

LÊ HẢI CHÂU
NGUYỄN XUÂN QUÝ

Cách tìm lời giải CÁC BÀI TOÁN THCS

TẬP I

SỐ HỌC



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ HẢI CHÂU – NGUYỄN XUÂN QUỲ

CÁCH TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THCS

TẬP 1
SỐ HỌC

In lần thứ hai

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI-2001

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc NGUYỄN VĂN THỎA

Tổng biên tập NGUYỄN THIÊN GIÁP

Biên tập và sửa bản in: TƯỜNG GIANG – LAN HƯƠNG

Trình bày bìa:

TRẦN TIỂU LÂM

CÁCH TÌM LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THCS. TẬP 1: SỐ HỌC

Mã số : 01.106.ĐH2000 - 746.2000

In 1000 cuốn, tại Nhà in Khoa học Kỹ thuật

Số xuất bản: 42/746/CXB. Số trích ngang 47 KH/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý I/2001

LỜI NÓI ĐẦU

Đây là bộ sách về *phương pháp học giải toán* nhằm mục đích hình thành cho học sinh thói quen suy nghĩ và tìm tòi lời giải của một bài toán trên cơ sở các kiến thức đã học. Bộ sách này là cầu nối giữa lí thuyết và thực hành toán học.

Học giải toán là một cách tư duy sáng tạo về toán, đồng thời là một vấn đề trừu tượng và khá khó đối với học sinh, nhưng đó lại là điều rất cần thiết cho mỗi học sinh trong quá trình học toán ở trường THCS.

Bộ sách "Cách tìm lời giải các bài toán" gồm 3 tập SỐ HỌC, ĐẠI SỐ, HÌNH HỌC. Đây là tập đầu tiên về số học trong bộ sách này.

Mỗi tập giới thiệu các trọng điểm về toán đều có hai nội dung chính:

1) Các bài toán điển hình, mỗi bài toán đều gồm :

- Đề bài
- Tìm hiểu đề bài
- Hướng dẫn cách tìm lời giải
- Cách giải
- Khai thác bài toán

2) Các bài toán tự giải

*

* *

Các vị phụ huynh học sinh, các thầy cô giáo có thể dùng bộ sách này làm tài liệu hướng dẫn con em mình học tập. Hy vọng rằng bộ sách sẽ giúp ích nhiều cho học sinh để có thể phát huy nội lực trong giải toán nói riêng và học toán nói chung.

CÁC TÁC GIẢ

I. TẬP HỢP CÁC SỐ TỰ NHIÊN

(TẬP HỢP N)

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

Cho ba tập hợp $P = \{p, q, r\}$, $Q = \{r, u, v\}$ và $R = \{p, s, t\}$. Dùng kí hiệu \in và \notin để ghi các phần tử :

- thuộc P mà không thuộc Q , thuộc Q mà không thuộc P ;
- thuộc P mà không thuộc R , thuộc R mà không thuộc P ;
- thuộc Q mà không thuộc R , thuộc R mà không thuộc Q .

- *Tìm hiểu đề bài*

Kí hiệu \in đọc là "thuộc" và kí hiệu \notin đọc là "không thuộc". Bài ra có 3 câu hỏi, mỗi câu hỏi có hai phần, phần sau ngược với phần trước, chẳng hạn $\in P$ mà $\notin Q$ (phần đầu), $\in Q$ mà $\notin P$ (phần sau).

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Mỗi tập hợp đã cho đều có ba phần tử, để trả lời câu hỏi a chẳng hạn cần xem các phần tử của P và của Q là những phần tử nào, từ đó viết được những phần tử nào thuộc P mà không thuộc Q , rồi đến những phần tử nào thuộc Q mà không thuộc P . Cũng làm như vậy đối với hai câu hỏi b và c.

- *Cách giải*

- Các phần tử thuộc P mà không thuộc Q là :

$$p \in P, q \in P \text{ và } p \notin Q, q \notin Q$$

Các phần tử thuộc Q mà không thuộc P là :

$$u \in Q, v \in Q \text{ và } u \notin P, v \notin P.$$

b) Các phần tử thuộc P mà không thuộc R là :

$$q \in P, r \in P \text{ và } q \notin R, r \notin R.$$

Các phần tử thuộc R mà không thuộc P là :

$$s \in R, t \in R \text{ và } s \notin P, t \notin P.$$

c) Các phần tử thuộc Q mà không thuộc R là :

$$r \in Q, u \in Q, v \in Q \text{ và } r \notin R, u \notin R, v \notin R.$$

Các phần tử thuộc R mà không thuộc Q là :

$$p \in R, s \in R, t \in R \text{ và } p \notin Q, s \notin Q, t \notin Q.$$

● *Khai thác bài toán*

Ta có thể đổi đề bài như sau :

Dùng các kí hiệu \in và \notin để ghi các phần tử :

- vừa thuộc P, vừa thuộc Q
- vừa thuộc P vừa thuộc R
- vừa thuộc Q vừa thuộc R.

Nếu thế thì cách giải như sau :

- $r \in P, r \in Q$, tức là r vừa thuộc P vừa thuộc Q ;
- $p \in P, p \in R$, tức là p vừa thuộc P vừa thuộc R ;
- không có phần tử nào vừa thuộc Q vừa thuộc R.

Ngoài ra cũng không có phần tử nào thuộc cả ba tập hợp P, Q, R.

Bài 2

Viết tập hợp các số tự nhiên lẻ lớn hơn 8 nhưng bé hơn 16 theo hai cách và minh họa bằng hình vẽ.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra có hai yêu cầu : viết tập hợp các số và minh họa bằng hình vẽ. Yêu cầu thứ nhất nêu rõ là viết tập hợp các số lẻ từ 8 đến 16 theo hai cách, yêu cầu thứ hai là minh họa kết quả tìm được.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Để viết một tập hợp theo hai cách ta có thể :

- hoặc liệt kê các phần tử của nó nếu số phần tử ít (cách 1)
- hoặc chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó (cách 2).

Để minh họa bằng hình vẽ ta có thể dùng một đường cong khép kín (gọi là sơ đồ Ven mang tên nhà toán học Ven người Anh, người đầu tiên đưa ra cách minh họa bằng hình vẽ này), trong đó mỗi phần tử của tập hợp được biểu diễn bằng một điểm nằm trong đường cong khép kín đó.

● *Cách giải*

- Các số tự nhiên lẻ lớn hơn 8 nhưng bé hơn 16 là 9 ; 11 ; 13 ; 15. Do đó ta có hai cách viết tập hợp M các số tự nhiên lẻ này như sau :

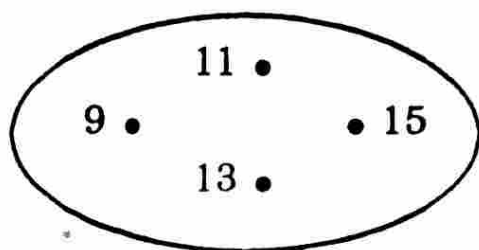
Cách 1. Liệt kê các phần tử của nó

$$M = \{9 ; 11 ; 13 ; 15\}$$

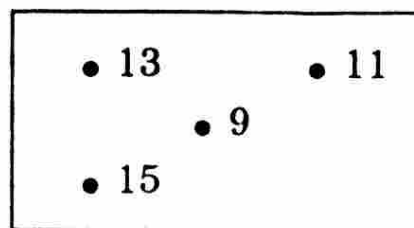
Cách 2. Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó

$$M = \{n \in \mathbf{N} \mid n = 2k + 1 ; 8 < n < 16\}.$$

- Minh họa bằng hình vẽ (sơ đồ Ven)



hoặc



● *Khai thác bài toán*

- Nếu trong đề bài ta đổi từ "lẻ" thành từ "chẵn" thì cách giải thay đổi như thế nào ?

Ta tìm các số chẵn lớn hơn 8 nhưng bé hơn 16, đó là các số 10 ; 12 ; 14. Vậy tập hợp các số phải tìm là $P = \{10 ; 12 ; 14\}$ hoặc $P = \{n \in \mathbf{N} \mid n = 2k ; 8 < n < 16\}$.

- Nếu đổi bài ra là : "Tìm tập hợp các số tự nhiên chẵn chia hết cho 3, cho 4, cho cả 3 và 4" thì cách giải sẽ là :

Từ $P = \{10 ; 12 ; 14\}$ chỉ có số 12 là chia hết cho 3, chia hết cho 4, chia hết cho cả 3 và 4. Vậy tập hợp phải tìm là $Q = \{12\}$.

Bài 3

Cho ba tập hợp

$$A = \{ k \in \mathbf{N} \mid k \leq 50 \}$$

$$B = \{ k \in \mathbf{N} \mid 5k = 2 \}$$

$$C = \{ m \mid m = 2k, k \in \mathbf{N} \}.$$

Mỗi tập hợp trên có bao nhiêu phần tử ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Cách viết ba tập hợp đã cho cần hiểu như sau :

A là tập hợp các số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng (không vượt quá) 50 ; B là tập hợp các số tự nhiên k sao cho $k = \frac{2}{5}$; còn C là tập hợp các số tự nhiên chẵn m. Từ đó mà tìm được số phần tử của mỗi tập hợp.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước tiên hãy liệt kê các số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng 50 rồi dùng cách viết các phần tử trong hai dấu ngoặc nhọn { } cách nhau bởi dấu phẩy.

Với tập hợp B lưu ý $k = \frac{2}{5}$ không phải là số tự nhiên, còn với tập hợp C thì phải tìm số phân tử của tập hợp các số chẵn trong \mathbf{N} .

● *Lời giải*

- Các số tự nhiên nhỏ hơn hoặc bằng 50 là :

$$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 47 ; 48 ; 49 ; 50$$

do đó $A = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 49 ; 50\}$ và có 51 phần tử.

- Vì $k = \frac{2}{5}$ không phải là số tự nhiên nên tập hợp B không có phần tử nào, tức là $B = \emptyset$ (tập hợp rỗng).

- Do có vô số số chẵn trong tập hợp \mathbf{N} vì vậy tập hợp C có vô số phần tử.

● *Khai thác bài toán*

Nếu cho D là tập hợp các số tự nhiên lẻ p thì tập hợp D viết như thế nào và có bao nhiêu phần tử ?

Khi đó ta viết như sau :

$$D = \{p \in \mathbf{N} \mid p = 2k + 1, k \in \mathbf{N}\}$$

và D có vô số phần tử.

Bài 4

a) Hai tập hợp $R = \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq 6\}$ và $S = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ có bằng nhau không, tại sao ?

b) Tìm số phân tử của ba tập hợp sau :

$$A = \emptyset, B = \{0\}, C = \{\emptyset\}.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Nếu hai tập hợp R và S mà bằng nhau thì mọi phần tử của R đều thuộc S và mọi phần tử của S đều thuộc R và ta viết $R = S$.

Khi viết $R = \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq 6\}$ thì hiểu đó là tập hợp các số tự nhiên không lớn hơn 6 (nhỏ hơn hoặc bằng 6).

b) Kí hiệu \emptyset chỉ tập hợp rỗng là tập hợp không có phần tử nào. Tập hợp $\{a\}$ là tập hợp có 1 phần tử là a .

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Trước hết hãy liệt kê các phần tử của tập hợp R dựa vào cách viết của bài ra là cách chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó. R là tập hợp các số tự nhiên không lớn hơn 6, tức là $R = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

b) Lưu ý B và C đều là tập hợp có 1 phần tử.

• *Cách giải*

a) Tập $R = \{k \in \mathbf{N} \mid k \leq 6\}$ có thể viết dưới dạng liệt kê các phần tử của nó như sau :

$$R = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}.$$

Như thế nó bằng tập hợp S , tức là $R = S$.

b) Tập hợp $A = \emptyset$ không có phần tử nào

Tập hợp $B = \{0\}$ có 1 phần tử là 0

Tập hợp $C = \{\emptyset\}$ có 1 phần tử là \emptyset .

• *Khai thác bài toán*

Có thể thay đổi bài toán trên như sau :

"Cho hai tập hợp :

$$M = \{m \in \mathbf{N} \mid m : 2 \text{ và } m < 19\}$$

$$N = \{m \in \mathbf{N} \mid m \text{ chẵn } < 19\}.$$

a) Mỗi tập hợp trên có bao nhiêu phần tử ?

b) Hai tập hợp M và N có bằng nhau không ?

c) Viết $M \in N$ và $M \subset N$ thì cách viết nào đúng, cách viết nào sai ?".

Cách giải sẽ là :

a) $M = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18\}$

$N = \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18\}$. Mỗi tập hợp đều chứa 10 phần tử.

b) Ta thấy ngay rằng $M = N$.

c) Viết $M \in N$ là sai vì M là một tập hợp không phải là một phần tử của tập hợp. Viết $M \subset N$ là đúng vì cả hai đều là tập hợp và do $M = N$ nên mỗi tập hợp là một tập hợp con của chính nó.

Bài 5

a) Viết tập hợp E các số có hai chữ số lớn hơn 88. Tập hợp này có bao nhiêu phần tử ?

b) Cho tập hợp $G = \{a, b, c\}$. Viết tất cả các tập hợp con của G gồm 1 phần tử, 2 phần tử, 3 phần tử.

● *Tìm hiểu đề bài*

a) E là tập hợp các số có hai chữ số lớn hơn 88 nên phải liệt kê tất cả các phần tử của E từ phần tử nhỏ nhất đến phần tử lớn nhất.

b) Tập hợp con của G là tập hợp mà mọi phần tử của nó đều thuộc G , bài ra yêu cầu viết lần lượt các tập hợp con có 1 phần tử, rồi đến có 2 phần tử và cuối cùng là có 3 phần tử.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Hãy tìm số có hai chữ số liền sau số 88 rồi viết tất cả các số tiếp theo cho đến số 99 là số lớn nhất có hai chữ số, sau đó dùng hai dấu ngoặc $\{ \}$ để viết tất cả phần tử tìm được của E .

b) Khi viết tất cả tập hợp con của G , cần lưu ý đến hai nhận xét :

- Mỗi tập hợp đều là một tập hợp con của chính nó .

- Người ta coi tập hợp rỗng là tập hợp con của mọi tập hợp.

● *Cách giải*

a) Tập hợp E các số có hai chữ số lớn hơn 88 là :

$$E = \{89 ; 90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96 ; 97 ; 98 ; 99\}.$$

Tập hợp này có 11 phần tử.

b) Các tập hợp con của G gồm 1 phần tử là :

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}$$

Các tập hợp con của G gồm 2 phần tử là :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

Các tập hợp con của G gồm 3 phần tử là :

$$\{a, b, c\}.$$

Ngoài ra còn có $\emptyset \subset G$ (tập hợp con của G không có phần tử nào).

● *Khai thác bài toán*

- Nếu ở câu a đổi là : "Tìm số phần tử của tập hợp F các số có hai chữ số" thì đáp số sẽ như thế nào ?

Khi đó $F = \{10 ; 11 ; 12 ; \dots ; 98 ; 99\}$

và tập hợp này có $(99 - 10) + 1 = 90$ (phần tử).

Cũng có thể đặt câu hỏi khác như sau :

Tìm số phần tử của tập hợp G các số lẻ (hoặc các số chẵn) có hai chữ số. Nếu thế thì :

$$G_1 = \{11 ; 13 ; 15 ; \dots ; 97 ; 99\} \text{ hoặc } G_2 = \{10 ; 12 ; 14 ; \dots ; 96 ; 98\}.$$

Từ đó tìm được số phần tử của G_1 hoặc G_2 .

- Nếu ở câu b tập hợp G được thay bằng tập hợp

$H = \{a, b, c, d\}$ gồm 4 phần tử thì đáp số sẽ thay đổi như sau :

Tập hợp con gồm 1 phần tử : $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$.

Tập hợp con gồm 2 phần tử : $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.

Tập hợp con gồm 3 phần tử : $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Tập hợp con gồm 4 phần tử : $\{a, b, c, d\}$.

Ngoài ra còn có $\emptyset \subset H$ (tập hợp con của H không có phần tử nào).

Bài 6

a) Cho biết sự khác nhau giữa hai kí hiệu \in và \subset . Cho ví dụ.

b) Cho M là tập hợp con của N . Khi nào thì số phần tử của M nhỏ hơn số phần tử của N . Khi nào thì không thể so sánh số phần tử của M và của N . Cho ví dụ minh họa.

• Tìm hiểu đề bài

a) Khi học về phần tử của một tập hợp thì có kí hiệu \in , khi học về tập hợp con thì lại có thêm kí hiệu \subset . Hai kí hiệu này khác nhau như thế nào, hãy minh họa bằng ví dụ cụ thể.

b) Khi nói M là tập hợp con của N ($M \subset N$) thì thường nghĩ rằng số phần tử của M phải nhỏ hơn số phần tử của N . Đề bài yêu cầu nói rõ khi nào thì số phần tử của M nhỏ hơn của N , khi nào thì lại không thể nói đến từ "nhỏ hơn".

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Lưu ý nếu A và B là hai tập hợp có các phần tử là a và b thì khi viết $A \in B$ là sai mà phải viết $A \subset B$ hoặc khi viết $a \subset A$ là sai mà phải viết $a \in A$. Hãy giải thích tại sao.

b) Xét trường hợp hai tập hợp M và N đều hữu hạn hoặc đều vô hạn phần tử rồi lấy ví dụ cụ thể để minh họa.

• Cách giải

a) Kí hiệu \in chỉ một phần tử của một tập hợp, còn kí hiệu \subset chỉ một tập hợp là tập hợp con của một tập hợp khác.

Ví dụ $A = \{a, x\}$, $B = \{a, b, x\}$.

Nếu viết $a \subset A$, $b \subset B$ là sai mà phải viết $a \in A$, $b \in B$.
Nếu viết $A \in B$ là sai mà phải viết $A \subset B$.

b) - Trường hợp M và N là hai tập hợp hữu hạn.

Nếu $M \subset N$ thì số phần tử của M nhỏ hơn số phần tử của N khi $M \neq N$. Nếu $M = N$ thì số phần tử của M bằng số phần tử của N .

