;-3;1), u_3 = (-1;3;4;1)\}.$$

Hãy tìm $\dim < S >$ và 1 cơ sở của $< S >$?

§5. KHÔNG GIAN EUCLIDE

5.1. Định nghĩa

- Cho không gian vector V trên $\mathbb{R}$. Một quy luật cho tương ứng cặp vector $x,\ y$ bất kỳ thuộc V với số thực duy nhất, ký hiệu $\langle x | y \rangle$ (hay $(x,\ y)$), thỏa mãn:

1) $\langle x | x \rangle \ge 0$ và $\langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

2) $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$;

3) $\langle (x + y) | z \rangle = \langle x | z \rangle + \langle y | z \rangle,\ \forall z \in V$;

4) $\langle \lambda x | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

được gọi là ***tích vô hướng*** của x và y.

- Không gian vector V hữu hạn chiều trên $\mathbb{R}$ có tích vô hướng như trên được gọi là ***không gian Euclide***.

VD 1. Kgvt $\mathbb{R}^n$ có tích vô hướng thông thường:

$$\langle x|y\rangle = \langle (x_1,\ldots,x_n)|(y_1,\ldots,y_n)\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

là một không gian Euclide.

VD 2. Trong $C[a; b]$ – không gian các hàm số thực liên tục trên $[a; b]$, ta xác định được tích vô hướng:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Vậy $C[a; b]$ có tích vô hướng như trên là kg Euclide.

5.2. Chuẩn của vector

a) Định nghĩa

- Trong không gian Euclide V, số thực $\sqrt{\langle u|u\rangle}$ được gọi là ***chuẩn*** (hay độ dài) của vector u.

  Ký hiệu là $\|u\|$.

  Vậy, $\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle}$.

- Vector u được gọi là ***vector đơn vị*** nếu $\|u\| = 1$.

- $d(u, v) = \|u - v\|$ được gọi là ***khoảng cách*** giữa u, v.

VD 3. Trong $\mathbb{R}^n$ cho vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, ta có:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u\rangle} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

VD 4. Trong không gian Euclide $C[a; b]$, ta có:

$$\|f\| = \sqrt{\langle f|f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

b) Định lý

Trong kg Euclide V cho 2 vector $u,\ v$ bất kỳ. Ta có:

- Bất đẳng thức *Cauchy – Schwarz*

$$\left|\left\langle u\middle|v\right\rangle\right| \le \|u\|.\|v\|;$$

- Bất đẳng thức tam giác

$$\left|\|u\| - \|v\|\right| \le \|u+v\| \le \|u\| + \|v\|.$$

VD 5. Trong $\mathbb{R}^n$, bất đẳng thức Cauchy – Schwarz là:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,.\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\,.$$

VD 6. Trong $C[a;\ b]$, bất đẳng thức Cauchy–Schwarz:

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\,.\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\,.$$

5.3. Cơ sở trực chuẩn

a) Định nghĩa

Trong không gian Euclide n chiều V, ta định nghĩa:

- Hai vector $u,\ v$ được gọi là ***trực giao*** nếu $\left\langle u\middle|v\right\rangle = 0;$
- Cơ sở $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là ***cơ sở trực giao*** nếu các vector của cơ sở là trực giao từng đôi một;
- Cơ sở $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ được gọi là ***cơ sở trực chuẩn*** nếu cơ sở là trực giao và $\|u_i\| = 1,\ (i = 1, \ldots, n).$

VD 7. Trong $\mathbb{R}^2$, ta có:

- Hệ $\{(2;-1),\ (-3;-6)\}$ là cơ sở trực giao;
- Hệ $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ là cơ sở trực chuẩn.

b) Định lý

Mọi kg Euclide n chiều đều tồn tại cơ sở trực chuẩn.

▪ **Thuật toán trực chuẩn hóa Gram – Schmidt**

- **Bước 1.** Trong không gian Euclide n chiều V, chọn cơ sở $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bất kỳ.
- **Bước 2.** Xây dựng cơ sở trực giao $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$:

Đặt $v_1 = u_1$;

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1;$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3 | v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3 | v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2;$$

… … … … … … … … … … … … …

$$v_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle u_n | v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

- **Bước 3.** Xây dựng cơ sở trực chuẩn $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ bằng việc chuẩn hóa các vector ở bước 2:

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|};\ w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|};\ w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|};\ldots;\ w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}.$$

VD 8. Trong $\mathbb{R}^3$, hãy trực chuẩn hóa cơ sở:

$F = \{u_1 = (1;\ 0;\ 0),\ u_2 = (0;\ 1;\ 1),\ u_3 = (0;\ 1;-1)\}.$

➢ Chương 3. Không gian vector

▪ **Định lý**

Nếu $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của kg Euclide n chiều V và $u \in V$ thì:

$$\boxed{u = \sum_{i=1}^{n} \langle u | u_i \rangle u_i.}$$

VD 9. Trong $\mathbb{R}^3$, hãy trực chuẩn hóa cơ sở:

$\{u_1 = (1; -1; 0),\ u_2 = (0; 1; -1),\ u_3 = (1; 1; -1)\}$.

Tìm tọa độ của $u = (1; 2; 3)$ trong cơ sở trực chuẩn đó.

VD 10. Trong $\mathbb{R}^4$, cho hệ S gồm 3 vector:

$\{u_1 = (1; 1; 0; 0),\ u_2 = (1; 0; 1; 0),\ u_3 = (-1; 0; 0; 1)\}$.

Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của không gian $< S >$.

➢ Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

§1. Ánh xạ tuyến tính
§2. Trị riêng – Vector riêng
§3. Chéo hóa ma trận vuông

§1. ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

1.1. Khái niệm ánh xạ tuyến tính tổng quát

a) Định nghĩa

Cho X, Y là 2 kgvt trên $\mathbb{R}$. Ánh xạ $T : X \to Y$ được gọi là ***ánh xạ tuyến tính*** (hay toán tử tuyến tính) nếu thỏa mãn 2 điều kiện sau:

1) $T(\alpha x) = \alpha T(x),\ \forall x \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$;

2) $T(x + y) = T(x) + T(y),\ \forall x, y \in X$.

➢ Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

▪ ***Chú ý***

- Đối với ánh xạ tuyến tính (viết tắt là AXTT), ký hiệu $T(x)$ còn được viết là Tx.
- Hai điều kiện của định nghĩa tương đương với: $T(x + \alpha y) = Tx + \alpha Ty,\ \forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $T(\theta_X) = \theta_Y$. Trong đó θ_X, θ_Y lần lượt là *vector không* của X và Y.

VD 1. Cho ánh xạ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa:

$$T(x_1;\, x_2;\, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3;\; 2x_1 + 3x_2).$$

Trong $\mathbb{R}^3$, xét $x = (x_1;\, x_2;\, x_3)$, $y = (y_1;\, y_2;\, y_3)$.

