6.11. Chứng minh rằng, mỗi lớp tương đương các khoá trong sơ đồ chữ kí Fail-Stop của Pedersen-Van Hőyt chứa q^2 khoá.

6.12. Giả sử Bob đang dùng sơ đồ chữ kí Fail-Stop của Pedersen-Van Heyst với p = 3467, α =4, a_0=1567 và β =514 (dĩ nhiên Bob không biết giá trị a_0).

a) Dùng yếu tố a_0 =1567, xác định tất cả các khoá có thể :

$K = (\gamma_1, \gamma_2, a_1, a_2, b_1, b_2)$

sao cho $sig_K(42)$ =(1118,1449)

b) Gái sử $sig_K(42)$ =(1118,1449) và $sig_K(969)$ =(899,471). Không cần dùng điều kiện a_0 =1567. Hãy xác định K (điều này sẽ chứng tỏ sơ đồ là dùng một lần).

6.13. Gải sử Bob dùng sơ đồ Fail-Stop của Pedersen-Van Heyst vơi p =5087, α =25, β =1866. Giả sử K =(5065, 5067,144,874,1873,2345) và Bob tìm chữ kí (2219,458) được giả mạo trên bức điện 4785

a) Chứng minh rằng, chữ kí giả mạo này thoả mãn điều kiện xác minh nên nó là chữ kí hợp lệ.

b) Chỉ ra cách Bob tính " bằng chứng giả mạo a_0 khi cho trước chữ kí giả mạo này. "

CHƯƠNG 7

CÁC HÀM HASH

7.1 CÁC CHŨ KÍ VÀ HÀM HASH.

Bạn đọc có thể thấy rằng các sơ dồ chữ kí trong chương 6 chỉ cho phép kí các bức điện nhỏ.Ví dụ, khi dùng DSS, bức điện 160 bit sẽ được kí bằng chữ kí dài 320 bít. Trên thực tế ta cần các bức điện dài hơn nhiều. Chẳng hạn, một tài liệu về pháp luật có thể dài nhiều Megabyte.

Một cách đơn giản để gải bài toán này là chặt các bức điện dài thành nhiều đoạn 160 bit, sau đó kí lên các đoạn đó độc lập nhau. Điều này cũng

tương tự như mã một chuoĩ dài bản rõ bằng cách mã của mỗi kí tự bản rõ độc lập nhau bằng cùng một bản khoá. (Ví dụ: chế độ ECB trong DES).

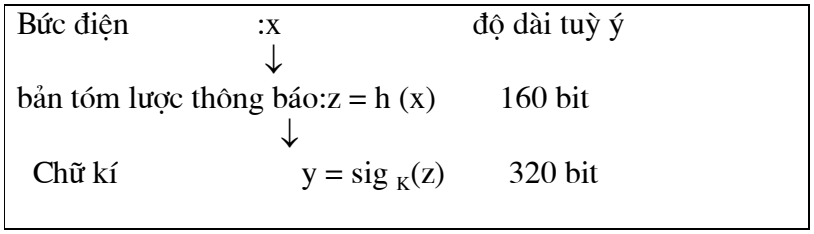
Biện pháp này có một số vấ đề trong việc tạo ra các chữ kí số. Trước hết, với một bức điện dài, ta kết thúc bằng một chữ kí rất lớn (dài gấp đôi bức điện gốc trong trường hợp DSS). Nhược điểm khác là các sơ đồ chữ kí "an toàn" lại chậm vì chúng dùng các pháp số học phức tạp như số mũ modulo. Tuy nhiên, vấn đề nghiêm trọng hơn với phép toán này là búc điện đã kí có thể bị sắp xếp lại các đoạn khác nhau,hoặc một số đoạn trong chúng có thể bị loại bỏ và bức điện nhận được vẫn phải xác minh được. Ta cần bảo vệ sự nguyên vẹn của toàn bộ bức điện và điều này không thể thực hiện được bằng cách kí độc lập từng mẩu nhỏ của chúng.

Giải pháp cho tất cả các vấn đề này là dùng hàm Hash mã khoá công khai nhanh. Hàm này lấy một bức điện có độ dài tuỳ ý và tạo ra một bản tóm lược thông báo có kích thước qui định (160 bit nếu dùng DSS).

Sau đó bản tóm lược thông báo sẽ được kí. Vơi DSS, việc dùng hàm Hash được biểu diễn trê hình 7.1.

Khi Bob muốn kí bức điện x, trước tiên anh ta xây dựng một bnr tóm lược thông báo $z = h(x)$ và sau đó tính $y = sig_K(z)$. Bob truyền cặp (x, y) trên kênh. Xét thấy có thể thực hiện xác minh (bởi ai đó) bằng cách trước hết khôi phục bản tóm lược thông báo $z = h(x)$ bằng hàm h công khai và sau đó kiểm tra xem $ver_k(x,y)$ có = true, hay không.

Hình 7.1.Kí một bản tóm lược thông báo



7.2. HÀM HASH KHÔNG VA CHẠM

Chúng ta cần chú ý rằng,việc dùng hàm hash h không làm giảm sự an toàn của sơ đồ chữ kí vì nó là bản tóm lược thông báo được chữ kí không phải là bức điện. Điều cần thiết đối với h là cần thoả mãn một số tính chất nào đó để tranh sự giả mạo.

Kiểu tấn công thông thường nhất là Oscar bắt đầu bằng một bức diện được kí hợp lệ (x, y), $y = sig_K(h(x))$,(Cặp (x, y) là bức điện bất kì được Bob kí trước đó). Sau đó anh ta tính $z = h(x)$ và thử tìm $x \neq x'$ sao cho $h(x') = h(x)$. Nếu Oscar làm được như vậy, (x', y) sẽ là bức điện kí hợp lệ, tức một bức điện giả mạo. Để tránh kiểu tấn công này, h cần thoả mãn tính không va chạm như sau:

Định nghĩa 7.1

Hàm hash h là hàm không va chạm yếu nếu khi cho trước một bức điện x, không thể tiến hành về mặt tính toán để tìm một bức điện $x \neq x'$ sao cho $h(x') = h(x)$.

Một tấn công kiểu khác như sau: Trước hết Oscar tìm hai bức điện $x \neq x'$ sao cho $h(x) = h(x')$. Sau đó Oscar đưa x cho Bob và thyết phục Bob kí bản tóm lược thông báo h(x) để nhận được y. Khi đố (x',y) là thông báo (bức điện) giả mạo hợp lệ.

Đây là lí do đưa ra một tính chất không va chạm khác.

Định nghĩa 7.2.

Hàm Hash h là không va chạm mạnh nếu không có khả năng tính toán để tìm ra bức điênk x và x' sao cho $x \neq x'$ và $h(x) = h(x')$.

Nhận xét rằng: không va chạm mạnh bao hàm va chạm yếu.

Còn đây là kiểu tấn công thứ 3: Như đã nói ở phần 6.2 việc giả mạo các chữ kí trên bản tóm lược thông báo z ngẫu nhiên thường xảy ra với sơ đồ chữ kí. Giả sử Oscar tính chữ kí trên bản tóm lược thông báo z ngẫu nhiên như vậy. Sau đó anh ta tìm x sao cho z= h(x). Nếu làm được như vậy thì (x,y) là bức điện giả mạo hợp lệ. Để tránh được tấn công này, h cần thoả mãn tính chất một chiều (như trong hệ mã khoá công khai và sơ đồ Lamport).

Định nghĩa 7.3.

Hàm Hash h là một chiều nếu khi cho trước một bản tóm lược thông báo z, không thể thực hiện về mặt tính toán để tìm bức điện x sao cho h(x) = z.

Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng, tính chất không va chạm mạnh bao hàm tính một chiều bằng phản chứng. Đặc biệt ta sẽ chứng minh rằng, có thể dùng thuật toán đảo với hàm Hash như một chương trình con (giả định) trong thuật toán xác suất Las Vegas để tìm các va chạm.

Sự rút gọn này có thể thực hiện với một giả thiết yếu về kích thước tương đối của vùng và miền (domain and range) của hàm Hash. Ta cũng sẽ giả thiết tiếp là hàm Hash h: $X \to Z$, X,Z là các tập hữu hạn và $|X| \geq 2|Z|$. Đây là giả thiết hợp lí :Nếu xem một phần tử của X được mã như một xâu bít có độ dài $\log_2|X|$ và phần tử của Z được mã hoá như một xâu bít có độ dài $\log_2|X|$ thì bản tóm lược thông báo z = h(x) ít nhất cũng ngắn hơn bức điện x một bít (ta sẽ quan tâm đến tình huống vùng X là vô hạn vì khi đó có thể xem xét các bức điện dài tuỳ ý. Lập luận đó của ta cũng áp dụng cho tình huống này).

Tiếp tục giả thiết là ta có một thuật toán đảo đối với h, nghĩa là có một thuật toán A chấp nhận như đầu vào bản tóm lược thông báo $z \in Z$ và tìm một phần tử $A(z) \in X$ sao cho h(A(z)) = z.

Ta sẽ chứng minh định lí dưới đây:

Định lí 7.1:

Giả sử h: $X \to Z$ là hàm Hash, trong đó $|X|$ và $|Z|$ hữu hạn và $|X| \geq 2|Z|$. Cho A là thuật toán đảo đối với h. Khi đó tồn tại một thuật toán Las Vagas xác suất tìm được một va chạm đối với h với xác suất ít nhất là1/2.

Chứng minh :

Xét thuật toán B đưa ra trong hình 7.2. Rõ ràng B là một thuật toán xác suất kiểu Las Vegas vì nó hoạc tìm thấy một va chạm, hoặc cho câu trả lời không. Vấn đề còn lại là ta phải tịnh xac suất thành công, Với x bất kỳ thuộc X, định nghĩa $x \sim x_1$ nếu $h(x) = h(x_1)$. Dễ thấy rằng, ~ là quan hệ tương đương. Ta định nghĩa:

$$[x] = \{x_1 \in X: x \sim x_1\}$$

Mỗi lớp tương đương [x] chứa ảnh đảo của một phần tử thuộc Z nên số các lớp tương đương nhiều nhất là $|Z|$. Kí hiệu tập các lớp tương đương là C.

Bây giờ giả sử, x là phần tử $\in X$ được chọn trong bước 1. Với giá trị x này, sẽ có $|[x]|$ giá trị x_1 có thể cho phép trở lại bước 3. $|[x]|$-1 các giá trị x_1 này khác với x và như vậy bước 4 thành công. (Chú ý rằng thuật thoán A

không biết biểu diễn các lớp tương đương [x] đã chon trong bước 1). Như vậy, khi cho trước lựa chọn cụ thể $x \in X$, xác suất thành công là
$(|[x)|-1/|[x]|$.

Hình.7.2 Dùng thuật toán đảo A để tìm các va chạm cho hàm Hash

```
1.chọn một ssó ngẫu nhiên x ∈X
2.Tính z=h(x)
3.Tinh x1= A(Z)
4. if x1 ≠ x then
        x và x1 va chạm dưới h (thành công)
   else
        Quit (sai)
```

Xác suất thành công của thuật toán B bằng trung bình cộng tất cả các lựa chon x có thể:

$$P(\text{thành công}) = (1/|X|)\sum_{x\in X}(|[x]|-1)/|[x]|$$
$$= (1/|X|)\sum_{c\in C}\sum_{x\in C}(|c|-1)/|c|$$
$$= 1/|X|\sum_{c\in C}(|c|-1) = (1/|X|)\sum_{c\in C}|c| - \sum_{c\in C}1$$
$$>= (|X| - |Z|) / |X|$$
$$>= ((|X| - |Z|)/2) / |X| = ẵ$$

Như vậy, ta đã xây dựng thuật toán Las Vegas có xác suất thành công ít nhất bằng 1/2.

Vì thế, đó là điều kiện đủ để hàm Hash thoả mãn tính chất không va chạm mạnh vì nó bao hàm hai tính chất khác.Phần còn lại của chương này ta chỉ quan tâm đến các hàm Hash không va chạm mạnh.

7.3 TẤN CÔNG NGÀY SINH NHẬT(birthday)

Trong phần này, ta sẽ xác định điều kiện an toàn cần thít ch hàm Hash và điều kiện này chỉ phụ thuộc vào lực lượng của tập Z (tương đương về kích thước của bảng thông báo).Điều kiện cần thiết nà rút ra tư phương pháp tìm kiếm đơn giản ác va chạm mà người ta đã biết đến dưới cái tên tấn công ngày sinh nhật (birthday phương pháparradox), trong bài toán:một nhóm 23 người ngẫu nhiên, có ít nhất 2 người có ngày sinh trùng nhau với xác suất ít nhất là1/2.(Dĩ nhiên, đây chưa phải là nghịch lí,song đó là trực giác đối lập có thể

xảy ra). Còn lí do của thuật ngữ "tấn công ngày sinh nhật " sẽ rõ ràng khi ta tiếp tuch trình bày.

Như trước đây, ta hãy giả sử rằng :h:X→Z là hàm Hash, X,Z hữu hạn và $|X| >= 2|Z|$.Định nghĩa $|X| = m$ và $|Z| = n$.Không khó khăn nhận thấy rằng, có ít nhất n va chạm và vấn đề đặt ra là cách tìm chúng. Biện pháp đơn sơ nhất là chọn k phần tử ngẫu nhiên phân biệt $x_1,x_2…..x_k \in X$, tính $z_1 = h(x_1),1<= i <= k$ và sau đó xác định xem liệu có xảy ra va chạm nào không (bằng cách, chẳng hạn như sáp xếp lại các z_i).

Quá trình này tương tự với việc ném k quả bóng vào thùng và sau đó kiểm tra xem liệu có thùng nào chứa ít nhất hai quả hay không (k qủa bóng tương đương với k giá trị x_i ngẫu nhiên và n thùng tương ứng với n phần tử có thể trong Z).

Ta sẽ giới hạn dưới của xác suất tìm thấy một va chạm theo phương pháp này.Do chỉ quan tâm đến giới hạn dưới về xác suất va chạm nên ta sẽ giả sử rằng $|h^{-1}(z)| \approx m/n$ với mọi $z \in Z$. (đây là giả thiết hợp lí :Nếu các ảnh đảo không xấp xỉ bằng nhau thì xác suất tìm thấy một va chạm sẽ tăng lên).

Vì các ảnh đảo đều có kích thước bằng nhau và các $x_{i\ được}$ chọn một cách ngẫu nhiên nên các z_i nhận được có thể xem như các phần tử ngẫu nhiên của Z. Song việc tính toán xác suất để các phần tử ngẫu nhiên $z_1, z_{2,....} z_k \in Z$ là riêng biệt khá đơn giản.Xét các z_i theo thứ tự $z_1, …,z_k$. Phép chọn z_1 đầu tiên là tuỳ ý. Xác suất để $z_2 \neq z_1$ là 1-1/n; xác suất để $z_3 \neq z_1$ và z_2 là 1- 2/n. vv…

Vì thế ta ước lượng xác suất để không có va chạm nào là:

$(1-1/n)(1-2/n)… (1-(k-1/n)) = (1-1/n)$

Nếu x là số thực nhỏ thì $1- x \approx e^{-x}$. Ước lượng này nhận dược từ hai số hạng đầu tiên của cá chuỗi khai triển.

$$e^{-x} = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! ...$$

Khi đó xác suất không có va chạm nào là :

$$\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n}) \approx \prod_{i=1}^{k-1} e^{-1/n} = e^{-k(k-1)/n}$$

Vì thế ta ước lượng xác suất để có ít nhất một va chạm là

$$1-e^{-k(k-1)/n}$$

Nếu kí hiệu xác suất này là ε thì có thể giải phương trình đối với k (như một hàm của n và ε)

$$1-e^{-k(k-1)/n} \approx 1 -\varepsilon$$

$$-k(k-1)/n \approx \ln(1-\varepsilon)$$

$$k^2 - k \approx n \ln 1/(1-\varepsilon)$$

Nếu bỏ qua số hạng k thì :

$$k = \sqrt{n \ln \frac{1}{1-\varepsilon}}$$

Nếu lấy $\varepsilon = 0.5$ thì

$$k \approx 1.17\sqrt{n}$$

Điều này nói lên rằng, việc chặt (băm) trên $\sqrt{n}$ phần tử ngẫu nhiên của X sẽ tạo ra một va chạm với xác suấtt 50%. Chú ý rằng, cách chọn ε khác sẽ dẫn đến hệ số hằng số khác song k vẫn tỷ lên với $\sqrt{n}$.

Nếu X là tập người,Y là tập gồm 365 ngỳ trong năm (không nhuận tức tháng 2 có 29 ngày) còn h(x) là ngày sinh nhật của x, khi đó ta sẽ giả guyết bằng nhgịch lý ngày sinh nhật. Lấy n = 365, ta nhận được k ≈ 22,3. Vì vậy, như đã nêu ở trên, sẽ có ít nhất 2 người có ngày sinh nhật trùng nhau trong 23 người ngẫu nhiên với xác suất ít nhất bằng 1/2.

Tấn công ngày sonh nhật đặt giới hạn cho các kích thước các bản tóm lược thông báo. bản tóm lược thông báo 40 bit sẽ không an toàn vì có thể tìm thấy một va chạm với xác suất 1/2 trên 2^{20} (khoảng1.000.000)đoạn chặt ngẫu nhiên. Từ đây cho thấy rằng, kích thước tối thiểu chấp nhận được của bản tóm lược thông báo là 128 bit (tấn công ngày sinh nhật cần trên 2^{64} đoạn chặt trong trường hợp này). Đó chính là lý do chọn bản tóm lược thông báo dài 160 bit trong sơ đồ DSS.

Hình7.3. Hàm hash chaum-Van heyst-Plitzmann.

Giả sử p là số nguyên tố lớn và q =(p-1)/2 cũng là số nguyên tố. Cho α và β là hai phần tử nguyên thuỷ của Zp. Giá trị $\log_\alpha \beta$ không công khai và giả sử rằng không có khả năng tính toán được giá trị của nó.

Hàm Hash:

$$h: \{0,...,q-1\} \times \{0,...,q-1\} \rightarrow Zp \setminus \{0\}$$

được định nghĩa như sau:

$$h(x1,x2) = \alpha^{x_1} \beta^{x_2} \bmod p$$

7.3. hàm hash logarithm rời rạc

Trong phần này ta sẽ mô tả một hàm Hash do Chaum-Van Heyst và Pfĩtmann đưa ra. Hàm này an toàn do không thể tính được logarithm rời rạc. Hàm Hast này không đủ nhanh để dùng trong thực tế song nó đơn giản và cho một ví dụ tốt về một hàm Hash có thể an toàn dưới giả thuyết tính toán hợp lý nào số. Hàm Hash Caum-Van Heyst- Pfĩtmann được nêt trong hình 7.3. Sau đây sẽ chứng minh một định lý liên quan đến sự an toàn của hàm Hast này.

Định lý 7.2.

N*ếu cho trước một va chạm với hàm Hash Chaum-Van Heyst-Pfĩtmann h có thể tính được logarithm rời rạc* $\log_\alpha \beta$ *một cách có hiệu quả.*

Chứng minh

Giả sử cho trước va chạm

$$h(x_1,x_2) = h(x_3,x_4)$$

trong đó $(x_1,x_2) \neq (x_3,x_4)$. Như vậy ta có đồng dư thức sau:

$$\alpha^{x_1}\beta^{x_2} = \alpha^{x_3}\beta^{x_4}$$

hay

$$\alpha^{x_1}\beta^{x_2} \equiv \alpha^{x_3}\beta^{x_4} \pmod p$$

Ta kí hiệu

$$D = UCLN\ (x_4-x_2,p-1)$$

Vì p-1 =2q ,q là số nguyên tố nên $d \in \{1, 2, q, p-1\}$. Vì thế, ta có 4 xác suất với d sẽ xem xét lần lượt dwois đây.