- Trường hợp M và N là hai tập hợp vô hạn.

Mặc dầu $M \neq N$ nhưng vì chúng là hai tập hợp vô hạn tức là số phần tử của chúng là vô hạn nên không thể so sánh được.

Ví dụ cụ thể về hai tập hợp hữu hạn.

$M = \{2 ; 4 ; 6\}$ và $N = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ thì số phần tử của M nhỏ hơn số phần tử của N .

Nếu là $M = \{a, b, c, d\}$ và $N = \{d, a, c, b\}$ thì $M = N$, do đó số phần tử của chúng bằng nhau.

Ví dụ cụ thể về hai tập hợp vô hạn :

Tập hợp M là tập hợp các số lẻ, còn N là tập hợp các số tự nhiên. Rõ ràng cả hai tập hợp đều có số phần tử vô hạn, do đó không thể so sánh được (không thể nói vô hạn này nhỏ hơn vô hạn kia).

● *Khai thác bài toán*

- Nếu $M = \{2 ; 4 ; 6\}$ và N là tập hợp các số tự nhiên thì cách viết nào đúng trong hai cách viết sau :

$$M \in N \text{ và } M \subset N ?$$

Rõ ràng viết $M \in N$ là sai, vì M không phải là một phần tử của tập hợp N , cách viết $M \subset N$ là đúng.

- Nếu câu hỏi là : tìm tất cả những tập hợp con của M thì ta có :

\emptyset , $\{2\}$, $\{4\}$, $\{6\}$, $\{2 ; 4\}$, $\{2 ; 6\}$, $\{4 ; 6\}$ và $\{2 ; 4 ; 6\}$ (cả thảy có 8 tập hợp con của M khi M có 3 phần tử).

- Nếu M có 4 phần tử chẳng hạn $M = \{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ thì số tập hợp con của M sẽ là bao nhiêu ?

Khi đó số tập hợp con của M sẽ là :

$\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \{2 ; 4\}, \{2 ; 6\}, \{2 ; 8\}, \{4 ; 6\}, \{4 ; 8\}, \{6 ; 8\}, \{2 ; 4 ; 6\}, \{2 ; 4 ; 8\}, \{2 ; 6 ; 8\}, \{4 ; 6 ; 8\}$ và $\{2 ; 4 ; 6 ; 8\}$ (cả thảy có $16 = 2^4$ tập hợp con của M khi M có 4 phần tử).

Một cách tổng quát khi tập hợp M có n phần tử thì số tập hợp con của M là 2^n .

Bài 7

Cho ba chữ số 5 ; 6 ; 7 có thể lập được :

- bao nhiêu số có ba chữ số ?
- bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài có hai câu hỏi : câu thứ nhất đòi hỏi phải tìm xem có bao nhiêu số có ba chữ số, còn câu thứ hai thì hỏi rõ hơn là có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau. Như thế câu thứ nhất có tính chất tổng quát vì số có ba chữ số bất kì gồm cả số có ba chữ số khác nhau.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Số có ba chữ số bao gồm : các số có ba chữ số giống nhau như 555, các số có ba chữ số trong đó có hai chữ số giống nhau như 552 hoặc 525, các số có ba chữ số khác nhau như 567.

b) Số có ba chữ số khác nhau phải gồm ba chữ số 5 ; 6 ; 7 sắp xếp theo thứ tự khác nhau, trong đó chữ số hàng trăm phải lần lượt là 5 ; 6 ; 7.

● *Cách giải*

a) Số có ba chữ số giống nhau là :

555 ; 666 ; 777.

Số có ba chữ số trong đó có hai chữ số giống nhau là :

556 ; 557 ; 565 ; 575 ; 566 ; 577 ;

665 ; 667 ; 656 ; 676 ; 655 ; 677 ;

775 ; 776 ; 757 ; 767 ; 755 ; 766.

Số có ba chữ số khác nhau là :

567 ; 576 ; 657 ; 675 ; 756 ; 765.

Vậy có cả thảy 27 số có ba chữ số.

b) Số có ba chữ số khác nhau gồm 6 số như đã tìm ở câu a.

● *Khai thác bài toán*

Có thể xét thêm các trường hợp sau :

a) Lập tất cả các số có hai chữ số, có hai chữ số khác nhau với hai chữ số 4 và 5.

b) Lập tất cả các số có bốn chữ số khác nhau với bốn chữ số 1 ; 2 ; 8 và 9. Cách giải sẽ như sau :

a) Số có hai chữ số lập được với hai chữ số 4 và 5 là :

44 ; 45 ; 55 ; 54

trong đó có hai số có hai chữ số khác nhau là 45 và 54.

b) Lần lượt xét chữ số hàng nghìn là 1 ; 2 ; 8 ; 9

- nếu 1 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

1289 ; 1298 ; 1829 ; 1892 ; 1928 ; 1982

- nếu 2 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

2189 ; 2198 ; 2819 ; 2891 ; 2918 ; 2981

- nếu 8 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

8129 ; 8192 ; 8219 ; 8291 ; 8912 ; 8921

- nếu 9 là chữ số hàng nghìn thì ta có :

9128 ; 9182 ; 9218 ; 9281 ; 9812 ; 9821.

Bài 8

a) Biểu diễn trên tia số các số tự nhiên y sao cho :

$$25 < y \leq 30.$$

b) Từ 1 đến 100, tổng các chữ số của nhóm các số chẵn lớn hơn hay nhỏ hơn tổng các chữ số của nhóm số lẻ là bao nhiêu ?

• Tìm hiểu đề bài

a) Bài ra yêu cầu biểu diễn trên tia số các số tự nhiên y lớn hơn 25 nhưng không lớn hơn 30, do đó giá trị $y = 30$ cũng được biểu diễn trên tia số.

b) Yêu cầu của đề bài là so sánh tổng các chữ số của hai nhóm : nhóm các số chẵn và nhóm các số lẻ trong dãy số tự nhiên từ 1 đến 100. Tổng nào lớn hơn thì phải tìm xem lớn hơn bao nhiêu ?

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

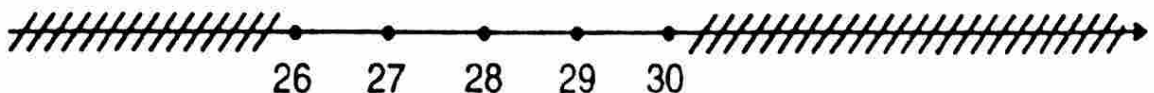
a) Trước hết cần tìm các số tự nhiên y thỏa mãn điều kiện $25 < y \leq 30$, sau đó mới biểu diễn trên tia số.

b) Hãy tìm xem mỗi nhóm số chẵn và số lẻ có bao nhiêu số. Lưu ý trừ cặp số cuối cùng (số 1 và số 100) có tổng các chữ số bằng nhau, còn với các cặp số còn lại tổng các chữ số của mỗi cặp số chẵn và số lẻ hơn nhau là bao nhiêu. Từ đó mà tìm được kết quả.

• Cách giải

a) Các số tự nhiên y thỏa mãn điều kiện $25 < y \leq 30$ là $y = 26 ; 27 ; 28 ; 29$ và 30 .

Biểu diễn trên tia số :



b) Từ 1 đến 100 có 50 số chẵn là $2 ; 4 ; 6 ; \dots ; 98 ; 100$ và 50 số lẻ là $1 ; 3 ; 5 ; \dots ; 97 ; 99$.

Nếu ta sắp xếp 50 cặp như sau :

Số lẻ	3	5	7	9	...	99	1
Số chẵn	2	4	6	8	...	98	100

thì ở 49 cặp số đầu mỗi số lẻ đều lớn hơn mỗi số chẵn là 1 (3 lớn hơn 2 là 1, 5 lớn hơn 4 là 1, ..., 99 lớn hơn 98 là 1). Riêng cặp cuối cùng thì tổng các chữ số của 1 và của 100 đều bằng nhau (vì bằng 1).

Do có 49 cặp số hơn kém nhau 1 nên với 49 cặp số thì hơn kém nhau $49.1 = 49$. Vậy tổng các chữ số của nhóm các số lẻ lớn hơn tổng các chữ số của nhóm các số chẵn là 49.

● *Khai thác bài toán*

Nếu cho dãy số tự nhiên từ 9 đến 900 thì đáp số sẽ thay đổi như thế nào ?

Cách giải cũng tương tự. Từ 9 đến 900 có $(900 - 9) + 1 = 892$ (số) với 446 số chẵn và 446 số lẻ. Với 445 cặp đầu thì mỗi số lẻ hơn mỗi số chẵn là 1, riêng cặp cuối cùng thì tổng các chữ số của số 9 và số 900 bằng nhau. Do đó tổng các chữ số của nhóm số lẻ lớn hơn tổng các chữ số của nhóm số chẵn là $445.1 = 445$.

Bài 9

Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 1000, ta được dãy số 123456 ... 9991000.

- Phải viết tất cả bao nhiêu chữ số ?
- Chữ số 0 của số 550 ở vị trí thứ bao nhiêu ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Dãy số 123456...9991000 là một số có nhiều chữ số. Bài ra yêu cầu phải dùng bao nhiêu chữ số để viết số có nhiều chữ số này, chẳng hạn muốn viết dãy số 123456 phải dùng 6 chữ số.

Đối với câu b ở dãy số 123456...549550... thì chữ số 0 ở vị trí thứ bao nhiêu.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Trước hết phải tìm số chữ số cần để viết các số tự nhiên có một chữ số (từ 1 đến 9), để viết các số tự nhiên có hai chữ số (từ 10 đến 99), để viết các số tự nhiên có ba chữ số (từ 100 đến 999). Riêng số 1000 phải viết với 4 chữ số.

b) Hãy xét số chữ số để viết từ 1 đến 550. Từ đó mà suy ra vị trí của chữ số 0 trong số 550.

● *Lời giải*

a) Để viết các số tự nhiên có một chữ số ta phải dùng 9 chữ số. Từ 10 đến 99 có 90 số có hai chữ số nên để viết 90 số này phải dùng $90 \cdot 2 = 180$ (chữ số)

Từ 100 đến 999 có 900 số có ba chữ số nên để viết 900 số này phải dùng $900 \cdot 3 = 2700$ (chữ số)

Riêng số 1000 phải dùng 4 chữ số để viết.

Vậy muốn viết dãy số 123456...9991000 phải dùng cả thảy :

$$9 + 180 + 2700 + 4 = 2893 \text{ (chữ số).}$$

b) Từ số 1 đến số 550 ta phải dùng số chữ số là :

$$9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + (550 - 99) \cdot 3 = 9 + 180 + 1353 = 1542 \text{ (chữ số).}$$

Như vậy chữ số 0 của số 550 là chữ số thứ 1542.

● *Khai thác bài toán*

Nếu đổi bài toán thành :

"Viết liên tiếp các số tự nhiên chẵn từ 2 đến 1000 thì số chữ số phải dùng là bao nhiêu ? chữ số ở vị trí thứ 1500 là chữ số gì ?"

Ta giải bài toán này như sau :

Dãy số là 24681012...9981000.

Từ số 2 đến số 1000 (không kể số 1000) có : 4 số chẵn có một chữ số (2 ; 4 ; 6 ; 8), 45 số chẵn có hai chữ số (10 ; 12 ; ... ; 98) và 450 số chẵn có ba chữ số (100 ; 102 ; ... ; 998).

Vậy số chữ số phải dùng để viết các số chẵn từ 2 đến 1000 (không kể 1000) là :

$$4 + 2.45 + 3.450 = 1444 \text{ (chữ số)}$$

Do $1444 < 1500$ nên chữ số thứ 1500 thuộc một số chẵn có bốn chữ số. Ta có số chữ số còn lại để viết các số chẵn có bốn chữ số là :

$$1500 - 1444 = 56 \text{ (chữ số)}$$

Với 56 chữ số này ta có thể viết được $56 : 4 = 14$ số chẵn có bốn chữ số bắt đầu từ số 1000. Suy ra số chẵn thứ 14 có bốn chữ số là :

$$1000 + 14.2 - 2 = 1026$$

(hoặc tính như sau : 1000 ; 1002 ; 1004 ; 1006 ; 1008 ; 1010 ; 1012 ; 1014 ; 1016 ; 1018 ; 1020 ; 1022 ; 1024 ; 1026).

Vậy chữ số thứ 1500 là chữ số 6 của số 1026.

Bài 10

a) Với hai chữ số La Mã I và X được dùng cùng một lúc có thể viết được bao nhiêu số La Mã ?

b) Với hai que diêm thì ghi được những số La Mã nào ?

• Tìm hiểu đề bài

a) Để bài chỉ cho hai chữ số I và X nên khi viết thành số La Mã thì có thể dùng nhiều chữ số I kết hợp với chữ số X, chẳng hạn XIII (ba chữ số I) hoặc XXXI (ba chữ số X).

b) Với hai que diêm có thể xếp như thế nào để được những số La Mã, chẳng hạn II hoặc V.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Trước hết lưu ý cách viết các số trong hệ La Mã :

- Nếu viết I bên trái V (năm), X (mười)

X bên trái L (năm mươi), C (một trăm)

C bên trái D (năm trăm), M (một nghìn)
thì làm giảm giá trị mỗi số V ; X ; L ; C ; D ; M đi ;
10 ; 100.

- Nếu viết về bên phải thì làm tăng giá trị mỗi số trên
thêm 1 ; 10 ; 100.

a) Để khỏi trùng, khỏi sót nên viết theo thứ tự sau :

Viết số nhỏ nhất với cả hai chữ số I và X

Viết số lớn nhất với cả hai chữ số này

Viết các số trung gian với cả hai chữ số từ nhỏ đến lớn.

b) Dựa vào 7 kí hiệu chữ số La Mã để sắp xếp hai que diên.

● *Cách giải*

a) Số nhỏ nhất là IX (9), số lớn nhất là XXXIX (39), các số
trung gian là (từ nhỏ đến lớn) :

XI (11), XII (12), XIII (13), XIX (19), XXI (21), XXII (22),
XXIII (23), XXIX (29), XXXI (31), XXXII (32), XXXIII (33).

Cả thầy có thể viết 13 số.

b) Với hai que diên ta có thể sắp xếp thành một trong 4 chữ
số La Mã sau : II (2), V (5), X (10), L (50).

● *Khai thác bài toán*

a) Có thể giải câu này theo cách khác : viết các số chứa chữ
số X theo thứ tự chứa một, hai, ba, bốn chữ số X.

Các số chứa một chữ số X là : IX, XI, XII, XIII

Các số chứa hai chữ số X là : XIX, XXI, XXII, XXIII

Các số chứa ba chữ số X là : XXIX, XXXI, XXXII, XXXIII

Các số chứa bốn chữ số X là : XXXIX.

Cả thầy có 13 số.

Ngoài ra có thể đổi các số đã cho như sau : Cũng hỏi như trên với hai chữ số X và C. Với câu hỏi này ta tìm được :

Số nhỏ nhất là XC (90), số lớn nhất là CCCXC (390), các số trung gian từ nhỏ đến lớn là :

CX (110), CXX (120), CXXX (130), CXC (190), CCX (210), CCXX (220), CCXXX (230), CCXC (290), CCCX (310), CCCXX (320), CCCXXX (330).

Cả thảy có 13 số.

Bài 11

Các que diêm sau đây đã bị xếp nhầm :

$$XII + IX = II$$

$$X = VII - III$$

$$VI + VI = XI$$

Ở mỗi dòng hãy chuyển chỗ hoặc bỏ bớt 1 que diêm để được những kết quả đúng.

• Tìm hiểu đề bài

Đề bài cho 3 cách viết sai :

$$12 + 9 = 2 (!) ;$$

$$10 = 7 - 3 (!) ;$$

$$6 + 6 = 11 (!)$$

và yêu cầu chỉ chuyển hoặc bỏ bớt 1 que diêm ở mỗi cách viết để có cách viết đúng, vấn đề cần suy nghĩ là chuyển như thế nào.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Cần xem xét kĩ từng cách viết để có thể chuyển 1 que diêm lấy từ dấu +, từ dấu = hoặc từ số đã cho (cần nhớ cách viết các số La Mã từ 1 đến 12).

• *Cách giải*

Chuyển 1 que diêm từ dấu + sang số bên phải dấu = ta có :

$$\text{XII} \rightarrow \text{IX} \equiv \text{III} \quad 12 - 9 = 3 ;$$

Chuyển 1 que diêm từ dấu = sang dấu - :

$$\text{X} \rightarrow \text{VII} \equiv \text{III} \quad 10 - 7 = 3 ;$$

Bỏ bớt 1 que diêm từ chữ số VI :

$$\text{VI} \rightarrow \text{V} \equiv \text{XI} \quad 6 + 5 = 11.$$

• *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài ra như sau :

Trên bàn có 3 que diêm :

a) Không thêm hoặc bớt 1 que nào hãy xếp sao cho từ 3 lại được 4 ?

b) Làm sao chỉ cần thêm 2 que diêm nữa là có ngay 8 ?

Nếu thế, ta có thể giải như sau :

a) III (3) chuyển thành IV (4)

b) III (3) thêm 2 que thành VIII (8).

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 12

Cho tập hợp P các chữ số và tập hợp Q các số tự nhiên có một chữ số.

a) P và Q có bằng nhau không, tại sao ?

b) Tìm tất cả các tập hợp con có 1 ; 2 phần tử của P.

Bài 13

Cho tập hợp $E = \{x, y, z\}$ và tập hợp $F = \{y, t\}$. Viết tất cả các tập hợp con :

- của E mà không phải tập hợp con của F ;
- của F mà không phải tập hợp con của E .

Bài 14

Cho tập hợp G gồm các số g sao cho $72 < g \leq 83$ và tập hợp H gồm các số h sao cho $74 \leq h \leq 81$.

- Mỗi tập hợp G và H có mấy phần tử ?
- So sánh hai tập hợp G và H .
- Tìm tất cả các tập hợp có 3 phần tử vừa là tập hợp con của G vừa là tập hợp con của H .