Với $\alpha \in \mathbb{R}$ tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} T(x + \alpha y) &= T(x_1 + \alpha y_1;\, x_2 + \alpha y_2;\, x_3 + \alpha y_3) \\ &= (x_1 + \alpha y_1 - x_2 - \alpha y_2 + x_3 + \alpha y_3; \\ &\quad 2x_1 + 2\alpha y_1 + 3x_2 + 3\alpha y_2) \\ &= (x_1 - x_2 + x_3;\, 2x_1 + 3x_2) \\ &\quad + \alpha(y_1 - y_2 + y_3;\, 2y_1 + 3y_2) = Tx + \alpha Ty. \end{aligned}$$

Vậy ánh xạ T là ánh xạ tuyến tính từ $\mathbb{R}^3$ vào $\mathbb{R}^2$.

VD 2. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định như sau:

$$f(x;\, y) = (x - y;\, 2 + 3y).$$

Xét $u = (1;\, 2)$, $v = (0; -1)$ ta có:

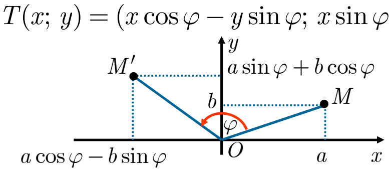
$$\begin{cases} f(u+v) = f(1;\,1) = (1-1;\, 2+3.1) = (0;\,5) \\ f(u) + f(v) = (-1;\,8) + (1;-1) = (0;\,7) \end{cases}$$

$\Rightarrow f(u+v) \neq f(u) + f(v)$.

Vậy ánh xạ f không phải là AXTT từ $\mathbb{R}^2$ vào $\mathbb{R}^2$.

VD 3. Các AXTT thường gặp trong mặt phẳng:

- Phép chiếu vuông góc xuống trục Ox, Oy:
  $$T(x;\, y) = (x;\, 0),\; T(x;\, y) = (0;\, y).$$
- Phép đối xứng qua trục Ox, Oy:
  $$T(x;\, y) = (x; -y),\; T(x;\, y) = (-x;\, y).$$
- Phép quay 1 góc φ quanh gốc tọa độ O:
  $$T(x;\, y) = (x\cos\varphi - y\sin\varphi;\; x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$



VD 4. Gọi $C[a;\,b]$ là tập hợp các hàm một biến số liên tục trên $[a;\,b]$. Trên $C[a;\,b]$, xác định phép toán cộng hai hàm số và nhân vô hướng thì $C[a;\,b]$ là 1 kgvt.

Các phép lấy tích phân sau là ánh xạ tuyến tính:

$$T : C[a;\,b] \to C[a;\,b],\ Tf = \int_a^a f(x)dx;$$

$$S : C[a;\,b] \to C[a;\,b],\ Sf = \int_a^x f(t)dt,\ x \in [a;\,b].$$

VD 5. Cho $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ta có:

$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ T_A x = Ax$ là ánh xạ tuyến tính.

b) Nhân và ảnh của ánh xạ tuyến tính

- **Định nghĩa**

Cho ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$.

- Tập $\{x \in X : Tx = \theta_Y\}$ được gọi là ***nhân*** của T.
  Ký hiệu là $KerT$.
  Vậy $KerT = \{x \in X : Tx = \theta_Y\}$.

- Tập $T(X) = \{Tx : x \in X\}$ được gọi là ***ảnh*** của T.
  Ký hiệu là $RangeT$ hoặc $\operatorname{Im} T$.
  Vậy $\operatorname{Im} T = \{Tx : x \in X\}$.

- **Tính chất**

Cho ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$, khi đó:

- $KerT$ là không gian con của X;
- $\operatorname{Im} T$ là không gian con của Y;
- Nếu S là tập sinh của X thì $T(S)$ là tập sinh của $\operatorname{Im} T$;
- T là đơn ánh khi và chỉ khi $KerT = \{\theta_X\}$.

- **Định lý**

Cho ánh xạ tuyến tính $T : X \to Y$, khi đó:

$$\boxed{\dim(KerT) + \dim(\operatorname{Im} T) = \dim X.}$$

➢ ***Chú ý***

- Từ đây về sau, ta chỉ xét loại AXTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- Khi $n = m$, ta gọi $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ***phép biến đổi tuyến tính*** (viết tắt là PBĐTT).

1.2. Ma trận của ánh xạ tuyến tính

a) Định nghĩa

Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và hai cơ sở của $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ lần lượt là:

$$B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ và } B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}.$$

Ma trận $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$: $\left([f(u_1)]_{B_2}\ [f(u_2)]_{B_2}\ \ldots [f(u_n)]_{B_2}\right)$

được gọi là ***ma trận của AXTT*** f trong cặp cơ sở B_1, B_2.

Ký hiệu là: $[f]_{B_1}^{B_2}$ hoặc viết đơn giản là A.

Cụ thể là, nếu:

$$\begin{cases} f(u_1) = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + a_{31}v_3 + \ldots + a_{m1}v_m \\ f(u_2) = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + a_{32}v_3 + \ldots + a_{m2}v_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(u_n) = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + a_{3n}v_3 + \ldots + a_{mn}v_m \end{cases}$$

$$\text{thì } [f]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

▪ **Trường hợp đặc biệt**

Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và cơ sở $B=\{u_1,\dots,u_n\}$.
Ma trận vuông A cấp n: $\left([f(u_1)]_B\,[f(u_2)]_B \dots [f(u_n)]_B\right)$
được gọi là ***ma trận của PBĐTT*** f trong cơ sở B.
Ký hiệu là: $[f]_B$ hoặc $[f]$ hoặc viết đơn giản là A.

Chú ý

Nếu A là ma trận của AXTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ trong cặp cơ sở chính tắc E_n, E_m thì $f(x)=Ax$, $x\in\mathbb{R}^n$.

VD 6. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:
$f(x;y;z;t)=(3x+y-z;\ x-2y+t;\ y+3z-2t)$.
Tìm ma trận $A=[f]_{E_4}^{E_3}$? Kiểm tra $f(v)=Av$, $v\in\mathbb{R}^4$?

VD 7. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:
$$f(x;\ y)=(3x;\ x-2y;-5y).$$
Tìm ma trận $[f]_{E_2}^{E_3}$?

VD 8. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định như sau:
$$f(x;\ y;\ z)=(3x+y-z;\ x-2y;\ y+3z).$$
Tìm ma trận $[f]_{E_3}$?

VD 9. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức:
$$f(x;\ y)=(2x-y;\ 3y).$$
Hãy tìm ma trận của f trong cặp cơ sở chính tắc E và cơ sở $B=\{u_1=(1;\ 2),\ u_2=(-1;\ 3)\}$?

VD 10. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận của f đối với cơ sở $F=\{u_1=(1;\ 0),\ u_2=(1;\ 1)\}$ là
$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$. Hãy tìm biểu thức của f ?