Trước hết ,giả sử d =1 ,khi đó cho

$$y= (x_4-x_2)^{-1} \bmod (p-1)$$

ta có

$$\beta \equiv \beta^{(x_4-x_2)y} \pmod p$$
$$\equiv \alpha^{(x_1-x_2)y} \pmod p$$

Vì thế, có thể tính loarithm rời rạc $\log_\alpha\beta$ như sau:

$$\log_\alpha\beta = (x_1-x_3)\ (x_4-x_2)^{-1} \bmod (p-1)$$

Tiếp theo, giả sử d=2. Vì p-1 =2q, lẻ nên $UCLN(x_4-x_2,q) =1$. Giả sử:

$$y=(x_4-x_2)^{-1} \bmod q$$

xét thấy $(x_4-x_2)y = kq+1$
với số nguyên k nào đó. Vì thế ta có:

$$\beta^{(x_4-x_2)y} \equiv \beta^{kq+1} \pmod p$$
$$\equiv (-1)^k \beta \pmod p$$
$$\equiv \pm \beta \pmod p$$

Vì $\beta^q \equiv -1 \pmod p$
Nên

$$\alpha^{(x4-x2)y} \equiv \beta^{(x1-x3)} \pmod p$$
$$\equiv \pm \beta \pmod p$$

Từ đó suy ra rằng:

$$\log_\alpha \beta = (x_1-x_3)y \bmod (p-1)$$
$$\log_\alpha \beta = (x_1-x_3)y \bmod (p-1)$$

Ta có thể dễ dàng kiểm tra thấy một trong hai xác suất trên là đúng. Vì thế như trong trường hợp d =1, ta tính được $\log_\alpha \beta$.

Xác suất tiếp theo là d = q. Tuy nhiên

$$q-1 \geq x_1 \geq 0$$

và

$$q-1 \geq x_3 \geq 0$$

nên

$$(q-1) \geq x_4-x_2 \geq -(q-1)$$

do vậy UCLN$(x_4-x_2,p-1)$ không thể bằng q, nói cách khác trường hợp này không xảy ra.

Xác suất cuối cùng là d = p-1. Điều nàychỉ xảy ra khi x2 =x4. Song khi đó ta có

$$\alpha^{x_1}\beta^{x_2} \equiv \alpha^{x_3}\beta^{x_4} \pmod p$$

nên

$$\alpha^{x_1} \equiv \alpha^{x_3} \pmod p$$

và $x_1 = x_2$. Như vậy $(x_1,x_2) = (x_3,x_4) \Rightarrow$ mâu thuẫn. Như vậy trường hợp này cũng không thể có.

Vì ta đã xem xét tất cả các giá trị có thể đối với d nên có thể kết luận rằng ,hàm Hash h là không va chạm mạnh miễn là không thể tính được logarithm rời rạc $\log_\alpha \beta$ trong Z_p.
Ta sẽ minh hoạ lý thuyết nêu trên bằng một ví dụ.
Ví dụ 7.1

Giả sử p =12347 (vì thế q = 6173), $\alpha = 2$, $\beta = 8461$. Giả sử ta được đưa trước một va chạm

$$\alpha^{5692} \beta^{144} \equiv \alpha^{212} \beta^{4214} \pmod{12347}$$

Như vậy $x_1 = 5692$, $x_2 = 144$, $x_3 = 212$, $x_4 = 4214$. Xét thấy UCLN $(x_4 - x_2,p-1)$ =2 nên ta bắt đầu bằng việc tính

$$y = (x_4 - x_2)^{-1} \bmod q$$
$$= (4214 - 144)^{-1} \bmod 6173 = 4312$$

Tiếp theo tính

$$y = (x_1 - x_3) \bmod (p-1)$$
$$= (5692 - 212)\ 4312 \bmod 12346$$
$$= 11862$$

Xét thấy đó là trường hợp mà $\log_\alpha\beta \in \{y', y'+q \bmod (p-1)\}$. Vì

$$\alpha^y \bmod p = 2^{12346} = 9998$$

nên ta kết luận rằng:

$$\log_\alpha\beta = y' + q \bmod (p-1)$$
$$= 11862 + 6173 \bmod 12346$$
$$= 5689$$

như phép kiểm tra, ta có thể xác minh thấy rằng

$$2^{5689} = 8461 \pmod{12347}$$

Vì thế , ta các định được $\log_\alpha\beta$.

7.5.**các hàm hash mở rộng**

Cho đến lúc này, ta đã xét các hàm Hash trong vùng hữu hạn. Bây giờ ta nghiên xéu cách có thể mở rộng một hàm Hash không va chạm mạnh từ vùng hữu hạn sang vùng vô hạn. Điều này cho phép ký các bức điện có độ dài tuỳ ý. Gỉa sử h: $(Z_2)^m \rightarrow (Z_2)^t$ là một hàm hash không va chạm mạnh ,trong đó $m \geq t-1$. Ta sẽ dùng h đêu xây dựng hàm hash không va chạm mạnh h: $X \rightarrow (Z_2)^t$ trong đó

$$X = \bigcup_{i=m}^{\infty} (Z_2)^t$$

Trước tiên xét trường hợp $m \geq t+2$.

Ta sẽ xem các phần tử của X như các xây bit. |x| chỉ độ dàI của x (tức số các bit trong x) và x||y ký hiệu sự kết hợp các xây x và y. Giả sử $|x| = n > m$. Có thể biểu thị x như một chuỗi kết hợp.

$$X = x_1||x_2||...||x_k$$

Trong đó

$$|x_1| = |x_2| = ... = |x_{k-1}| = m- t-1$$

và $|x_k| = m- t- 1- d$

Hình 7.4. Mở rộng hàm hash h thành h* ($m \geq t+2$)

1. For i= 1 to k-1 do
   $y_i = x_i$
2. $y_k = x_k \| 0^d$
3. cho y_{k+1} là biểu diễn nhị phân của d
4. $g_i = h(0I+1\|y_1)$
5. for i=1 to k do
   $g_i+1 = h(g_i\|1\|y_i+1)$
6. $h^*(x) = g_k +1$

Trong đó m- t- 2 ≥ d ≥0. Vì thế ta có

$$k= \left\lfloor \frac{n}{m-t-1} \right\rfloor$$

Ta định nghĩa h*(x) theo thuật toán biểu kiễn trong hình 7.4.

Kí hiệu $y(x) = y1\|y2\|...\|y_{k-1}$

Nhận xét rằng y_k được lập từ x_k bằng cách chèn thêm d số 0 vào bên phảI để tất cả các khối y_i ($k \geq i \geq 1$)đều có chiều dàI m-t-1. Cũng như trong bước 3 y_{k+1} sẽ được đệm thêm về bên tráI các số 0 sao cho $|y_{k+1}| = m-t-1$.

Để băm nhỏ x ,trước hết ta xây dựng hàm y(x) và sau đó "chế biến" các khối $y_1...y_{k+1}$ theo một khuôn mẫu cụ thể. Điều quan trọng là $y(x) \neq y(x')$ khi $x \neq x$. Thực tế y_{k+1} được định nghĩa theo cách các phép ánh xạ $x \rightarrow y(x)$là một đơn ánh.

Định lý sau đây chứng minh rằng h* là an toàn khi h an toàn.

Định lý 7.3

Giả sử h: $(Z_2)^n \rightarrow (Z_2)$ là hàm hash không va chạm mạnhm≥ t+2. Khi đó hàm h: $\cup_{i=m}^{\infty} (Z_2)^t \rightarrow (Z_2)^t$ được xây dựng như trên hình 7.4 là hàm hash không*
và chạm mạnh.

Chứng minh:

Giả sử rằng ,ta có thể tìm được $x \neq x'$ sao cho $h^*(x) = h^*(x')$. Nếu cho trước một cặp như vậy, ta sẽ chỉ ra cách có thể tìm được một va chạm đối với

h trong thời gian đa thức. Vì h được giả thiết là không va chạm mạnh nên dẫn đến một mâu thuẫn như vậy h sẽ được chứng minh là không va chạm mạnh.

Kí hiệu $y(x)= y_1||..||y_{k+1}$

Và $y(x') = y_1'||...||y_{k+1}'$

ở đây x và x' được đệm thêm d và d' số 0 tương ứng trong bước 2. Kí hiệu tiếp các giá trị được tính trong các bước 4 và 5 là $g_1,g_2....,g_{k+1}$ và $g_1',....,g_{k+1}'$ tương ứng.

Chúng ta sẽ đồng nhất hai trường hợp tuỳ thuộc vào việc có hay không $|x| \equiv |x'| \pmod{m-t-1}$.

Trường hợp1: $|x| \neq |x'| \pmod{m-t-1}$

Tại đây $d \neq d'$ và $y_{k+1} \neq y'_{k+1}$. Ta có:

$$\begin{aligned} H(g_k||1||y_{k+1}) &= g_{k+1} \\ &= h^*(x) \\ &= h^*(x') \\ &= g'_{\iota+1} \\ &= h(g'_{\iota+1}||1||y'_{\iota+1)} \end{aligned}$$

là một va chạm đối với h vì $y_{k+1} \neq y'_{k+1.}$

Trường hợp2: $|x| \equiv |x'| \pmod{m-t-1}$

Ta chia trường hợp này thành hai trường hợp con:

Trường hợp 2a: $|x| = |x'|$.

Tạ đây ta có k= l và $y_{k+1} = y'_{k+1}$. Ta vắt đầu như trong trường hợp 1:

$$\begin{aligned} h(g_k||1||y_{k+1}) &= g_{k+1} \\ &= h^*(x) \\ &= h^*(x') \\ &= h(g'_k||1||y'_k+1) \end{aligned}$$

Nếu $g_k = g'_k$ thì ta tìm thấy một va chạm đối với h, vì thế giả sử $g_k = g'_k$ khi đó ta sẽ có:

$$\begin{aligned} h(g_{k-1}||1||y_k) &= g_k \\ &= g'_k \end{aligned}$$

$=h(0^{i+1}||y_1)$

Hoặc là tìm thấy một va chạm đối với h hoặc $g_{k-1} = g'_k - 1$ và $y_k = y'_k$. Giả sử không tìm thấy va chạm nào ,ta tiếp tục thực hiện ngược các bước cho đến khi cuối cùng nhận được :

$$h(0_{i+1}||y_1) = g_1$$
$$= g'_{i-k+1}$$
$$= g(g'_{i-k}||1||y'_{i-k+1}).$$

Nhưng bit thứ (t+1) của $0^{i+1}||y_1$ bằng 0 và bit thứ (t+1) của $g'_{i-k+1}||1||y'_{i-k+1}$ bằng 1. Vì thế ta tịm thấy một va chạm đối với h.

Vì đã xét hết các trường hợp có thể nên ta có kết luận mong muốn.

Cấu trúc của hình 7.4 chỉ được dùng khi m>= t+2. Bây giờ ta hãy xem xét tình huống trong đó m = t+1. Cần dùng một cấu trúc khác cho h. Như trước đây, giả sử |x|=n>m. Trước hết ta mã x theo cách đặc biệt. Cách này dùng hàm f có định nghĩa như sau:

f(0) = 0
f(1) = 01

Thuật toán để xây dựng h*(x)được miêu tả trong hình 7.5

Phép mã $x \rightarrow y = y(x)$ được định nghĩa trong vước 1 thoả mãn hai tính chất quan trọng sau:

1. nếu $x \neq x'$ thì $y(x) \neq y(x')$ (tức là $x \rightarrow y(x)$ là một đơn ánh)
2. Không tồn tạI hai chuỗi $x \neq x'$ và chuỗi z sao cho $y(x) = z||y(x')$. Nói cách khác không cho phép mã hoá nào là fpsstix của phép mã khác. ĐIều này dễ dàng thấy được do chuỗi y(x) bắt đầu bằng 11 và không tồn tạI hai số 1 liên tiếp trong phần còn lạI của chuỗi).

Hình 7.5 Mở rộng hàm hash h thành h* (m = t+1)

1. Giả sử $y = y_1y_2...y_k = 11||f(x_1)||....||f(x_n)$
2. $g_1 = h(0^1||y_1)$
3. for i=1 to k-1 do
   $g_{i+1} = h(g_i||y_{i+1})$
4. $h^*(x) = g_k$

Định lý 7.4

Giả sử h: $(Z_2)^n \rightarrow (Z_2)$ là hàm hash không va chạm mạnh. Khi đó hàm h: $\cup_{i=m}^{\infty} (Z_2)^t \rightarrow (Z_2)^t$ được xây dựng như trên hình 7.5 là hàm hash không va chạm mạnh.*

Chứng minh:

Giả sử rằng ta có thể tìm được x ≠x' sao cho h*(x)=h*(x'). Kí hiệu:

$$y(x) = y_1 y_2 \ldots . y_k$$

và $$y(x') = y'_1 y'_2 \ldots . y'_l$$

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: k=l

Như trong định lý 7.3 hoặc ta tìm thấy một va chạm đỗi với h hoặc ta nhận được y = y' song đIều này lạI bao hàm x = x', dẫn đến mâu thuẫn.

Trường hợp2: k≠ l

Không mất tính tổng quát ,giả sử l>k . trường hợp này xử lý theo kiểu tương tự. Nếu giả thiết ta không tìm thấy va chạm nào đối với h ,ta có dãy các phương trình sau:

$$y_k = y'_l$$
$$y_{k-1} = y'_{l-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1 = y'_{l-k+1}$$

Song đIều này mâu thuẫn với tính chất "không posfixx" nêu ở trên. Từ đây ta kết luận rằng h* là hạm không va chạm.

Ta sẽ tổng kết hoá hai xây dựng trong phần này và số các ứng dụng của h cần thiết để tính h* theo định lý sau:

Định lý 7.5

Giả sử h: $(Z_2)^n \rightarrow (Z_2)$ là hàm hash không va chạm mạnh,ở đây m>=t+1. Khi đó tồn tạI hàm không va chạm mạnh

$h^*: \cup_{i=m}^{\infty} (Z_2)^t \rightarrow (Z_2)^t$

Số lần h được tính trong ước lượng h nhiều nhất bằng :*

$$l + \left\lceil \frac{n}{m-t-1} \right\rceil \text{ nếu } m>=t+2$$

$2n+2$ *nếu* $m= t+2$

trong đó $|x|=n$.

7.6 các hàm hash dựa trên các hệ mật

Cho đến nay, các phương pháp đã mô tả để đưa đến nhứng hàm hash hầu như đều rất chậm đối với các ứng dụng thực tiễn. Một biện pháp khác là dùng các hệ thống mã hoá bí mật hiện có để xây dừng các hàm hash. Giả sử rằng (P,C,K,E,D) là một hệ thống mật mã an toàn về mặt tính toán. Để thuận tiện ta cũng giả thiết rằng $P = C = K = (Z_2)^n$.ở đâychọn n>=128 để xây ngăn chặn kiểu tấn công ngày sinh nhật. ĐIều này loạI trừ việc dùng DES (vì độ dài khoá của DES khác với độ dài bản rõ).

Giả sử cho trước một xâu bit:

x= x1||x2||....||xk

trong đó xi $\in$ $(Z_2)^n$, 1≤ i ≤ (nếu số bit trong x không phải là bội của n thì cần chèn thêm vào x theo cách nào đó. Chẳng hạn như cách làm trong nục 7.5. Để đơn giản ta sẽ bỏ qua đIểm này).

Ý tưởng cơ bản là bắt đầu bằng một "giá trị ban đầu" cố định g_0 =IV và sau đó ta xây dựng $g_1,...,g_k$ theo quy tắc thiết lập :

$$g_i = f(x_i, g_{i-1}).$$

ở đây f là hàm kết hợp toàn bộ các phép mã hoá của hệ mật được dùng. Cuối cùng ta định nghĩa bản tóm lược của thông báo $h(x) = g_k$.

Vài hàm hash kiểu này đã được đề xuất và nhiều loại trong chúng tỏ ra không an toàn (không phụ thuộc vào việc liệu hệ mật cơ bản có an toàn hay không). Tuy nhiên , có 4 phương án khác nhau có vẻ an toàn của sơ đồ này :

$$g_i = e_{g_{i-1}}(x_i) \oplus x_i$$

$g_i = e_{g_{i-1}}(x_i) \oplus x_I \oplus g_{i-1}$
$g_i = e_{g_{i-1}}(x_i \oplus g_{i-1}) \oplus x_I$
$g_i = e_{g_{i-1}}(x_i \oplus g_{i-1}) \oplus x_I \oplus g_{i-1}.$

7.7 **Hàm hash MD4.**

Hàm hash MD4 được Riverst đề xuất năm 1990 và một hiên bản mạnh là MD5 cũng được đưa ra năm 1991. Chuẩn hàm hash an toàn (hay SHS) phức tạp hơn song cũng dưa tên các phương pháp tương tự. Nó được công bố trong hồ sơ liên bang năm 1992 và được chấp nhận làm tiêu chuẩn vào ngày 11/5/1993. Tất cả các hàm hash trên đều rất nhanh nên trên thực tế chúng dùng để kí các bức điện dài.

Trong phần này sẽ mô tả chi tiết MD4 và thảo luận một số cảI tiến dùng trong MD5 và SHS.

Cho trước một xâu bit trước hết ta tạo một mạng:

$$M = M[0]\ M[1] \ldots M[N-1]\ .$$

trong đó M[i] là xâu bit có độ dàI 32 và $N \equiv 0 \bmod 16$. Ta sẽ gọi M[i] là *từ*. M được xây dựng từ x bằng thuật toán trong hình 7.6.

Hình 7.6 Xây dựng M trong MD4

1. d = 447-(|x| mod 512)
2. giả sử ℓ là kí hiệu biểu diễn nhị phân của |x| mod 2^{64}.|l| = 64
3. $M = x||1||0^d||\ell$

Trong việc xây dựng M, ta gắn số 1 ssơn lẻ vào x, sau đó sẽ gài thêm các số 0 đủ để độ dài trở nên đồng dư với 448 modulo 512.,cuối cùng nối thêm 64 bit chưa biểu diễn nhị phân về độ dàI (ban đầu) của x(được rút gọn theo móulo 2^{64} nếu cần). Xâu kết quả M có độ dàI chia hết cho 512. Vì thế khi chặt M thành các từ 32 bit , số từ nhận được là N-sẽ chia hết cho 16.

Bây giờ, tiếp tục xây dựng bản tóm lược thông báo 128 bit. Hình 7.7 đưa ra mô tả thuật toán ở mức cao. Bản tóm lược thông báo được xây dựng như sự kết nối 4 từ A,B,C và D mà ta sẽ gọi là các thanh ghi. Bốn thanh ghi được khởi động như trong bước 1. Tiếp theo ta xử lí bảng M 16 bit từ cùng lúc. Trong mỗi vòng lặp ở bước 2, đầu tiên lấy 16 từ "tiếp theo" của M và lưu

chúng trong bảng X (bước 3). Các giá trị của bốn thanh ghi dịch sau đó sẽ được lưu lại (bước 4). Sau đó ta sẽ thực hiện ba vòng "băm" (hash). Mỗi vaòng gồm một phép toán thực hiện trên một trong 16 từ trong X. Các phép toán được thực hiện trong ba vòng tạo ra các giá trị mới trong bốn thanh ghi. Cuối cùng ,bốn thanh ghi được update (cập nhật) trong bước 8 bằng cách cộng ngược các giá trị lưu trước đó trong bước 4. Phép cộng này được xác định là cộng các số nguyên dương ,được rút gọn theo modelo 2^{32}.

Ba vòng trong MD4 là khác nhau (không giông như DES. 16 vòng đều như nhau). Trước hết ta sẽ mô tả vàI phép toán khác nhau trong ba vòng này. Trong phần sau,ta kí hiệu X và Y là các từ đầu vào và mỗi phép toán sẽ tạo ra một từ đầu ra. Dưới đây là phép toán được dùng:

X∧Y là phép "AND" theo bit giữa X và Y
X∨Y là phép "OR" theo bit giữa X và Y
X⊕Y là phép "XOR" theo bit giữa X và Y
¬X chỉ phần bù của X
X+Y là phép cộng theo modulo 2^{32}.
X<< s phép dịch vòng tráI X đI s vị trí (31>= s >=0).