Bài 15

Trong tập hợp các số có hai chữ số thì :

- chữ số 0, chữ số 1 được viết bao nhiêu lần ?
- tập hợp các số lẻ không vượt quá 30 gồm bao nhiêu phần tử ?

Bài 16

Có bao nhiêu :

- số tự nhiên chẵn có 4 chữ số ?
- số tự nhiên lẻ có 5 chữ số ?

Bài 17

Viết liên tiếp các số tự nhiên thành dãy số 123456... Hỏi chữ số 9 cuối cùng của số 1999 ở vị trí thứ bao nhiêu ?

Bài 18*

Viết liên tiếp các số tự nhiên từ 1 đến 30 thành số có nhiều chữ số 12345...282930. Hãy xóa đi 45 chữ số để còn lại (theo thứ tự đã viết) số nhỏ nhất.

Bài 19

Chuyển chỗ 1 que diêm để được kết quả đúng :

a) Trường hợp có 9 que diêm

$$VI \equiv V - I \quad \text{và} \quad IX \equiv V - I$$

b) Trường hợp có 11 que diêm

$$XI + V \equiv V \quad \text{và} \quad IX - V \equiv VI$$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 12

Hướng dẫn. Viết các phân tử của P và của Q. Từ đó viết được các tập hợp con có 1 ; 2 phân tử của P.

Cách giải.

a) Tập hợp P các chữ số là $P = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 8 ; 9\}$, tập hợp Q các số tự nhiên có 1 chữ số là $Q = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 8 ; 9\}$. Vậy $P = Q$ vì mọi phân tử của P đều thuộc Q và mọi phân tử của Q đều thuộc P.

b) Tất cả các tập hợp con của P là :

\emptyset ; 1 phân tử $\{0\} ; \{1\} ; \{2\} ; \{3\} ; \{4\} ; \{5\} ; \{6\} ; \{7\} ; \{8\} ; \{9\}$.

2 phân tử $\{0 ; 1\} ; \{0 ; 2\} ; \{0 ; 3\} ; \dots ; \{0 ; 8\} ; \{0 ; 9\}$

$\{1 ; 2\} ; \{1 ; 3\} ; \{1 ; 4\} ; \dots ; \{1 ; 8\} ; \{1 ; 9\}$

$\{2 ; 3\} ; \{2 ; 4\} ; \{2 ; 5\} ; \dots ; \{2 ; 8\} ; \{2 ; 9\}$

$\{3 ; 4\} ; \{3 ; 5\} ; \{3 ; 6\} ; \{3 ; 7\} ; \{3 ; 8\} ; \{3 ; 9\}$

$\{4 ; 5\} ; \{4 ; 6\} ; \{4 ; 7\} ; \{4 ; 8\} ; \{4 ; 9\}$

$\{5 ; 6\} ; \{5 ; 7\} ; \{5 ; 8\} ; \{5 ; 9\}$

$\{6 ; 7\} ; \{6 ; 8\} ; \{6 ; 9\}$

$\{7 ; 8\} ; \{7 ; 9\}$ và $\{8 ; 9\}$.

Bài 13

Hướng dẫn. Trước hết viết tất cả tập hợp con của E, rồi của F. Từ đó giải được các câu hỏi.

Cách giải. a) Tất cả tập hợp con của E mà không phải tập hợp con của F là :

$$\{x\} ; \{z\} ; \{x, z\} ; \{x, y\} ; \{x, y, z\} ; \{y, z\}$$

b) Tất cả tập hợp con của F mà không phải tập hợp con của E là :

$$\{t\} ; \{y, t\}.$$

Bài 14

Hướng dẫn. Viết tất cả phân tử của G và của H để thấy H là tập hợp con của G. Từ đó giải được câu c.

Cách giải. a) $G = \{73 ; 74 ; 75 ; 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 80 ; 81 ; 82 ; 83\}$, tập hợp G gồm 11 phân tử.

$H = \{74 ; 75 ; 76 ; 77 ; 78 ; 79 ; 80 ; 81\}$, tập hợp H gồm 8 phân tử.

b) H là tập hợp con của G ($H \subset G$)

c) $\{74 ; 75 ; 76\}$, $\{74 ; 76 ; 77\}$, $\{74 ; 77 ; 78\}$, $\{74 ; 78 ; 79\}$,
 $\{74 ; 79 ; 80\}$, $\{74 ; 80 ; 81\}$

$\{75 ; 76 ; 77\}$, $\{75 ; 77 ; 78\}$, $\{75 ; 78 ; 79\}$, $\{75 ; 79 ; 80\}$,
 $\{75 ; 80 ; 81\}$

$\{76 ; 77 ; 78\}$, $\{76 ; 78 ; 79\}$, $\{76 ; 79 ; 80\}$, $\{76 ; 80 ; 81\}$

$\{77 ; 78 ; 79\}$, $\{77 ; 79 ; 80\}$, $\{77 ; 80 ; 81\}$

$\{78 ; 79 ; 80\}$, $\{78 ; 80 ; 81\}$

$\{79 ; 80 ; 81\}$.

Bài 15

Hướng dẫn. Tìm xem chữ số 0, chữ số 1 có mặt ở những số có hai chữ số nào ?

Cách giải. a) Tập hợp các số có hai chữ số là :

$$\{10 ; 11 ; 12 ; \dots ; 97 ; 98 ; 99\}$$

- chữ số 0 có mặt ở các số 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, tức là có mặt 10 lần

- chữ số 1 có mặt ở các số 10, 11, 12, ..., 18, 19, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, tức là có mặt 19 lần.

b) Tập hợp các số lẻ không vượt quá 30 là $\{11 ; 13 ; \dots ; 27 ; 29\}$, tập hợp này gồm 10 phần tử.

Bài 16

Hướng dẫn. Viết tất cả các số chẵn có bốn chữ số từ 1000 đến 9998 và tất cả số lẻ có năm chữ số từ 10001 đến 99999.

Cách giải. a) Các số tự nhiên chẵn có 4 chữ số là :

1000 ; 1002 ; 1004 ; ... ; 9994 ; 9996 ; 9998

với số lượng là $(9998 - 1000) : 2 + 1 = 4500$ (số).

b) Các số tự nhiên lẻ có 5 chữ số là :

10001 ; 10003 ; 10005 ; ... ; 99995 ; 99997 ; 99999

với số lượng là : $(99999 - 10001) : 2 + 1 = 45000$ (số).

Bài 17

Hướng dẫn. Tính xem từ 1 đến 1999 có bao nhiêu số có một, hai, ba, bốn chữ số. Từ đó tìm được vị trí chữ số 9 cuối cùng của 1999.

Cách giải. Từ số 1 đến số 1999 có cả thảy :

9 số có một chữ số

90 số có hai chữ số

900 số có ba chữ số

$1999 - 1000 + 1 = 1000$ (số có bốn chữ số).

Do đó số chữ số phải dùng để viết các số từ 1 đến 1999 là :

$9 + 2.90 + 3.900 + 4.1000 = 6889$ (chữ số)

Vậy chữ số 9 cuối cùng của số 1999 ở vị trí thứ 6889 trong dãy số đã viết.

Bài 18*

Hướng dẫn. Tính xem từ 1 đến 30 có bao nhiêu chữ số để thấy trong đó có ba chữ số 0. Xóa 45 chữ số thì còn lại 6 chữ

số trong đó đã có ba chữ số 0 rồi, từ đó tìm được 3 chữ số khác 0 nhỏ nhất để lại.

Cách giải. Từ 1 đến 30 có tất cả 9 chữ số (từ 1 đến 9) và $2 \cdot 21 = 42$ chữ số (từ 10 đến 30), tức là có 51 chữ số, trong đó có hai chữ số 0 (ở 10 và 20) và một chữ số 0 (ở 30).

Xóa 45 chữ số thì còn lại 6 chữ số trong đó đã có ba chữ số 0 nên chỉ cần để lại ba chữ số khác 0 nhỏ nhất (theo thứ tự đã viết) đó là ba chữ số 122 (ở số 2122).

Vậy số còn lại nhỏ nhất là 001220.

Bài 19

Cách giải. Có nhiều cách chuyển. a) Trường hợp có 9 que diêm
Có nhiều cách chuyển chỗ 1 que diêm như sau :

- $V \equiv V| \rightarrow |$ hoặc $|V \equiv V - |$,
- hoặc $V| \rightarrow V \equiv |$

- $|V \equiv V - |$ hoặc $|X \equiv X - |$

b) Trường hợp có 11 que diêm. Ta có cách viết đúng là :

$$X| \rightarrow V \equiv V|$$

Với cách viết sai $|X \rightarrow V \equiv V|$ có thể chuyển chỗ 1 que diêm bằng 4 cách như sau :

- $|X \rightarrow |V \equiv V$ hoặc $|X \rightarrow V \equiv |V$

hoặc $X \rightarrow |V \equiv V|$ hoặc $X| \rightarrow V \equiv V|$

II. CÁC PHÉP TÍNH TRONG N

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

Bài 1

Có bao nhiêu số có hai chữ số mà :

- chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị ;
- chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra chỉ đề cập đến những số có hai chữ số và chỉ hỏi có bao nhiêu số (chứ không hỏi tổng các số) mà chữ số hàng chục nhỏ hơn (lớn hơn) chữ số hàng đơn vị, vì thế phải loại các số có hai chữ số giống nhau như 11, 22, v.v...

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy hình dung cho hết tất cả các số có hai chữ số bắt đầu từ số nhỏ nhất là 10 đến số lớn nhất là 99. Từ đó mà suy nghĩ để giải đáp các câu hỏi của đề bài.

Để dễ suy nghĩ tìm lời giải, hãy lần lượt xét chữ số hàng chục là 1 (bắt đầu từ 12), là 2 (bắt đầu từ 23), là 3 (bắt đầu từ 34), v.v... nếu chữ số hàng chục nhỏ hơn chữ số hàng đơn vị.

● *Cách giải*

a) Lần lượt xét chữ số hàng chục :

là 1 ta có : 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 (8 số)

là 2 ta có : 23 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 29 (7 số)

là 3 ta có : 34 ; 35 ; 36 ; 37 ; 38 ; 39 (6 số)

là 4 : 45 ; 46 ; 47 ; 48 ; 49 (5 số)

là 5 : 56 ; 57 ; 58 ; 59 (4 số)

là 6 : 67 ; 68 ; 69 (3 số)

là 7 : 78 ; 79 (2 số)

là 8 : 89 (1 số).

Vậy cả thầy có :

$$8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36 \text{ (số).}$$

b) Lần lượt xét chữ số hàng chục :

là 1 ta có : 10 (1 số)

là 2 : 20 ; 21 (2 số)

là 3 : 30 ; 31 ; 32 (3 số)

là 4 : 40 ; 41 ; 42 ; 43 (4 số)

là 5 : 50 ; 51 ; 52 ; 53 ; 54 (5 số)

là 6 : 60 ; 61 ; 62 ; 63 ; 64 ; 65 (6 số)

là 7 : 70 ; 71 ; 72 ; 73 ; 74 ; 75 ; 76 (7 số)

là 8 : 80 ; 81 ; 82 ; 83 ; 84 ; 85 ; 86 ; 87 (8 số)

là 9 : 90 ; 91 ; 92 ; 93 ; 94 ; 95 ; 96 ; 97 ; 98 (9 số).

Vậy cả thầy có :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \text{ (số).}$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu đề bài hỏi : có bao nhiêu số có hai chữ số giống nhau thì đáp số sẽ là :

$$11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55 ; 66 ; 77 ; 88 ; 99 \text{ (9 số).}$$

Lại có thể đặt câu hỏi : có bao nhiêu số có hai chữ số mà :

- chữ số hàng chục gấp đôi, gấp 3, gấp 4, gấp 5 chữ số hàng đơn vị ?

- chữ số hàng chục bằng $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ chữ số hàng đơn vị.

Như thế đáp số sẽ là :

21 ; 42 ; 63 ; 84 (gấp đôi)

31 ; 62 ; 93 (gấp 3)

41 ; 82 (gấp 4)

51 (gấp 5).

Tương tự ta có : 12 ; 24 ; 36 ; 48 (bằng $\frac{1}{2}$) ; 13 ; 26 ; 39
(bằng $\frac{1}{3}$) ; 14 ; 28 (bằng $\frac{1}{4}$) ; 15 (bằng $\frac{1}{5}$).

Bài 2

a) Tìm tổng của số lớn nhất có 7 chữ số và số nhỏ nhất có 9 chữ số.

b) Tìm hiệu của số lớn nhất có 8 chữ số và số nhỏ nhất có 6 chữ số.

• Tìm hiểu đề bài

Ở cả hai câu hỏi số đầu tiên đều là số lớn nhất (có 7 ; 8 chữ số) số thứ hai là số nhỏ nhất (có 9 ; 6 chữ số), chỉ khác nhau là phải tìm tổng (câu a) và tìm hiệu (câu b) của hai số.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy tìm số lớn nhất có 7 chữ số và số nhỏ nhất có 9 chữ số rồi làm phép cộng số nhỏ với số lớn.

b) Tìm số lớn nhất có 8 chữ số và số nhỏ nhất có 6 chữ số rồi lấy số lớn trừ đi số nhỏ.

• Cách giải

a) Số lớn nhất có 7 chữ số là 9 999 999, số nhỏ nhất có 9 chữ số là 100 000 000.

Tổng của chúng là :

$$9\,999\,999 + 100\,000\,000 = 109\,999\,999.$$

b) Số lớn nhất có 8 chữ số là 99 999 999, số nhỏ nhất có 6 chữ số là 100 000.

Hiệu của chúng là :

$$99\,999\,999 - 100\,000 = 99\,899\,999.$$

● *Khai thác bài toán*

Do đã học đến lớp tí nên có thể đổi bài toán như sau : Tìm tổng của số lớn nhất có 12 chữ số và số nhỏ nhất có 10 chữ số hoặc tìm hiệu của số lớn nhất có 11 chữ số và số nhỏ nhất có 9 chữ số.

Khi đó đáp số sẽ là :

$$999\,999\,999\,999 + 1000\,000\,000 = 1000\,999\,999\,999 ;$$

$$99\,999\,999\,999 - 100\,000\,000 = 99\,899\,999\,999.$$

Bài 3

Cho tập hợp {3 ; 4 ; 5}. Tìm tổng của tất cả các số có ba chữ số khác nhau lập được từ tập hợp ba chữ số này.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra yêu cầu tìm tổng của các số có ba chữ số khác nhau lập được chứ không phải tìm tất cả các số có ba chữ số khác nhau.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết hãy tìm tất cả các số lập được theo yêu cầu bài ra bằng cách lần lượt xét chữ số hàng trăm là 3, là 4, là 5. Sau đó mới tìm tổng của chúng.

● *Cách giải*

Với chữ số hàng trăm là 3 ta có các số sau :

$$345 \text{ và } 354$$

Với chữ số hàng trăm là 4 ta có : 435 và 453

Với chữ số hàng trăm là 5 ta có : 534 và 543.

Tổng của 6 số lập được này là :

$$\begin{aligned} & 345 + 354 + 435 + 453 + 534 + 543 = \\ & = 699 + 888 + 1077 = 2664. \end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

Ta có thể giải cách khác như sau :

Mỗi chữ số đều được viết 2 lần ở hàng trăm, 2 lần ở hàng chục và 2 lần ở hàng đơn vị. Do đó tổng của sáu số lập được là :

$$222(3 + 4 + 5) = 222.12 = 2664$$

Cũng có thể đổi bài ra bằng cách cho tập hợp $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ gồm 4 phần tử và tìm tổng của tất cả các số có bốn chữ số khác nhau lập được.

Nếu thế thì cách giải như sau :

Với 1 là chữ số hàng nghìn ta có các số :

$$1234 ; 1243 ; 1324 ; 1342 ; 1423 ; 1432$$

Với 2 là chữ số hàng nghìn ta có :

$$2134 ; 2143 ; 2314 ; 2341 ; 2413 ; 2431$$

Với 3 là chữ số hàng nghìn ta có :

$$3124 ; 3142 ; 3214 ; 3241 ; 3412 ; 3421$$

Với 4 là chữ số hàng nghìn ta có :

$$4123 ; 4132 ; 4213 ; 4231 ; 4312 ; 4321.$$

Mỗi chữ số đều được viết 6 lần ở hàng nghìn, 6 lần ở hàng trăm, 6 lần ở hàng chục và 6 lần ở hàng đơn vị, do đó tổng của 24 số lập được là :

$$6666.(1 + 2 + 3 + 4) = 6666.10 = 66\ 660.$$

Bài 4

Tính nhanh :

a) tổng các số lẻ từ 1 đến 1999 ;

b) tổng các số chẵn từ 2 đến 2000.

● *Tìm hiểu đề bài*

Hãy hình dung tất cả các số lẻ từ 1 đến 1999 gồm 1 ; 3 ; 5 ; ... ; 1995 ; 1997 ; 1999 và tất cả các số chẵn từ 2 đến 2000 gồm 2 ; 4 ; 6 ; ... ; 1996 ; 1998 ; 2000. Vấn đề đặt ra là tìm nhanh tổng $1 + 3 + 5 + \dots + 1995 + 1997 + 1999$ và tổng $2 + 4 + 6 + \dots + 1996 + 1998 + 2000$

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Nếu nhận xét $1 + 1999 = 3 + 1997 = 5 + 1995 = \dots = 2000$ và cả thấy có bao nhiêu cặp số như vậy thì sẽ tìm được nhanh tổng $1 + 3 + \dots + 1997 + 1999$.

b) Tương tự ta nhận xét rằng :

$2 + 2000 = 4 + 1998 = 6 + 1996 = \dots = 2002$ và cũng tính nhanh được như trên.