VD 11. Cho PBĐTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Biết rằng:
$f(1;\ 2)=(-4;\ 3)$ và $f(3;\ 4)=(-6;\ 7)$. Hãy tìm $[f]_E$?

VD 12. Cho AXTT $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ có $\left[f\right]_{E_2}^{E_3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Tìm ma trận $\left[f\right]_{B_1}^{B_2}$, biết hai cơ sở:

$B_1 = \{u_1 = (1;\,1),\ u_2 = (1;\,2)\}$ và

$B_2 = \{v_1 = (1;\,0;\,1), v_2 = (1;\,1;\,1), v_3 = (1;\,0;\,0)\}$.

b) Định lý

Nếu AXTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ có $\left[f\right]_{B_1}^{B_1'} = A_1$, $\left[f\right]_{B_2}^{B_2'} = A_2$

và $P = P_{B_1 \to B_2}$, $P' = P_{B_1' \to B_2'}$ thì:

$$\boxed{A_2 = (P')^{-1}.A_1.P}$$

▪ **Đặc biệt**

Nếu PBĐTT $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có $[f]_{B_1} = A$, $[f]_{B_2} = B$

và $P = P_{B_1 \to B_2}$ thì:

$$\boxed{B = P^{-1}.A.P}.$$

$$\begin{tikzcd} \left[f\right]_{B_1}^{B_1'} = A_1 \arrow[rr, bend left, "P'"] \arrow[rr, bend right, "P"'] & & A_2 = \left[f\right]_{B_2}^{B_2'} \end{tikzcd}$$

$$A_2 = (P')^{-1} A_1 P$$

VD 13. Cho PBĐTT $f(x;\ y) = (x + y;\ x - 2y)$.

Tìm $[f]_B$, với cơ sở $B = \{(2;\ 1),\ (1; -1)\}$?

VD 14. Cho PBĐTT $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ có biểu thức:

$f(x;\ y;\ z) = (x + y + z;\ x - y + z;\ x + y - z)$.

Tìm $[f]_F$, với $F = \{(2;\ 1;\ 0),\ (1;\ 0;\ 1),\ (-1;\ 0;\ 1)\}$?

VD 15. Cho AXTT $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức:

$f(x;\ y;\ z) = (x + y - z;\ x - y + z)$.

Tìm ma trận của f trong cặp cơ sở:

$B = \{(1;\ 1;\ 0),\ (0;\ 1;\ 1),\ (1;\ 0;\ 1)\}$

và $B' = \{(2;\ 1),\ (1;\ 1)\}$?

c) Thuật toán tìm ma trận của AXTT

Cho AXTT $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và hai cơ sở lần lượt là:

$B_1 = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ và $B_2 = \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_m\}$.

- **Bước 1.** Tìm các ma trận:

$$S = \left([v_1]_{E_m}\ [v_2]_{E_m} \ldots [v_m]_{E_m}\right)$$

(ma trận cột các vector của B_2),

$$Q = \left([f(u_1)]_{E_n}\ [f(u_2)]_{E_n} \ldots [f(u_n)]_{E_n}\right).$$

- **Bước 2.** Dùng PBĐSC dòng đưa ma trận $\left(S \middle| Q\right)$

về dạng $\left(I \middle| [f]_{B_1}^{B_2}\right)$.

VD 16. Cho PBĐTT $f(x;\, y) = (x + y;\, x - 2y)$.

Dùng thuật toán tìm $[f]_B$, với $B = \{(2;\, 1),\, (1; -1)\}$?

VD 17. Cho AXTT $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có biểu thức:

$$f(x;\, y;\, z) = (x + y - z;\, x - y + z).$$

Dùng thuật toán tìm ma trận của f trong cặp cơ sở:

$$B = \{(1;\, 1;\, 0),\, (0;\, 1;\, 1),\, (1;\, 0;\, 1)\}$$

và $B' = \{(2;\, 1),\, (1;\, 1)\}$?

VD 18. Cho AXTT $f(x;\, y) = (x + y;\, y - x;\, x)$ và cặp cơ sở: $A = \{(1;\, 0;\, 0),\, (1;\, 1;\, 0),\, (1;\, 1;\, 1)\}$, $B = \{(1; -2),\, (3;\, 4)\}$. Dùng thuật toán, tìm $[f]_B^A$?

d) Hạng của ánh xạ tuyến tính

- **Định nghĩa**

Hạng của AXTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ***số chiều*** của không gian ảnh của nó.

Nghĩa là:

$$\boxed{r(f) = \dim(\operatorname{Im} f).}$$

- **Định lý**

Hạng của AXTT bằng hạng ma trận của nó.

VD 19. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận trong cơ sở F là $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Vậy $r(f) = r(A) = 1$.

VD 20. Cho AXTT $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận trong cặp cơ sở $B,\, B'$ là $[f]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vậy $r(f) = r\left([f]_B^{B'}\right) = 2$.

§2. TRỊ RIÊNG – VECTOR RIÊNG

2.1. Ma trận đồng dạng

▪ **Định nghĩa**

Hai ma trận vuông A, B cấp n được gọi là ***đồng dạng*** với nhau nếu tồn tại ma trận khả nghịch P thỏa:

$$\boxed{B = P^{-1}AP.}$$

VD 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ là đồng dạng với nhau vì có $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ khả nghịch thỏa $B = P^{-1}AP$.

▪ **Định lý**

Hai ma trận vuông cùng biểu diễn một PBĐTT (trong hai cơ sở tương ứng) thì đồng dạng với nhau.

2.2. Đa thức đặc trưng

▪ **Định nghĩa**

• Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Đa thức bậc n của λ:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

được gọi là ***đa thức đặc trưng*** (*characteristic polynomial*) của A và phương trình $P_A(\lambda) = 0$ được gọi là ***phương trình đặc trưng*** của A.

• Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Đa thức bậc n của λ:

$$P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

được gọi là ***đa thức đặc trưng*** của f (A là ma trận biểu diễn f trong một cơ sở nào đó) và $P_f(\lambda) = 0$ được gọi là ***phương trình đặc trưng*** của f.

VD 2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ta có:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

▪ **Định lý**

Hai ma trận đồng dạng thì có cùng đa thức đặc trưng.

VD 3. Cho PBĐTT $f(x;\, y;\, z) = (x - y;\, y - z;\, z - x)$.

Hãy tìm phương trình đặc trưng của f ?

Giải. Gọi $A = [f]_E$, ta có: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P_f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Chú ý

Từ đây về sau, ta gọi đa thức (phương trình) đặc trưng chung cho PBĐTT f và ma trận A biểu diễn f.