Chú ý rằng, tất cả các phép toán trên đều tất nhanh và chỉ có phép số học duy nhất được dùng là phép cộng modulo 2^{32}. Nếu MD4 được ứng dụng thì cần tính đến kiến trúc cơ bản của máy tính mà nó chạy trên đó để thực hiện chính xác phép cộng. Giả sử $a_1a_2a_3a_4$ là 4 byte trong từ xem mỗi a_i,như một số nguyên trong dảI 0-255 được biểu diễn dưới dạng nhị phân. Trong kiến trúc kiểu endian lớn (chẳng hạn như trên trạm Sunsparc) từ này biểu diễn số nguyên.

$$a_1 2^{24} + a_2 2^{16} + a_3 2^8 + a_4$$

Trong kiến trúc kiểu endian nhỏ (chẳng hạn họ intel 80xxx). Từ này biểu diễn số nguyên:

$$a_4 2^{24} + + a_3\, 2^{16} + a_2\, 2^8 + a_1$$

MD4 giả thiết dùng kiến trúc kiểu endian nhỏ. ĐIều quan trọng là bản tóm lược thông báo độc lập với kiến trúc cơ bản. Vì thể nếu muốn chạy MD4 trên máy tính endian lớn cần thực hiện phép cộng X+Y như sau:

1. Trao đổi x_1 và x_4; x_2 và x_3; y_1 và y_4; y_2 và y_3
2. Tính Z = X+Y mod 2^{32}
3. Trao đổi z_1 và z_4 ; z_2 và z_3.

Hình 7.7 hàm hash MD4

1. A= 67452301 (hệ hexa)
   B = efcdab89 (hệ hexa)
   C = 98badcfe (hệ hexa)
   D = 10325476 (hệ hexa)
2. for i = 0 to N/16-1 do
3. for i = 1 to 15 do
   X[i] = M[16i+j]
4. AA = A
   BB = B
   CC = C
   DD = D
5. round1
6. round2
7. round3
8. A = A+AA
   B = B+ BB
   C = C + CC
   D = D + DD

Các vòng 1, 2 và 3 của MD4 dùng tương ứng ba hàm f, g, và h. Mỗi hàm này là một hàm boolean tính theo bit dùng 2 từ làm đầu vào và tạo ra một từ tại đầu ra. Chúng được xác định như sau:

$$f(X,Y,Z) = (X \wedge Y) \vee ((-X) \wedge Z)$$
$$g(X,Y,Z) = (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z)$$
$$h(X,Y,Z) = X \oplus Y \oplus Z$$

Các hình 7.8-7.10 sẽ mô tả đầy đủ các vòng 1,2 và 3 của MD4.

MD4 được thiết kế chạy rất nhanh và quả thực phần mềm chạy trên máy Sun SPARC có tốc độ 1.4 Mbyte/s. Mặt khác, khó có thể nói đIều gì cụ thể về độ mật của hàm hash, chẳng hạn như MD4 vì nó không dựa trên vàI toán khó đã nghiên cứu kĩ (ví dụ như phân tích nhân tử trên bàI toán logarithm rời rạc). Vì thế trong trường hợp Dé sự tin cậy vào độ an toàn của hệ thống chỉ có thể đạt được về thời gian và như vậy có thể hi vọng hệ thống vừa được nghiên cứu và không tìm thấy sự không an toàn nào.

Hình 7.8 : Vòng 1 của MD4 .(round 1)

```
1.   A = (A+ f(B,C,D) + X[0]) << 3
2.   D = (D + f(A,B,C) +X[1]) << 7
3.   C = (C + f(D,A,C) +X[2]) << 11
4.   B = (B + f(C,D,A) +X[3]) << 19
5.   A = (A + f(B,C,D) +X[4]) << 3
6.   D = (D + f(A,B,C) +X[5]) << 7
7.   C = (C + f(D,A,C) +X[6]) << 11
8.   B = (B + f(C,D,A) +X[7]) << 19
9.   A = (A + f(B,C,D) +X[8]) << 3
10.  D = (D + f(A,B,C) +X[9]) << 7
11.  C = (C + f(D,A,C) +X[10]) << 11
12.  B = (B + f(C,D,A) +X[11]) << 19
13.  A = (A + f(B,C,D) +X[12]) << 3
14.  D = (D + f(A,B,C) +X[13]) << 7
15.  C = (C + f(D,A,C) +X[14]) << 11
16.  B = (B + f(C,D,A) +X[15]) << 19
```

Mặc dù MD4 vẫn chưa bị phá song các phiên bản yếu cho phép bỏ qua hoặc vòng thứ nhất hoặc thứ ba dều có thể bị phá không khó khăn gì. nghĩa là dễ dàng tìn thấy các va chạm đối với các phiên bản chỉ có hai vòng. Phiên vản mạnh của MD5 là MD5 được công bố năm 1991. MD5 dùng vòng thay cho ba và chậm hơn 30% so với MD4 (khoảng 0.9 Mbyte/s trên cùng máy).

Chuẩn hàm hash an toàn phức tạp và chậm hơn. Ta sẽ không mô tả đầy đủ song sẽ chỉ ra một vàI cảI tiến trên nó.

1. SHS được thiết kế để chạy trên máy kiến trúc endian lớn hơn là trên máy endian nhỏ.
2. SHA tạo ra các bản tóm lược thông báo 5 thanh ghi (160 bit).
3. SHS xử lí 16 từ của bức điện cùng một lúc như MD4. Tuy nhiên, 16 từ trước tiên được ”mở rộng” thành 80 từ ,sau đó thực hiện một dãy 80 phép tính ,mỗi phép tính trên một từ.
   Hình 7.9 Vòng 2 củaMD4.

```
1.   A = (A +g(B,C,D) + X[0] + 5A827999) <<3
2.   D = (D +g(A,B,C) + X[4] + 5A827999) <<5
3.   C = (C +g(D,A,B) + X[8] + 5A827999) <<9
4.   B = (B +g(C,D,A) + X[12] + 5A827999) <<13
5.   A = (A +g(B,C,D) + X[1] + 5A827999) <<3
6.   D = (D +g(A,B,C) + X[1] + 5A827999) <<5
7.   C = (C +g(D,A,B) + X[5] + 5A827999) <<9
8.   B = (B +g(C,D,A) + X[13] + 5A827999) <<13
9.   A = (A +g(B,C,D) + X[2] + 5A827999) <<3
10.  D = (D +g(A,B,C) + X[6] + 5A827999) <<5
11.  C = (C +g(D,A,B) + X[10] + 5A827999) <<9
12.  B = (B +g(C,D,A) + X[14] + 5A827999) <<13
13.  A = (A +g(B,C,D) + X[3] + 5A827999) <<3
14.  D = (D +g(A,B,C) + X[7] + 5A827999) <<5
15.  C = (C +g(D,A,B) + X[11] + 5A827999) <<9
16.  B = (B +g(C,D,A) + X[15] + 5A827999) <<13
```

Dùng hàm mở rộng sau đây: Cho trước 16 từ X[0] ...X[15], ta tính thêm 64 từ nữa theo quan hệ đệ quy.

$X[j] = X[j-3] \oplus X[j-8] \oplus X[j-14] \oplus X[j-16], 79 \geq j \geq 16$ 7.1

Kết quả của phương trình (7.1) là mỗi một trong các từ X[16]...X[79] được thiết lập bằng cách cộng ⊕ với một tập con xác định nào đó của các từ X[0]...X[15].

Ví dụ: Ta có:

$X[16] = X[0] \oplus X[2] \oplus X[8] \oplus X[13]$

$X[17] = X[1] \oplus X[3] \oplus X[9] \oplus X[14]$

$X[18] = X[2] \oplus X[4] \oplus X[10] \oplus X[15]$

$X[19] = X[0] \oplus X[2] \oplus X[3] \oplus X[5] \oplus X[8] \oplus X[11] \oplus X[13]$

$X[79] = X[1] \oplus X[4] \oplus X[15] \oplus X[8] \oplus X[12] \oplus X[13]$.

Một đề xuất đòi hỏi sửa lại SHS liên quan đến hàm mở rộng trong đó đề nghị đặt lại phương trình 7.1 như sau:

$X[j] = X[j-3] \oplus X[j-8] \oplus X[j-14] \oplus X[j-16] <<1; 79 \geq j \geq 16$ (7.2)

Hình 7.10 : Vòng ba của MD4.

```
1.   A = (A + h(B,C,D) + X[0] + 6ED9EBA1) <<3
2.   D = (D + h(A,B,C) + X[8] + 6ED9EBA1) <<9
3.   C = (C + h(D,A,B) + X[4] + 6ED9EBA1) << 11
4.   B = (B + h(C,D,A) + X[12] + 6ED9EBA1) << 15
5.   A = (A + h(B,C,D) + X[2] + 6ED9EBA1) <<3
6.   D = (D + h(A,B,C) + X[10] + 6ED9EBA1) <<9
7.   C = (C + h(D,A,B) + X[6] + 6ED9EBA1) << 11
8.   B = (B + h(C,D,A) + X[14] + 6ED9EBA1) << 15
9.   A = (A + h(B,C,D) + X[1] + 6ED9EBA1) <<3
10.  D = (D + h(A,B,C) + X[9] + 6ED9EBA1) <<9
11.  C = (C + h(D,A,B) + X[13] + 6ED9EBA1) << 11
12.  B = (B + h(C,D,A) + X[13] + 6ED9EBA1) << 15
13.  A = (A + h(B,C,D) + X[3] + 6ED9EBA1) <<3
14.  D = (D + h(A,B,C) + X[11] + 6ED9EBA1) <<9
15.  C = (C + h(D,A,B) + X[7] + 6ED9EBA1) << 11
16.  B = (B + h(C,D,A) + X[15] + 6ED9EBA1) << 15
```

Như trước đây , toán tử ''<<1'' là phép dịch vòng trái một vị trí.

7.8 **nhãn thời gian (timestamping)**.

Một khó khăn trong sơ đồ chữ kí là thuật toán kí có thể bị tổn thương. Chẳng hạn, giả sử Oscar có khả năng xác định số mũ mật a của Bob trên bất kì bức điện nào mà anh ta muốn. Song còn vấn đề khác (có thể nghiêm trọng hơn)là : từ đây người ta sẽ đặt câu hỏi về tính xác thực của tất cả các bức điện mà Bob kí, kể cả những bức điện mà anh ta kí trước khi Oscar đánh cắp được thuật toán.

Từ đây lại có thể nảy sinh tình huống không mong muốn khác : giả sử Bob kí một bức điện và sau đó từ chối là đã không kí nó. Bob có thể công khai thuật toán kí của mình sau đó công bố rằng chữ kí của anh ta trên bức điện đang nói trên là giả mạo.

Lí do có các kiểu sự kiện này là do không có các nào các định bức điện được kí khi nào. Nhãn thời gian có thể cung cấp bằng chứng rằng, bức điện đã được kí vào thời điểm cụ thể nào đó. Khì đó nế thuật toán kí của Bob có nhược điểm (bị tổn thương) thì bất kì chữ kí nào anh ta kí trước đó sẽ không còn hợp lệ. ĐIều này giống với kiểu thực hiên các thẻ tín dụng: Nếu ai đó làm mất thẻ tín dụng và thông báo cho nhà băng đã phát hành thì thẻ mất hiệu lực. Song các cuộc mua bán thực hiện trước khi mất nó thì vẫn không bị ảnh hưởng.

Trong phần này sẽ mô tả một vàI phương pháp gắn nhãn thời gian. Trước hết,nhận xét rằng, Bob có thể tạo ra một nhãn thời gian có sức thuyết phục trên chữ kí của anh ta. Đầu tiên, Bob nhận được một thông tin "hiện thời " có sẵn công khai nào đó, thông tin này không thể dự đoán được trước khi nó xảy ra. Ví dụ thông tin chứa tất cả các lợi thế về môn bóng chày của các liên minh chính từ ngày trước đó, hay các giá trị của tất cả cổ phần đwocj lên danh sách trong sở giao dịch chứng khoán NewYork. Ta kí hiệu thông tin này bằng chữ *pub*.

Bây giờ giả sử Bob muốn dán nhãn thời gian trên chữ kí của mình trên bức điện x. Giả thiết rằng, h là hàm hash công khai biết trước. Bob sẽ thực hiện theo thuật toán trong hình 7.11.Sau đây là cách sơ đồ làm việc : sự có mặt của thông tin pub có nghĩa là bob không thể tạo ra được y trước ngày đang nói đến. Còn một thực tế là y công bố trong một tờ báo ra ngày tiếp theo chứng tỏ rằng bob đã không tính y sau ngày được nói đến. Vì thế chữ kí y của bob bị hạn chế trong thời hạn một ngày. Cũng nhận xét thấy rằng, bob không để lộ bức điện x trong sơ đồ này vì chỉ có x được công bố ... Nếu cần bob có thể chứng minh rằng x là bức điện mà anh ta đã kí và dán nhãn thời gian một cách đơn giản là làm lộ nó.

Cũng không khó khăn tạo ra tạo ra các nhãn thời gian nếu có một cơ quan dịch vụ dán nhãn đáng tin cậy. Bob có thể tính z = h(x) và y = sig_k (z) và sau đó gửi (z và x) đến cơ quan làm dịch vụ dán nhãn thời gian (TSS). TSS sau đó sẽ gắn ngày D và kí (đánh dấu)bộ ba (z,y,D). Công việc này sẽ hoàn hảo miễn là thuật toán kí của TSS an toàn và TSS không thể bị mua chuộc để lùi ngày dãn nhãn của thời gian. (chú ý rằng phương pháp này chỉ được thiết lập khi bob đã kí một bức điện trước một thời gian nào đó. Nếu bob muốn thiết lập cáI anh ta đã kí nó sau ngày nào đó ,anh ta có thể kết hợp thông tin công khai pub nào đó như phương pháp trước đó).

Hình 7.11 :Dán nhãn thời gian lên chữ kí trên bức điện x.

1. Bob tính z = h(x).
2. Bob tính z' = h(z ||pub).
3. Bob tính y = $sig_k(z')$.
4. Bob công bố (z,pub,y) trên tờ báo ra ngày hôm sau.

Nếu như không muốn tin vô điều kiện vào TSS thì có thể tăng độ an toàn lên bằng cách liên kết các thông báo đã dán nhãn thời gian. Trong sơ độ như vậy, bob sẽ gửi một bộ ba được xếp thứ tự (z,x,ID)(Bob) cho TSS. ở đây, z là bản tóm lược thông báo của bức điện x,y là chữ kí của bob trên z ,còn ID(Bob) là thông tin định danh của Bob. TSS sẽ dãn nhãn thời gian một chuỗi bộ ba có dạng này. Kí hiệu (z_n,y_n,ID_n) là bộ ba thứ tự n được TSS dán nhãn thời gian và cho t_n là kí hiệu thời gian lúc thực hiện yêu cầu thứ n.

Hình 7.12: Dán nhãn thời gian (z_n,y_n,ID_n).

1. TSS tính $L_n = (t_{n-1},ID_{n-1},Z_{n-1}y_{n-1},h(L_{n-1}))$
2. TSS tính $C_n = (n, t_n, z_n, ID_n, L_n)$
3. TSS tính $S_n = sig_{TSS}(h(C_n))$
4. TSS gửi (C_n, S_n, ID_n) cho ID_n.

TSS sẽ dán nhãn thời gian lên bộ ba thứ n bằng fthuật toán nêu trên hình 7.12. L_n là "thông tin liên kết để nối yêu cầu thứ n vào yêu cầu trước đó. (L_0 được chọn làm thông tin gia nào đó (được xác định trước đây)để quá trình được bắt đầu)".

Bây giờ nếu được yêu cầu (challenge). Bob có thể để lộ bức điện x_n của mình, và sau đó có thể xác minh y_n. Tiếp theo , các minh chữ kí s_n của TSS. Nếu muốn thì có thể đòi ID_{n-1} hoặc ID_{n+1} để tạo ra nhãn thời gian (C_{n-1}, S_{n-1}, ID_n) và (C_{n+1}, S_{n+1}, ID_{n+2}) tương ứng của chúng. Các chữ kí của TSS có thể được kiểm tra theo nhãn thời gian này. Dĩ nhiên , quá trình này có thể tiếp tục tới mức mong muốn, trước hay sau đó.

7.9.CÁC CHÚ Ý VỀ TÀI LIỆU DẪN

Hàm hash log rời rạc được mô tả trong mục 7.4 là của chaum , van heijst và pfitzmann [CvHP92]. Còn hàm hash có thể chứng mình đwocj là an toàn liễn là hợp số n không thể phân tích thành nhân tư là do gibson [Gib91] đưa ra (bài tập 7.4 có mô tả sơ đồ này).

Cơ sở cho việc m mở rộng hàm hash trong mục 7.5 là của Damgard [DA90] Merkle cũng đưa ra các phương pháp tương tự [ME90].

Các thông tin liên qua tới việc xây dựng các hàm hash dựa trên các hệ thông mã khoá bí mật. Bạn đọc có thể xem trong [PGV94] của Preneel, Govaerts và Vandewalle.

Thuật toán MD4 được đưa ra trong [Ri91] của Rivest, còn tiêu chuẩn hash an toàn được mô tả trong [NBS93]. Tấn công hai trong ba vòng MD4 là của Boer và Bossalaer [DBB92]. Các hàm hash gần đây kể cả N-hash là của [MOI90] và Snefru [ME90A].

Ngoài ra có thể tìm thấy tổng quan về kĩ thuật băm trong Preneel, Govaerts, Vandewalle [PGV93].

Bài tập

CHƯƠNG 5

CÁC HỆ MẬT KHOÁ CÔNG KHAI KHÁC

Trong chương này ta sẽ xem xét một số hệ mật khoá công khai khác. Hệ mật Elgamal dựa trên bài toán logarithm rời rạc là bài toán được dùng nhiều trong nhiều thủ tục mật mã. Bởi vậy ta sẽ dành nhiều thời gian để thảo luận về bài toán quan trọng này. ở các phần sau sẽ xem xét sơ lược một số hệ mật khoá công khai quan trọng khác bao gồm các hệ thoóng loại Elgamal dựa trên các trường hữu hạn và các đường cong elliptic, hệ mật xếp ba lô Merkle-Helman và hệ mật McElice.

5.1. HỆ MẬT ELGAMAL VÀ CÁC LOGARITHM RỜI RẠC.

Hệ mật Elgamal được xây dựng trên bài toán logảithm rời rạc . Chúng ta sẽ bắt đầu băng việc mô tả bài toán bài khi thiết lập môi trường hữu hạn Z_p, p là số nguyên tố (hình 5.1) (Nhớ lại rằng nhóm nhân Z_p^* là nhóm cyclic và phần tử sinh của Z_p^* được gọi là phần tử nguyên thuỷ).

Bài toán logarithm rời rạc trong Zp là đối tượng trong nhiều công trình nghiên cứu và được xem là bài toán khó nếu p được chọn cẩn thận. Cụ thể không có một thuật toán thời gian đa thức nào cho bài toán logarithm rời rạc. Để gây khó khăn cho các phương pháp tấn công đã biết p phải có ít nhất 150 chữ số và (p-1) phải có ít nhất một thừa số nguyên tố lớn. Lợi thế của bài toán logarithm rời rạc trong xây dượng hệ mật là khó tìm được các logarithm rời rạc ,song bài toán ngược lấy luỹ thừa lại có thể tính toán hiệu quả theo thuật toán "bình phương và nhân". Nói cách khác , luỹ thừa theo modulo p là hàm một chiều với các số nguyên tố p thích hợp.

Elgamal đã phát triển một hệ mật khoá công khai dựa trên bài toán logarithm rời rạc. Hệ thống này được trình bày trên hình 5.2.

Hệ mật này là một hệ không tất định vì bản mã phụ thuộc vào cả bản rõ x lẫn giá trị ngẫu nhiên k do Alice chọn. Bởi vậy, sẽ có nhiều bản mã được mã từ cùng bản rõ.