● *Cách giải*

a) Tổng phải tìm có thể viết :

$$(1 + 1999) + (3 + 1997) + (5 + 1995) + \dots + (999 + 1001).$$

Mỗi tổng trong dấu ngoặc bằng 2000 mà từ 1 đến 1999 có cả thảy 1000 số lẻ nên tổng phải tìm là :

$$2000.1000 = 2\,000\,000$$

b) Ta cũng có thể viết tổng các số chẵn như sau :

$$(2 + 2000) + (4 + 1998) + (6 + 1996) + \dots + (1000 + 1002).$$

Mỗi tổng trong dấu ngoặc bằng 2002 mà từ 2 đến 2000 có cả thảy 1000 số chẵn nên tổng phải tìm là :

$$2002.1000 = 2\,002\,000.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán như sau :

"Tính tổng các số hạng từ 1 đến 1999 và rút ra quy tắc tính tổng đó."

Muốn thể trước tiên ta phải tính số số hạng từ 1 đến 1999. Số số hạng đó bằng : $9 + 90 + 900 + 1000 = 1999$ (số hạng). Để tính tổng đã cho ta viết như sau :

$$T = 1 + 2 + 3 + \dots + 1997 + 1998 + 1999 \quad (1)$$

$$T = 1999 + 1998 + 1997 + \dots + 3 + 2 + 1 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) được :

$$2T = (1 + 1999) + (2 + 1998) + (3 + 1997) + \dots + (1997 + 3) + (1998 + 2) + (1999 + 1)$$

Tất cả có 1999 biểu thức trong ngoặc, mỗi biểu thức đó đều bằng 2000. Thành thử $2T = 2000.1999$, từ đó $T = 1\,999\,000$.

Ta rút ra quy tắc tính tổng như sau : lấy số hạng đầu (số 1) cộng với số hạng cuối (số 1999), sau đó chia đôi và nhân với số số hạng (số 1999), tức là : $T = \frac{1 + 1999}{2} \cdot 1999 = 1000.1999 = 1\,999\,000$.

Quy tắc tính trong dân gian ta : "đĩ đầu, cộng vĩ, chiết bán, nhân chi".

Bài 5

Viết tất cả các số có ba chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 5.

● *Tìm hiểu đề bài*

Số có ba chữ số \overline{abc} phải tìm có tổng $a + b + c = 5$ với điều kiện $a \neq 0$, còn b và c có thể là $0 \leq b \leq 9, 0 \leq c \leq 9$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy tìm cách phân tích 5 thành một tổng ba chữ số, có nhiều cách phân tích. Từ đó khi ghép lại thành số có ba chữ số thì lưu ý, chữ số hàng trăm phải khác 0.

● *Cách giải*

Số 5 có thể phân tích thành tổng của ba chữ số như sau :

$$5 = 5 + 0 + 0, \text{ từ đó ta có số } 500 \text{ (1 số)}$$

$5 = 4 + 1 + 0$, từ đó ta có các số :

$$410 ; 401 ; 140 ; 104 \quad (4 \text{ số})$$

$5 = 3 + 1 + 1$, từ đó có :

$$311 ; 131 ; 113 \quad (3 \text{ số})$$

$5 = 3 + 2 + 0$, từ đó có :

$$320 ; 302 ; 203 ; 230 \quad (4 \text{ số})$$

$5 = 2 + 2 + 1$, từ đó có :

$$221 ; 212 ; 122 \quad (3 \text{ số})$$

Vậy cả thảy có :

$$1 + 4 + 3 + 4 + 3 = 15 \text{ (số)}.$$

● Khai thác bài toán

Nếu đổi đề bài thành : "Viết tất cả các số có ba chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 1 ; 2 ; 3 ; 4" thì đáp số sẽ như thế nào ?

Với tổng ba chữ số bằng 1 ta viết $1 = 1 + 0 + 0$ và chỉ được số 100.

Với tổng bằng 2 ta có thể viết :

$$2 = 2 + 0 + 0 = 1 + 1 + 0$$

và được các số : 200 ; 110 ; 101.

Với tổng bằng 3 ta có thể viết :

$$3 = 3 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1$$

và được các số : 300 ; 102 ; 120 ; 201 ; 210 ; 111.

Với tổng bằng 4 ta có thể viết :

$$4 = 4 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 = 2 + 2 + 0 = 2 + 1 + 1$$

và được các số :

$$400 ; 310 ; 301 ; 220 ; 202 ; 211 ; 103 ; 130 ; 112 ; 121.$$

Bài 6

Tính nhanh :

a) $11 + 12 + 13 + 14 + \dots + 88 + 89 ;$

$$b) 1 + 4 + 5 + 9 + 14 + 23 + 37 + 60 + 97 + 101 + 104 + 205.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Yêu cầu là phải tính nhanh các tổng đã cho, mỗi tổng có một đặc điểm riêng nên cần tìm được đặc điểm riêng đó. Ở câu a phải tìm cho đủ các số hạng, còn ở câu b thì đã cho tất cả số hạng.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Các số hạng của tổng là các số tự nhiên liên tiếp từ 11 đến 89. Để tính nhanh tổng này hãy nhận xét rằng :

$$11 + 89 = 12 + 88 = 13 + 87 = \dots = 100$$

từ đó tìm số các cặp như thế để tính nhanh được tổng.

b) Lưu ý số hạng thứ ba 5 bằng tổng hai số hạng 1 và 4 đứng ngay trước nó, từ đó tìm được tổng các số đã cho.

● *Cách giải*

a) Tổng đã cho có thể viết :

$$(11 + 89) + (12 + 88) + (13 + 87) + \dots + (49 + 51) + 50$$

Các tổng trong dấu ngoặc đều bằng 100 mà có cả thảy 49 cặp số thành thử tổng đã cho bằng :

$$100.49 + 50 = 4900 + 50 = 4950.$$

b) Ta nhận thấy rằng :

$1 + 4 = 5$; $9 + 14 = 23$; $37 + 60 = 97$; $101 + 104 = 205$;
 như vậy có thể chia tổng thành từng nhóm có 3 số hạng liên tiếp mà số hạng thứ ba trong mỗi nhóm là tổng của hai số đứng ngay trước nó. Vậy tổng đã cho có thể viết :

$$\begin{aligned} & 1 + 4 + 5 + 9 + 14 + 23 + 37 + 60 + 97 + 101 + 104 + 205 \\ &= 5 + 5 + 23 + 23 + 97 + 97 + 205 + 205 \\ &= 2(5 + 23 + 97 + 205) = 2(210 + 120) \\ &= 2.330 = 660. \end{aligned}$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu để bài thay đổi như sau :

"Tính tổng của tám số hạng xếp thành dãy mà năm số hạng đầu là 1 ; 2 ; 6 ; 24 ; 120" thì việc đầu tiên là phải tìm ba số hạng cuối. Muốn thế hãy tìm ra quy luật thành lập dãy số.

Ta nhận thấy rằng : số hạng thứ hai $2 = 1.2$, số hạng thứ ba $6 = 2.3$, số hạng thứ tư $24 = 6.4$, số hạng thứ năm $120 = 24.5$. Từ đó suy ra ngay :

Số hạng thứ sáu là $120.6 = 720$, số hạng thứ bảy là $720.7 = 5040$ và số hạng thứ tám là $5040.8 = 40320$.

Vậy tổng phải tìm là :

$$1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 720 + 5040 + 40320 = 46233.$$

Ta còn có thể tính tổng các chữ số của dãy số

$$10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; \dots ; 88 ; 89.$$

Muốn thế ta tính tổng các chữ số hàng đơn vị của dãy số mà chữ số hàng chục là 1, sau đó cộng với tổng các chữ số mà số hàng chục đã nhân với 10 tức là :

$$(1 + 1 + \dots + 1) \cdot 10 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 100 + 45$$

10 số 1

Tương tự: đối với dãy số mà chữ số hàng chục là 2 ta có :

$$(2 + 2 + \dots + 2) \cdot 10 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 200 + 45$$

10 số 2

.....

dãy số mà số hàng chục là 8 :

$$(8 + 8 + \dots + 8) \cdot 10 + (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 800 + 45$$

10 số 8

Suy ra tổng phải tìm là :

$$\begin{aligned} & 100 + 45 + 200 + 45 + \dots + 800 + 45 \\ & = 100 + 200 + \dots + 800 + 45 + \dots + 45 \\ & \qquad \qquad \qquad 8 \text{ số} \\ & = (1 + 2 + 3 + \dots + 8) \cdot 100 + 45 \cdot 8 = 3600 + 360 = 3960. \end{aligned}$$

Bài 7

Tính nhẩm :

a) $7.12.25 + 3.16.125 + 8.25$;

b) $4.22.87 + 11.8.36 - 2.44.23$.

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài yêu cầu tính nhẩm, khác với tính nhanh là chỉ nhẩm trong óc để tìm được ngay kết quả. Vì thế cần nhớ một số tích đặc biệt như $25.4 = 100$, $125.8 = 1000$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy phân tích mỗi số hạng của tổng hoặc hiệu thành thừa số sao cho xuất hiện được các tích đặc biệt $25.4 = 100$; $125.8 = 1000$; chẳng hạn : $7.12.25 = 7.3.4.25 = 21.100 = 2100$.

● *Cách giải*

a) Phân tích các số hạng của tổng thành thừa số ta có :

$$\begin{aligned} & 7.3.4.25 + 3.2.8.125 + 2.4.25 \\ & = 21.100 + 6.1000 + 2.100 = 2100 + 6000 + 200 = 8300. \end{aligned}$$

b) Nhận thấy : $4.22 = 11.8 = 2.44 = 88$, do đó biểu thức đã cho có thể viết : $88.87 + 88.36 - 88.23 = 88.(87 + 36 - 23) = 88.100 = 8800$.

● *Khai thác bài toán*

Nếu phải tính nhẩm hai biểu thức :

$$360 : (2.3.6) + 12.25 \text{ và } 4.[(35.42.98) : (5.21.49)].125$$

thì dựa vào hai tích đặc biệt ta có thể tính nhẩm như sau :

$$\begin{aligned} (360 : 36) + 3.4.25 &= 10 + 3.100 \\ &= 10 + 300 = 310 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{và } 4.(35 : 5).(42 : 21).(98 : 49).125 &= 4.7.2.2.125 \\ &= 8.125.7.2 = 1000.14 = 14000. \end{aligned}$$

Bài 8

Tìm x biết :

a) $x + 2010 = 9098$; $1999 + x = 7001$;

b) $51\,162 - (14\,015 + x) = 1111$; $(7\,654 - x) - 1008 = 2\,222$;

c) $627 : x = 19$; $36 : x = x$.

• Tìm hiểu đề bài

Bài ra yêu cầu tìm số hạng chưa biết x khi biết số hạng thứ hai và tổng của chúng (câu a), tìm số trừ hoặc số bị trừ khi biết số bị trừ và hiệu hoặc khi biết số trừ và hiệu, ngoài ra số trừ $14\,015 + x$ hoặc số bị trừ $7654 - x$ tìm được lại phải tìm x cuối cùng (câu b), tìm số chia chưa biết x khi biết số bị chia và thương hoặc tìm số chia và thương chưa biết x khi chỉ biết số bị chia (câu c).

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

Hãy vận dụng mối quan hệ giữa các số hạng của một tổng với tổng của chúng (câu a), mối quan hệ giữa số bị trừ, số trừ và hiệu của chúng (câu b), mối quan hệ giữa số bị chia, số chia và thương của chúng (câu c).

• Cách giải

a) $x = 9098 - 2010 = 7088$;

$$x = 7001 - 1999 = 5002.$$

b) $14\,015 + x = 51\,162 - 1\,111 = 50\,051$

Từ đó $x = 50\,051 - 14\,015 = 36\,036$;

$$7654 - x = 1008 + 2222 = 3230$$

Từ đó $x = 7654 - 3230 = 4424$.

c) $x = 627 : 19 = 33$;

$$x.x = 36 = 6.6. \text{ Vậy } x = 6.$$

• Khai thác bài toán

Việc tìm x cũng như tìm y có thể ra dưới các dạng sau :

Tìm y biết $(646\ 464 : 10\ 101) : y = y$, hoặc

Tìm các chữ số thích hợp y để $\overline{yyyy} - \overline{yyy} \neq 1$.

Với dạng thứ nhất ta thực hiện phép chia trong dấu ngoặc được kết quả là 64. Từ đó $64 = y.y$ mà $64 = 8.8$. Suy ra $y = 8$.

Với dạng thứ hai ta có một số có 4 chữ số trừ đi một số có 3 chữ số cho hiệu là 1. Do đó số \overline{yyyy} phải là 1000 và số \overline{yyy} phải là 999 để có $1000 - 999 = 1$.

Bài 9

Cho dãy số

$$150 \square 149 \square 148 \square 147 \square \dots \square 51 \square 50.$$

Giải thích tại sao nếu điền vào ô vuông cùng dấu + hoặc dấu - thì kết quả không thể bằng 1999 ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho một dãy số tự nhiên liên tiếp từ số lớn 150 đến số bé 50 và giữa hai số liên tiếp đó là ô vuông mang dấu + hoặc dấu -, vấn đề là giải thích tại sao kết quả không thể là 1999

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy xét từng cặp số liên tiếp $(150 ; 149)$; $(148 ; 147)$; ... để xem tổng các số của từng cặp hoặc hiệu của chúng là số lẻ hay số chẵn. Hãy gọi T là tổng $(150 + 149) + \dots + (51 + 50)$ hoặc hiệu $(150 - 149) - \dots - (51 - 50)$ và xét xem T gồm bao nhiêu cặp số lẻ hoặc số chẵn. Từ đó suy ra kết quả phải là số chẵn nên không thể là số lẻ 1999.

● *Cách giải*

Mỗi cặp số liên tiếp có tổng hoặc hiệu là số lẻ. Từ 50 đến 150 có 50 cặp số lẻ.

Tổng hoặc hiệu của 50 số lẻ phải là một số chẵn. Vì thế kết quả của phép tính không thể là số lẻ 1999.

● *Khai thác bài toán*

Nếu trong dãy số đã cho ta thay ô vuông đầu bằng dấu + tiếp theo là hai ô vuông mang dấu -, rồi đến hai ô vuông mang dấu +, ... thì sau khi thực hiện phép tính kết quả sẽ bằng bao nhiêu ?

Như vậy ta phải tính giá trị của biểu thức

$$A = 150 + 149 - 148 - 147 + 146 + 145 - \dots$$

$$\text{hay } A = 50 + (51 - 52 - 53 + 54) + (55 - 56 - 57 + 58) + \dots + (146 - 147 - 148 + 149) + 150.$$

Mỗi biểu thức trong dấu ngoặc đều bằng 0, vì thế giá trị của A bằng : $150 + 50 = 200$.

Bài 10

Tính :

a) $(1998.1999 - 1998.1998 - 1000-998) : 2019$.

b) $4.11 + 24 : 4 + 8$, sau đó đưa thêm dấu ngoặc một cách hợp lý và tính tiếp tất cả các biểu thức để được kết quả là số tự nhiên.

● *Tìm hiểu đề bài*

a) Biểu thức trong dấu ngoặc gồm các số 1998, 1999. Tính được kết quả thì đem chia cho 2019.

b) Để bài yêu cầu đưa thêm dấu ngoặc ở nhiều chỗ khác nhau trong biểu thức đầu tiên (không có dấu ngoặc) rồi tính giá trị mỗi biểu thức có được sao cho kết quả phải là số tự nhiên (vì có thể thêm dấu ngoặc nhưng kết quả không phải là số tự nhiên).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Lưu ý : $- 1000 - 998 = - 1998$, từ đó có thể đặt 1998 thành thừa số chung (chẳng hạn với $(a + b).c = ac + bc$ thì ngược lại $ac + bc = (a + b).c$, cách làm này gọi là đặt c làm thừa số chung) để tính toán được nhanh biểu thức trong dấu ngoặc.

b) Khi đã đưa thêm dấu ngoặc thì phải tính biểu thức trong dấu ngoặc trước và có thể đưa thêm ở nhiều chỗ, vì thế kết quả sẽ khác nhau, chẳng hạn $4(11 + 24 : 4 + 8)$; $(4.11 + 24) : 4 + 8$; v.v...

● *Cách giải*

a) Biểu thức trong ngoặc có thể viết :

$$\begin{aligned} & 1998.1999 - 1998.1998 - 1998 \\ & = 1998.(1999 - 1998 - 1) = 1998.(1999 - 1999) = 0. \end{aligned}$$

Vậy $0 : 2019 = 0$.

b) Ta có : $4.11 + 24 : 4 + 8 = 44 + 6 + 8 = 58$.

Bây giờ ta đưa thêm dấu ngoặc và sẽ được các biểu thức với các kết quả sau đây :

$$4.(11 + 24 : 4 + 8) = 4.(11 + 6 + 8) = 4.25 = 100$$

$$(4.11 + 24) : 4 + 8 = (44 + 24) : 4 + 8 = 68 : 4 + 8 = 17 + 8 = 25$$

$$4.(11 + 24 : 4) + 8 = 4.(11 + 6) + 8 = 4.17 + 8 = 68 + 8 = 76$$

$$4.(11 + 24) : 4 + 8 = 4.35 : 4 + 8 = 35 + 8 = 43$$

$$4.11 + 24 : (4 + 8) = 44 + 24 : 12 = 44 + 2 = 46.$$

● *Khai thác bài toán*

a) Biểu thức trong dấu ngoặc có dạng tổng quát

$$n.(n + 1) - n.n - n$$

Ta có thể đặt n làm thừa số chung :

$$n(n + 1 - n - 1) = n.0 = 0.$$

Do đó có thể cho n bất cứ số tự nhiên nào để có được một để toán tương tự. Khi đó số chia có thể là bất cứ số tự nhiên nào vì $0 : a (a \neq 0) = 0$.

b) Việc đưa thêm dấu ngoặc vào một biểu thức cho trước không có dấu ngoặc giúp ta làm được nhiều bài toán tương tự, nhưng muốn cho bài toán có được nhiều biểu thức khác nhau khi đưa thêm dấu ngoặc thì đề bài phải cho thế nào để kết quả là số tự nhiên ở nhiều biểu thức.