2.3. Trị riêng, vector riêng

a) Trị riêng, vector riêng của PBĐTT

▪ **Định nghĩa**

Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

- Số $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là ***trị riêng*** (*eigenvalue*) của f nếu tồn tại vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta$: $f(x) = \lambda x$ (1).
- Vector $x \neq \theta$ thỏa (1) được gọi là ***vector riêng*** (*eigenvector*) của f ứng với trị riêng λ.

VD 4. Cho PBĐTT $f(x_1;\, x_2) = (4x_1 - 2x_2;\, x_1 + x_2)$.

Xét số $\lambda = 3$ và vector $x = (2;\, 1)$, ta có:

$$f(x) = f(2;\, 1) = (6;\, 3) = 3(2;\, 1) = \lambda x.$$

Vậy $x = (2;\, 1)$ là vector riêng ứng với trị riêng $\lambda = 3$.

b) Trị riêng, vector riêng của ma trận

▪ **Định nghĩa**

Cho ma trận vuông $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- Số $\lambda \in \mathbb{R}$ được gọi là ***trị riêng*** của A nếu tồn tại vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \theta$: $A[x] = \lambda[x]$ (2).
- Vector $x \neq \theta$ thỏa (2) được gọi là ***vector riêng*** của A ứng với trị riêng λ.

▪ **Định lý**

- Số thực λ là trị riêng của PBĐTT f khi và chỉ khi λ là trị riêng của ma trận A biểu diễn f trong một cơ sở B nào đó.
- Vector $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}$ là vector riêng của f ứng với λ khi và chỉ khi $[x]_B$ là vector riêng của A ứng với λ.
- Các vector riêng của f (hay A) ứng với trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính.

Nhận xét

$$A[x] = \lambda[x] \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)[x] = [\theta] \text{ (3)}.$$

Để $x \neq \theta$ là vector riêng của A thì (3) phải có nghiệm không tầm thường. Suy ra $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
Vậy λ là ***nghiệm của phương trình đặc trưng***.

- **Phương pháp tìm trị riêng và vector riêng**

- **Bước 1.** Giải phương trình đặc trưng $|A - \lambda I| = 0$ để tìm giá trị riêng λ.
- **Bước 2.** Giải hệ phương trình $(A - \lambda I)[x] = [\theta]$, ***nghiệm không tầm thường là vector riêng***.

➢ Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

VD 5. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận biểu diễn là $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm trị riêng và vector riêng của f ?

VD 6. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm trị riêng và vector riêng của A ?

➢ Chương 4. Ánh xạ tuyến tính

2.4. Không gian con riêng

- **Định lý**

Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tập hợp tất cả các vector $x \in \mathbb{R}^n$ thỏa $f(x) = \lambda x,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (kể cả vector không) là một không gian con của $\mathbb{R}^n$. Ký hiệu là $E(\lambda)$.

- **Định nghĩa**

Không gian con $E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) = \lambda x\}$ được gọi là ***không gian con riêng*** *(eigenvector space)* của $\mathbb{R}^n$ ứng với trị riêng λ.

Chú ý

- Các nghiệm cơ bản ***đltt*** của hệ phương trình thuần nhất $(A - \lambda I)[x] = [\theta]$ tạo thành 1 cơ sở của $E(\lambda)$.
- Số chiều của không gian con riêng là:

$$\boxed{\dim E(\lambda) = n - r(A - \lambda I).}$$

- Nếu λ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng thì:

$$\boxed{\dim E(\lambda) \le k.}$$

VD 7. Xét tiếp VD 6, ta có:

- Nghiệm cơ bản của $(A - \lambda_1 I)[x] = [\theta]$ là $(1;\ 0; -1)$ nên $E(-1) = \left\langle (1;\ 0; -1) \right\rangle$ và $\dim E(-1) = 1$.
- $E(1) = \left\langle (1;\ 0;\ 1),\ (0;\ 1;\ 0) \right\rangle$ và $\dim E(1) = 2$.

VD 8. Cho ma trận $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Tìm số chiều của các không gian con riêng ứng với các giá trị riêng của B ?

VD 9. Cho ma trận $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Tìm một cơ sở của các không gian con riêng ứng với các giá trị riêng của C ?

VD 10. Cho ma trận $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Tìm trị riêng, dạng vector riêng tương ứng và cơ sở của các không gian con riêng của D ?

2.5. Định lý Cayley – Hamilton

Nếu PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ có ma trận biểu diễn là A và đa thức đặc trưng là $P_f(\lambda)$ thì:

$$\boxed{P_f(A) = (0_{ij})_n.}$$

VD 11. Cho PBĐTT $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ có ma trận biểu diễn là $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ và $P_f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

VD 12. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $\det B$?

Trong đó, $B = A^7 - 10A^6 + 14A^5 + 4A^4 + 8I_3$.

§3. CHÉO HÓA MA TRẬN VUÔNG

Trong bài này, ta xét $A \in M_n(\mathbb{R})$ là ma trận biểu diễn PBĐTT $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ trong cơ sở B nào đó của $\mathbb{R}^n$.

3.1. Ma trận chéo hóa được

- **Định nghĩa**

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ được gọi là ***chéo hóa được*** nếu A đồng dạng với ma trận đường chéo D.

Nghĩa là tồn tại ma trận P khả nghịch, thỏa:

$$\boxed{P^{-1}AP = D.}$$

VD 1. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ là chéo hóa được, vì:

có $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ thỏa: $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2. Điều kiện ma trận chéo hóa được

- **Định lý 1**

Ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ là chéo hóa được khi và chỉ khi $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở gồm n ***vector riêng*** của A.

- **Hệ quả**

Nếu ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ có n ***trị riêng phân biệt*** thì chéo hóa được.

▪ **Định lý 2**

Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ có k trị riêng λ_i $\left(i = \overline{1,\ k}\right)$ phân biệt và $n_i = \dim E(\lambda_i)$.

Khi đó, ba điều sau đây là tương đương:

1) Ma trận A chéo hóa được;

2) Đa thức đặc trưng của A có dạng:

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} + (\lambda - \lambda_2)^{n_2} + \ldots + (\lambda - \lambda_k)^{n_k};$$

3) $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n.$

3.3. Ma trận làm chéo hóa

• Cho ma trận $A \in M_n(\mathbb{R})$ chéo hóa được. Khi đó, tồn tại ma trận P khả nghịch thỏa $P^{-1}AP = D$.

Trong đó, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$

• Xét ma trận $P = ([u_1]\ [u_2] \ldots [u_n])$, ta có:

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow AP = PD$$

$$\Rightarrow A[u_i] = P[u_i] \Rightarrow A[u_i] = \lambda_i[u_i]\ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Suy ra λ_i là trị riêng và u_i là vector riêng của A.

• Vậy P là ma trận có ***các cột*** là các ***vector riêng đltt*** của A. Ma trận chéo D gồm các trị riêng ***tương ứng*** với các vector riêng trong ma trận P.