Hình 2.6 Bài toán logarithm rời rạc trong Zp

Đặc trương của bài toán: I = (p,α,β) trong đó p là số nguyên tố,
α ∈ Zp là phần tử nguyên thuỷ , β ∈ Zp^*
Mục tiêu:Hãy tìm một số nguyên duy nhất a, 0 ≤ a ≤ p-2 sao cho:

$$\alpha^a \equiv \beta \pmod p$$

Ta sẽ xác định số nguyên a bằng $\log_\alpha \beta$

Hình 2.7 Hệ mật khoá công khai Elgamal trong Zp^*

Cho p là số nguyên tố sao cho bài toán logarithm rời rạc trong Zp là khó giải. Cho α ∈ Zp^* là phần tử nguyên thuỷ.Giả sử $P = Zp^*$, $C = Zp^* \times Zp^*$. Ta định nghĩa:

$$K = \{(p, \alpha, a, \beta): \beta \equiv \alpha^a \pmod p\}$$

Các giá trị p, α,β được công khai, còn a giữ kín

Với K = (p, α,a,β) và một số ngẫu nhiên bí mật k ∈ Z_{p-1}, ta xác định:

$$e_k(x,k) = (y_1, y_2)$$

trong đó

$$y_1 = \alpha^k \bmod p$$

$$y_2 = x\beta^k \bmod p$$

với $y_1, y_2 \in Zp^*$ ta xác định:

$$d_k(y_1, y_2) = y_2 (y_1^a)^{-1} \bmod p$$

Sau đây sẽ nmô tả sơ lược cách làm việc của hệ mật Elgamal .Bản rõ x được "che dấu" bằng cách nhân nó với β^k để tạo y_2. Giá trị α^k cũng được gửi đi như một phần của bản mã. Bob -người biết số mũ bí mật a có thể tính được β^k từ α^k . Sau đó anh ta sẽ "tháo mặt nạ" bằng cách chia y_2 cho β^k để thu được x.

Ví dụ 5.1

Cho p = 2579, $\alpha = 2$, a = 765. Khi đó

$$\beta = 2^{765} \bmod 2579 = 949$$

Bây giờ ta giả sử Alice muốn gửi thông báo x = 1299 tới Bob. Giả sử số ngẫu nhiên k mà cô chọn là k = 853. Sau đó cô ta tính

$$y_1 = 2^{853} \bmod 2579$$
$$= 435$$
$$y2 = 1299 \times 949853 \bmod 2579$$
$$= 2396$$

Khi đó Bob thu được bản mã y = (435,2396), anh ta tính

$$x = 2396 \times (435^{765})^{-1} \bmod 2579$$
$$= 1299$$

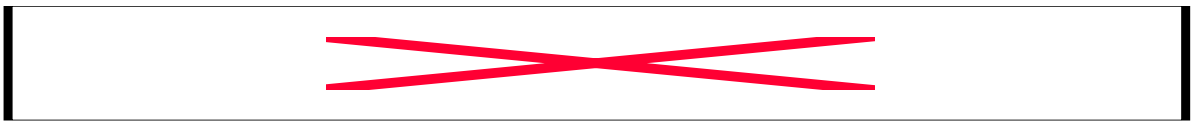
Đó chính là bản rõ mà Alice đã mã hoá.

5.1.1. Các thuật toán cho bài toán logarithm rời rạc.

Trong phần này ta xem rằng p là số nguyên tố, α là phần tử nguyên thuỷ theo modulo p. Ta thấy rằng p và α là các số cố định. Khi đó bài toán logarithm rời rạc có thể được phát biểu dưới dạng sau: tìm một số mũ a duy nhất, $0 \le a \le p-2$ sao cho $\alpha^a \equiv \beta \pmod p$, với $\beta \in Z_p^*$ cho trước.

Rõ ràng là bài toán logarithm rời rạc (DL) có thể giải bằng một phép tìm kiếm vét cạn với thời gian cỡ O(p) và không gian cỡ O(1) (bỏ qua các thừa số logarithm). Bằng cách tính toán tất cả các giá trị α^a có thể và sắp xếp các cặp có thứ tự (a, α^a mod p) có lưu ý đến các tạo độ thứ hai của chúng, ta có thể giải bài toán DL với thời gian cỡ O(1) bằng O(p) phép tính toán trước và O(p) bộ nhớ (vẫn bỏ qua các thừa số logarithm). Thuật toán không tầm thường đầu tiên mà chúng ta sẽ mô tả là thuật toán tối ưu hoá thời gian - bộ nhớ của Shanks.

Thuật toán Shanks



Hình 5.3. Thuật toán Shanks cho bài toán DL.

1. Tính $\alpha^{mj} \bmod p$, $0 \le j \le m-1$
2. Sắp xếp m cặp thứ tự ($j,\alpha^{mj} \bmod p$) có lưu ý tới các tạo độ thứ hai của các cặp này, ta sẽ thu được một danh sách L_1
3. Tính $\beta\alpha^{-i} \bmod p$, $0 \le i \le m-1$
4. Sắp xếp m cặp thứ tự (i, $\beta\alpha^{-i} \bmod p$) có lưu ý tới các toạ độ thứ hai của các cặp được sắp này, ta sẽ thu được một danh sách L_2
5. Tìm một cặp $(j,y) \in L_1$ và một cặp $(i,y) \in L_2$ (tức là một cặp có tạo độ thứ hai như nhau).
6. Xác định $\log_\alpha\beta = mj + i \bmod (p-1)$
7.

- Nếu cần, các bước 1 và 2 có thể tính toán trước (tuy nhiên, điều này không ảnh hưởng tới thời gian chạy tiệm cận)
- Tiếp theo cần để ý là nếu $(j,y) \in L_1$ và $(i,y) \in L_2$ thì

$$\alpha^{mj} = y = \beta\alpha^{-i}$$

Bởi vậy

$$\alpha^{mj+i} = \beta$$

như mong muốn. Ngược lại, đối với β bất kì ta có thể viết

$$\log_\alpha\beta = mj+i$$

trong đó $0 \le j,i \le m-1$. Vì thế phép tìm kiếm ở bước 5 chắc chắn thành công.

Có thể áp dụng thuật toán này chạy với thời gian O(m) và với bộ nhớ cỡ O(m) (bỏ qua các thừa số logarithm). Chú ý là bước 5 có thể thực hiện một cách (đồng thời) qua từng danh sách L_1 và L_2.

Sau đây là một ví dụ nhỏ để minh hoạ.

Ví dụ 5.2.

Giả sử p = 809 và ta phải tìm $\log_3 525$. Ta có $\alpha = 3$, $\beta = 525$ và $m = \lceil\sqrt{808}\rceil = 29$. Khi đó:

$$\alpha^{29} \bmod 809 = 99$$

Trước tiên tính các cặp được sắp $(j, 99^j \bmod 809)$ với $0 \le j \le 28$. Ta nhận được danh sách sau:

(0,1)	(1,99)	(2,93)	(3,308)	(4,559)
(5,329)	(6,211)	(7,664)	(8,207)	(9,268)
(10,644)	(11,654)	(12,26)	(13,147)	(14,800)
(15,727)	(16,781)	(17,464)	(18,314)	(19,275)
(20,582)	(21,496)	(22,564)	(23,15)	(24,676)
(25,586)	(26,575)	(27,295)	(28,81)	

Danh sách này sẽ được sắp xếp để tạo L_1.

Danh sách thứ hai chứa các cặp được sắp $(i, 525\times(3^i)^{-1} \bmod 809)$, với $0 \le i \le 28$. Danh sách này gồm:

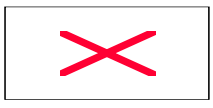
(0,525)	(1,175)	(2,328)	(3,379)	(4,396)
(5,132)	(6,44)	(7,554)	(8,724)	(9,511)
(10,440)	(11,686)	(12,768)	(13,256)	(14,,355)
(15,388)	(16,399)	(17,133)	(18,314)	(19,644)
(20,754)	(21,496)	(22,564)	(23,15)	(24,676)
(25,356)	(26,658)	(27,489)	(28,163)	

Sau khi sắp xếp danh sách này, ta có L_2 .
Bây giờ nếu xử lý đồng thời qua cả hai danh sách, ta sẽ tìm được (10,644) trong L_1 và (19,644) trong L_2. Bây giờ ta có thể tính

$$\log_3 525 = 29\times 10+19$$
$$= 309$$

Có thể kiểm tra thấy rằng quả thực $3^{309} \equiv 525 \pmod{809}$.

Thuật toán Pohlig - Hellman.
Thuật toán tiếp theo mà ta nghiên cứu là thuật toán Pohlig - Hellman. Giả sử



p_i là số nguyên tố đặc biệt. Giá trị $a = \log_\alpha \beta$ được xác định một cách duy nhất theo modulo p-1. Trước hết nhận xét rằng, nếu có thể tính a mod $p_i^{c_i}$ với

mỗi i, $1 \le i \le k$, thì có thể tính a mod (p-1) theo định lý phần dư China. Để thực hiện diều đó ta giả sử rằng q là số nguyên tố.

$$p-1 \equiv 0 \pmod{q^c}$$

$$p-1 \not\equiv 0 \pmod{q^{c+1}}$$

Ta sẽ chỉ ra cách tính giá trị

$$x = a \bmod q^c$$

$0 \le x \le q^c-1$. Ta có thể biểu diễn x theo cơ số q như sau:

trong đó $0 \le a_i \le q-1$ với $0 \le i \le c-1$. Cũng có thể biểu diễn như sau:

$$a = x + q^c s$$

với s là một số nguyên nào đó.

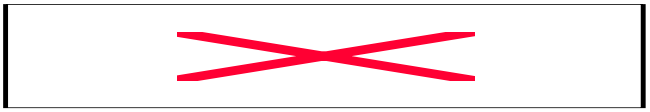
Bước đầu tiên của thuật toán tính a_0. Kết quả chính ở đây là:

$$\beta^{(p-1)/q} \equiv \alpha^{(p-1)a0/q} \pmod{p}$$

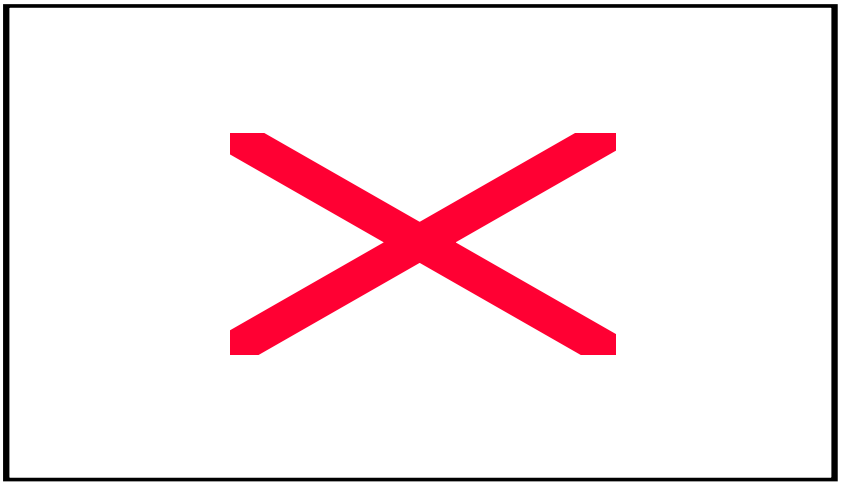
Để thấy rõ điều đó cần chú ý rằng:

Điều này đủ để cho thấy:

Kết quả này đúng khi và chỉ khi:



Tuy nhiên



Đó chính là điều cần chứng minh.

Do đó ta sẽ bắt đầu bằng việc tính $\beta^{(p-1)/q} \bmod p$. Nếu

$$\beta^{(p-1)/q} \equiv 1 \pmod p$$

thì $a_0=0$. Ngược lại chúng ta sẽ tính liên tiếp các giá trị:

$$\gamma = \alpha^{(p-1)/q} \bmod p, \gamma^2 \bmod p, \ldots,$$

cho tới $\gamma^i \equiv \beta^{(p-1)/q} \pmod p$.

với một giá trị i nào đó. Khi điều này xảy ra ta có $a_0 = i$.

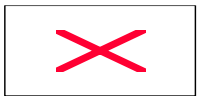
Bây giờ nếu c = 1 thì ta đã thực hiện xong. Ngược lại, nếu c > 1 thì phải tiếp tục xác định a_1. Để làm điều đó ta phải xác định

$$\beta_1 = \beta\, \alpha^{-a_0}$$

và kí hiệu

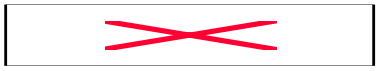
$$x_1 = \log_\alpha \beta_1 \bmod q^c$$

Dễ dàng thấy rằng



Vì thế dẫn đến

Như vậy ta sẽ tính $\beta_1^{(p-1)/q^2} \bmod p$ và rồi tìm i sao cho



Khi đó $a_1 = i$.

Nếu c =2 thì công việc kết thúc; nếu không, phải lặp lại công việc này c-2 lần nữa để tìm $a_2, \ldots, a_{c-1}$.

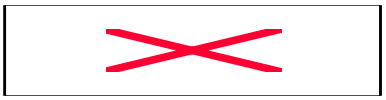
Hình 5.4 là mô tả giải mã của thuật toán Pohlig - Hellman. Trong thuật toán này, α là phần tử nguyên thuỷ theo modulo p, q là số nguyên tố .

$$p-1 \equiv 0 \pmod{q^c}$$

và

$$p-1 \not\equiv 0 \pmod{q^{c+1}}$$

Thuật toán tính các giá trị $a_0, \ldots, a_{c-1}$ trong đó
$\log_\alpha \beta \bmod q^c$



Hình 5.4. Thuật toán Pohlig - Hellman để tính $\log_\alpha \beta \bmod q^c$.

1. Tính $\gamma = \alpha^{(p-1)/q} \bmod p$ với $0 \le i \le q-1$
2. Đặt $j = 0$ và $\beta_j = \beta$
3. **While** $j \le c-1$ **do**
4. Tính $\delta = \beta_j^{(p-1)/q\, j+1} \bmod p$
5. Tìm i sao cho $\delta = \gamma_i$
6. $a_j = i$
7. $\beta_{j+1} = \beta_j\, \alpha^{-a_j q j} \bmod p$
8. $j = j + 1$

Chúng ta minh hoạ thuật toán Pohlig - Hellman (P - H) qua một ví dụ nhỏ.

Ví dụ 5.3

Giả sử p=29; khi đó

$$n = p-1 = 28 = 2^2.7^1$$

Giả sử $\alpha = 2$ và $\beta = 18$. Ta phải xác định $a = \log_2 18$. Trước tiên tính a mod 4 rồi tính a mod 7.

Ta sẽ bắt đầu bằng việc đặt q = 2, c = 2. Trước hết

$$\gamma_0 = 1$$

và

$$\gamma_1 = \alpha^{28/2} \bmod 29$$
$$= 2^{14} \bmod 29$$
$$= 28$$

Tiếp theo

$$\delta = \beta^{28/2} \bmod 29$$
$$= 18^{14} \bmod 29$$
$$= 28$$

Vì $a_0 = 1$. Tiếp theo ta tính:

$$\beta_1 = \beta_0 \alpha^{-1} \bmod 29$$
$$= 9$$

và

$$\beta_1^{28/4} \bmod 29 = 9^7 \bmod 29$$
$$= 28$$

Vì

$$\gamma_1 \equiv 28 \bmod 29$$

Ta có $a_1 = 1$. Bởi vậy $a \equiv 3 \pmod 4$.

Tiếp theo đặt $q = 7$ và $c = 1$, ta có

$$\beta^{28/7} \bmod 29 = 18^4 \bmod 29$$
$$= 25$$

và
$$\gamma_1 = \alpha^{28/7} \bmod 29$$
$$= 2^4 \bmod 29$$
$$= 16.$$

Sau đó tính:
$$\gamma_2 = 24$$
$$\gamma_3 = 7$$
$$\gamma_4 = 25$$

Bởi vậy $a_0 = 4$ và $a \equiv 4 \pmod 7$

Cuối cùng giải hệ phương trình

$$a \equiv 3 \pmod 4$$
$$a \equiv 4 \pmod 7$$

bằng định lý phần dư China, ta nhận được $a \equiv 11 \pmod{28}$. Điều này có nghĩa là đã tính được $\log_2 18$ trong Z_{29} là 11.

Phương pháp tính toán chỉ số.

Phương pháp tính chỉ số khá giống với nhiều thuật toán phân tích thừa số tốt nhất. Trong phần này sẽ xét tóm tắt về phương pháp. Phương pháp này chỉ dùng một *cơ sở nhân tử* là tập $\mathcal{B}$ chứa các số nguyên tố nhỏ. Giả sử $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, \ldots, p_{\mathcal{B}}\}$. Bước đầu tiên (bước tiền xử lý) là tìm các logarithm của B số nguyên tố trong cơ sở nhân tử. Bước thứ hai là tính các logarithm rời rạc của phần tử β bằng cách dùng các hiểu biết về các log của các phần tử trong cơ sở.

Trong quá trình tiền xử lý, ta sẽ xây dựng C = B +10 đồng dư thức theo modulo p như sau:

$$\alpha^{x_j} \equiv p_1^{a_{1j}} p2^{a_{2j}} \ldots p_B^{a_{Bj}} \pmod p$$

$1 \le j \le C$. Cần để ý rằng, các đồng dư này có thể viết tương đương như sau:

$$x_j \equiv a_{1j}\log_\alpha p_1 + \ldots + a_{Bj}\log_\alpha p_B \pmod{p-1}$$

$1 \le j \le C$. C đồng dư thức được cho theo B giá trị $\log_\alpha p_i$ $(1 \le i \le B)$ chưa biết. Ta hy vọng rằng, có một nghiệm duy nhất theo modulo p-1. Nếu đúng như vậy thì có thể tính các logarithm của các phần tử theo cơ sở nhân tử.

Làm thế nào để tạo các đồng dư thức có dạng mong muốn?. Một phương pháp sơ đẳng là chọn một số ngẫu nhiên x, tính α^x mod p và xác định xem liệu α^x mod p có tất cả các thừa số của nó trong $\mathcal{B}$ hay không. (Ví dụ bằng cách chia thử).

Bây giờ giả sử rằng đã thực hiện xong bước tiên tính toán, ta sẽ tính giá trị mong muốn $\log_\alpha\beta$ bằng thuật toán xác suất kiểu Las Vegas. Chọn một số ngẫu nhiên s ($1 \le s \le p-2$) và tính :

$$\gamma = \beta\ \alpha^s \bmod p$$

Bây giờ thử phân tích γ theo cơ sở $\mathcal{B}$. Nếu làm được điều này thì ta tính được đồng dư thức dạng:

$$\beta\alpha^s = p_1^{c_1}p_2^{c_2}. . . p_B^{c_B} \pmod p$$

Điều đó tương đương với

$$\log_\alpha\beta + s \equiv c_1\log_\alpha p_1 + . . . + c_B\log_\alpha p_B \ (\bmod\ p-1)$$

Vì mọi giá trị đều đả biết trừ giá trị $\log_\alpha\beta$ nên có thể dễ dàng tìm được $\log_\alpha\beta$.

Sau đây là một ví dụ minh hoạ 2 bước của thuật toán.

Ví dụ 5.4.

Giả sử p =10007 và $\alpha = 5$ là một phần tử nguyên thuỷ được dùnglàm cơ sở của các logarithm theo modulo p. Giả sử lấy B = {2, 3, 5, 7} làm cơ sở. Hiển nhiên là $\log_5 5 = 1$ nên chỉ có 3 giá trị log của các phần tử trong cơ sở cần phải xác định. Để làm ví dụ, chọn một vài số mũ "may mắn" sau: 4063, 5136 và 985.

Với x = 4063, ta tính

$$5^{4063} \bmod 10007 = 2\times3\times7$$

ứng với đồng dư thức

$$\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 7 \equiv 4063 \ (\bmod\ 10006).$$

Tương tự, vì

$$5^{5136} \bmod 10007 = 54 = 2\times3^3$$

và

$$5^{9865} \bmod 10007 = 189 = 3^3\times7$$

ta tìm được hai đồng dư thức nữa:

$$\log_5 2 + 3\log_5 3 \equiv 5136 \ (\bmod\ 10006)$$
$$3\log_5 3 + \log_5 7 \equiv 9865 \ (\bmod\ 10006)$$

Bây giờ ta có 3 đồng dư thức theo 3 giá trị log chưa biết. Giải các phương trình đồng dư này, ta có $\log_5 2 = 6578$, $\log_5 3 = 6190$, $\log_5 7 = 1301$.