Chẳng hạn cho biểu thức $9.12 + 14 : 7 + 6$. Nếu đưa thêm dấu ngoặc như : $9.(12 + 14 : 7 + 6)$ hoặc $(9.12 + 14) : 7 + 6$

thì biểu thức thứ nhất

$$9.(12 + 14 : 7 + 6) = 9.(12 + 2 + 6) = 9.20 = 180 \text{ (là số tự nhiên)}$$

nhưng biểu thức thứ hai

$$(9.12 + 14) : 7 + 6 = (108 + 14) : 7 + 6 = 122 : 7 + 6$$

(không thể là số tự nhiên).

Bài 11

a) Viết các tích và thương sau đây dưới dạng một lũy thừa :

$$5^3.5^4.5^5 ; 8^5.8^6.8^7 ; 4^{19} : 4^{16} ; 32^{14} : 32^{12}.$$

b) So sánh các lũy thừa sau :

$$9^{15} \text{ và } 9^{14} ; 7^5 \text{ và } 8^5 ; (1998 - 1997)^{1999} \text{ và } (2003 - 2002)^{2010}$$

• Tìm hiểu đề bài

a) Các phép tính phải tìm đều là lũy thừa của cùng một cơ số là 5, là 8, là 4, là 32.

b) Hai lũy thừa cho trước để so sánh đều là lũy thừa của cùng một cơ số 9 hoặc là hai cơ số khác nhau nhưng đều cùng một số mũ 5.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Áp dụng quy tắc nhân hai lũy thừa cùng cơ số $a^m.a^n = a^{m+n}$ và quy tắc chia hai lũy thừa cùng cơ số $a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$, $m \geq n$).

b) Để so sánh hai lũy thừa hãy lưu ý với $a, b, m, n \in \mathbf{N}$:

$$\text{- nếu } a > b \text{ thì } a^n > b^n \quad (n \neq 0)$$

$$\text{- nếu } m > n \text{ thì } a^m > a^n \quad (a > 1)$$

• Cách giải

$$\text{a) } 5^3.5^4.5^5 = 5^{3+4+5} = 5^{12} ; 8^5.8^6.8^7 = 8^{5+6+7} = 8^{18} ;$$
$$4^{19} : 4^{16} = 4^{19-16} = 4^3 ; 32^{14} : 32^{12} = 32^{14-12} = 32^2.$$

$$\text{b) } 9^{15} > 9^{14} ; 7^5 < 8^5 ; 1^{1999} = 1^{2010}.$$

● *Khai thác bài toán*

Đề bài có thể ra như sau :

- Viết các số sau dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số :
128 ; 64 ; 32 ; 625 ; 125 ; 25.

Cách giải sẽ là :

$$128 = 2^7, 64 = 2^6, 32 = 2^5 \text{ (lũy thừa của 2)}$$

$$625 = 5^4, 125 = 5^3, 25 = 5^2 \text{ (lũy thừa của 5)}.$$

- Viết các số sau đây dưới dạng tổng các lũy thừa của 10 :
987 654 321 ; \overline{abcdef} .

Cách giải sẽ là :

$$987\ 654\ 321 = 9 \cdot 10^8 + 8 \cdot 10^7 + 7 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$\overline{abcdef} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10^1 + f \cdot 10^0.$$

Bài 12

Tìm chữ số cuối cùng của các số sau :

$$0^{1999} ; 1^{1999} ; 5^{1999} ; 6^{1999} ; 9^{1999}.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Các số đã cho đều có cơ số lần lượt là 0 ; 1 ; 5 ; 6 , 9 và số mũ 1999 như nhau. Yêu cầu là tìm chữ số cuối cùng của mỗi lũy thừa đã cho, tức là mỗi lũy thừa tận cùng bằng chữ số nào.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Lưu ý các số tận cùng bằng 0 khi nâng lên bất cứ lũy thừa tự nhiên nào (khác 0) cũng vẫn tận cùng bằng 0. Các số tận cùng bằng 1 khi nâng lên bất cứ lũy thừa nào (khác 0) cũng vẫn tận cùng bằng 1. Hãy xét xem điều nhận xét trên có đúng với các số tận cùng bằng 5 và bằng 6 không.

Riêng số tận cùng bằng 9 thì viết lũy thừa của 9 dưới dạng $(9^2)^x = (81)^x$ để đưa về trường hợp 1^n , chẳng hạn $9^{20} = (9^2)^{10} = (81)^{10}$.

● *Cách giải*

0^{1999} tận cùng bằng chữ số 0

1^{1999} tận cùng bằng chữ số 1

5^{1999} tận cùng bằng chữ số 5

6^{1999} tận cùng bằng chữ số 6.

Riêng đối với 9^{1999} ta biến đổi nó để đưa về dạng $(...1)^n$ như sau :

$$9^{1999} = (9^2)^{999} \cdot 9 = (81)^{999} \cdot 9 \text{ tận cùng bằng } 1 \cdot 9 = 9.$$

● *Khai thác bài toán*

Qua các ví dụ ở trên ta rút ra nhận xét sau đây :

- Tất cả những số tận cùng bằng 0 ; 1 ; 5 ; 6 khi nâng lên bất cứ lũy thừa tự nhiên nào (khác 0) đều tận cùng bằng chính các chữ số đó.

Chẳng hạn 7775^{7775} tận cùng bằng 5 ; 9996^{9996} tận cùng bằng 6.

Từ đó để tìm chữ số tận cùng của một số ta biến đổi nó (nếu có thể) để đưa về các số có tận cùng bằng 0 ; 1 ; 5 hoặc 6.

- Đối với các số tận cùng bằng 4 hoặc bằng 9 thì :

Lũy thừa của các số tận cùng bằng 4 sẽ tận cùng bằng 6 nếu số mũ chẵn và bằng 4 nếu số mũ lẻ. Chẳng hạn 14^8 tận cùng bằng 6 và 74^9 tận cùng bằng 4.

Lũy thừa của các số tận cùng bằng 9 sẽ tận cùng bằng 1 nếu số mũ chẵn và bằng 9 nếu số mũ lẻ. Chẳng hạn 1999^{12} tận cùng bằng 1 và 1999^{19} tận cùng bằng 9.

Bài 13

Tính giá trị các biểu thức sau :

$$A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 ;$$

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8 + 2^9.$$

● *Tìm hiểu đề bài*

Biểu thức A là tổng các bình phương của 6 số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 6, còn biểu thức B là tổng của 10 số hạng trong đó số hạng đầu tiên là 1 còn các số hạng tiếp theo lần lượt là lũy thừa của 2 với số mũ lần lượt là 1 ; 2 ; ... ; 9.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Đối với biểu thức A chỉ cần tính bình phương các số từ 1 đến 6 rồi tính tổng.

Đối với biểu thức B hãy nhân hai vế với 2 rồi lấy kết quả trừ đi biểu thức A từng vế để có kết quả.

● *Cách giải*

$$A = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

$$B = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^8 + 2^9 \quad (1)$$

$$2.B = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^9 + 2^{10} \quad (2)$$

Lấy (2) trừ đi (1) từng vế được :

$$2.B - B = 2^{10} - 1 \text{ hay } B = 1024 - 1 = 1023.$$

● *Khai thác bài toán*

a) Có thể đổi câu A bằng : Chứng tỏ rằng biểu thức

$$C = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$$

là bình phương của một số tự nhiên (còn gọi là số chính phương).

Ta có $C = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$. Số 225 chính là bình phương của số 15, hay 225 là số chính phương.

b) Lại có thể rút gọn một biểu thức dạng $M : N$ với $M = 2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}$, $N = 2^{27} \cdot 5^7 + 2^{10} \cdot 5^{27}$ bằng cách viết như sau :

$$\frac{M}{N} = \frac{2^{30} \cdot 5^7 + 2^{13} \cdot 5^{27}}{2^{27} \cdot 5^7 + 2^{10} \cdot 5^{27}} = \frac{2^{13} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})}{2^{10} \cdot 5^7 \cdot (2^{17} + 5^{20})} = 2^3 = 8.$$

Bài 14

a) Thay dấu * bằng những chữ số thích hợp biết rằng từ phép nhân (A) sau khi đổi chỗ 2 thừa số cho nhau thì được phép nhân (B)

$$\begin{array}{r}
 * * * \\
 \times * 2 * \\
 \hline
 * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * 1 * * *
 \end{array}
 \quad (A)$$

$$\begin{array}{r}
 * 2 * \\
 \times * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * * * * *
 \end{array}
 \quad (B)$$

b) Thay các chữ m, n, p bằng chữ số thích hợp trong phép nhân ở bên (các chữ khác nhau được thay bởi các chữ số khác nhau) :

$$\begin{array}{r}
 mp \\
 \times pp \\
 \hline
 mp \\
 mp \\
 \hline
 pnp
 \end{array}$$

• *Tìm hiểu đề bài*

a) Hai phép nhân (A) và (B) khác nhau ở chỗ số nhân $\overline{*2*}$ ở (A) trở thành số bị nhân ở (B), ngoài ra ở (A) có ba tích riêng nhưng ở (B) chỉ có hai tích riêng. Tích ở (A) và ở (B) đều có năm chữ số nhưng tích ở (A) cho biết chữ số 1 ở hàng nghìn.

b) Số bị nhân và hai tích riêng đều là số có hai chữ số \overline{mp} , số nhân là số có hai chữ số giống nhau \overline{pp} , còn tích có hai chữ số hàng trăm và hàng chục đều là n.

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

a) Lưu ý trong phép nhân (A) số bị nhân đem nhân với 2 thì cho tích riêng là số có bốn chữ số nhưng đem nhân với chữ số hàng đơn vị hoặc với chữ số hàng trăm của số bị nhân thì lại cho số có ba chữ số. Từ đó suy ra được chữ số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị của số nhân phải là 1.

Trong phép nhân (B) tích riêng thứ nhất có bốn chữ số, suy ra chữ số hàng đơn vị của số nhân phải là 9. Từ đó suy ra chữ số hàng trăm của số nhân.

b) Lưu ý do tích riêng thứ nhất và thứ hai đều bằng số bị nhân \overline{mp} tức là $\overline{mp} \cdot p = \overline{mp}$ ta suy ra được giá trị của p bằng 1. Từ đó dựa vào tích \overline{pnp} để tính được m và n.

● *Cách giải*

a) Theo phép nhân (A) chữ số 2 nhân với số bị nhân cho tích riêng có bốn chữ số nhưng 2 nhân với chữ số hàng đơn vị hoặc chữ số hàng trăm của số bị nhân lại cho tích riêng là số có ba chữ số. Suy ra chữ số hàng đơn vị và chữ số hàng trăm của số nhân phải là 1. Vậy ta có số nhân là 121 (phép nhân (A)).

Theo phép nhân (B) tích riêng thứ nhất có bốn chữ số, vậy chữ số hàng đơn vị của số nhân phải là 9 để có $121 \cdot 9 = 1089$ (nếu chữ số hàng đơn vị của số nhân là 8 thì $121 \cdot 8 = 968$ là số có ba chữ số trái với bài ra).

Phép nhân (B) bây giờ trở thành :

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times \quad *09 \\ \hline 1089 \\ *** \\ \hline *1*89 \end{array}$$

Từ đó suy ra chữ số hàng trăm của số nhân trong phép nhân (B) phải là 5, tức là số nhân là 509.

Tóm lại ta có phép nhân (B) như sau :

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times 509 \\ \hline 1089 \\ 6050 \\ \hline 61589 \end{array}$$

b) Dựa vào phép nhân ta thấy rằng : số bị nhân \overline{mp} đem nhân với p cho tích cũng là \overline{mp} , tức là :

$$\overline{mp} \cdot p = \overline{mp}, \text{ suy ra } p = 1.$$

Do khi cộng hai tích riêng là \overline{mp} ta được tích \overline{pnp} nên :

$$m + p = n + 10 \text{ hay } m + 1 = n + 10$$

Suy ra $m = 9, n = 0$. Do đó số bị nhân phải là 91, số nhân là 11.

Ta có phép nhân như ở bên :

$$91.11 = 1001.$$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times 11 \\ \hline 91 \\ 91 \\ \hline 1001 \end{array}$$

Bài 15

a) Thay các chữ x, y, z bằng chữ số thích hợp sao cho :

$$\overline{xx} \cdot \overline{xyz} \cdot \overline{yz} = \overline{xyzxyz}$$

(Các chữ khác nhau được thay bằng các chữ số khác nhau).

b) Thay các chữ m, n, p, q bằng chữ số thích hợp sao cho :

$$\overline{mpp} \cdot \overline{n} = \overline{qnm}, \text{ trong đó tích } \overline{qnm} \text{ là số lẻ}$$

(Các chữ khác nhau được thay bằng các chữ số khác nhau).

• Tìm hiểu đề bài

a) Biểu thức ở bên trái dấu $=$ là tích của ba thừa số $\overline{xx}, \overline{xyz}, \overline{yz}$ mà kết quả ở bên phải dấu $=$ là số có sáu chữ số \overline{xyzxyz} gồm thừa số \overline{xyz} viết hai lần liên nhau.

b) Đề bài cho tích \overline{qnm} là một số lẻ.

• Hướng dẫn cách tìm lời giải

a) Hãy đưa phép tính tích của ba thừa số $\overline{xx} \cdot \overline{xyz} \cdot \overline{yz}$ về phép tính tích của hai thừa số $\overline{xx} \cdot \overline{yz}$, bằng cách chia số \overline{xyzxyz} cho \overline{xyz} được thương là 1001.

Từ đó phân tích 1001 ra hai thừa số dạng \overline{xx} và \overline{yz} để tìm được các giá trị của x, y, z .

b) Do tích \overline{qnm} là số lẻ nên \overline{mpp} và \overline{n} cũng là số lẻ. Suy ra các chữ số m, n, p phải lẻ. Loại các trường hợp $n = 1$ và 5, $pp = 1$ và 5. Từ đó mà suy luận tiếp.

• Cách giải

a) Do tích $\overline{xx} \cdot \overline{xyz} \cdot \overline{yz}$ bằng \overline{xyzxyz} tức là $\overline{xyz} \cdot 1001$ nên chia \overline{xyzxyz} cho \overline{xyz} ta được :

$$\overline{xx} \cdot \overline{yz} = 1001.$$

Do 1001 phân tích được dưới dạng 77.13 nên suy ra $x = 7$, $y = 1$, $z = 3$ và $\overline{xyz} = 713$.

Thử lại : $77.713.13 = 713.1001 = 713713$.

b) Do tích qnm là số lẻ nên hai thừa số \overline{mpp} và n cũng là số lẻ. Suy ra m, n, p phải là những chữ số lẻ : 1, 3, 5, 7, 9.

Loại các trường hợp $n = 1, p = 1, n = 5, p = 5$ vì sẽ dẫn tới $p = m = n$ trái với đề bài. Lần lượt xét n và p lấy các giá trị 9 và 7 ; 9 và 3 ; 7 và 3 để tính m rồi chú ý tích có ba chữ số. Sẽ tìm được $n = 3, p = 7, m = 1$. Vậy : $177.3 = 531$.

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 16

a) Cho số 88 888 888, hãy dùng ba dấu + viết giữa các chữ số để được kết quả là 112 và dùng bốn dấu + để được kết quả là 1000.

b) Cho số $\underbrace{55 \dots 5}_{20 \text{ chữ số } 5}$, hãy dùng chín dấu + viết giữa các chữ số để được kết quả là 1000.

Bài 17

Tính tổng và hiệu của số lớn nhất có bốn chữ số khác nhau và số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau.

Bài 18

a) Để viết tất cả các số có hai chữ số thì phải dùng bao nhiêu chữ số 1 ?

b) Tính nhanh $M = 214 + 1999 + 786 + 111 - 1000$.

Bài 19

Chứng tỏ rằng hai biểu thức P và Q bằng nhau :

$$P = 789.754754 ; \quad Q = 754.789789.$$

Bài 20

Chứng tỏ rằng $\underbrace{11 \dots 1}_{20 \text{ chữ số } 1}$ $\underbrace{22 \dots 2}_{20 \text{ chữ số } 2}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Bài 21

Viết các số sau dưới dạng tổng các lũy thừa của 10 :
 19991999 ; \overline{xyztv} .

Bài 22*

Các số $10!$ và $100!$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0 ?

(Kí hiệu $n!$, đọc là n giai thừa, là tích của n số tự nhiên đầu tiên từ 1 đến n tức là :

$$n! = 1.2.3 \dots (n-1).n).$$

Bài 23*

a) Chứng tỏ rằng các biểu thức

$M = 1^3 + 2^3$, $N = 1^3 + 2^3 + 3^3$, $P = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$ đều viết được dưới dạng số chính phương.

b) Tính nhanh :

$$\frac{23456}{(23457)^2 - (23456 \cdot 23458)}$$

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 16

Hướng dẫn. a) Bắt đầu số 88 (với tổng bằng 112) và bằng số 888 (với tổng bằng 1000) ;

b) Bắt đầu bằng số 555.

Cách giải. a) $88 + 8 + 8 + 8 = 112$

$$888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000 ;$$

b) $555 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 55 + 5 = 1000.$

Bài 17

Hướng dẫn. Viết số lớn nhất có bốn chữ số khác nhau là 9876 và số nhỏ nhất có bốn chữ số khác nhau là 1023.

Cách giải. Số lớn nhất có 4 chữ số khác nhau là 9876, số nhỏ nhất có 4 chữ số khác nhau là 1023.

$$\text{Tổng } 9876 + 1023 = 10\,899 ;$$

$$\text{Hiệu } 9876 - 1023 = 8853.$$

Bài 18

Hướng dẫn. a) Viết tất cả số có hai chữ số rồi xét xem có bao nhiêu chữ số 1 từ 10 đến 19, từ 20 đến 29, ..., từ 90 đến 99.

b) Lưu ý : $214 + 786 = 1000$

Cách giải.

a) Tất cả các số có hai chữ số là :

$$10 ; 11 ; 12 ; 13 ; \dots ; 97 ; 98 ; 99.$$

- Từ 10 đến 19 có mười chữ số 1 ở hàng chục và một chữ số 1 ở hàng đơn vị của số 11, tức là có cả thảy 11 chữ số 1.