VD 2. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ có 2 trị riêng là:

$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1.$

- Ứng với $\lambda_1 = -2$ có 2 vector riêng *đltt* là:

$$u_1 = (1;\ 0; -1),\ u_2 = (0;\ 1; -1).$$

- Ứng với $\lambda_2 = 1$ có 1 vector riêng là $u_3 = (1; -1;\ 1)$.

Vậy $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ và $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nhận xét

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$$

$$\Rightarrow A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = PD^kP^{-1} = P.[diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)]^k.P^{-1}.$$

Vậy $\boxed{A^k = P.diag(\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k).P^{-1}.}$

VD 3. Tiếp VD 2, ta có:

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1023 & 1023 \\ 1023 & 2047 & -1023 \\ 1023 & 1023 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Thuật toán chéo hóa ma trận vuông A cấp n

Bước 1. Giải $|A - \lambda I| = 0$ tìm trị riêng thực của A.

- Trường hợp A không có trị riêng thực nào thì ta kết luận A ***không chéo hóa được***.
- Trường hợp A có n trị riêng phân biệt thì A ***chéo hóa được***. Ta làm tiếp bước 3 (bỏ qua bước 2).
- Trường hợp A có k trị riêng phân biệt $\lambda_i (i = 1, \ldots, k)$ với số bội tương ứng n_i thì nếu:
  - $n_1 + n_2 + \ldots + n_k < n \Rightarrow A$ ***không chéo hóa được***.
  - $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, ta làm tiếp bước 2.

Bước 2. Với mỗi λ_i ta tìm $r(A - \lambda_i I) = r_i$.

Suy ra $\dim E(\lambda_i) = n - r_i$.

- Nếu có một λ_i mà $\dim E(\lambda_i) < n_i$ thì ta kết luận A ***không chéo hóa được***.
- Nếu $\dim E(\lambda_i) = n_i$ với mọi λ_i thì A ***chéo hóa được***. Ta làm tiếp bước 3.

Bước 3. Lập ma trận P có các cột là các vector cơ sở của $E(\lambda_i)$. Khi đó, $P^{-1}AP = D$ với D là ma trận chéo có các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là λ_i (mỗi λ_i xuất hiện liên tiếp n_i lần).

VD 4. Ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ có trị riêng bội hai là $\lambda = 2$ (xem VD 9, §2, chương 4).

Do $\dim E(2) = 1 < 2$ nên A không chéo hóa được.

VD 5. Ma trận nào sau đây chéo hóa được:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A. A và B; B. B và C; C. C và A; D. A, B và C.

VD 6. Chéo hóa (nếu được) ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

VD 7. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Tính A^{2010}.

VD 8. Chéo hóa ma trận $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -6 & -4 & 3 \\ -6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Dạng song tuyến tính

- **Định nghĩa 1**

• Ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

được gọi là một ***dạng song tuyến tính*** nếu f tuyến tính theo từng biến x, y.

➢ Chương 5. Dạng song tuyến tính – Toàn phương

Nghĩa là:

1) $f(x+y,\, z) = f(x,\, z) + f(y,\, z)$;
2) $f(x,\, y+z) = f(x,\, y) + f(x,\, z)$;
3) $f(\alpha x,\, y) = \alpha f(x,\, y)$;
4) $f(x,\, \alpha y) = \alpha f(x,\, y),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

- Xét một cơ sở $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ của $\mathbb{R}^n$. Với hai vector bất kỳ $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} u_j y_j$ ta có $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(u_i, u_j) x_i y_j$.

➢ Chương 5. Dạng song tuyến tính – Toàn phương

Đặt $a_{ij} = f(u_i, u_j)$ ta được:

$$\boxed{f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad (1).}$$

- Ma trận $A = (a_{ij})_n$ được gọi là ma trận của dạng song tuyến tính f trong cơ sở B. Ký hiệu là $A = [f]_B$.

Khi đó, dạng song tuyến tính f còn được viết dưới dạng ma trận: $\boxed{f(x,y) = [x]_B^T A [y]_B \quad (2).}$

▪ ***Chú ý***

- Nếu cơ sở không được chỉ rõ thì ta ngầm hiểu đó là cơ sở chính tắc E trong $\mathbb{R}^n$.
- Dạng song tuyến tính thường được cho ở dạng (1).

➢ Chương 5. Dạng song tuyến tính – Toàn phương

VD 1. Dạng song tuyến tính

$$f(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_1 + 3x_1y_2 \text{ có } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó:

$$f(x,y) = [x]^T A[y] = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

VD 2. Cho dạng song tuyến tính có $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Ta có:

$$f(x,y) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2 + 5x_2y_3 + 6x_3y_1 + 7x_3y_2 + 8x_3y_3.$$

▪ **Định nghĩa 2**

Dạng song tuyến tính f trên $\mathbb{R}^n$ được gọi là ***đối xứng*** (tương ứng, ***phản đối xứng***) nếu:

$$f(x,y) = f(y,x),\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$$

(tương ứng, $f(x,y) = -f(y,x),\ \forall x,y \in \mathbb{R}^n$).

▪ ***Nhận xét***

Ma trận của dạng song tuyến tính f đối xứng (phản đối xứng) trong một cơ sở bất kỳ của $\mathbb{R}^n$ là đối xứng (phản đối xứng).

VD 3. Dạng song tuyến tính đối xứng

$$f(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 \text{ có } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ đối xứng.}$$

1.2. Dạng toàn phương

▪ **Định nghĩa**

- Cho f là dạng song tuyến tính ***đối xứng*** trên $\mathbb{R}^n$.

Ánh xạ
$$\begin{aligned} Q: \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x,x) \end{aligned}$$

được gọi là ***dạng toàn phương*** trên $\mathbb{R}^n$ ứng với f.

- Nếu $A = [f]_B$ thì A cũng được gọi là ma trận của dạng toàn phương Q trong cơ sở B.

Khi đó, ta có:

$$\boxed{Q(x) = [x]_B^T A [x]_B.}$$

VD 4. Tìm dạng toàn phương $Q(x)$?

Biết ma trận của $Q(x)$ là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

▪ ***Nhận xét***

- Trong VD 4, hệ số của x_1^2 và x_2^2 là a_{11} và a_{22} của A.
- Nửa hệ số của x_1x_2 là a_{12} và a_{21} của A.

VD 5. Tìm ma trận trong dạng toàn phương sau:

$$Q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3.$$

§2. ĐƯA DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

2.1. Dạng chính tắc của một dạng toàn phương

- **Định nghĩa**

Trong $\mathbb{R}^n$, xét dạng toàn phương (viết tắt là DTP) Q. Ta nói Q được đưa về ***dạng chính tắc*** nếu ta chỉ ra được một cơ sở B mà trong cơ sở này, ma trận của Q có dạng đường chéo.