Bây giờ giả sử ta cần tìm $\log_5 9451$, ta chọn số mũ "ngẫu nhiên" s=7736 và tính:

$$9451 \times 5^{7736} \bmod 10007 = 8400$$

Vì $8400 = 2^4 3^1 5^2 7^1$ các thừa số trong $\mathcal{B}$ nên ta nhận được:

$$\begin{aligned}\log_5 9451 &= 4\log_5 2 + \log_5 3 + \log_5 5 + \log_5 7 - s \bmod 10006 \\ &= 4\times 6578 + 6190 + 2\times 1 + 1310 - 7736 \bmod 10006 \\ &= 6057.\end{aligned}$$

Kiểm tra lại ta thấy rằng $5^{6057} \equiv 9451 \pmod{10007}$.

Đã có nhiều nghiên cứu phân tích mò mẫm nhiều kiểu thuật toán khác nhau. Với giả thiết hợp lý, Thời gian chạy tiệm cận của giai đoạn tiền tính toán này cỡ

và thời gian để tính một giá trị logarithm rời rạc riêng là khoảng

Hình 5.5. Bít thứ i của logarithm rời rạc.

Bản chất của bài toán: I = (p, α, β, i) trong đó p là số nguyên tố , $\alpha \in Z_p^*$ là phần tử nguyên thuỷ, $\beta \in Z_p^*$ và i là một số nguyên sao cho $1 \le i \le \lfloor \log_2(p-1) \rfloor$.

*Mục tiêu:*Tính $L_i(\beta)$ là bít thấp nhất thứ i của $\log_\alpha \beta$. (với α và p cho trước)

5.1.2. Độ bảo mật tưng bít của các logarithm rời rạc.

Bây giờ ta xem xét vấn đề về thông tin bộ phận của các logarithm rời rạc và thử xem việc tính các bít riêng của các logarithm rời rạc là khó hay dễ. Cụ thể , xét bài toán trình bày trên hình 5.5. Bài toán này được gọi là bài toán về bít thứ i.

Trước tiên, ta sẽ chỉ ra rằng, bít thấp nhất của các logarithm rời rạc rất dễ tính toán. Nói cách khác, nếu i = 1 thì bài toán về bít thứ i có thể giải được một cách hiệu quả. Điều này rút ra từ tiêu chuẩn Euler liên quan đến thặng dư bình phương theo modulo p, với p là số nguyên tố .

Xét ánh xạ f: $Z_p^* \rightarrow Z_p^*$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = x^2 \bmod p$$

Nếu kí hiệu QR(p) là tập các thặng dư bình phương theo modulo p thì

$$QR(p) = \{ x^2 \bmod p : x \in Z_p^* \}$$

Trước tiên ta thấy rằng, f(x) = f(p-x). Tiếp theo xét thấy:

$$w^2 \equiv x^2 \bmod p$$

khi và chỉ khi $p \mid (w-x)(w+x)$

điều này sẽ xảy ra khi và chỉ khi $w \equiv \pm x \bmod p$. Từ đây rút ra:

$$| f^{-1}(y) | = 2$$

với mọi $y \in QR(p)$ và bởi vậy:

$$| QR(p) = (p-1)/2$$

Điều đó có nghĩa là có đúng một nữa các thặng dư trong Z_p^* là các thặng dư bình phương và một nữa không phải.

Bây giờ giả sử rằng, α là một phần tử nguyên thuỷ của Z_p^* . Khi đó $\alpha^a \in QR(p)$ nếu a chẵn. Vì (p-1)/2 phần tử $\alpha^0 \bmod p$, $\alpha^2 \bmod p$,. . .,$\alpha^{p-3} \bmod p$ đều là các phần tử khác nhau nên:

$$QR(p) = \{\alpha^{2i} \bmod p: 0 \le i \le (p-3)/2\}$$

Bởi vậy, β là thặng dư bình phương khi và chỉ khi $\log_\alpha \beta$ là chẵn, tức khi và chỉ khi $L_1(\beta) = 0$. Tuy nhiên theo tiêu chuẩn Euler β là thặng dư bình phương khi và chỉ khi

$$\beta^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$$

Như vậy, ta đã có công thức hữu hiệu sau để tính $L_1(\beta)$:

$$L_1(\beta)= \begin{cases} 0 & \text{nếu } \beta^{(p-1)/2} \equiv 1 (\bmod p) \\ 1 & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

Bây giờ xét việc tính $L_i(\beta)$ với $i > 1$. Giả sử

$$p-1 = 2^s t$$

trong đó t là số lẻ. Khi đó có thể chỉ ra rằng, dễ dàng tính được $L_i(\beta)$ nếu $1 \le s$. Mặt khác, việc tính $L_{s+1}(\beta)$ chắc chắn là khó nếu dùng thuật toán giả định bất kì cho việc tính $L_{s+1}(\beta)$ để tính các logarithm rời rạc trong Z_p.

Ta sẽ chứng minh kết quả này trong trường hợp s = 1. Chính xác hơn, nếu $p \equiv 3 \pmod 4$là số nguyên tố thì ta sẽ chỉ ra cách sử dụng một thuật toán giả định bất kì tính $L_2(\beta)$ để giải bài toán logarithm rời rạc trong Z_p.

Nếu β là một thặng dư bình phương trong Z_p và $p \equiv 3 \pmod 4$ thì $\pm\beta^{(p+1)/2} \bmod p$ là hai giá trị căn bậc hai của modulo p. Một chú ý cũng quan trọng là với bất kì $\beta \neq 0$:

$$L_1(\beta) \neq L_1(p-\beta).$$

nếu $p \equiv 3 \pmod 4$. Ta sẽ thấy điều đó như sau. Giả sử

$$\alpha^a \equiv \beta \pmod p$$

thì

$$\alpha^{a+(p-1)/2} \equiv -\beta \pmod p$$

Vì $p \equiv 3 \pmod 4$ nên số nguyên $(p-1)/2$ là một số lẻ. Từ đây rút ra kết quả.

Bây giờ giả sử $\beta = \alpha^a$ với số mũ chẵn a (chưa biết) nào đó. Khi đó hoặc:

$$\beta^{(p+1)/4} \equiv \alpha^{a/2} \pmod p$$

hoặc

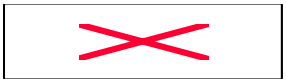
$$-\beta^{(p+1)/4} \equiv \alpha^{a/2} \pmod p$$

Ta có thể xác định giá trị nào trong hai giá trị có thể này là đúng nếu biết giá trị $L_2(\beta)$, vì

$$L_2(\beta) = L_1(\alpha^{a/2})$$

Điều này được khai thác trong thuật toán được mô tả trong hình 5.6.

Ở cuối thuật toán, các giá trị x_i là các bít biểu diễn nhị phân của $\log_\alpha\beta$, nghĩa là:



Dưới đây là một ví dụ nhỏ để minh hoạ.

Ví dụ 5.5.

Giả sử p =19, $\alpha = 2$ và $\beta = 6$. Vì trong ví dụ này, các giá trị quá nhỏ nên có thể lập bảng các giá trị của $L_1(\gamma)$ và $L_2(\gamma)$ với mọi mọi giá trị $\gamma \in Z_{19}^*$.(Nói chung L_1 có thể tính được một cách hiệu quả bằng tiêu chuẩn Euler, còn L_2 được tính theo thuật toán giả định). Các giá trị này được cho trên bảng 5.1. Thuật toán được tiến hành như trên hình 5.7.

Bởi vậy, $\log_2 6 = 1110_2 = 14$, ta có thể dễ dàng kiểm tra được giá trị này.

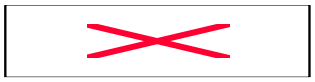
Hình 5.6. Tính các logarithm rời rạc trong Z_p với $p \equiv 3 \pmod 4$ khi biết trước thuật toán giả định $L_2(\beta)$.

1. $x_0 = L_1(\beta)$
2. $\beta = \beta/\alpha^{x_0} \bmod p$
3. i =1
4. **While** $\beta \neq 1$ **do**
5. $x_i = L_2(\beta)$
6. $\gamma = \beta^{(p+1)/4} \pmod p$
7. **if** $L_1(\gamma) = x_i$ **then**
8. $\beta = \gamma$
9. **else**
10. $\beta = p - \gamma$
11. $\beta = \beta/\alpha^{x_i} \bmod p$
12. i = i+1

Bảng 5.1. Các giá trị của L_1 và L_2 với p =19, $\alpha = 2$

γ	$L_1(\gamma)$	$L_2(\gamma)$	γ	$L_1(\gamma)$	$L_2(\gamma)$	γ	$L_1(\gamma)$	$L_2(\gamma)$
1	0	0	7	0	1	13	1	0
2	1	0	8	1	1	14	1	1
3	1	0	9	0	0	15	1	1
4	0	1	10	1	0	16	0	0
5	0	0	11	0	0	17	0	1
6	0	1	12	0	0	18	1	0

Có thể đưa ra một chứng minh hình thức cho tính đúng đắn của thuật toán bằng phương pháp quy nạp. Kí hiệu



Với $i \geq 0$, ta định nghĩa:

$$Y_i = \lfloor x/2^{i+1} \rfloor$$

Hình 5.7 Tính $\log_2 6$ trong Z_{19}

1. $x_0 = 0$
2. $\beta = 6$
3. $i = 1$
5. $x_1 = L_2(6) = 1$
6. $\gamma = 5$
7. $L_1(5) = 0 \neq x_1$
10. $\beta = 14$
11. $i = 2$
12. $i = 2$
5. $x_2 = L_2(7) = 1$
6. $\gamma = 11$
7. $L_1(11) = 0 \neq x_2$
10. $\beta = 8$
11. $\beta = 4$
12. $i = 3$
5. $x_3 = L_2(4) = 1$
6. $\gamma = 17$
7. $L_1(17) = 0 \neq x_3$
10. $\beta = 2$
11. $\beta = 1$
12. $i = 4$
4. DONE

Cũng vậy ta xác định β_0 là giá trị của β ở bước 2 trong thuật toán; và với $i \geq 1$, ta xác định β_i là giá trị của β ở bước 11 trong bước lặp thứ i của vòng **While**. Có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng:

$$\beta i \equiv \alpha^{2Y_i} \pmod{p}$$

với mọi $i \geq 0$. Bây giờ để ý rằng: $2Y_i = Y_{i-1} - x_i$

điều này kéo theo

$$x_{i+1} = L_2(\beta_i) \text{ , } i \geq 0$$

Vì rằng $x_{i+1} = L_2(\beta)$ nên thuật toán là đúng. Các chi tiết dành cho độc giả xem xét.

5.2. TRƯỜNG HỮU HẠN VÀ CÁC HỆ THỐNG ĐƯƠNG CONG ELLIPTIC.

Chúng ta đã dành thời gian đáng kể để xét bài toán logarithm rời rạc (DL) vào việc phân tích số. Ta sẽ còn trở lại hai bài toán này trong các loại hệ mật và các giao thức mã khác nhau. Bài toán DL đã được nghiên cứu trong trương hữu hạn Z_p, tuy nhiên việc xét bài toán này theo các thiết lập khác nhau cũng rất có ích và là chủ đề của phần này.

Hệ mật Elgamal có thể được áp dụng trong một nhóm bất kì mà bài toán DL là khó giải. Ta đã dùng nhóm nhân Z_p^* tuy nhiên các nhóm khác cũng là những ứng cử viên thích hợp. Trước hết ta phát biểu bài toán DL trong một nhóm hữu hạn nói chung G (hữu hạn) và ở đó kí hiệu phép lấy nhóm là dấu "$\circ$". Dạng bài toán tổng quát hoá như vậy trình bài trên hình 5.8.

Dễ dàng xác định một hệ mật Elgamal trong nhóm con H theo cách tương tự đã mô tả trong Z_p^* và được trình bày trên hình 5.9. Chú ý rằng phép mã hoá yêu cầu dùng số nguyên k ngẫu nhiên sao cho $0 \leq k \leq |H| - 1$. Tuy nhiên, nếu Alice không biết cấp của nhóm con H thì cô ta có thể tạo một số nguyên k thoả mãn $0 \leq k \leq |G| - 1$, khi đó sẽ không có bất kì sự thay đổi nào trong quá trình mã và giải mã. Cũng cần chú ý là nhóm G không phải là nhóm Aben (Tuy H vẫn là nhóm Aben vì nó là nhóm cyclic).

Hình 5.8. Bài toán logarithm rời rạc trong (G,0)

Đặc trưng của bài toán: I = (G, α, β), trong đó G là một nhóm hữu hạn với phép lấy nhóm $\circ$, $\alpha \in G$ và $\beta \in H$, trong đó

$$H = \{ \alpha^i : i \geq 0 \}$$

là một nhóm con sinh bởi α.

Mục tiêu: Tìm một số nguyên duy nhất a sao cho $0 \leq a \leq |H| - 1$ và $\alpha^a = \beta$, với kí hiệu α^a có nghĩa là $\alpha \circ \ldots \circ \alpha$ (a lần)
Ta sẽ kí hiệu số nguyên a này bằng $\log_\alpha \beta$

Bây giờ ta sẽ trở lại bài toán DL tổng quát hoá . Nhóm con H được sinh bởi phần tử α tuỳ ý $\in G$ dĩ nhiên phải là nhóm con cyclic cấp |H|. Bởi vậy, dạng bất kì của bài toán theo một nghĩa nào đó đều tương đương với bài toán DL trong một nhóm cyclic. Tuy nhiên, độ khó của bài toán DL dường như phụ thuộc vào cách biểu diễn nhóm được dùng.

Xét một ví dụ về cách biểu diễn mà với nó, bài toán logarithm rời rạc rất dễ giải. Xét nhóm cộng cyclic Z_n và giả sử UCLN(α,n) = 1, bởi vậy α là phần tử sinh của Z_n. Vì phép toán trong nhóm là cộng theo modulo n nên phép lấy mũ sẽ là nhân với a theo modulo n. Vì thế trong cách xây dựng này, bài toán logarithm rời rạc sẽ là tìm số nguyên a sao cho.

$$\alpha a \equiv \beta \pmod n$$

Vì UCLN(α,n) = 1 nên α có phần tử nghịch đảo nhân theo modulo n và ta có thể dễ dàng tính α^{-1} mod n bằng thuật toán Euclide. Sau đó có thể giải để tìm a và nhận được

$$\log_\alpha \beta = \beta\, \alpha^{-1} \bmod n$$

Hình 5.9. Hệ mật khoá công khai Elgamal tổng quát

Giả sử G là một nhóm hữu hạn có phép lấy nhóm $\circ$. Giả sử $\alpha \in G$ là một phần tử sao cho bài toán DL trong H là khó; ở đây $H = \{\alpha_i, i \geq 0\}$ là một nhóm con sinh bởi α. Đặt $\mathcal{P} = G$, $\mathcal{C} = G \times G$ và định nghĩa:

$$\mathcal{K} = \{(G, \alpha, a, \beta) : \beta = \alpha^a\}$$

Các giá trị α, β công khai, còn a được giữ kín.

Với $K = (G, \alpha, a, \beta)$ và với một số ngẫu nhiên bí mật $k \in Z_{|H|}$ ta xác định:

$$e_K(x,k) = (y_1, y_2)$$

trong đó $y_1 = \alpha^k$

và $y_2 = (x \circ \beta^k)$

Với bản mã $y = (y_1, y_2)$ ta xác định:

$d_K(y) = y_2 \circ (y_1^a)^{-1}$

Ở phần trên ta đã nghiên cứu bài toán DL trong nhóm nhân Z_p^* với p là là số nguyên tố . Nhóm này là nhóm cyclic cấp p-1 và bởi vậy nó đẳng cấu với nhóm cộng Z_{p-1}. Theo thảo luận ở trên, ta đã biết cách tinh các logarithm rời rạc một cách hiệu quả trong nhóm cộng này. Điều đó gợi ý khả năng giải bài toán DL trong Z_p^* bằng cách quy nó về bài toán giải được dễ dàng trong Z_{p-1}.

Ta hãy xem xét điều này được thực hiện như thế nào?. Khi nói rằng, $(Z_p^*, \times)$ là đẳng cấu với $(Z_{p-1}, +)$ có nghĩa là có một song ánh :

$$\phi : Z_p^* \rightarrow Z_{p-1}$$

sao cho $\phi(xy \bmod p) = (\phi(x) + \phi(y)) \bmod (p-1)$

Điều đó kéo theo:

$$\phi(\alpha^a \bmod p) = a\,\phi(\alpha) \bmod (p-1)$$

Bởi vậy

$$\beta \equiv \alpha^a \bmod p \Leftrightarrow a\,\phi(\alpha) \equiv \phi(\beta) \pmod{p-1}$$

Do đó nếu tìm a theo mô tả ở trên, ta có:

$$\log_\alpha \beta = \phi(\beta)\,(\phi(\alpha))^{-1} \bmod (p-1)$$

Bây giờ, nếu có một phương pháp hữu hiệu để tính phép đẳng cấu ϕ thì ta sẽ có một thuật toán hữu hiệu để tính các logarithm rời rạc trong Z_p^*. Khó khăn ở đây là không có một phương pháp chung đã biết nào để tính hiệu quả phép đẳng cấu ϕ với số nguyên tố tuỳ ý. Ngay cả khi đã biết hai nhóm là

đẳng cấu thì vẫn không thể biết một thuật toán hiệu quả để mo tả tương minh phép đẳng cấu.

Phương pháp này có thể áp dụng cho bài toán DL trong một nhóm G tuỳ ý. Nếu có một phương pháp hiệu quả tính phép đẳng cấu giữa H và $Z_{|H|}$ thì bài toán DL trong G mô tả ở trên có thể giải được một cách hữu hiệu. Ngược lại, dễ dàng thấy rằng, một phương pháp tính các logarithm rời rạc có hiệu quả sẽ tạo ra phương pháp hiệu quả tính phép đẳng cấu giữa hai nhóm.

Thảo luận ở trên chỉ ra rằng, bài toán DL có thể dễ hoặc khó (xétbề ngoài) tuỳ thuộc vào biểu diễn của nhóm cyclic được dùng. Như vậy, sẽ tốt hơn nếu xem xét các nhóm khác với hy vọng tìm được các thiết lập khác nhau để bài toán DL có vẻ khó. Có hai lớp nhóm như vậy.

1. Nhóm nhân của trường Galois GF(p^n)
2. Nhóm của một đường cong elliptic xác định trên một trương hữu hạn.

Ta hãy xem xét hai lớp nhóm này ở phần sau.

5.1.2. Trường Galois

Ta đã biết rằng, nếu p là số nguyên tố thì Z_p sẽ là một trường. Tuy nhiên có nhiều trường hữu hạn khác không có dạng trên. Thực tế có các trường hữu hạn q phần tử nếu $q = p^n$, trong đó p là số nguyên tố , $n \geq 1$là số nguyên. Bây giờ ta sẽ mô tả ngắn gọn cách xây dựng một trường như vậy. Trước tiên ta sẽ đưa ra một vài định nghĩa.

Định nghĩa 5.1

Giả sử p là số nguyên tố. Gọi $Z_p[x]$ là tập tất cả các đa thức biến x. Bằng cách xây dựng phép cộng và nhân đa thức theo quy tắc thông thường (và rút gọn hệ số theo modulo p) ta sẽ tạo nên một vành.

Với $f(x), g(x) \in Z_p[x]$, ta nói rằng, f(x) chia hết cho g(x) (kí hiệu f(x) | g(x)) nếu tồn tại $q(x) \in Z_p[x]$ sao cho:

$$g(x) = q(x)f(x)$$

Với $f(x) \in Z_p[x]$, ta xác định bậc của f (kí hiệu là deg(f)) là số mũ cao nhất có trong các số hạng của f.

Giả sử $f(x), g(x), h(x) \in Z_p[x]$ và $deg(f) = n \geq 1$, ta định nghĩa:

$$g(x) \equiv h(x) \pmod{f(x)}$$

nếu $f(x) \mid (g(x) - h(x))$.