- Từ 20 đến 29 chỉ có một chữ số 1 ở số 21

Tương tự từ 30 đến 39 có một chữ số 1 ở số 31, từ 40 đến 49 có một chữ số 1 ở số 41, từ 50 đến 59, ..., từ 90 đến 99 có chữ số 1 ở các số 51 ; 61 ; 71 ; 81 và 91.

Như vậy có cả thảy : $11 + 8 = 19$ (chữ số 1).

b)
$$M = 214 + 786 + 1999 + 111 - 1000$$
$$= 1000 + 2110 - 1000 = 2110.$$

Bài 19

Hướng dẫn. Phân tích $754754 = 754.1001$, tương tự $789789 = 789.1001$

Cách giải. $P = 789.754754 = 789.754.1001$

$$Q = 754.789789 = 754.789.1001$$

Do đó $P = Q$.

Bài 20

Hướng dẫn. Hãy chứng tỏ rằng kết quả là tích của hai số tự nhiên liên tiếp $33\dots 3$ (20 chữ số 3) và $33\dots 4$ (19 chữ số 3).

Cách giải. Ta có thể viết số đã cho như sau :

$$\begin{aligned} & \underbrace{11\dots 1}_{20 \text{ chữ số } 1} \quad \underbrace{22\dots 2}_{20 \text{ chữ số } 2} = \underbrace{11\dots 1}_{20} \underbrace{00\dots 0}_{20} + \underbrace{22\dots 2}_{20} \\ & = \underbrace{11\dots 1}_{20} \quad (\underbrace{100\dots 0}_{20} + 2) = \underbrace{11\dots 1}_{20} \cdot 3(\underbrace{33\dots 34}_{19}) \\ & = \underbrace{33\dots 3}_{20} \cdot \underbrace{33\dots 34}_{19} \end{aligned}$$

Kết quả chứng tỏ đây là tích của hai số tự nhiên liên tiếp $33\dots 3$ (20 chữ số 3) và $33\dots 4$ (19 chữ số 3).

Bài 21

Hướng dẫn. Chữ số 1 đầu tiên có thể viết $1 \cdot 10^7$, tiếp đến chữ số 9 viết $9 \cdot 10^6$, ...

Cách giải. $19991999 = 1 \cdot 10^7 + 9 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$

$$\overline{xyztv} = x \cdot 10^4 + y \cdot 10^3 + z \cdot 10^2 + t \cdot 10^1 + v \cdot 10^0.$$

Bài 22*

Hướng dẫn. Nhận xét $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 10$ có hai bội của 5 là 5 và $5 \cdot 2 = 10$ suy ra số bội của 5 chính bằng $10 : 5 = 2$.

Cách giải. Ta nhận thấy rằng :

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$$

có hai bội của 5 là 5 và $5 \cdot 2 = 10$ nên tận cùng bằng số bội của 5 có trong $10!$ tức là 2 chữ số 0 (số bội của 5 ở đây là $10 : 5 = 2$).

Với $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 99 \cdot 100$ ta có $100 : 5 = 20$ (bội của 5) và $100 : 25 = 4$ (bội của 5) do đó $100!$ tận cùng bằng 24 chữ

số 0 (lưu ý là tích của một số chẵn với một số là bội của 5 thì có tận cùng là 0).

Bài 23*

Hướng dẫn. a) Tính trực tiếp giá trị các lập phương để có được giá trị của M, N, P.

b) Đặt $23456 = x$ thì $23455 = x - 1$, $23457 = x + 1$, rồi viết biểu thức ở mẫu theo x sẽ được mẫu bằng 1.

Cách giải.

$$a) M = 1^3 + 2^3 = 1 + 8 = 9 = 3^2$$

$$N = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$$

$$P = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2.$$

b) Nhận xét :

Số 23 457 ở mẫu lớn hơn số 23456 ở tử là 1 và số 23 458 ở mẫu lại lớn hơn số 23 457 là 1. Như thế nếu đặt $23\ 456 = x$ thì biểu thức ở mẫu sẽ là :

$$(x + 1)^2 - x(x + 2) = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x = 1$$

Mẫu bằng 1 nên biểu thức đã cho bằng tử tức là 23 456.

III. CÁC BÀI TOÁN TRONG N

A. CÁC BÀI TOÁN ĐIỂN HÌNH

LOẠI TÌM CÁC SỐ

Bài 1

Tìm hai số có tổng bằng 46 biết rằng khi chia số lớn cho số bé ta được thương là 8 và dư 1.

- *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho tổng của hai số và phép chia có dư của hai số đó. Từ đó mà tìm hai số.

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Bài toán này thuộc loại toán tìm hai số biết tổng và hiệu của chúng hoặc biết tổng (hiệu) và tỉ số của chúng, mà cách giải là vẽ sơ đồ đoạn thẳng biểu thị hai số đó. Từ đó tìm được số nhỏ bằng $(\text{tổng} - \text{hiệu}) : 2$ hoặc số lớn bằng $(\text{tổng} + \text{hiệu}) : 2$.

Ở đây do đã biết số lớn chia cho số bé được thương là 8 và dư 1 nên nếu lấy số lớn trừ đi số dư 1 thì được 8 lần số bé ($a = bq + r$, suy ra $a - r = bq$ hay $a - 1 = 8.b$), từ đó mà tìm được số bé.

- *Cách giải*

Vẽ sơ đồ :



Ta có 9 lần số bé bằng : $46 - 1 = 45$

Số bé là : $45 : 9 = 5$

Số lớn là : $46 - 5 = 41$.

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi đề bài như sau :

"Tìm hai số biết tổng của chúng gấp 3 lần hiệu và bằng $\frac{1}{2}$ tích của chúng".

Cách giải như sau : coi hiệu hai số là 1 phần thì tổng là 3 phần, số lớn là 2 phần, số bé là 1 phần. Thế thì số bé nhỏ thua tổng một số bằng 2 lần nó. Theo bài ra tổng bằng $\frac{1}{2}$ tích, do đó số bé nhỏ thua tích là 6 lần.

Vậy số lớn bằng 6 và số bé bằng 3.

Bài 2

Ba số chẵn liên tiếp có tổng của số nhỏ nhất và số lớn nhất bằng 108. Tìm ba số chẵn đó.

● *Tìm hiệu đề bài*

Đề bài cho ba số chẵn liên tiếp mà tổng của số nhỏ nhất và số lớn nhất bằng 108, tức cũng là cho hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Nếu cho ba số chẵn liên tiếp bất kì thì cũng là cho hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất và hiệu đó luôn luôn bằng 4. Bài toán trở thành : tìm hai số biết tổng (108) và hiệu của chúng (4), mà cách giải đơn giản.

● *Cách giải*

Hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong ba số chẵn liên tiếp luôn bằng 4. Biết tổng hai số là 108 và hiệu của chúng là 4, ta có ngay (xem hướng dẫn bài 1) :

$$\text{Số nhỏ nhất là : } \frac{108 - 4}{2} = 52$$

$$\text{Số lớn nhất là : } 108 - 52 = 56$$

Vậy ba số chẵn liên tiếp là :

$$52 ; 54 ; 56.$$

● *Khai thác bài toán*

Ở bài ra ta có thể đổi số chẵn thành số lẻ, chẳng hạn tìm ba số lẻ liên tiếp biết tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng 154.

Khi đó hiệu hai số này vẫn luôn bằng 4. Thành thử ta có ngay số nhỏ là : $(154 - 4) : 2 = 75$.

Từ đó ba số lẻ liên tiếp phải tìm là 75 ; 77 và 79.

Bài toán có thể mở rộng cho 5 số liên tiếp, 7 số liên tiếp v.v... Nếu là 5 số liên tiếp thì hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất sẽ là 8, nếu là 7 số liên tiếp thì hiệu này sẽ là 12. Ví dụ : nếu tổng của số lớn nhất và số nhỏ nhất trong 7 số chẵn liên tiếp bằng 116 thì hiệu của chúng là 12. Từ đó :

$$\text{Số nhỏ nhất là : } (116 - 12) : 2 = 52.$$

Vậy 7 số chẵn liên tiếp là :

$$52 ; 54 ; 56 ; 58 ; 60 ; 62 \text{ và } 64.$$

Bài 3

Năm nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con. Sau 10 năm nữa tuổi bố hơn tuổi con là 32 tuổi. Hỏi năm nay con bao nhiêu tuổi, bố bao nhiêu tuổi ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra chỉ cho biết năm nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con và sau 10 năm nữa bố sẽ hơn con 32 tuổi. Lưu ý đừng nhầm cho

rằng năm nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con thì sau 10 năm nữa cũng vậy !

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Sau 10 năm nữa tuổi bố sẽ hơn tuổi con là 32 tuổi, điều này có nghĩa là hiện nay tuổi bố hơn con là 32 tuổi, vì hiệu giữa tuổi bố và con không đổi theo thời gian.

Do hiện nay tuổi bố gấp 5 lần tuổi con mà hiệu giữa tuổi bố và tuổi con là 32, đây là bài toán về tìm hai số biết hiệu và tỉ số của chúng. Từ đó ta tìm được tuổi con, suy ra tuổi bố.

• *Cách giải*

Hiệu giữa tuổi bố và tuổi con luôn bằng 32, mà tuổi bố hiện nay gấp 5 lần tuổi con, suy ra tuổi con là :

$$\frac{32}{5 - 1} = \frac{32}{4} = 8 \quad (\text{tuổi})$$

Tuổi bố là : $8.5 = 40$ (tuổi).

• *Khai thác bài toán*

Ta có thể đổi bài toán như sau :

"Năm nay tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con và tổng số tuổi của mẹ và con là 60. Hỏi sau bao nhiêu năm nữa tuổi mẹ sẽ gấp 3 lần tuổi con ?"

Do tuổi hai mẹ con cộng lại là 60 tuổi mà tuổi mẹ gấp 5 lần tuổi con nên ta có ngay tuổi con là 10 và tuổi mẹ là 50. Như vậy mẹ hơn con 40 tuổi. Hiệu này không đổi theo thời gian nên khi tuổi mẹ gấp 3 tuổi con thì hiệu 40 tuổi này chính là 2 lần tuổi mới của con.

Do đó lúc đó tuổi con sẽ là $40 : 2 = 20$ (tuổi), tức là sau 10 năm nữa và tuổi mẹ sẽ là $50 + 10 = 60$ (tuổi). Rõ ràng tuổi mẹ sẽ gấp 3 lần tuổi con.

Bài 4

Tìm số tự nhiên nhỏ nhất có hai chữ số mà tổng các chữ số bằng 12.

- *Tim hiểu đề bài*

Đề bài có thể hiểu như sau : nếu trong các số có hai chữ số mà tổng hai chữ số này bằng 12 thì số nhỏ nhất là số nào ?

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết hãy tìm tất cả những số có hai chữ số mà tổng hai chữ số này bằng 12, rồi chọn số nhỏ nhất trong các số này.

- *Cách giải*

Nếu tổng hai chữ số bằng 12 thì hai chữ số này có thể là 3 và 9 ; 4 và 8 ; 5 và 7 ; 6 và 6. Do đó ta có bảy số 39 ; 48 ; 57 ; 75 ; 84 ; 93 và 66 trong đó số 39 là số nhỏ nhất.

- *Khai thác bài toán*

Nếu đề bài yêu cầu tìm số nhỏ nhất có 3 chữ số thì cách làm như sau :

$$\begin{aligned} 12 &= 0 + 3 + 9 = 1 + 2 + 9 = 2 + 3 + 7 \\ &= 3 + 3 + 6 = 4 + 5 + 3 \\ &= 5 + 6 + 1 = 6 + 6 + 0. \\ &= \dots \end{aligned}$$

Trong các số 390 ; 129 ; 237 ; 336 ; 345 ; 156 ; 660... thì số nhỏ nhất thỏa mãn bài ra là 129.

Nếu yêu cầu tìm số nhỏ nhất có 4 chữ số thì ta phân tích 12 như sau :

$$\begin{aligned} 12 &= 0 + 1 + 3 + 8 = 1 + 1 + 1 + 9 = 1 + 1 + 2 + 8 = \\ &= 1 + 1 + 3 + 7 = \dots \text{ và số nhỏ nhất thỏa mãn bài ra là } 1038. \end{aligned}$$

Tương tự nếu đề bài là tìm số nhỏ nhất có 5 chữ số thì ta có :

$$\begin{aligned} 12 &= 0 + 1 + 1 + 1 + 9 = 1 + 1 + 1 + 1 + 8 = \\ &= 1 + 1 + 1 + 2 + 7 = \dots \end{aligned}$$

và số nhỏ nhất phải tìm sẽ là 10119.

Bài 5

Số nhà bạn Trâm Anh là một số có hai chữ số mà tổng hai chữ số đó bằng 13. Tìm số nhà của bạn ấy biết rằng số nhà đó trừ đi số viết theo thứ tự ngược lại bằng 45.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra cho hai điều kiện để tìm số \overline{ab} : đó là tổng $a + b = 13$ và hiệu $\overline{ab} - \overline{ba} = 45$.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hiệu $\overline{ab} - \overline{ba} = 45$ chứng tỏ chữ số hàng chục a lớn hơn chữ số hàng đơn vị. Hãy tìm tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ vì nếu biết tổng và hiệu hai số \overline{ab} và \overline{ba} thì ta suy ra ngay số phải tìm \overline{ab} . Tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ có thể viết dưới dạng cấu tạo số $10a + b + 10b + a$, rồi kết hợp với điều kiện $a + b = 13$ để tìm được giá trị của tổng này.

● *Cách giải*

Tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ có thể viết dưới dạng sau :

$$10a + b + 10b + a = 10(a + b) + (a + b)$$

mà $a + b = 13$ nên tổng này bằng $10 \cdot 13 + 13 = 143$.

Biết tổng hai số \overline{ab} và \overline{ba} và hiệu của chúng (45), ta có ngay :

$$\overline{ab} = \frac{143 + 45}{2} = 94.$$

(Rõ ràng $9 + 4 = 13$ và $94 - 49 = 45$).

● *Khai thác bài toán*

Có thể thay đổi các số 13 và 45 bằng các số khác thích hợp, chẳng hạn tìm số có hai chữ số biết tổng hai chữ số là 12 và hiệu giữa số có hai chữ số và số viết theo thứ tự ngược lại là 18.

Bài 6

Cho hai số có hai chữ số \overline{pq} , nếu viết tiếp \overline{pq} vào bên phải số đã cho để được số có 4 chữ số \overline{ppqq} thì số mới này gấp mấy lần số ban đầu ? Thử lại bằng ví dụ cụ thể và rút ra kết luận.

● *Tim hiểu đề bài*

Đề bài cho số \overline{pq} và yêu cầu khi viết thành \overline{pqpq} thì số mới sẽ gấp mấy lần số cũ, tức là số ban đầu \overline{pq} sẽ tăng bao nhiêu lần ? Từ đó rút ra kết luận tổng quát.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy tính xem số \overline{pqpq} bằng số \overline{pq} nhân với số nào bằng cách viết $\overline{pqpq} = 100\overline{pq} + \overline{pq}$.

Kết luận tổng quát là : nếu viết vào bên phải một số bất kì có hai chữ số một lần nữa số đó thì số ban đầu sẽ tăng lên bao nhiêu lần.

● *Cách giải*

Số \overline{pqpq} có thể viết như sau :

$$100\overline{pq} + \overline{pq} = 101 \cdot \overline{pq}$$

Vậy số \overline{pq} được tăng lên 101 lần, hay số mới \overline{pqpq} gấp 101 lần số ban đầu.

Ví dụ : $9797 = 97 \cdot 101$

Kết luận : Với bất kì số có hai chữ số nào nếu ta viết thêm một lần nữa số đó vào bên phải số ban đầu thì số ban đầu sẽ tăng lên 101 lần :

$$\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 101$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu với số \overline{pq} ta viết tiếp hai lần \overline{pq} vào bên phải thì sẽ được số có 6 chữ số \overline{pqppqp} gấp 10101 lần số ban đầu \overline{pq} , ví dụ : $\overline{242424} = 10101 \cdot 24$. Với trường hợp số có 3 chữ số \overline{abc} thì số \overline{abcabc} sẽ bằng 1001 lần số ban đầu \overline{abc} vì :

$$\overline{abcabc} = 1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001 \cdot \overline{abc}$$

LOẠI CHUYÊN ĐỘNG ĐỀU

Bài 7

Hai xe máy khởi hành cùng một lúc từ hai tỉnh A và B cách nhau 190 km sau 2 giờ thì gặp nhau. Xe máy đi từ A có vận

tốc lớn hơn xe máy đi từ B là 5 km/h. Tính vận tốc của mỗi xe máy và khoảng cách từ chỗ gặp nhau đến tỉnh A.

● *Tìm hiểu đề bài*

Theo đề bài hai xe đi ngược chiều nhau nhưng cùng một lúc và sau 2 giờ thì gặp nhau trên quãng đường AB dài 190 km. Yêu cầu tìm vận tốc hai xe máy khi biết vận tốc xe này hơn vận tốc xe kia là 5 km/h và tìm quãng đường từ chỗ gặp nhau đến A (chứ không phải đến B).

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy đưa về bài toán mà hai xe có vận tốc như nhau chạy trên quãng đường ngắn hơn AB là $5.2 = 10$ (km), tức là hai xe cùng vận tốc đi cùng một lúc trên quãng đường dài $190 - 10 = 180$ (km) để gặp nhau sau 2 giờ. Từ đó tìm được ngay vận tốc của xe đi từ B.