Nghĩa là:

$$\boxed{Q(x) = [x]_B^T A[x]_B = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + ... + \lambda_n x_n^2}$$

$A = [f]_B = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, $[x]_B = (x_1 \quad ... \quad x_n)^T$.

VD 1. Dạng chính tắc có ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ là:

$$Q(x) = Q(x_1, x_2) = [x]^T A[x] = x_1^2 - 2x_2^2.$$

VD 2. Trong $\mathbb{R}^3$, dạng chính tắc $Q(x) = x_1^2 - 5x_2^2$

có ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

VD 3. Ma trận của dạng toàn phương

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2$$

trong cơ sở $B = \{(1;\ 1),\ (-1;\ 1)\}$ là:

A. $A_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; B. $A_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$;

C. $A_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; D. $A_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$.

2.2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

2.2.1. Phương pháp biến đổi trực giao

a) Định nghĩa

- Ma trận vuông P được gọi là ***ma trận trực giao*** nếu:

$$\boxed{P^T = P^{-1}.}$$

- Nếu có ma trận trực giao P làm chéo hóa ma trận A thì ta nói P ***chéo hóa trực giao*** ma trận A.

▪ ***Chú ý***

Nếu $P = (a_{ij})_n$ là ma trận trực giao thì $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$

(tổng bình phương mỗi cột của P bằng 1).

VD 4. Ma trận nào sau đây là ma trận trực giao ?

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; B. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$;

C. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$; D. $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

b) Thuật toán

Xét dạng toàn phương $Q(x)$ trong $\mathbb{R}^n$ có ma trận là A. Ta đi tìm ma trận trực giao P sao cho khi đổi biến $[x] = P[y]$ thì $D = P^T AP$ có dạng chéo.

Khi đó, $Q = [y]^T D[y]$ có dạng chính tắc theo biến y:

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

với $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ là các trị riêng của A.

- **Bước 1.** Tìm các trị riêng λ_i của A và vector riêng cơ sở u_i của không gian riêng ứng với λ_i, $i = \overline{1, n}$.
- **Bước 2.** Trực chuẩn hóa Gram – Schmidt các vector u_i thành w_i (xem chương 3, §5, 5.3).

- **Bước 3.** Ma trận trực giao là:

$$P = \big([w_1]\ [w_2]\ \ldots\ [w_n]\big).$$

Ma trận của Q trong cơ sở mới là:

$$D = P^T AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

VD 5. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương:

$$Q(x) = -3x_2^2 + 4x_1x_2.$$

$Q(x)$ có ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ trong cơ sở chính tắc.

Ma trận A có trị riêng và vector riêng tương ứng là:

$$\lambda_1 = 1,\ u_1 = (2;\ 1);\ \lambda_2 = -4,\ u_2 = (1;-2).$$

Trực chuẩn hóa u_1, u_2 ta được:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(2;\ 1\big) \text{ và } w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\big(1;-2\big).$$

Ma trận P của phép chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trực chuẩn $\{w_1,\ w_2\}$ là $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Đổi biến $[x] = P[y]$:

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2,\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2.$$

Thay x_1, x_2 trong công thức đổi biến trên vào $Q(x)$, ta được dạng chính tắc $Q(y) = y_1^2 - 4y_2^2$.

VD 6. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương

$$Q(x_1, x_2) = 3x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Bằng phép đổi biến trực giao $[x] = P[y]$,

với $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ta đưa Q về dạng chính tắc là:

A. $Q = -y_1^2 + 4y_2^2$; B. $Q = y_1^2 - 4y_2^2$;

C. $Q = 4y_1^2 - y_2^2$; D. $Q = -4y_1^2 + y_2^2$.

- ***Chú ý***

Các ***trị riêng*** của A ứng với ***vector cột*** của P.

VD 7. Trong $\mathbb{R}^3$, cho ma trận A của DTP $Q(x)$ có các trị riêng và vector riêng cơ sở tương ứng là:

$$\lambda_1 = 3,\ u_1 = (1;\ 1;\ 1);\ \lambda_2 = 6,\ u_2 = (-1; -1;\ 2)$$

và $\lambda_3 = 8,\ u_3 = (-1;\ 1;\ 0)$.

Tìm ma trận trực giao P và dạng chính tắc của Q?

VD 8. Đưa dạng toàn phương sau về dạng chính tắc bằng biến đổi trực giao:

$$Q(x) = 3x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

2.2.2. Thuật toán Lagrange

Xét dạng toàn phương:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j.$$

a) Trường hợp 1 (có 1 hệ số $a_{ii} \neq 0$)

- **Bước 1.** Giả sử $a_{11} \neq 0$, ta tách tất cả các số hạng chứa x_1 trong $Q(x)$ và thêm hoặc bớt để có dạng:

$$Q(x) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\right)^2 + Q_1(x_2, \ldots, x_n),$$

với $Q_1(x_2, \ldots, x_n)$ chứa tối đa $n-1$ biến.

Đổi biến:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,\ y_i = x_i\ \left(i = \overline{2, n}\right).$$

Đổi biến ngược:

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left(y_1 - a_{12}y_2 - \ldots - a_{1n}y_n\right),\ x_i = y_i\ \left(i = \overline{2, n}\right).$$

Ta có ma trận $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$

➢ Chương 5. Dạng song tuyến tính – Toàn phương

Với biến mới thì $Q = \dfrac{1}{a_{11}} y_1^2 + Q_1(y_2, \ldots, y_n)$.

- **Bước 2.** Tiếp tục làm như bước 1 cho $Q_1(y_2, \ldots, y_n)$, … Sau k bước thì Q có dạng chính tắc. Ma trận đổi biến $P = P_1 \ldots P_k$ và $[x] = P[y]$.

b) Trường hợp 2 (hệ số $a_{ii} = 0,\ i = 1, \ldots, n$)

Giả sử $a_{12} \neq 0$, ta đổi biến:

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_i = y_i\ (i = 3, \ldots, n).$$

Khi đó, $Q = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \ldots$ có hệ số của y_1^2 là $2a_{12} \neq 0$. Ta trở lại trường hợp 1.

➢ Chương 5. Dạng song tuyến tính – Toàn phương

VD 9. Trong $\mathbb{R}^3$, cho dạng toàn phương:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Dùng thuật toán Lagrange đưa $Q(x)$ về dạng chính tắc ta đặt $y_1 = x_1 + x_2,\ y_2 = x_2 - x_3,\ y_3 = x_3$.

Ma trận đổi biến P là:

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; D. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

➢ Chương 5. Dạng song tuyến tính – Toàn phương

Giải. Ta có:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Vậy ta chọn D.

VD 10. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương:

$$f(x_1, x_2) = -7x_1^2 - 2x_2^2 - 8x_1x_2.$$

Dùng thuật toán Lagrange với ma trận đổi biến $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, ta đưa f về dạng chính tắc là:

A. $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 - y_2^2$; B. $f(y_1, y_2) = -2y_1^2 + y_2^2$;
C. $f(y_1, y_2) = y_1^2 - 2y_2^2$; D. $f(y_1, y_2) = -y_1^2 + 2y_2^2$.