Chú ý sự tương tự giữa định nghĩa về đồng dư của các đa thức với định nghĩa về đồng dư của các số nguyên.

Bây giờ ta sẽ định nghĩa vành các đa thức theo modulo f(x). (ta kí hiệu vành này là $Z_p[x]/f(x)$). Việc xây dựng $Z_p[x]/f(x)$ từ $Z_p[x]$ dựa trên khái niệm về các đồng dư thức theo modulo f(x) và nó tương tự như việc xây dựng Z_m từ Z.

Giả sử deg(f) = n. Nếu chia g(x) cho f(x), ta thu được thương q(x) và phần dư r(x), trong đó:

$$g(x) = q(x)f(x) + r(x)$$

và $\deg(r) < n$.

Điều này có thể thực hiện theo cách chia các đa thức thông thường. Bởi vậy, một đa thứ bất kì trong $Z_p[x]$ đều đồng dư theo modulo f(x) với một đa thức duy nhất có bậc $\leq n-1$.

Bây giờ ta sẽ xác định các phần tử của $Z_p[x]/f(x)$ là p^n các đa thức trong $Z_p[x]$ có bậc nhiều nhất là n-1. Phép cộng và nhân trong $Z_p[x]/(f(x))$ được xác định như trong $Z_p[x]$, sau đó thực hiện rút gọn theo modulo f(x). Với phép toán này, $Z_p[x]/(f(x))$ sẽ tạo thành một vành.

Cần nhớ lại rằng, Z_m là một trường khi và chỉ khi m là số nguyên tố và các phần tử nghịch đảo nhân có thể tìm được qua thuật toán Euclide. Tình hình cũng tương tự xảy ra đối với $Z_p[x]/(f(x))$. Sự tương tự của các số nguyên tố với các đa thức bất khả quy được xác định như sau:

Định nghĩa 5.2

Đa thức $f(x) \in Z_p[x]$ được gọi là bất khả quy nếu không tồn tại các đa thức $f_1(x), f_2(x) \in Z_p[x]$ sao cho

$$f(x) = f_1(x)f_2(x).$$

trong đó $\deg(f_1) > 0$ và $\deg(f_2) > 0$.

Một thực tế rất quan trọng là $Z_p[x]/(f(x))$ là một trường khi và chỉ khi f(x) bất khả quy. Hơn nữa, các phần tử nghịch đảo nhân trong $Z_p[x]/(f(x))$ có thể tính được bằng cách dùng thuật toán Euclide mở rộng có biến đổi đôi chút.

Sau đây là một ví dụ minh hoạ cho vấn đề nêu ra.

Ví dụ 5.6

Xây dựng một trường 8 phần tử. Điều này có thể thực hiện bằng cách tìm một đa thức bất khả quy bậc 3 trong $Z_2[x]$. Ta chỉ cần xem xét các đa thức có thành phần hằng số bằng 1 vì một đa thức bất kì có thành phần hằng số bằng 0 sẽ chia hết cho x và bởi vậy nó là một đa thức bất khả quy . Có tất cả 4 đa thức như vậy.

$$f_1(x) = x^3 + 1$$
$$f_2(x) = x^3 + x + 1$$
$$f_3(x) = x^3 + x^2 + 1$$
$$f_4(x) = x^3 + x^2 + x + 1$$

Xét thấy $f_1(x)$ là khả quy vì:

$$x^3 +1 = (x+1)(x^2+x+1)$$

(cần để ý là tất cả các hệ số được rút gọn theo modulo 2). Tương tự, $f_4(x)$ cũng khả quy vì:

$$x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$$

Tuy nhiên cả hai đa thức $f_2(x)$ va $f_3(x)$ lại đều là đa thức bất khả quy và có thể dùng hai đa thức này để xây dựng trường 8 phần tử .

Giả sử dùng $f_2(x)$ để xây dựng trường $Z_2[x]/(x^3+x+1)$. 8 phần tử của trường là 8 đa thức : 0, 1, x, x+1, x^2, x^2+1, x^2+x, x^2+x+1

Để tính tích của hai phần tử của trường, nhân hai đa thức với nhau và rút gọn theo modulo x^3+x+1 (tức chia cho (x^3+x+1) và tìm đa thức dư). Vì ta chia một đa thức bậc 3 nên đa thức dư có bậc nhiều nhất là 2 và vì thế nó là một phần tử của trường.

Ví dụ, ta hãy tính (x^2+1)(x^2+x+1) trong $Z_2[x]/(x^3+x+1)$. Trước hết tính tích trong $Z_2[x]$ là x^4+x^3+x+1. Khi chia cho x^3+x+1, ta nhận được biểu thức sau:

$$x^4+x^3+x+1 = (x+1)(x^3+x+1) +x^2+x$$

Bởi vậy, trong trường $Z_2[x]/(x^3+x+1)$ ta có :

$$(x^2+1)(x^2+x+1) = x^2+x$$

Dưới đây sẽ đưa ra bảng dầy đủ cho cá phần tử khác 0 của trường. Để đơn giản, ta viết đa thức : $a_2x^2+a_1x+a_0$ theo bộ ba được sắp $a_2a_1a_0$.

	001	010	011	100	101	110	111
001	001	010	011	100	101	110	111
010	010	100	110	011	001	111	101
011	011	110	101	111	100	001	010
100	100	011	111	110	010	101	001
101	101	001	100	010	111	011	110
110	110	111	001	101	011	010	100
111	111	101	010	001	110	100	011

Việc tính các phần tử nghịch đảo được tực hiện theo thuật toán Euclide mở rộng có biến đổi đôi chút.

Cuối cùng, ta thấy rằng nhóm nhân của các đa thức khác 0 trong trường là một nhóm cyclic cấp 7. Vì 7 là số nguyên tố nên suy ra mọi phần tử khác 0 của trường đều là phần tử sinh của nhóm này (tức là phần tử nguyên thuỷ).

Ví dụ, nếu tính các luỹ thừa của x, ta có:

$$x^1 = x$$
$$x^2 = x^2$$
$$x^3 = x+1$$
$$x^4 = x^2+1$$
$$x^5 = x^2+ x+1$$
$$x^6 = x^2+1$$
$$x^7 = 1$$

sẽ bao gồm tất cả các phần tử khác 0 của trường.

Vấn đề còn lại là sự tồn tại và tính duy nhất của các trường dạng này. Có thể chỉ ra rằng, có ít nhất một đa thức bất khả quy bậc bất kì $n \geq 1$ trong $Z_p[x]$. Bởi vậy, sẽ có một trường hữu hạn p_n phần tử đối với mọi nguyên tố p và mọi số nguyên $n \geq 1$. Thông thương có khá nhiều đa thức bất khả quy bậc n trong $Z_p[x]$. Tuy nhiên, những trường hữu hạn được xây dựng từ hai đa thức bất khả quy bất kì bậc n đều có thể chứng tỏ được chúng là đaửng cấu với nhau. Bởi vậy, chỉ có một trương hữu hạn duy nhất cấp p^n tuỳ ý (p - số nguyên tố, $n \geq 1$) là trường $GF(p^n)$. Trong trường hợp n = 1, trương GF(p) cũng chính là Z_p. Cuối cùng, có thể chỉ ra rằng, không tồn tại một trường hữu

hạn r phần tử trừ phi $r = p^n$ với p là số nguyên tố , n là số nguyên nào đó ($n \geq 1$).

Ta đã nhận thấy là nhóm nhân Z_p^* (p - số nguyên tố) là một nhóm cyclic cấp p-1. Thực tế, nhóm nhân của trường hữu hạn bất kì đều là nhóm cyclic: $GF(p^n)\backslash\{0\}$ là một nhóm cyclic cấp p^n-1. Nhóm này sẽ cho các ví dụ về các nhóm cyclic trong đó bài toán DL có thể được nghiên cứu.

Thực tế các trường hữu hạn $GF(2^n)$ đã được nghiên cứu khá kĩ. Cả hai thuật toán logarithm rời rạc Shanks và Pohlig-Hellman đều làm việc trên các trường $GF(2^n)$. Phương pháp tính toán chỉ số có thể sửa đổi để làm việc trên các trương này. Thời gian tiền tính toán của thuật toán tính toán chỉ số khoảng

$$O\left(e^{(1,405+O(1))n^{1/3}(\ln n)^{2/3}}\right)$$

còn thời gian để tìm một giá trị logarithm rời rạc riêng khoảng

$$O\left(e^{(1,098+O(1))n^{1/3}(\ln n)^{2/3}}\right)$$

Tuy nhiên, với các giá trị n lớn (n > 800), bài toán DL trong $GF(2^n)$ được coi là khó cỡ 2^n phải có ít nhất một thừa số nguyên tố "lớn" (để gây khó khăn cho cách tấn công Pohlig - Hellman).

5.2.2. Các đương cong Elliptic

Ta bắt đầu bằng việc định nghĩa khái niệm đường cong elliptic.

Định nghĩa 5.3

Cho p >3 là số nguyên tố. Đường cong elliptic $y^2 = x^3+ax+b$ trên Z_p là một tập các cặp $(x,y) \in Z_p \times Z_p$ thoả mãn đồng dư thức

$$y^2 \equiv x^3+ax+b \pmod p \qquad (5.1)$$

trong đó $a, b \in Z_p$ là các hằng số sao cho $4a3+27b2 \not\equiv 0 \pmod p$ cùng với một điểm đặc biệt O được gọi là điểm vô cực.

[Phương trình (5.1) có thể dùng để xác định một đường cong elliptic trên một trường bất kì $GF(p^n)$ với p - là số nguyên tố lớn hơn 3. Đường cong elliptic trên $GF(2^n)$ hoặc $GF(3^n)$ được xác định bằng một phương trình khác đôi chút)].

Đường cong elliptic E có thể tạo thành một nhóm Aben bằng cách xác định một phép toán thích hợp trên các điểm của nó. Phép toán này là phép cộng và được xác định như sau (ở đây mọi phép toán số học được thực hiện trên Z_p).

Giả sử

$$P = (x_1,y_1) \text{ và } Q = (x_2,y_2)$$

là các điểm trên E. Nếu $x_2=x_1$ và $y_2=-y_1$ thì P+Q = O; ngược lại $P+Q = (x_3,y_3)$ trong đó:

$$x_3 = \lambda^2-x_1-x_2$$
$$y_3 = \lambda(x_1-x_3)-y_1$$

và

$$\lambda = \begin{cases} (y_2-y_1)/(x_2-x_1) & \text{nếu } P \neq Q \\ (3x_1^2+a)/2y_1 & \text{nếu } P = Q \end{cases}$$

Cuối cùng ta xác định

$$P+O = O+P = P$$

đối với mọi $P \in E$. Với định nghĩa phép cộng như vậy, có thể chỉ ra rằng, E là một nhóm Aben với phần tử đơn vị O. (phần lớn các phép kiểm tra đều khá đơn giản song việc chứng minh tính kết hợp lại rất khó).

Cần để ý là các phần tử ngược (nghịch đảo) rất dễ tính toán. Phần tử nghịch đảo của (x,y) là (x,-y) với mọi $(x,y) \in E$ (ta kí hiệu phần tử này là -(x,y) do phép nhóm là phép cộng)

Xét ví dụ sau.

Ví dụ 5.7

Giả sử E là một đường cong elliptic $y^2 = x^3+x+6$ trên Z_{11}. Trước tiên ta xác định các điểm trên E. Để làm điều đó, xét mỗi giá trị có thể $x \in Z_{11}$, tính $x^3+x+6 \bmod 11$ và thử giải phương trình (5.1) đối với y. Với giá trị x cho trước, ta có thể kiểm tra xem liệu $z = x^3+x+6 \bmod 11$ có phải là một thặng dư bình phương hay không bằng cách áp dụng tiêu chuẩn Euler. Ta đã có một công thức tường minh để tính các căn bậc hai của các thặng dư bình phương theo modulo p với các số nguyên tố $p \equiv 3 \pmod 4$. Áp dụng công thức này, ta có các căn bậc hai của một thặng dư bình phương z là:

$$z^{(11+1)/4} \bmod 11 = z^3 \bmod 11$$

Kết quả của các phép tính này được nêu trên bảng 5.2

Như vậy, E có tất cả 13 điểm. Với một nhóm bất kì cấp nguyên tố đều là nhóm cyclic nên dẫn đến E đẳng cấu với Z_{13} và một điểm bất kì (không phải điểm vô cực) đều là phần tử sinh của nhóm E. Giả sử ta lấy phần tử sinh là $(2,7) = \alpha$. Khi đó ta có thể tính các "luỹ thừa" của α (chính là các bội của α vì phép nhóm là phép cộng). Để tính $2\alpha = (2,7) + (2,7)$, trước hết ta tính:

$\lambda = (3\times 2^2+1)(2\times 7)^{-1} \bmod 11$
$= 2\times 3^{-1} \bmod 11$
$= 2\times 4 \bmod 11$
$= 8$

Sau đó ta có: $x_3 = 8^2-2-2 \bmod 11$
$= 5$

và $y_3 = (8(2-5)-7) \bmod 11$
$= 2$

Bởi vậy $2\alpha = (5,2)$

Bảng 5.2 Các điểm trên đường cong elliptic $y^2 = x^3+x+6$ trên Z_{11}

x	x3+x+6 mod 11	Có trong QR(11)?	y
0	6	Không	
1	8	Không	
2	5	Có	4,7
3	3	Có	5,6
4	8	Không	
5	4	Có	2,9
6	8	Không	
7	4	Có	2,9
8	9	Có	3,8
9	7	Không	
10	4	Có	2,9

Bội tiếp theo là $3\alpha = 2\alpha+\alpha = (5,2) + (2,7)$. Ta lại bắt đầu bằng việc tính λ.

$\lambda = (7-2)(2-5)^{-1} \bmod 11$
$= 5\times 8^{-1} \bmod 11$
$= 5\times 7 \bmod 11$
$= 2$

Khi đó ta có $x_3 = 2^2-5-2 \bmod 11$
$= 8$

và $y_3 = 2(5-8) - 2 \bmod 11$
$= 3$

Bởi vậy $3\alpha = (8,3)$

Tiếp tục theo cách tương tự, có thể tính được các bội còn lại như sau:

$\alpha = (2,7)$ $2\alpha = (5,2)$ $3\alpha = (8,3)$
$4\alpha = (10,2)$ $5\alpha = (3,6)$ $6\alpha = (7,9)$
$7\alpha = (7,2)$ $8\alpha = (3,5)$ $9\alpha = (10,9)$
$10\alpha = (8,8)$ $11\alpha = (5,9)$ $12\alpha = (2,4)$

Do đó $\alpha = (2,7)$ thực sự là phần tử nguyên thuỷ.

Một đường cong elliptic xác định trên Z_p (p là số nguyên tố >3) sẽ có khoảng p điểm. Chính xác hơn, theo một định lý nổi tiếng của Hasse, số các điểm trên E (kí hiệu là #E) thảo mãn bất đẳng thức sau:

$$p + 1 - 2\sqrt{p} \le \#E \le p + 1 + 2\sqrt{p}$$

Việc tính toán chính xác giá trị của #E có khó hơn nhưng đã có một thuật toán hữu hiệu do Schoof đưa ra giúp tính toán dễ dàn hơn.(Nghĩa hữu hiệu ở đây được hiểu là thời gian chạy của thuật toán là thời gian đa thức theo log p. Thuật toán Schoof có thời gian chạy khoảng $O((\log p)^8)$ phép tính trên bít và có thể thực hiện đối với các số nguyên tố p có vài trăm chữ số).

Bây giờ giả sử có thể tính được #E. Vấn đề tiếp theo là phải tìm một nhóm con cyclic trong E sao cho bài toán DL trong nó là khó. Bởi vậy ta phải biết một vài điều về cấu trúc của nhóm E. Định lý sau đây cung cấp một thông tin đáng kể về cấu trúc nhóm của E.

Định lý 5.1

Cho E là một đường cong elliptic trên Z_p, p là số nguyên tố > 3. Khi đó, tồn tại các số nguyên n_1 và n_2 sao cho E là đẳng cấu với $Z_{n1} \times Z_{n2}$. Ngoài ra n_2 / n_1 và $n_2 / (p-1)$.

Bởi vậy nếu có thể tính được các số n_1 và n_2 thì ta sẽ biết rằng E có một nhóm con cyclic đẳng cấu với Z_{n1} và có thể dùng E để thiết lập một hệe mật Elgamal.

Chú ý là nếu $n_2 = 1$ thì E là một nhóm cyclic. Cũng vậy, nếu #E là một số nguyên tố hoặc là tích của các số nguyên tố khác nhau thì E là nhóm cyclic có chỉ số nhóm cyclic.

Các thuật toán Shanks và Pohlig - Hellman có thể áp dụng cho bài toán rời rạc trên đường cong Elliptic song tới nay vẫn chưa có một thuật toán

thích hợp cho phương pháp tính chỉ số đối với các đường cong Elliptic.Tuy nhiên, đã có một phương pháp khai thác đẳng cấu một cách tường minh giữa các đường cong Elliptic trong trường hữu hạn. Phương pháp này dẫn đến các thuật toán hữu hiệu đối với một số lớp các đường cong Elliptic. Kỹ thuật này do Menezes, Okamoto và Vanstone đưa ra và có thể áp dụng cho một số trường hợp riêng trong một lớp đặc biệt các đường cong Elliptic (được gọi là các đường cong siêu biến, chúng đã được kiến nghị sử dụng trong các hệ thống mật mã). Tuy nhiên, nếu tránh các đường cong siêu biến thì lại xuất hiện một đường cong Elliptic có một nhóm con cyclic cỡ 2^{160} , đường cong này sẽ cho phép thiết lập an toàn một hệ mật miễn là bậc của nhóm con phải là bội của ít nhất một thừa số nguyên tố lớn (nhằm bảo vệ hệ mật khỏi phương pháp tấn công của Pohlig - Hellman).

Xét một ví dụ về phép mã Elgamal sử dụng đường cong elliptic nêu trên ví dụ 5.7.

Ví dụ 5.8.

Giả sử $\alpha = (2,7)$ và số mũ mật của Bob là a = 7. Bởi vậy:

$$\beta = 7\alpha = (7,2)$$

Phép mã hoá thực hiện như sau

$$e_K(x,k) = (k(2,7),x+k(7,2))$$

trong đó $x \in E$ và $0 \le k \le 12$ còn phép giải mã thực hiện như sau:

$$d_K(y_1,y_2) = y_2-7y_1$$

Giả sử Alice muốn mã bản tin x = (10,9) (là một điểm trên E). Nếu cô chọn giá trị ngẫu nhiên k=3 thì cô tính

$$y1 = 3(2,7)$$
$$= (8,3)$$

và

$$y_2 = (10,9) + 3(7,2)$$
$$= (10,9) + (3,5)$$
$$= (10,2)$$

Bởi vậy, y = ((8,3),(10,2)). Bây giờ nếu Bob nhận được bản mã y thì anh ta giải mã như sau:

$$x = (10,2) - 7(8,3)$$
$$= (10,2) - (3,5)$$
$$= (10,2) + (3,6)$$
$$= (10,9)$$

Đây chính là bản rõ đúng.

Trên thực tế có một số khó khăn khi áp dụng hệ mật Elgamal trên đường cong Elliptic. Hệ thống này được áp dụng trong Z_p (hoặc trong $GF(p^n)$ với $n > 1$) sẽ có hệ số mở rộng bản tin là 2. Việc áp dụng đường cong

Elliptic sẽ có thừa số mở rộng khoảng 4 lần. Điều này là do có xấp xỉ p bản rõ, nhưng mỗi bản mã lại gồm bốn phần tử của trường. Một trở ngại là không gian bản rõ chứa các điểm trên đường cong E và không có phương pháp nào xác định tường minh các điểm trên E

Menezes và Vanstone đã tìm ra một phương án hiệu quả hơn. theo phương án này đường cong Elliptic dùng để "che dấu", còn các bản rõ và bản mã hợp lệ là các cặp được sắp tùy ý các phần tử khác không của trường(tức là chúng không đòi hỏi phải là các điểm trên E). Điều này sẽ tạo hệ số mở rộng bản tin là 2 giống như trong hệ mật Elgamal ban đầu. Hệ mật Menezes - Vanstone được mô tả trên hình 5.10.