● *Cách giải*

Sau 2 giờ xe đi từ A đi được quãng đường dài hơn xe đi từ B là :

$$5.2 = 10 \text{ (km)}$$

Quãng đường mà hai xe cùng đi với vận tốc bằng vận tốc xe đi từ B là : $190 - 10 = 180$ (km)

Trong 2 giờ xe đi từ B đi được :

$$180 : 2 = 90 \text{ (km)}$$

Vận tốc xe đi từ B là :

$$90 : 2 = 45 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc xe đi từ A là :

$$45 + 5 = 50 \text{ (km/h)}$$

Quãng đường từ chỗ gặp nhau đến A là :

$$50.2 = 100 \text{ (km)}$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán thành hai xe máy cùng một lúc đi cùng chiều từ hai địa điểm cách nhau 70 km thì gặp nhau sau 7 giờ, nếu đi ngược chiều thì gặp nhau sau 1 giờ, tính vận tốc của mỗi xe.

Cách giải sẽ như sau :

Tổng vận tốc của hai xe là : $70 : 1 = 70$ (km/h)

Hiệu vận tốc của hai xe là : $70 : 7 = 10$ (km/h)

Vận tốc của xe đi nhanh là : $(70 + 10) : 2 = 40$ (km/h)

Vận tốc của xe đi chậm là : $(70 - 10) : 2 = 30$ (km/h)

hoặc $70 - 40 = 30$ (km/h).

Ta có thể rút ra nhận xét sau đây :

- Nếu hai xe chuyển động cùng chiều thì thời gian để đuổi kịp nhau bằng khoảng cách chia cho hiệu hai vận tốc.

- Nếu hai xe chuyển động ngược chiều thì thời gian để gặp nhau bằng khoảng cách chia cho tổng hai vận tốc.

Bài 8

Hai xe buýt chở khách khởi hành cùng một lúc từ hai bến A và B và đi ngược chiều nhau. Xe thứ nhất chạy từ A đến B và trở về ngay bến A, xe thứ hai chạy từ B đến A và trở về ngay bến B. Hai xe gặp nhau lần đầu tại M cách B là 10 km, gặp nhau lần thứ hai tại N cách A là 8 km. Hỏi hai bến A và B cách nhau bao nhiêu kilômet ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Hai xe đó chạy ngược chiều nhau từ hai bến A và B và không nghỉ tại bến mà trở về ngay bến xuất phát (theo chiều $A \rightarrow B \rightarrow A$ và $B \rightarrow A \rightarrow B$). Cả hai chạy cùng một lúc và gặp nhau hai lần : lần đầu cách B là 10 km và lần thứ hai cách A là 8 km. Vấn đề đặt ra là tính quãng đường AB.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Do chạy cùng một lúc nên lần thứ nhất hai xe gặp nhau khi đã đi được quãng đường bằng quãng đường AB và khi đó xe đi từ bến B đã cách bến là 10 km. Lần gặp thứ hai thì hai xe đã đi được quãng đường gấp 3 lần quãng đường AB, hãy tính xem khi đó xe đi từ bến B lần này đã đi được mấy kilômet. Từ đó tính được quãng đường AB giữa hai bến.

● *Cách giải*

Khi hai xe gặp nhau lần đầu tại M thì cả hai đã chạy được quãng đường bằng quãng đường AB và xe từ bến B đã chạy được 10 km. Khi hai xe gặp nhau lần thứ hai tại N thì cả hai đã chạy được quãng đường gấp 3 lần quãng đường AB và khi đó xe chạy từ bến B đã chạy được $10 \cdot 3 = 30$ (km).

Quãng đường 30 km này chính là quãng đường AB cộng thêm 8km.

Vậy quãng đường giữa hai bến A và B dài :

$$30 - 8 = 22 \text{ (km).}$$

● *Khai thác bài toán*

Nếu giả sử hai xe cứ tiếp tục chạy như trên nhiều chuyến không nghỉ và lại gặp nhau lần thứ ba cách bến B là 6 km, thì vẫn lí luận được như trên. Nhưng vì gặp nhau lần thứ ba nên tổng quãng đường hai xe đã chạy được bằng 5 lần quãng đường AB (chứ không phải bằng 3 lần như khi gặp nhau lần thứ hai).

Khi đó xe chạy từ B đã chạy được $10 \cdot 5 = 50$ (km). Quãng đường này chính bằng 2 lần quãng đường AB cộng thêm 6 km.

Vậy quãng đường AB dài :

$$(50 - 6) : 2 = 22 \text{ (km).}$$

Bài 9

Một canô xuôi dòng từ bến M đến bến N mất 4 giờ và ngược dòng từ N trở về M mất 5 giờ. Vận tốc lúc xuôi hơn lúc ngược

dòng là 5 km/h. Tính vận tốc canô khi xuôi dòng và khoảng cách giữa hai bên sông.

- *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra cho biết thời gian canô xuôi dòng là 4 giờ và ngược dòng là 5 giờ và vận tốc lúc xuôi (vận tốc thực của canô + vận tốc dòng nước) hơn lúc ngược (vận tốc thực của canô - vận tốc dòng nước) là 5 km/h. Yêu cầu tính vận tốc canô khi xuôi dòng (chứ không phải vận tốc thực của canô) và khoảng cách giữa hai bên sông.

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết hãy tính xem trong 4 giờ canô xuôi dòng một quãng sông nhiều hơn lúc ngược dòng cũng trong 4 giờ là mấy kilômet. Với quãng sông dài hơn này thì canô khi ngược dòng phải đi trong $5 - 4 = 1$ (giờ). Từ đó mà tính được vận tốc canô khi ngược dòng, khi xuôi dòng và khoảng cách giữa hai bên sông.

- *Cách giải*

Trong 4 giờ quãng sông mà canô khi xuôi dòng nhiều hơn lúc ngược dòng cũng trong 4 giờ là :

$$5.4 = 20 \text{ (km)}$$

Thời gian mà canô khi ngược dòng phải đi quãng sông dài này là :

$$5 - 4 = 1 \text{ (giờ)}$$

Vận tốc canô khi ngược dòng là :

$$20 : 1 = 20 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc canô khi xuôi dòng là :

$$20 + 5 = 25 \text{ (km/h)}$$

Khoảng cách giữa hai bên sông là :

$$25.4 = 100 \text{ (km)}, \text{ hoặc } 20.5 = 100 \text{ (km)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán tìm vận tốc lúc xuôi dòng bằng yêu cầu tìm vận tốc thực của canô và vận tốc dòng nước (tức cũng là vận tốc lúc xuôi dòng) như sau :

Một canô xuôi dòng từ bến M đến bến N cách nhau 100 km hết 4 giờ và ngược dòng từ N về M hết 5 giờ. Tính vận tốc thực của canô và vận tốc dòng nước. Bài này khác bài ra ở trên là cho biết khoảng cách giữa hai bến. Cách giải như sau :

Vận tốc canô khi xuôi dòng là :

$$100 : 4 = 25 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc canô khi ngược dòng là :

$$100 : 5 = 20 \text{ (km/h)}.$$

Do vận tốc khi xuôi dòng bằng vận tốc thực của canô cộng thêm vận tốc dòng nước, còn khi ngược dòng thì phải trừ đi vận tốc dòng nước, nên ta có ngay vận tốc dòng nước là :

$$(25 - 20) : 2 = 2,5 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc thực của canô là :

$$25 - 2,5 = 22,5 \text{ (km/h)}, \text{ hoặc } 20 + 2,5 = 22,5 \text{ (km/h)}.$$

Bài 10

Một ô tô vận tải đi quãng đường AB mất 7 giờ, một xe du lịch chỉ đi hết quãng đường này trong 5 giờ. Biết rằng vận tốc xe du lịch lớn hơn vận tốc xe vận tải là 12 km/h.

Tìm vận tốc của mỗi ô tô và quãng đường AB.

● *Tìm hiệu đề bài*

Bài ra cho thời gian mà hai xe vận tải và xe du lịch cùng đi một quãng đường như nhau với vận tốc xe du lịch lớn hơn vận tốc xe tải là 12 km/h. Thời gian đi là 7 giờ đối với xe vận tải,

5 giờ đối với xe du lịch. Yêu cầu tìm vận tốc mỗi ô tô và quãng đường AB

• *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Bài ra cho hiệu hai vận tốc $v_d - v_t$ (xe du lịch) và v_t (xe tải) là 12 km/h và tỉ số hai vận tốc $v_d : v_t$ bằng qua thời gian mỗi xe đi cùng một quãng đường là $v_d \cdot 5 = v_t \cdot 7$. Đây là bài toán tìm hai số biết hiệu của chúng và tỉ số của chúng mà cách giải như sau :

$$v_d - v_t = 12 \text{ (km/h)}$$

$$v_d \cdot 5 = v_t \cdot 7$$

hay $\frac{v_d}{v_t} = \frac{7}{5}$ Tỉ số $v_d : v_t = 7 : 5$ có thể viết :

$$\frac{v_d}{7} = \frac{v_t}{5} = \frac{v_d - v_t}{7 - 5} = \frac{12}{2} = 6.$$

Từ đó $v_d = 6 \cdot 7 = 42$ (km/h) và $v_t = 6 \cdot 5 = 30$ (km/h).

Quãng đường AB dài :

$$42 \cdot 5 = 210 \text{ (km)}, \text{ hoặc } 30 \cdot 7 = 210 \text{ (km)}.$$

• *Khai thác bài toán*

Đáng lẽ phải tìm vận tốc xe tải và xe du lịch như bài này ta có thể đổi bài toán bằng cách cho biết vận tốc hai xe (là 42 và 30 km/h) và nếu đi cùng một lúc thì xe du lịch đến trước xe tải 2 giờ. Vấn đề đặt ra là tìm quãng đường AB.

Ta có hai cách giải bài toán mới này như sau :

Cách 1

Nếu xe du lịch khởi hành sau xe tải 2 giờ thì rõ ràng hai xe đến B cùng một lúc.

Khi xe du lịch bắt đầu đi thì xe tải đã đi được :

$$30 \cdot 2 = 60 \text{ (km)}$$

Để đuổi kịp xe tải xe du lịch phải cần một thời gian là :

$$\frac{60}{42 - 30} = \frac{60}{12} = 5 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường AB dài :

$$42 \cdot 5 = 210 \text{ (km)}.$$

Cách 2

Đưa bài toán mới về tìm hai số biết hiệu và tỉ số của chúng.

Do quãng đường đi AB như nhau nên thời gian đi tỉ lệ nghịch với vận tốc, tức là :

$$\frac{v_d}{v_t} = \frac{42}{30} = \frac{7}{5}.$$

Suy ra $\frac{t_d}{t_t} = \frac{5}{7}$ hay

$$\frac{t_t}{7} = \frac{t_d}{5} = \frac{t_t - t_d}{7 - 5} = \frac{2}{2} = 1.$$

Như thế xe tải đi quãng đường AB mất 7 giờ và xe du lịch đi mất 5 giờ. Do đó quãng đường AB dài :

$$30 \cdot 7 = 210 \text{ (km)}, \text{ hoặc } 42 \cdot 5 = 210 \text{ (km)}.$$

Bài 11

Hai người A và B đi xe đạp từ hai thành phố cách nhau 96 km với vận tốc theo thứ tự là 15 km/h (xe đạp A) và 12 km/h (xe đạp B) và đi ngược chiều nhau. Người đi xe đạp A đi được 60 km thì gặp người đi xe đạp B. Hỏi người nào xuất phát trước và trước người kia mấy giờ ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Theo bài ra thì hai người đi xe đạp không xuất phát cùng một lúc mà người này đi trước người kia một thời gian. Chỉ biết rằng người đi xe đạp với vận tốc 15 km/h đi được 60 km thì

gặp người đi xe đạp với vận tốc 12 km/h đi ngược chiều. Yêu cầu là tìm xem ai đi trước và đi trước mấy giờ.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước hết phải tìm thời gian mà người đi xe đạp A đã đi 60 km cho tới lúc gặp nhau. Khi đó người đi xe đạp B đã đi được mấy giờ mới đến chỗ gặp nhau. Từ đó suy ra ngay người nào xuất phát trước do phải đi thời gian nhiều hơn.

● *Cách giải*

Thời gian người đi xe đạp A đã đi cho tới khi gặp nhau :

$$60 : 15 = 4 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường mà người đi xe đạp B đã đi cho tới khi gặp nhau :

$$96 - 60 = 36 \text{ (km)}$$

Thời gian người đi xe đạp B đã đi cho tới khi gặp nhau là :

$$36 : 12 = 3 \text{ (giờ)}$$

Vậy người đi xe đạp A xuất phát trước người đi xe đạp B và đi trước :

$$4 - 3 = 1 \text{ (giờ)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể thay bài toán bằng một bài tương tự như sau :

Hai ô tô khởi hành từ hai tỉnh A và B cách nhau 306 km và đi ngược chiều nhau. Xe ô tô đi từ A có vận tốc 45 km/h, xe ô tô đi từ B có vận tốc 42 km/h. Biết rằng xe từ A đi được 180 km thì gặp xe đi từ B. Hỏi xe ô tô nào khởi hành trước và trước xe ô tô kia mấy giờ ?

Để giải bài này ta cũng phải tính thời gian xe ô tô từ A đi được 180 km là $180 : 45 = 4$ (giờ) và quãng đường mà xe ô tô từ B đi cho tới khi gặp nhau là $306 - 180 = 126$ (km).

Từ đó suy ra thời gian ô tô từ B đi cho tới khi gặp nhau là : $126 : 42 = 3$ (giờ). Vậy xe đi từ A khởi hành trước xe đi từ B là $4 - 3 = 1$ (giờ).

Bài 12*

Hai người đi xe máy cùng một lúc và đi ngược chiều từ hai thành phố C và D cách nhau 325 km. Sau khi người thứ nhất đi được 175 km thì hai người gặp nhau. Lúc đó cả hai đã đi hết một số giờ đúng bằng số chỉ hiệu hai vận tốc. Tính vận tốc của mỗi người.

- *Tìm hiểu đề bài*

Đề bài cho hai người đi xe máy cùng một lúc và đi ngược chiều để gặp nhau. Sau khi đi một số giờ thì họ gặp nhau và số giờ đó lại đúng bằng số chỉ hiệu hai vận tốc, chẳng hạn nếu hiệu hai vận tốc là 10 km/h thì sau 10 giờ họ gặp nhau. Yêu cầu là tính vận tốc của mỗi người.

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Trước tiên hãy tìm quãng đường người thứ hai đi từ D đến lúc gặp nhau và khi đó người thứ nhất đã đi được một quãng đường dài hơn người thứ hai là mấy kilômet.

Do số giờ đi đến lúc gặp nhau bằng số chỉ hiệu hai vận tốc nên tích của hai số bằng nhau này bằng số kilômet tìm được ở trên. Từ đó suy ra số giờ đi.

- *Cách giải*

Quãng đường người thứ hai đi từ D đến lúc gặp nhau là :

$$325 - 175 = 150 \text{ (km)}$$

Cho đến lúc gặp nhau, người thứ nhất đi từ C đã đi được một quãng đường dài hơn người thứ hai đi từ D là :

$$175 - 150 = 25 \text{ (km)}$$

Do số giờ đi đến lúc gặp nhau bằng số chỉ hiệu hai vận tốc nên tích hai số bằng nhau này bằng 25 (= 5.5). Suy ra số giờ đi là 5 giờ.

Vận tốc người thứ nhất là :

$$175 : 5 = 35 \text{ (km/h)}$$

Vận tốc người thứ hai là

$$150 : 5 = 30 \text{ (km/h)}$$

• *Khai thác bài toán*

Có thể giải bài toán bằng cách nhận xét : trong cùng một thời gian đi tỉ số các quãng đường đi được bằng tỉ số hai vận tốc.

Gọi vận tốc người thứ nhất đi từ C là v_c và vận tốc người thứ hai đi từ D là v_d ta có tỉ số :

$$\frac{v_c}{v_d} = \frac{175}{150} = \frac{7}{6}$$

Suy ra hiệu vận tốc của hai người bằng $\frac{1}{7}$ vận tốc người thứ nhất và cũng là số giờ đã đi. Vậy :

$$\frac{1}{7} \cdot v_c \cdot v_c = 175$$

hay $v_c \cdot v_c = 175 \times 7 = 1225 = 35 \cdot 35$.

Suy ra $v_c = 35 \text{ km/h}$ và $v_d = 30 \text{ km/h}$.

LOẠI GIẢI THIẾT TAM

Bài 12

Ở một hội nghị có 44 xe vừa xe máy, vừa ô tô. Cả thầy đếm được 112 bánh xe. Tính số xe máy và xe ô tô.

• *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra cho 44 xe vừa xe máy 2 bánh, vừa ô tô 4 bánh với số bánh xe là 112 và hỏi có bao nhiêu xe máy, bao nhiêu ô tô.

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Bài toán này thuộc loại giả thiết tạm giống như bài toán cổ "Vừa gà vừa chó, bó lại cho tròn, 36 con, 100 chân chẵn" mà cách giải là tạm giả thiết tất cả 36 con là gà (cách 1) hoặc tất cả 36 con là chó (cách 2) để thấy nếu toàn là gà thì thiếu chân, nếu toàn là chó thì lại thừa chân. Từ đó mà tìm được số chó trước, hoặc số gà trước.

Với bài này ta tạm giả thiết rằng tất cả 44 xe đều là ô tô 4 bánh (cách 1) hoặc tất cả 44 xe đều là xe máy 2 bánh (cách 2) để tìm được số xe máy trước, hoặc số ô tô trước.