VD 11. Dùng thuật toán Lagrange đưa DTP sau về dạng chính tắc và tìm ma trận đổi biến P:

$$Q(x) = -x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

VD 12. Dùng thuật toán Lagrange đưa DTP sau về dạng chính tắc và tìm ma trận đổi biến P:

$$f(x) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

2.2.3. Thuật toán Jacobi (tham khảo)

▪ **Định thức con chính**

Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$.

Định thức: $D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ $(1 \le k \le n)$

được gọi là ***định thức con chính*** của A.

▪ **Thuật toán**

- Cho dạng toàn phương $Q(x)$ có ma trận $A = (a_{ij})_n$ thỏa các định thức con $D_k \ne 0,\ k = 1, \dots, n$.

- Với $j > i$, ta đặt $D_{j-1,i}$ là định thức của ma trận có các phần tử nằm trên giao các dòng $1, 2, \ldots, j-1$ và các cột $1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j$ (bỏ cột i) của A.
- Đổi biến theo công thức:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + b_{21}y_2 + b_{31}y_3 + b_{41}y_4 + \ldots + b_{n1}y_n, \\ x_2 = \qquad y_2 + b_{32}y_3 + b_{42}y_4 + \ldots + b_{n2}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_n. \end{cases}$$

Trong đó, $b_{ji} = (-1)^{i+j}\dfrac{D_{j-1,\,i}}{D_{j-1}}$.

Khi đó, $P = \begin{pmatrix} 1 & b_{21} & \ldots & b_{n1} \\ 0 & 1 & \ldots & b_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ và

$$Q = D_1 y_1^2 + \frac{D_2}{D_1} y_2^2 + \frac{D_3}{D_2} y_3^2 + \ldots + \frac{D_n}{D_{n-1}} y_n^2.$$

VD 13. Dùng thuật toán Jacobi đưa DTP sau về dạng chính tắc: $Q(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3$.

2.2.4. Thuật toán biến đổi sơ cấp ma trận đối xứng (tham khảo)

- **Bước 1.** Biến đổi sơ cấp dòng của ma trận $\left(A \middle| I_n\right)$ và đồng thời lặp lại các biến đổi cùng kiểu trên các cột của $\left(A \middle| I_n\right)$ để đưa A về dạng chéo $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Khi đó, I_n sẽ trở thành P^T.
- **Bước 2.** Đổi biến $[x] = P[y]$, ta được:

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

VD 14. Dùng thuật toán biến đổi sơ cấp, đưa DTP $Q(x) = 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ về dạng chính tắc.

§3. LUẬT QUÁN TÍNH
XÁC ĐỊNH DẤU CỦA DẠNG TOÀN PHƯƠNG

3.1. Luật quán tính

a) Dạng chuẩn tắc

- Trong $\mathbb{R}^n$, mọi dạng toàn phương bất kỳ đều có thể đưa về dạng chính tắc trong một cơ sở chính tắc:

$$Q = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 \ (\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r \neq 0)\ (1).$$

- Dạng chính tắc (1) được gọi là ***dạng chuẩn tắc*** nếu:

$$\left|\lambda_i\right| = 1,\ \forall i = 1, 2, \ldots, r.$$

- Không làm mất tính tổng quát, giả sử:

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s > 0 \text{ và } \lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \ldots, \lambda_r < 0.$$

Để đưa (1) về dạng chuẩn tắc, ta đổi biến:

$$\begin{cases} x_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} y_i, & i = 1, 2, \ldots, s \\ x_j = \dfrac{1}{\sqrt{-\lambda_j}} y_j, & j = s+1, s+2, \ldots, r \\ x_k = y_k, & k = r+1, r+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Khi đó, $Q = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \ldots - x_r^2$.

VD 1. Trong $\mathbb{R}^4$, cho dạng chính tắc:

$$Q(x) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2.$$

Đổi biến:
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} y_1, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{-(-3)}} y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{-3}} y_2, \\ x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}} y_3 = \dfrac{1}{2} y_3, \\ x_4 = y_4. \end{cases}.$$

Trong cơ sở mới, ta được dạng chuẩn tắc:

$$Q(y) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2.$$

b) Định lý (*Luật quán tính Sylvester*)

Số s các số hạng mang dấu " + " và số p các số hạng mang dấu " – " trong dạng chính tắc là những đại lượng bất biến, không phụ thuộc vào phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

▪ ***Chú ý***

- Số s được gọi là ***chỉ số dương quán tính*** của DTP.
- Số p được gọi là ***chỉ số âm quán tính*** của DTP.
- Số $s - p$ được gọi là ***chỉ số*** (hay ***ký số***) của DTP.

VD 2. Trong $\mathbb{R}^2$, cho dạng toàn phương:

$$Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2.$$

- **Cách 1.** Biến đổi: $Q(x) = (x_1 - x_2)^2 - 4x_2^2$.

  Đổi biến $y_1 = x_1 - x_2$, $y_2 = x_2$, ta được:

$$Q(y) = y_1^{\,2} - 4y_2^2.$$

- **Cách 2.** Biến đổi: $Q(x) = -\dfrac{1}{3}(x_1 + 3x_2)^2 + \dfrac{4}{3}x_1^2$.

  Đổi biến $z_1 = x_1 + 3x_2$, $z_2 = x_1$, ta được:

$$Q(z) = -\frac{1}{3}z_1^{\,2} + \frac{4}{3}z_2^2.$$

3.2. Tính xác định dấu của dạng toàn phương

▪ **Định nghĩa**

Trong $\mathbb{R}^n$, cho dạng toàn phương $Q(x)$.

- $Q(x)$ được gọi là ***xác định dương*** nếu:

$$Q(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}.$$

- $Q(x)$ được gọi là ***xác định âm*** nếu:

$$Q(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\theta\}.$$

- $Q(x)$ được gọi là ***nửa xác định dương* (*âm*)** nếu:

$$Q(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n\ \ (Q(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^n).$$

- $Q(x)$ được gọi là ***không xác định dấu*** nếu nó nhận cả giá trị dương lẫn âm.

VD 3. Trong $\mathbb{R}^2$, ta có:

- $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ là xác định dương vì

$$Q(x) = (x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\theta\}.$$

- $f(x) = -4x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$ là nửa xác định âm vì

$$f(x) = -(2x_1 - x_2)^2 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

- $g(x) = x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2$ là không xác định dấu vì

$$g(1,-1) = -1 < 0 \text{ và } g(1,\ 1) = 1 > 0.$$

3.3. Các tiêu chuẩn xác định dấu

a) Định lý 1

- DTP trong $\mathbb{R}^n$ là xác định dương khi và chỉ khi tất cả các ***hệ số ở dạng chính tắc*** của nó đều dương.
- DTP trong $\mathbb{R}^n$ là xác định âm khi và chỉ khi tất cả các ***hệ số ở dạng chính tắc*** của nó đều âm.