Nếu trở lại đường cong $y^2 = x^3 + x + 6$ trên Z_{11} ta sẽ thấy rằng hệ mật Menezes - Vanstone có $10\times10 = 100$ bản rõ, trong khi đó hệ mật ban đầu chỉ có 13 bản rõ. Ta sẽ minh hoạ phép mã và giải mã trong hệ mật này bằng cách sử dụng đường cong trên.

Hình 3.6 Hệ mật trên đường cong Elliptic của Menezes - Vanstone

Giả sử E là một đường cong Elliptic trên **Z**p (p là số nguyên tố > 3) sao cho E chứa một nhóm con cyclic H, trong đó bài toán DL là bài toán khó.

Giả sử $\mathcal{P} = Z_p^* \times Z_p^*$, $\mathcal{C} = E \times Z_p^* \times Z_p^*$,ta định nghĩa:

$$\mathcal{K} = \{ (E,\alpha,a,\beta) : \beta = a\,\alpha \}$$

trong đó $\alpha \in E$. Các giá trị α và β được công khai, còn a được giữ kín.

Đối với $K = (E,\alpha,a,\beta)$, với số ngẫu nhiên bí mật $k \in Z_{|H|}$

và $x = (x_1,x_2) \in Z_p^* \times Z_p^*$, ta xác định:

$$e_K(x,k) = (y_0,y_1,y_2)$$

$$y_0 = k\,\alpha$$

$$(c_1,c_2) = k\,\beta$$

$$y_1 = c_1 x_1 \bmod p$$

và $$y_2 = c_2 y_2 \bmod p$$

Với bản mã $y = (y_0,y_1,y_2)$, ta định nghĩa

$$d_K(y) = (y_1 c_1^{-1} \bmod p,\ y_2 c_2^{-1} \bmod p)$$

trong đó $a\,y_0 = (c_1,c_2)$

Ví dụ 5.9

Cũng như ví dụ trước, giả sử $\alpha = (2,7)$ và số mũ mật của Bob là 7. Khi đó

$$\beta = 7\alpha = (7,2)$$

Giả sử Alice muốn mã hoá bản rõ sau:

$$x = (x_1,x_2) = (9,1)$$

(Cần chú ý là x không phải là một điểm trên E) và cô chọn giá trị ngẫu nhiên k = 6. Đầu tiên cô tính:

$$y_0 = k\alpha = 6(2,7) = (7,9)$$

và

$$k\beta = 6(7,2) = (8,3)$$

Như vậy, $c_1 = 8$ còn $c_2 = 3$.

Tiếp theo Alice tính:

$$y_1 = c_1x_1 \bmod p = 8\times9 \bmod 11 = 6$$

và

$$y_2 = c_2x_2 \bmod p = 3\times1 \bmod 11 = 3$$

Bản mã mà cô giửi cho Bob là:

$$y = (y_0,y_1,y_2) = ((7,9), 6, 3)$$

Khi Bob nhận được bản mã này, Trước tiên anh ta tính:

$$(c_1,c_2) = (a\ y_0) = 7(7,9) = (8,3)$$

và sau đó tính:

$$\begin{aligned} x &= (y_1c_1^{-1} \bmod p, y_2c_2^{-1} \bmod p) \\ &= ((6\times8^{-1} \bmod 11, 3\times3^{-1} \bmod 11) \\ &= (6\times7 \bmod 11, 3\times4 \bmod 11) \\ &= (9,1). \end{aligned}$$

Hình 5.11. Bài toán tổng các tập con

Đặc trưng của bài toán: I = (s_1, s_2, . . . ,s_n, T) trong đó s_1, . . ., s_n và T là các số nguyên dương. Các s_i được gọi là các cỡ, T được gọi là tổng đích.

Vấn đề: Liệu có một véc tơ nhị phân $x = (x_1, . . . , x_n)$ sao cho:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i s_i = T\ ?$$

Đây chính là bản rõ đúng.

5.3. HỆ MẬT XÊP BA LÔ MERKLE - HELLMAN

CHƯƠNG 4
KIỂM TRA TÍNH NGUYÊN TỐ XÁC SUẤT

Để thiết lập hệ mật RSA, ta phải tạo ra các số nguyên tố ngẫu nhiên lớn (chẳng hạn có 80 chữ số). Trong thực tế, phương cách thực hiện điều này là: trước hết phải tạo ra các số ngẫu nhiên lớn, sau đó kiểm tra tính nguyên thuỷ của chúng bằng cách dùng thuật toán xác suất Monte- Carlo thời gian đa thức (chẳng hạn như thuật toán Miller- Rabin hoặc là thuật toán Solovay- Strasen). Cả hai thuật toán trên đều được trình bày trong phần này. Chúng là các thuật toán nhanh (tức là một số nguyên n được kiểm tra trong thời đa thức theo $\log_2 n$, là số các bít trong biểu diện nhị phân của n). Tuy nhiên, vẫn có khả năng là thuận toán cho rằng n là số nguyên tố trong khi thực tế n là hợp lệ số. Bởi vậy, bằng cách thay đổi thuật toán nhiều lần, có thể giảm xác suất sai số dưới một mức ngưỡng cho phép (sau này sẽ thảo luận kỹ hơn một chút về vấn đề này).

Một vấn đề quan trọng khác: là cần phải kiểm tra bao nhiêu số nguyên ngẫu nhiên (với kích thươc xác định)cho tới khi tìm được một số nguyên tố. Một kết quả nỗi tiếng trong lý thuyết số (được gọi là định lý số nguyên tố) phát biểu rằng: số các số nguyên tố không lớn hơn N xấp xỉ bằng N/ln N. Bởi vậy, nếu p được chọn ngẫu nhiên thì xác suất p là một số nguyên tố sẽ vào khoảng 1/ln p. Với một mođun 512 bít, ta có $1/\ln p \approx 1/77$. Điều này có nghĩa là tính trung bình, cư 177 số nguyên ngẫu nhiên p với kích thước tương ứng sẽ có một số là số nguyên tố. Dĩ nhiên, nếu chĩ hạn chế xét các số nguyên lẻ thì xác suất sẽ tăng gấp đôi tới khoảng 2/177). Bởi vậy trên thực tế, hoàn toàn có khả năng tạo được các nguyên tố đủ lớn và do đó về mặt thực thể ta có thể thiết lập được một hệ mật RSA. Sau đây sẽ tiếp tục xem xét điều này được thực hiên như thế nào.

Một bài toán quyết định là một bài toán toán trong đó một câu hỏi cần được trả lời "có" hoặc "không". Một thuật toán xác suất là một thuật toán bất kỳ có sử dụng các số ngẫu nhiên (ngược lại, thuật toán không sử dụng các số ngẫu nhiên sẽ được gọi là một thuật toán tất định). Các định nghĩa sau có liên quan tới các thuật toán xác suất cho các bài toán quyết định.

Định nghĩa 4.1

Thuật toán Monte Carlo định hướng "có" là một thuật toán xác suất cho một bài toán quyết định, trong đó câu trả lời "có" luôn luôn là đúng còn câu trả lời "không" có thể là sai. Thuật toán Monte Carlo định hướng "không" cũng được định nghĩa theo cách tương tự.

Chúng ta nói rằng, một thuật toán Monte Carlo định hướng "có" có xác suất sai bằng ε nếu với bất kỳ mốt trường hợp nào mà câu trả lời là "có" thì thuật toán có câu trả lời sai "không" với xác suất không lớn hơn ε (xác suất này được tính trên mọi phép chon ngẫu nhiên, có thể thực hiên bởi thuật toán với một câu vào đã cho).

Bài toán quyết định ở đây là bài toán hợp lệ số mô tả ở hình 4.5.
Cần chú ý rằng một thuật toán quyết định chỉ có câu trả lời "có" hoặc "không" đặc biệt trong bài toán hợp lệ số là ta không yêu cầu thuật toán tính tích thừa số khi n là hợp lệ số.

Trước tiên ta sẽ mô tả thuật toán Soloway- Strasson. Đây là một thuật toán Monte- Carlo định hướng "có" cho bài toán hợp số có
Trước tiên ta sẽ mô tả thuật toán Soloway- Strasson. Đây là một thuật toán Monte-Carlo định hướng "có" cho bài toán hợp số và xác xuất sai 1/2. Bởi vậy, nếu thuật toán trả lời "có" thì n là hợp số; ngược lại nếu n là hợp số thì thuật toán trả lời "có" với xác xuất tối thiểu 1/2.

Hình 4.5. Bài toán hợp số.

Đặc trưng của bài toán: một số nguyên dương $n \geq 2$ Câu hỏi: n có phải là hợp số không ?

Hình 4.6. Bài toán về các thặng dư bậc hai.

Đặc trưng của bài toán: cho p là một số nguyên tố lẻ và một số nguyên x sao cho $0 \leq x \leq p-1$ Câu hỏi: x có phải là thặng dư bậc hai phép modulo p ?

Mặc dù thuật toán Miller-Rabin (ta sẽ xét sau) nhanh hơn thuật toán Soloway-Strasson (S-S) nhưng ta sẽ xét thuật toán S-S trước vì nó dễ hiểu hơn về khái niệm, đồng thời lại liên quan tới một số vấn đề của lý thuyết số (mà ta sẽ còn dùng trong các chương trình sau). Ta sẽ xây dựng một số nền tảng sâu sắc hơn trong lý thuyết số trước khi mô tả thuật toán.

Định nghĩa 4.2.

Giả sử p là một số nguyên tố lẻ và x là một số nguyên, $1 \le x \le p-1$. x được gọi là thặng dư bậc hai theo modulo p nếu phương trình đồng dư $y^2 \equiv x$ (modulo p) có một nghiệm $y \in Z_p$ x được gọi là thặng dư không bậc hai theo modulo p nếu x ??? 0 (mod p) và x không phải là thặng dư bậc hai theo modulo p.

Ví dụ 4.6.

Các thặng dư bậc hai theo modulo 11 là 1,3,4,5 và 9. Cần để ý rằng, $(\pm1)^2=1$, $(\pm5)^2=3$, $(\pm2)^2=4$, $(\pm4)^2=5$, $(\pm3)^2=9$ (ở đây tất cả các phép số học đều thực hiện trong Z_{11}).

Bài toán quyết định thặng dư bậc hai được trình bày trên hình 4.6 sẽ được thấy một cách tươnngf minh như sau:

Trước hết, ta sẽ chứng minh một kết quả- *tiêu chuẩn Euler* – tạo nên thuật toán tất định theo thời gian đa thức cho bài toán về các thặng dư bậc hai.

Định lý 4.8. (Tiêu chuẩn Euler)

Giả sử p là một số nguyên tố, khi đó x là một thặng dư bậc hai theo modulo p khi và chỉ khi:

$$x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$$

Chứng minh:

Trước hết giả sử rằng, $x \equiv y^2 \pmod p$. Theo hệ quả 4.6, nếu p là số nguyên tố thì $x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ với mọi $x \not\equiv 0 \pmod p$. Bởi vậy ta có :

$$\begin{aligned} x^{(p-1)/2} &\equiv (y^2)^{(p-1)/2} \pmod p \\ &\equiv y^{p-1} \pmod p \\ &\equiv 1 \pmod p \end{aligned}$$

Ngược lại, giả sử rằng $x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$. Cho p là một phần tử nguyên thuỷ theo modulo p. Khi đó $x \equiv b^i \pmod p$ với giá trị i nào đó. Ta có

$$\begin{aligned} x^{(p-1)/2} &\equiv (b^i)^{(p-1)/2} \pmod p \\ &\equiv b^{i(p-1)/2} \pmod p \end{aligned}$$

Vì p có bậc bằng p-1 nên p-1 phải là ước của i(p-1)/2. Bởi vậy i là số chẵn và như vậy căn bậc hai của x là $\pm b^{i/2}$.□

Định lý 4.8 sẽ dẫn tới một thuật toán thời gian đa thức cho các thặng dư bậc hai nhờ sử dụng kỹ thuật "bình phương và nhân" cho phép lấy luỹ thừa theo modulo p. Độ phức tạp của thuật toán khoảng $O((\log p)^3)$.

Sau đây tiếp tục đưa ra một số định nghĩa từ lý thuyết số:

Định nghĩa 4.3.

Giả sử p là số nguyên tố lẻ. Với một số nguyên tố bất kỳ a ≥0, ta định nghĩa ký hiệu Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ như sau:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod p \\ 1 \text{ nếu là thăng dư bậc hai theo modulo p} \\ -1 \text{ nếu là thăng dư không bậc hai theo modulo p} \end{cases}$$

Ta đã biết là $a^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod p$ khi và chỉ khi a là một thặng dư bậc hai theo modulo p. Nếu a là bội của p thì rõ ràng $a^{(p-1)/2} \equiv 0 \pmod p$. Cuối cùng, nếu a là một thặng dư không bậc hai theo modulo p thì $a^{(p-1)} \equiv -1 \pmod p$ vì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$. Bởi vậy, ta có kết quả cho phép xây dựng một thuật toán hữu hiệu để đánh giá các ký hiệu Legendre như sau

Định Lý 4.9.

Giả sử p là một số nguyên tố. Khi đó $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod p$.

Sau đây là một định nghĩa tổng quát hoá cho ký hiệu Legendre.

Định nghĩa 4.4.

Giả sử n là một số nguyên dương lẻ và phân tích theo các luỹ thừa ngu $\left(\frac{a}{r}\right)$ của n là $p_1^{e1} \ldots\ldots p_K^{ek}$. Giả sử a ≥ 0 là một số nguyên. Ký hiệu Jacobi được định nghĩa như sau:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod_{i=1}^{K}\left(\frac{a}{p_i}\right)^{ei}$$

Ví dụ 4.7.

Xét ký hiệu Jacobi $\left(\frac{6278}{9975}\right)$ Phân tích luỹ thừa nguyên tố của 9975 là: $9975=3 \times 5^2 \times 7$ vậy ta có:

$$\left(\frac{6278}{9975}\right) = \left(\frac{6278}{3}\right)\left(\frac{6278}{5}\right)^2\left(\frac{6278}{7}\right)\left(\frac{6278}{19}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{8}{19}\right)$$

$$=(-1)(-1)^2(-1)(-1)$$

$$= -1.$$

Giả sử n > 1 là một số lẻ. Nếu n là một số nguyên tố thì ≡

$a^{(n-1)/2} \pmod n$ với a bất kỳ. Mặt khác nếu n là một hợp số thì đồn $\left(\frac{a}{n}\right)$ thức trên có thể đúng hoặc không. Nếu phương trình đó vẫn đún a được gọi
là số giả nguyên tố Euler theo cơ số n. Ví dụ: 10 là số giả nguyên tố Euler

theo cơ số 91 vì $\left(\frac{10}{91}\right)$ = $-1 = 10^{45} \bmod 91$

Tuy nhiên có thể chứng tỏ rằng, với một hợp số lẻ n bất kỳ, sẽ cóp nhiều nhất một nửa các số nguyên a (sao cho $1 \le a \le n-1$) là các số giả nguyên tố Euler cơ số n (xem các bài tập). Điều đó chứng tỏ rằng, việc kiểm tra tính nguyên tố theo thuật toán Soloway-Strasson

được nêu ở hình 4.7 là thuật toán Monte-Carlo định hướng "có"với xác xuất sai tối đa là 1/2.
Đến đây vẫn chưa xác định rõ thuật toán ttrên có theo thời gian đa thức hay không.

Ta đã biết cách đánh giá $a^{(n-1)/2} \pmod n$ trong thời gian đa thức $O((\log n)^3)$, tuy nhiên cần phải làm thế nào để tính các ký hiệu Jacobi một cách có hiệu quả. Vì ký hiệu Jacobi được xác định theo các thừa số trong phân tích của n. Tuy nhiên nếu có thể phân tích được n thì ta đã biết nó có phải là số nguyên tố hay không, bởi vậy cách làm này sẽ dẫn tới một vòng luẩn quẩn.

Hình 4.7. Thuật toán kiểm tra tính nguyên tố Solova-Strassen với số nguyên lẻ n.

1. Chọn một số nguyên ngẫu nhiên a, $1 \le a \le n-1$

2. Nếu $\equiv a^{(n-1)/2} \pmod n$ thì
   Nếu k $\left(\frac{a}{n}\right)$ rả lời " n là số nguyên tố "
   rả lời " n là một hợp số "

Rất may là có thể đánh giá ký hiệu Jacobi mà không cần phải phân tích n nhờ sử dụng một số kết quả của lý thuyết số, trong đó kết quả quan trọng nhất là tính chất 4 (tổng quát hoá luật tương hỗ bậc hai).
Ta sẽ liệt kê mà không chứng minh các tính chất này.

1. Nếu n là một số nguyên tố lẻ và $m_1 \equiv m_2 \pmod n$ thì:

$$\left(\frac{m_1}{n}\right) \qquad \left(\frac{m_2}{n}\right)$$

2. Nếu n là một số nguyên lẻ thì

$$= \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \equiv \pm 1 \pmod 8 \\ -1 & \text{nếu } n \equiv \pm 3 \pmod 8 \end{cases}$$

3. Nếu n là một số nguyên lẻ thì

$$\left(\frac{m_1 m_2}{n}\right)=\left(\frac{m_1}{n}\right)\left(\frac{m_2}{n}\right)$$

Đặc biệt nếu $m=2^k t$ với t là một số lẻ thì:

$$\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \left(\frac{t}{n}\right)$$

4. Giả sử m và n là các số nguyên lẻ, khi đó:

$$\left(\frac{2}{n}\right) = \begin{cases} -\left(\frac{n}{m}\right) & \text{nếu } m \equiv n \equiv 3 \pmod 4 \\ \left(\frac{n}{m}\right) & \text{trong các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

ví dụ

Để minh hoạ cho việc áp dụng các tính chất trên , ta sẽ đánh giá kí

hiệu Jacobi $\left(\frac{7411}{9283}\right)$ như trong bảng dưới đây. Cần chú ý là trong ví dụ

này, ta đã sử dụng liên tiếp các tính chất4, 1,3 ,và 2.

Nói chung, bằng cách áp dụng 4 tính chất trên, có thể tính toánkí

hiệu Jacobi $\left(\frac{m}{n}\right)$ thời gian đa thức. Các phép tính số học dùng ở đây

chỉ là rút gọn theo modulo và phân tích ra các luỹ thừa của thuật toán được biểu diễn dưới dạng nhị phân thì việc phân tích ra các luỹ thừa của hai số chính là việc xác định số các số 0 tiếp sau. Bởi vậy, độ phức tạp của thuật toán được xác định bởi số các phép rút gọn theo modulo cần tiến hành. Không khó khăn lắm có thể chứng tỏ rằng, cần thực hiện nhiều nhất là.

$$\left(\frac{7411}{9283}\right) = -\left(\frac{9283}{7411}\right) \quad \text{theo tính chất 4}$$

$$= -\left(\frac{1872}{7411}\right) \quad \text{theo tính chất 1}$$

$$= -\left(\frac{2}{7411}\right)^4\left(\frac{117}{7411}\right) \quad \text{theo tính chất 3}$$

$$= -\left(\frac{117}{7411}\right) \quad \text{theo tính chất 2}$$

$$= -\left(\frac{7411}{117}\right) \quad \text{theo tính chất 4}$$

$$= -\left(\frac{40}{177}\right) \quad \text{theo tính chất 1}$$

$$= -\left(\frac{2}{117}\right)^3\left(\frac{5}{117}\right) \quad \text{theo tính chất 3}$$

$$= \left(\frac{5}{117}\right) \quad \text{theo tính chất 2}$$

$$= \left(\frac{117}{5}\right) \quad \text{theo tính chất 4}$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right) \quad \text{theo tính chất 1}$$

$$= -1 \quad \text{theo tính chất 2}$$

Cần phải thận trọng hơn khi sự dụng các tính toán xác suất. Ta sẽ định nghĩa các biến ngẫu nhiên sau:

a- Chỉ sự kiện " số nguyên lẻ n có kích thước đã định là một hợp số".
b- Chỉ sự kiện " thuật toán trả lời n là số nguyên tố m lần liên tiếp .