● *Cách giải*

Cách 1. Giả thiết tạm rằng tất cả 44 xe đều là ô tô 4 bánh. Vậy có $44 \cdot 4 = 176$ (bánh xe). Như thế thừa ra :

$$176 - 112 = 64 \text{ (bánh xe)}$$

là do còn có xe máy 2 bánh. Từ đó thay một ô tô bằng một xe máy thì bớt đi 2 bánh xe.

$$\text{Số xe máy là : } 64 : 2 = 32 \text{ (xe máy)}$$

$$\text{Số ô tô là : } 44 - 32 = 12 \text{ (ô tô)}$$

Cách 2. Ta giả thiết tạm rằng cả thảy 44 xe đều là xe máy 2 bánh. Vậy có $44 \cdot 2 = 88$ (bánh xe). Như thế thiếu mất :

$$112 - 88 = 24 \text{ (bánh xe)}$$

là do còn có ô tô 4 bánh. Từ đó thay một xe máy bằng một ô tô thì phải thêm 2 bánh xe.

$$\text{Số ô tô là : } 24 : 2 = 12 \text{ (ô tô)}$$

$$\text{Số xe máy là : } 44 - 12 = 32 \text{ (xe máy)}$$

● *Khai thác bài toán*

Với nội dung và số liệu như bài toán này ta có thể lập những đề toán tương tự như sau :

- Để lắp đặt một đường ống nước dài 112 mét phải dùng 44 ống hai loại : loại dài 4 m và loại ngắn 2 m. Hỏi có bao nhiêu ống nước mỗi loại ?

- Có 44 can đựng 112 lít dầu hỏa trong đó có hai loại : can lớn 4 lít và can nhỏ 2 lít. Tính số can mỗi loại.

- Có 44 túi đựng cà thấy 112 gói kẹo. Túi gồm hai loại : loại đựng 2 gói và loại đựng 4 gói. Tính số túi mỗi loại ?

v.v...

Bài 13

Trong một buổi họp tổ dân phố, nếu xếp 4 người ngồi một ghế dài thì 8 người không có chỗ ngồi, nếu xếp 6 người ngồi một ghế dài thì thừa ra 12 chỗ. Tính số người họp tổ và số ghế dài.

● *Tìm hiểu đề bài*

Bài ra có thể tóm tắt như sau :

Xếp 4 người một ghế	thiếu 8 chỗ
Xếp 6 người một ghế	thừa 12 chỗ.

Hỏi có bao nhiêu người, bao nhiêu ghế ?

● *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy tìm số chỗ ngồi chênh lệch trong hai trường hợp và số chỗ ngồi trên 1 ghế chênh lệch trong hai trường hợp. Từ đó tìm được ngay số ghế. Suy ra số người họp tổ.

● *Cách giải*

Do trường hợp đầu thiếu 8 chỗ, trường hợp thứ hai lại thừa 12 chỗ nên số chỗ ngồi chênh lệch trong hai trường hợp là :

$$8 + 12 = 20 \text{ (chỗ)}$$

Do xếp 4 người một ghế (trường hợp 1) và xếp 6 người một ghế (trường hợp 2) nên trên 1 ghế số chỗ ngồi chênh lệch nhau là :

$$6 - 4 = 2 \text{ (chỗ)}$$

Suy ra số ghế là :

$$20 : 2 = 10 \text{ (ghế)}$$

Số người họp tổ là :

$$4.10 + 8 = 48 \text{ (người)}$$

hoặc

$$6.10 - 12 = 48 \text{ (người)}$$

● *Khai thác bài toán*

Bài toán trên ra "thiếu chỗ ngồi và thừa chỗ ngồi", nay ta có thể đổi thành "thiếu ghế và thừa ghế" như sau :

Tìm số người và số ghế biết rằng nếu xếp 4 người một ghế thì thừa 1 ghế, nếu xếp 3 người một ghế thì thiếu 2 ghế.

Ta hãy giải bài này theo cách khác sau đây :

Nếu xếp 3 người một ghế thì thiếu 2 ghế tức là thừa ra 6 người. Nếu xếp 4 người một ghế thì thừa 1 ghế tức là nếu có thêm 4 người nữa thì vừa đủ còn nếu thêm 10 người nữa thì sẽ thừa 6 người.

Như thế nếu xếp 4 người một ghế thì bớt đi 1 người, mà muốn bớt đi 10 người thì có đúng 10 ghế. Từ đó suy ra số người dự họp là :

$$4.10 - 4 = 36 \text{ (người)}$$

hoặc

$$3.10 + 6 = 36 \text{ (người)}$$

Bài 14

Trong cuộc thi bắn súng, mỗi đội được bắn 20 phát. Mỗi phát trúng đích được 10 điểm, mỗi phát không trúng đích bị trừ 15 điểm. Đội A được cả thầy 150 điểm, hỏi đội đã bắn bao nhiêu phát trúng đích ?

● *Tìm hiểu đề bài*

Có thể tóm tắt đề bài như sau :

Bắn 20 phát mỗi phát trúng đích được 10 điểm, không trúng đích trừ đi 15 điểm. Được cả thầy 150 điểm, tìm số phát trúng đích.

● *Hướng dẫn cách tìm lại giải*

Cách 1 Giả thiết tạm là cả 20 phát đều trúng đích, hãy tìm tổng số điểm đạt được. Nhưng thực tế chỉ có 150 điểm nên thiếu mất một số điểm do có một số phát bắn không trúng đích, từ đó tìm được số phát bắn không trúng đích, suy ra số phát bắn trúng đích.

Cách 2. Giả thiết tạm là cả 20 phát đều không trúng đích rồi lập luận như trên sẽ tìm được số phát bắn trúng đích.

● *Cách giải*

Cách 1

Giả thiết tạm là cả 20 phát đều trúng đích, như thế tổng số điểm đạt được là : $10 \cdot 20 = 200$ (điểm). Do đó thiếu mất $200 - 150 = 50$ (điểm) là do còn có một số phát bắn không trúng đích.

Giữa một phát bắn trúng đích và một phát bắn không trúng đích có sự chênh lệch điểm là :

$$10 + 15 = 25 \text{ (điểm)}$$

Suy ra số phát không trúng đích là :

$$50 : 25 = 2 \text{ (phát)}$$

Vậy số phát bắn trúng đích là :

$$20 - 2 = 18 \text{ (phát)}$$

Cách 2

Có thể giả thiết tạm là cả 20 phát bắn đều không trúng đích. Lập luận tương tự như trên sẽ tìm được số phát bắn trúng đích là 18.

● *Khai thác bài toán*

Với nội dung và số liệu như bài toán này ta có thể lập những đề toán tương tự, chẳng hạn để sau đây :

Trong cuộc thi tìm hiểu địa lí và lịch sử địa phương, đài vô tuyến truyền hình một tỉnh đã đề ra 20 câu hỏi cho các đội học

sinh tham gia. Câu hỏi nào trả lời đúng thì được 10 điểm, câu nào trả lời sai thì trừ đi 15 điểm. Một đội đã đạt được 150 điểm, tính xem đội đó đã trả lời đúng bao nhiêu câu hỏi ?

Bài 15

Bác Thảo đi xe đạp với vận tốc 15 km/h từ tỉnh P đến tỉnh Q cách nhau 105 km. Để kịp đến nơi trong thời gian 4 giờ bác lên ô tô đi với vận tốc gấp 4 lần khi đi xe đạp. Tính xem bác Thảo đi xe đạp và đi ô tô trong bao lâu.

- *Tìm hiểu đề bài*

Có thể tóm tắt đề bài như sau :

Quãng đường PQ dài 105 km phải đi trong 4 giờ bằng xe đạp với vận tốc 15 km/h và bằng ô tô với vận tốc gấp 4 lần khi đi xe đạp. Tính thời gian đi mỗi loại xe.

- *Hướng dẫn cách tìm lời giải*

Hãy giả thiết tạm bác Thảo đi cả 4 giờ bằng xe đạp thì còn cách Q bao nhiêu kilômet. Nếu đi ô tô thì mỗi giờ nhanh hơn được bao nhiêu kilômet. Từ đó suy ra thời gian đi ô tô.

- *Cách giải*

Giả thiết tạm là bác Thảo đi cả 4 giờ bằng xe đạp thì sẽ đi được :

$$15 \cdot 4 = 60 \text{ (km)}$$

Như thế còn cách Q là :

$$105 - 60 = 45 \text{ (km)}$$

Mỗi giờ ô tô đi được $15 \cdot 4 = 60$ (km) nên sẽ nhanh hơn đi xe đạp là

$$60 - 15 = 45 \text{ (km)}.$$

Thời gian đi ô tô là :

$$45 : 45 = 1 \text{ (giờ)}$$

Thời gian đi xe đạp là :

$$4 - 1 = 3 \text{ (giờ)}.$$

● *Khai thác bài toán*

Có thể đổi bài toán như sau :

Một người mang theo xe đạp lên ô tô khách đi từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 72 km với vận tốc 36 km/h. Ô tô đi được một thời gian thì bị hỏng máy, người ấy đành lấy xe đạp đi với vận tốc bằng $\frac{1}{3}$ vận tốc ô tô, do đó đến tỉnh B phải mất 4 giờ.

Tính thời gian người ấy đi ô tô.

Cách giải sẽ như sau :

Vận tốc xe đạp là $36 : 3 = 12$ (km/h). Nếu đi từ A đến B bằng xe đạp trong 4 giờ thì chỉ đi được :

$$12 \cdot 4 = 48 \text{ (km)}$$

Như thế quãng đường còn phải đi tiếp là $72 - 48 = 24$ (km). Sở dĩ đến được B sau 4 giờ là nhờ có đi ô tô lúc đầu nên mỗi giờ ô tô đi nhanh hơn xe đạp là :

$$36 - 12 = 24 \text{ (km)}$$

Suy ra thời gian đi ô tô là :

$$24 : 24 = 1 \text{ (giờ)}.$$

B. MỘT SỐ BÀI TOÁN TỰ GIẢI

ĐỀ BÀI

Bài 16

a) Cho đẳng thức sai : $405 - 202 = 5$ (!). Hãy chuyển vị trí một chữ số để được đẳng thức đúng.

b) Có 12 que diêm xếp thành đẳng thức sai :

$$\text{VI} - \text{IV} = \text{IX} \quad 6 - 4 = 9 \text{ (!)}$$

Hãy chuyển chỗ 1 que diêm để được đẳng thức đúng.

Bài 17

Có ba miếng bìa con. Trên miếng bìa thứ nhất là số 23, trên miếng bìa thứ hai là số 79, trên miếng bìa thứ ba là số có hai chữ số \overline{ab} . Ghép ba miếng bìa con này liền nhau rồi cộng tất cả số có 6 chữ số thì được tổng là 2 989 896. Tìm số \overline{ab} .

Bài 18

Khoa hỏi Tùng : Bố cậu năm nay bao nhiêu tuổi ? Tùng đáp : năm 1986 tuổi bố tớ bằng tổng các chữ số năm sinh của bố tớ. Hỏi bố Tùng sinh năm nào và năm nay 1999 bố Tùng bao nhiêu tuổi ?

Bài 19

Số điểm 10 các bài kiểm tra toán học kì I của bạn Trung là một số có hai chữ số \overline{xy} mà khi viết thành số có ba chữ số $\overline{yx0}$ thì được một số gấp 34 lần số lúc đầu. Hỏi bạn Trung đã được mấy điểm 10 về toán ?

Bài 20

Hai người đi bộ từ thị trấn huyện A đến thị trấn huyện B cùng một lúc với vận tốc 6 km/h và 4 km/h. Người đi nhanh đến B sớm hơn người đi chậm là 2 giờ. Từ thị trấn huyện A cách thị trấn huyện B bao nhiêu kilômet ?

Bài 21

Một người đi xe đạp từ nhà đến chỗ họp. Quãng đường này gồm một đoạn lên dốc AB và một đoạn xuống dốc BC. Vận tốc lên dốc là 8 km/h và xuống dốc là 16 km/h. Từ nhà đến chỗ họp mất 2 giờ 45 phút, từ chỗ họp về nhà mất 1 giờ 45 phút. Tính quãng đường AC từ nhà đến chỗ họp.

Bài 22

Trong kho có 83 chiếc xe vừa mô tô 3 bánh vừa ô tô 6 bánh. Kể cả 77 chiếc lốp dự trữ thì có tất cả 500 lốp. Tính xem mỗi loại có bao nhiêu xe.

Bài 23

Một cô bán hàng xếp cam vào hộp. Nếu xếp 9 quả vào một hộp thì thừa 1 quả, nếu xếp 10 quả vào một hộp thì thiếu 3 quả. Hỏi cô có bao nhiêu cam, bao nhiêu hộp ?

HƯỚNG DẪN - CÁCH GIẢI

Bài 16

a) Chỉ cần chuyển chữ số 2 ở hàng đơn vị của số 202 thành số mũ như sau : 20^2 , ta sẽ được đẳng thức đúng :

$$405 - 20^2 = 405 - 400 = 5.$$

b) Chỉ cần chuyển chỗ 1 que diêm như sau theo 2 cách và ta sẽ được hai đẳng thức đúng :

$$\text{V} \vdash \text{IV} \equiv \text{IX} \quad (5 + 4 = 9)$$

$$\text{VI} \vdash \text{IV} \equiv \text{X} \quad (6 + 4 = 10)$$

Bài 17

Gọi ba miếng bìa con theo thứ tự là A (mang số 23), B (mang số 79) và C (mang số \overline{ab}). Cả thầy có 6 cách ghép thành hàng như sau :

ABC, BAC, CAB

ACB, BCA, CBA

Ở hàng thứ nhất $ABC = 2379ab$ và hàng thứ hai $ACB = 23ab79$ thì các số tạo thành được lặp lại 2 lần số 23, số 79 và số \overline{ab} . Nếu khi cộng các số ở hai hàng này ta được tổng $M = 2(23 + 79 + \overline{ab})$

Tương tự ta gặp lại các số này 2 lần ở các hàng thứ ba, thứ tư, thứ năm và thứ sáu và các tổng tương ứng sẽ là $100.M$ và $1000.M$.

Theo bài ra ta có tổng :

$$M + 100M + 1000M = 2\,989\,896$$

hay $10101.M = 2989896$. Suy ra :

$$M = 2989896 : 10101 = 296$$

mà $M = 46 + 158 + 2.\overline{ab}$. Từ đó :

$$2.\overline{ab} = 296 - 204 = 92. \text{ Vậy } \overline{ab} = 46.$$

Bài 18

Giả sử năm sinh của bố Tùng là $\overline{19xy}$, thì tuổi năm 1986 sẽ là :

$$1986 - \overline{19xy} = 86 - \overline{xy} = (8 - x).10 + (6 - y)$$

Theo bài ra tổng các chữ số của năm sinh bằng số tuổi nên ta có :

$$1 + 9 + x + y = 80 - 10x + 6 - y = 86 - 10x - y$$

hay $11x + 2y = 76$ (*)

Do $y \leq 9$ nên $2y \leq 18$, vậy $11x + 2y \leq 11x + 18$

$$76 \leq 11x + 18. \text{ Suy ra } x \geq \frac{58}{11} > 5. \text{ Từ đó } x = 6, y = 5 \text{ theo (*)}.$$

Vậy năm sinh của bố Tùng là 1965 và tuổi năm 1986 là $1 + 9 + 6 + 5 = 21$ (tuổi). Đến năm nay 1999 thì tuổi bố Tùng là $1999 - 1965 = 34$ (tuổi).

Bài 19

Theo bài ra ta có :

$$\overline{yx0} = 34.\overline{xy} \text{ hay}$$

$$100y + 10x = 34.(10x + y) = 340x + 34y.$$

$$\text{Suy ra : } 330x = 66y, \text{ hay } 5x = y.$$

Vì $x > 0$ và $y \leq 9$ nên ta có ngay $x = 1, y = 5$, tức là $\overline{xy} = 15$.

Vậy bạn Trung đã được 15 điểm 10 vé toán.

Bài 20

Do người đi nhanh đến B sớm hơn người đi chậm 2 giờ nên khi người ấy đến B thì người đi chậm còn cách B là :

$$4 \cdot 2 = 8 \text{ (km)}$$

tức là người đi nhanh đã đi nhiều hơn người đi chậm là 8 km.

Vận tốc người đi nhanh hơn người đi chậm là :

$$6 - 4 = 2 \text{ (km/h)}$$

Thời gian để người đi nhanh đến B là :

$$8 : 2 = 4 \text{ (giờ)}$$

Thị trấn huyện A cách thị trấn huyện B là :

$$6 \cdot 4 = 24 \text{ (km)}$$

Bài 21

Cũng đi một quãng đường như nhau thì thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc. Mà vận tốc xuống dốc (16 km/h) gấp đôi vận tốc lên dốc (8 km/h) nên thời gian xuống dốc bằng nửa thời gian lên dốc.

Thời gian cả đi lẫn về là :

$$2 \text{ giờ } 45 \text{ phút} + 1 \text{ giờ } 45 \text{ phút} = 4 \text{ giờ } 30 \text{ phút}$$

Biết tổng hai số và tỉ số của chúng ta có ngay :

Thời gian lên dốc là :

$$4 \text{ giờ } 30 \text{ phút} \cdot \frac{2}{3} = 3 \text{ (giờ)}$$

Quãng đường AC dài :

$$8 \cdot 3 = 24 \text{ (km)}$$

Bài 22

Số lớp của 83 chiếc xe là :

$$500 - 77 = 423 \text{ (lớp)}$$

Giả sử tất cả xe đều là ô tô 6 bánh. Thế thì số lớp là : $83 \cdot 6 = 498$ (lớp), thừa ra $498 - 423 = 75$ (lớp) là do có cả mô tô 3 bánh. Thay 1 ô tô bằng 1 mô tô thì bớt đi $6 - 3 = 3$ (lớp), vậy :

Số mô tô 3 bánh là :

$$75 : 3 = 25 \text{ (mô tô)}$$

Số ô tô 6 bánh là : $83 - 25 = 58$ (ô tô)

Có thể giải bằng cách giả sử tất cả xe đều là mô tô 3 bánh

Bài 23

Giữa số quả trong các hộp 10 quả và số quả trong các hộp 9 quả có sự chênh lệch là $1 + 3 = 4$ (quả).

Sở dĩ có sự chênh lệch đó vì mỗi hộp 10 quả hơn mỗi hộp 9 quả là : $10 - 9 = 1$ (quả). Suy ra :

Số hộp là : $4 : 1 = 4$ (hộp). Số quả cam là : $9.4 + 1 = 37$ (quả) hoặc $10.4 - 3 = 37$ (quả).