▪ **Hệ quả**

- Dạng toàn phương $Q(x)$ là xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các ***trị riêng*** dương.
- Dạng toàn phương $Q(x)$ là xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các ***trị riêng*** âm.

VD 4. Trong $\mathbb{R}^3$, xét tính xác định dấu của DTP sau:

$$Q(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3.$$

VD 5. Trong $\mathbb{R}^3$, xét tính xác định dấu của DTP sau:

$$f(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 5x_1x_3.$$

b) Định lý 2 (Định lý *Sylvester*)

- Trong $\mathbb{R}^n$, dạng toàn phương là xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính đều dương.

  Nghĩa là: $D_k > 0,\ k = \overline{1,\ n}$.

- Trong $\mathbb{R}^n$, dạng toàn phương là xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có các định thức con chính cấp chẵn dương, cấp lẻ âm.

  Nghĩa là: $(-1)^k D_k > 0,\ k = \overline{1,\ n}$.

VD 6. Trong $\mathbb{R}^3$, dùng định lý Sylvester xét tính xác định dấu của dạng toàn phương sau:

$$Q(x) = -2x_1^2 - 4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2.$$

VD 7. Trong $\mathbb{R}^3$, dùng định lý Sylvester xét tính xác định dấu của dạng toàn phương sau:

$$f(x) = 7x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 5x_1x_3.$$

§4. RÚT GỌN CONIC – QUADRATIC

(Nhận diện đường và mặt bậc hai)

4.1. Đường bậc hai trong mặt phẳng tọa độ *Oxy*

a) Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy, đường bậc hai là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ có tọa độ thỏa phương trình:

$$\boxed{ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0\ (1).}$$

Trong đó, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

VD 1. Trong $\mathbb{R}^2$, đường (C) có phương trình sau là đường bậc hai:

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 4x - 3y - 7 = 0.$$

b) Phân loại các đường conic

- **Các dạng chính tắc của đường conic**

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (đường elip);

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \pm 1$ (đường hyperbol);

3) $y^2 = px$ hoặc $x^2 = py$ (parabol).

- **Phân loại**

Trong Oxy, xét đường (C) có phương trình (1):

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0.$$

Đặt hai ma trận $Q = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ và $\overline{Q} = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

- Ta có (C) là ***đường conic*** $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det \overline{Q} \neq 0}$.
- Khi (C) là đường conic thì:

1) (C) là ***đường elip*** $\Leftrightarrow$ $\det Q > 0$;

2) (C) là ***đường hyperbol*** $\Leftrightarrow$ $\det Q < 0$;

3) (C) là ***đường parabol*** $\Leftrightarrow$ $\det Q = 0$.

- ***Chú ý***

Nếu $\det \overline{Q} = 0$ thì (C) không phải là conic (có thể là tích của hai đường thẳng).

c) Rút gọn đường conic

Bằng cách xoay trục tọa độ và tịnh tiến, ta sẽ đưa (1) về dạng chính tắc.

- **Bước 1.** Đưa dạng toàn phương $ax^2 + by^2 + 2cxy$ về dạng chính tắc $\alpha(x')^2 + \beta(y')^2$ (***khử tích chéo*** xy) bằng phép biến đổi trực giao (***phép quay***).
- **Bước 2.** Đặt $x'' = x' + a'$, $y'' = y' + b'$ (***tịnh tiến hệ tọa độ***) một cách thích hợp để phương trình (C) có dạng chính tắc.

VD 2. Xác định dạng của đường bậc hai

$$(C): \; x^2 + 4y^2 - 4xy + 4x - 3y - 7 = 0.$$

VD 3. Xác định dạng của đường bậc hai

$$(C): \; x^2 - 4y^2 - 4x + 8y = 0.$$

VD 4. Trong Oxy, viết phương trình chính tắc của conic $(C): 5x^2 + 8y^2 + 4xy - 32x - 56y + 80 = 0.$

3.2. Mặt bậc hai trong không gian tọa độ *Oxyz*

a) Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, mặt bậc hai là tập hợp tất cả các điểm $M(x, y, z)$ có tọa độ thỏa phương trình:

$$\boxed{\begin{aligned} &ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz \\ &\qquad + 2gx + 2hy + 2kz + l = 0 \quad (2). \end{aligned}}$$

Trong đó a, b, c, d, e, f không đồng thời bằng 0.

VD 5. Trong $\mathbb{R}^3$, mặt (S) có phương trình sau là mặt bậc hai:

$$3x^2 + 3y^2 + 10xy - 2x - 14y - 13 = 0.$$

- **Các dạng chính tắc của mặt bậc hai**

1) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (mặt cầu);

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (mặt elipsoid);

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (hyperbolic 1 tầng);

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (hyperbolic 2 tầng);

5) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (nón eliptic);

6) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ (parabolic eliptic);

7) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ (parabolic hyperbolic);

8) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (mặt trụ eliptic);

9) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=\pm 1$ (mặt trụ hyperbolic);

10) $y^2=px$ hoặc $x^2=py$ (mặt trụ parabolic).

- ***Chú ý***

Các dạng 8), 9), 10) là các mặt bậc hai suy biến.

b) Phân loại mặt bậc hai

Cho (S) là mặt bậc hai có phương trình:

$$ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz$$
$$+2gx+2hy+2kz+l=0.$$

Đặt $Q=\begin{pmatrix} a & d & e\\ d & b & f\\ e & f & c\end{pmatrix}$ và $\overline{Q}=\begin{pmatrix} a & d & e & g\\ d & b & f & h\\ e & f & c & k\\ g & h & k & l\end{pmatrix}$.

Ta có, (S) không suy biến $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det \overline{Q} \neq 0}$.

Khi đó:

1) (S) là ***mặt elipsoid*** (kể cả elipsoid ảo) khi và chỉ khi Q ***xác định dương*** hoặc ***xác định âm***.

2) (S) là ***mặt hyperpolic*** (1 tầng hoặc 2 tầng) khi và chỉ khi chỉ số $s-p$ của Q là ± 1.

3) (S) là ***mặt parabolic eliptic*** (hay ***parabolic – hyperpolic***) khi và chỉ khi $\det Q = 0$.

VD 6. Xác định dạng của mặt bậc hai

$$(S): 4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz$$
$$- 16x - 16y - 8z + 72 = 0.$$

VD 7. Xác định dạng của mặt bậc hai sau đây rồi viết phương trình chính tắc:

$$(S): 22x^2 + 28y^2 + 15z^2 + 8xy - 112x$$
$$- 184y - 30z + 343 = 0.$$