Điều chắc chắn là prob(b| a)2^{-m}. Tuy nhiên xác suất mà ta thực sự quan tâm là prob(a/b), xác suất này thường không giống như prob(b/a).

CHƯƠNG 3

CHUẨN MÃ DỮ LIỆU

3.1. MỞ ĐẦU.

Ngày 15.5.1973. Uỷ ban tiêu chuẩn quốc gia Mỹ đã công bố một khuyến nghị cho các hệ mật trong Hồ sơ quản lý liên bang. Điều này cuối cùng đã dẫn đến sự phát triển của Chuẩn mã dữ liệu (DES) và nó đã trở thành một hệ mật được sử dụng rộng rãi nhất trên thế giới. DES được IBM phát triển và được xem như một cải biên cuả hệ mật LUCIPHER. Lần đầu tiên DES được công bố trong Hồ sơ Liên bang vào ngày 17.3.1975. Sau nhiều cuộc trành luận công khai, DES đã được chấp nhận chọn làm chuẩn cho các ứng dụng không được coi là mật vào 5.1.1977. Kể từ đó cứ 5 năm một lần, DES lại được Uỷ ban Tiêu chuẩn Quốc gia xem xét lại. Lần đổi mới gàn đây nhất của DES là vào tháng 1.1994 và tiếp tới sẽ là 1998. Người ta đoán rằng DES sẽ không còn là chuẩn sau 1998.

3.2. MÔ TẢ DES

Mô tả đầy đủ của DES được nêu trong Công bố số 46 về các chuẩn xử lý thông tin Liên bang (Mỹ) vào 15.1.1977. DES mã hoá một xâu bít x của bản rõ độ dài 64 bằng một khoá 54 bít. Bản mã nhậ được cũng là một xâu bít có độ dài 48. Trước hết ta mô tả ở mức cao của hệ thống.

Thuật toán tiến hành theo 3 giai đoạn:

1.Với bản rõ cho trước x, một xâu bít x_0 sẽ được xây dựng bằng cách hoán vị các bít của x theo phép hoán vị cố định ban đầu IP. Ta viết:x_0= IP(X) = L_0R_0, trong đó L_0 gồm 32 bít đầu và R_0 là 32 bít cuối.

2. Sau đó tính toán 16 lần lặp theo một hàm xác định. Ta sẽ tính L_iR_i, $1 \le i \le 16$ theo quy tắc sau:

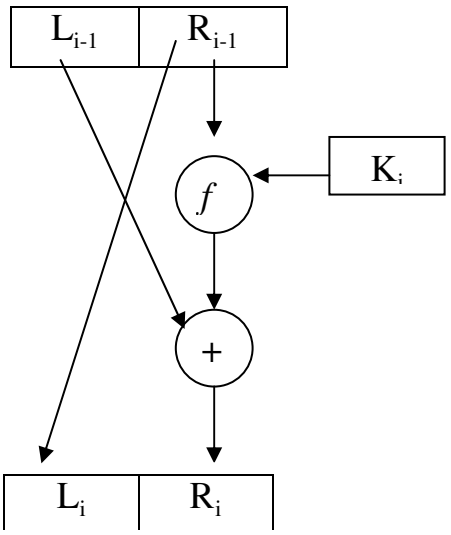
$$L_i = R_{i-1}$$
$$R_i = L_{i-1} \oplus f(R_{i-1},K_i)$$

trong đó $\oplus$ kí hiệu phép hoặc loại trừ của hai xâu bít (cộng theo modulo 2). f là một hàm mà ta sẽ mô tả ở sau, còn $K_1,K_2, \ldots ,K_{16}$ là các xâu bít độ dài 48 được tính như hàm của khoá K. (trên thực tế mỗi K_i là một phép chọn hoán

vị bít trong K). K_1, . . ., K_{16} sẽ tạo thành bảng khoá. Một vòng của phép mã hoá được mô tả trên hình 3.1.

3. Áp dụng phép hoán vị ngược IP^{-1} cho xâu bít $R_{16}L_{16}$, ta thu được bản mã y. Tức là $y=IP^{-1}(R_{16}L_{16})$. Hãy chú ý thứ tự đã đảo của L_{16} và R_{16}.

Hình 3.1. Một vong của DES



Hàm f có hai biến vào: biến thứ nhất A là xâu bít độ dài 32, biến thứ hai J là một xâu bít độ dài 48. Đầu ra của f là một xâu bít độ dài 32. Các bước sau được thực hiện:

1. Biến thứ nhất A được mở rộng thành một xâu bít độ dài 48 theo một hàm mở rộng cố định E. E(A) gồm 32 bít của A (được hoán vị theo cách cố định) với 16 bít xuất hiện hai lần.

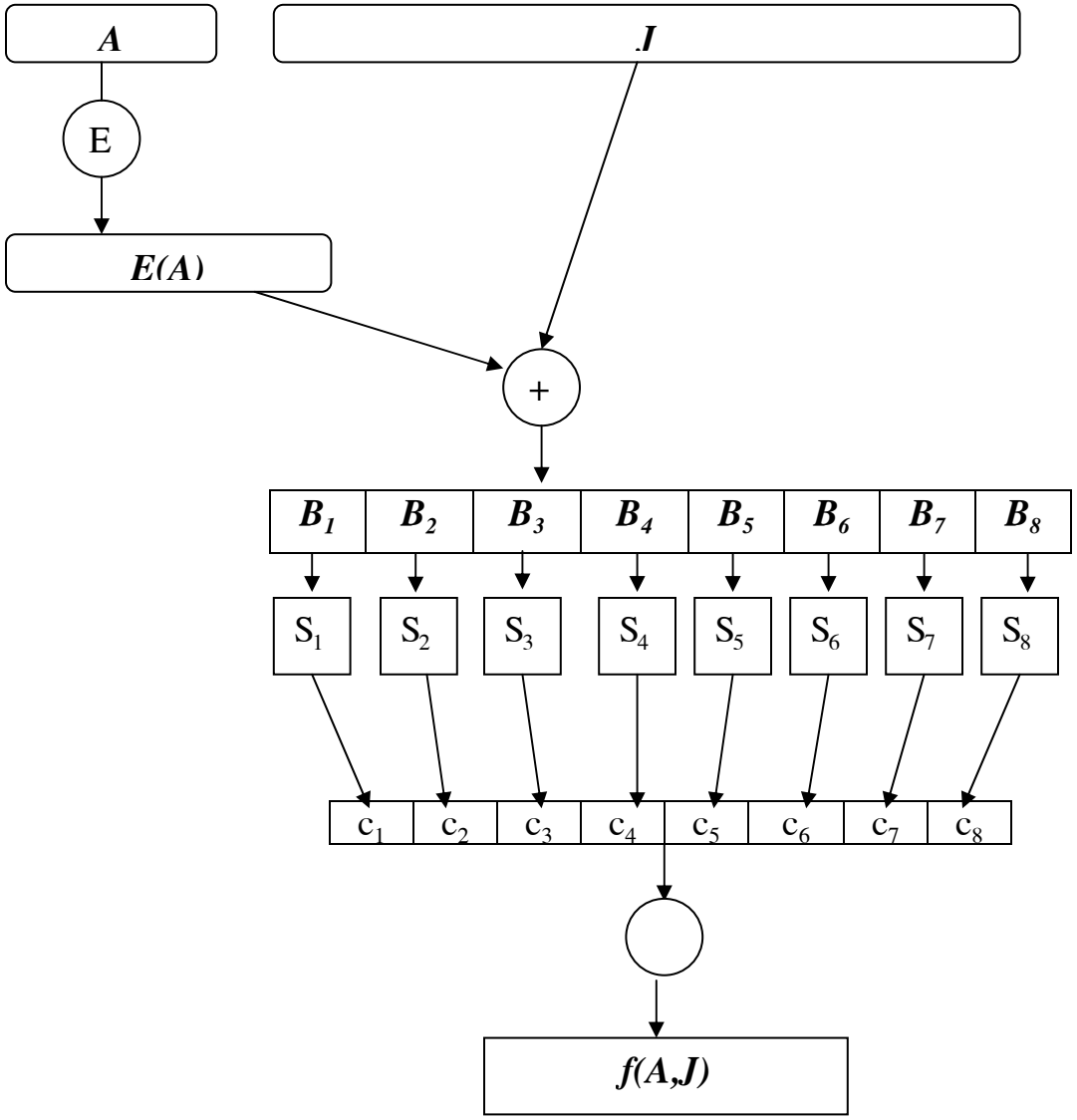
2. Tính $E(A) \oplus J$ và viết kết quả thành một chuỗi 8 xâu 6 bít = $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8$.

3.Bước tiếp theo dùng 8 bảng S_1, S_2, ... ,S_8 (được gọi là các hộp S). Với mỗi S_i là một bảng 4×16 cố định có các hàng là các số nguyên từ 0 đến 15. Với xâu bít có độ dài 6 (Kí hiệu $B_i = b_1b_2b_3b_4b_5b_6$), ta tính $S_j(B_j)$ như sau: Hai bít b_1b_6 xác định biểu diễn nhị phân của hàng r của S_j ($0 \le r \le 3$) và bốn bít ($b_2b_3b_4b_5$) xác định biểu diễn nhị phân của cột c của S_j ($0 \le c \le 15$). Khi đó $S_j(B_j)$ sẽ xác định phần tử $S_j(r,c)$; phần tử này viết dưới dạng nhị phân là một xâu bít có độ dài 4. (Bởi vậy, mỗi S_j có thể được coi là một hàm mã mà đầu vào là một xâu bít có độ dài 2 và một xâu bít có độ dài 4, còn đầu ra là một xâu bít có độ dài 4). Bằng cách tương tự tính các $C_j = S_j(B_j)$, $1 \le j \le 8$.

4. Xâu bít $C = C_1C_2... C_8$ có độ dài 32 được hoán vị theo phép hoán vị cố định P. Xâu kết quả là P(C) được xác định là f(A,J).

Hàm f được mô tả trong hình 3.2. Chủ yếu nó gômg một phép thế (sử dụng hộp S), tiếp sau đó là phép hoán vị P. 16 phép lặp của f sẽ tạo nên một hệ mật tích nêu như ở phần 2.5.

Hình 3.2. Hàm f của DES



Trong phần còn lại của mục này, ta sẽ mô tả hàm cụ thể được dùng trong DES. Phép hoán vị ban đầu IP như sau:

IP
58 50 42 34 26 18 10 2
60 52 44 36 28 20 12 4
62 54 46 38 31 22 14 6
64 56 48 40 32 24 16 8
57 49 41 33 25 17 9 1
59 51 43 35 27 19 11 3
61 53 45 37 29 21 13 5
63 55 47 39 31 23 15 7

Bảng này có nghĩa là bít thứ 58 của x là bít đầu tiên của IP(x); bít thứ 50 của x là bít thứ hai của IP(x), .v.v . . .

Phép hoán vi ngược IP^{-1} là:

IP^{-1}
40 8 48 16 56 24 64 32
39 7 47 15 55 23 63 31
38 6 46 14 54 22 62 30
37 5 45 13 53 21 61 29
36 4 44 12 52 20 60 28
35 3 43 11 51 19 59 27
34 2 42 10 50 18 58 26
33 1 41 9 49 17 57 25

Hàm mở rộng E được xác đinh theo bảng sau:

Bảng chọn E bít					
32	1	2	3	4	5
4	5	6	7	8	9
8	9	10	11	12	13
12	13	14	15	16	17
16	17	18	19	20	21
20	21	22	23	24	25
24	25	26	27	28	29
28	29	30	31	32	1

Tám hộp S là:

S_1															
14	4	13	1	2	15	11	8	3	10	3	12	5	9	1	7
1	15	7	4	14	2	13	1	10	6	12	11	9	5	3	8
4	1	14	8	13	6	2	11	15	12	9	7	3	10	5	0
15	12	8	2	4	9	1	7	5	11	3	14	10	0	6	13

S_1															
15	1	8	14	6	11	3	4	9	7	2	13	12	0	5	10
3	13	4	7	15	2	8	14	12	0	1	10	6	9	11	5
0	14	7	11	10	4	13	1	5	8	12	6	9	3	2	15
13	8	10	1	3	15	4	2	11	6	7	12	0	5	14	9

S_3															
10	0	9	14	6	3	15	5	1	13	12	7	11	4	2	8
13	7	0	9	3	4	6	10	2	8	5	14	12	11	15	1
13	6	4	9	8	5	3	0	11	1	2	12	5	10	14	7
1	10	13	0	6	9	8	7	4	15	14	3	11	5	2	12

S_4															
7	13	14	3	0	6	9	10	1	2	8	5	11	12	4	15
13	8	11	5	6	15	0	3	4	7	2	12	1	10	14	9
10	6	9	0	12	11	7	13	15	1	3	14	5	2	8	4
3	15	0	6	10	1	13	8	9	4	5	11	12	7	2	14

S_5															
2	12	4	1	7	10	11	6	8	5	3	15	13	0	14	9
14	11	2	12	4	7	13	1	5	0	15	10	3	9	8	6
4	2	1	11	10	13	7	8	15	9	12	5	6	3	0	14
11	8	12	7	1	14	2	13	6	15	0	9	10	4	5	3

S_6															
12	1	10	15	9	2	6	8	0	13	3	4	14	7	15	11
10	15	4	2	7	12	9	5	6	1	13	14	0	11	3	8
9	14	15	5	2	8	12	3	7	0	4	10	1	13	11	6
4	3	2	12	9	5	15	10	11	14	11	7	6	0	8	13

S_7															
4	11	12	14	15	0	8	13	3	12	9	7	5	10	6	1
13	0	11	7	4	9	1	10	14	3	5	12	2	15	8	6
1	4	11	13	12	3	7	14	10	15	6	8	0	5	9	2
6	11	13	8	1	4	10	7	9	5	0	15	14	2	3	12

S_8															
13	2	8	4	6	15	11	1	10	9	3	14	5	0	12	7
1	15	13	8	10	3	7	4	12	5	6	11	0	14	9	2
7	11	4	1	9	12	14	2	0	6	10	13	15	3	5	8
2	1	14	7	4	10	8	13	15	12	9	0	3	5	6	11

Và phép hoán vị P có dạng:

P		
16	7	20
29	12	28
1	15	23
5	18	31
32	27	3
19	13	30
22	11	4

Cuối cung ta cần mô tả việc tính toán bảng khoá từ khoá K. Trên thực tế, K là một xâu bít độ dài 64, trong đó 56 bít là khoá và 8 bít để kiểm tra tính chẵn lẻ nhằm phát hiện sai. Các bít ở các vị trí 8,16, . . ., 64 được xác định sao cho mỗi byte chứa một số lẻ các số "1". Bởi vậy một sai sót đơn lẻ có thể phát hiện được trong mỗi nhóm 8 bít. Các bít kiểm tra bị bỏ qua trong quá trình tính toán bảng khoá.

1. Với một khoá K 64 bít cho trước, ta loại bỏ các bít kiểm tra tính chẵn lẻ và hoán vị các bít còn lại của K theo phép hoán vị cố định PC-1. Ta viết:

$$PC\text{-}1(K) = C_0D_0$$

2. Với i thay đổi từ 1 đến 16:
3.

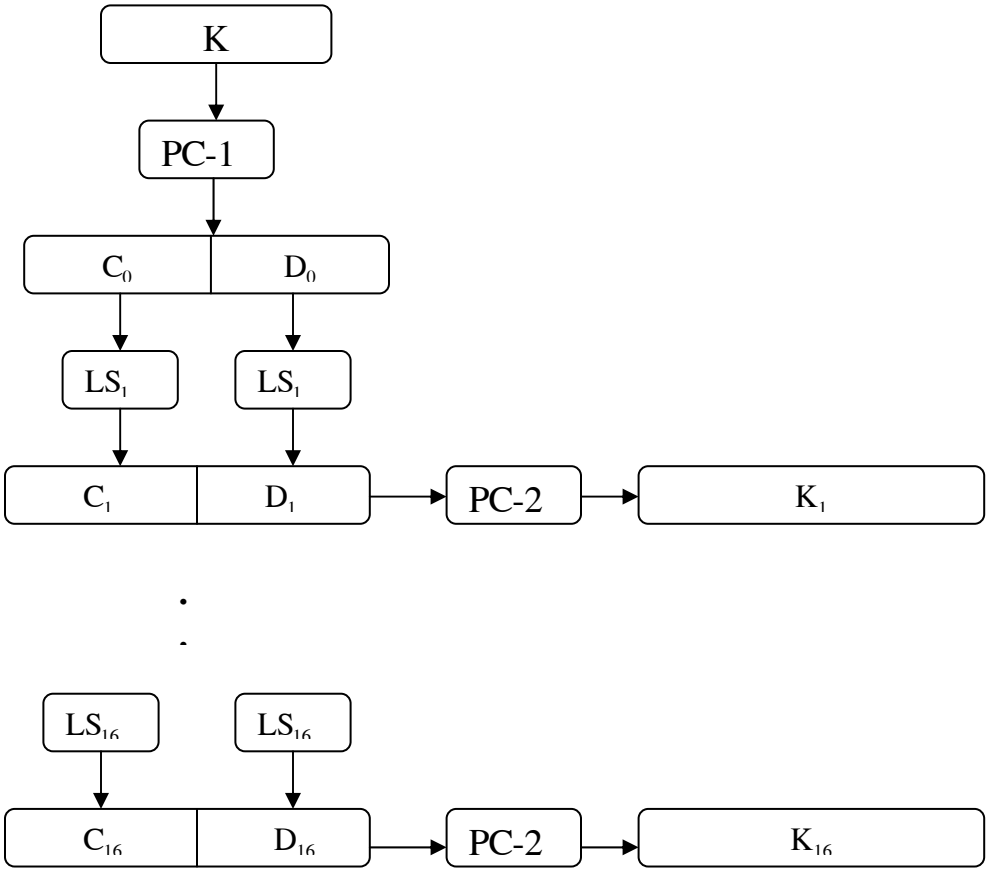
$$C_i = LS_i(C_{i-1})$$
$$D_i = LS_i(Di\text{-}1)$$

Việc tính bảng khoá được mô tả trên hình 3.3

Các hoán vị PC-1 và PC-2 được dùng trong bảng khoá là:

PC-1					
57	49	41	33	25	17
1	58	50	42	34	26
10	2	59	51	43	35
19	11	3	60	52	44
63	55	47	39	31	23
7	62	54	46	38	30
14	6	61	53	45	37
21	13	5	28	20	12

Hình 3.3 Tính bảng khoá DES.



PC-2					
14	17	11	24	1	5
3	28	15	6	21	10
23	19	12	4	26	8
16	7	27	20	13	2
41	52	31	37	47	55
30	40	51	45	33	48
44	49	39	56	34	53
46	42	50	36	29	32

Bây giờ ta sẽ đưa ra bảng khoá kết quả. Như đã nói ở trên, mỗi vòng sử dụng một khoá 48 bít gồm 48 bít nằm trong K. Các phần tử trong các bảng dưới đây biểu thị các bít trong K trong các vòng khoá khác nhau.

Vòng 1											
10	51	34	60	49	17	35	57	2	9	19	42
3	35	26	25	44	58	59	1	36	27	18	41
22	28	39	54	37	4	47	30	5	53	23	29
61	21	38	63	15	20	45	14	13	62	55	31

Vòng 2											
2	43	26	52	41	9	25	49	59	1	11	34
60	27	18	17	36	50	51	58	57	19	10	33
14	20	31	46	29	63	39	22	28	45	15	21
53	13	30	55	7	12	37	6	5	54	47	23

Vòng 3											
51	27	10	36	25	58	9	33	43	50	60	18
44	11	2	1	49	34	35	42	41	3	59	17
61	4	15	30	13	47	23	6	12	29	62	5
37	28	14	39	54	63	21	53	20	38	31	7

Vòng 4											
35	11	59	49	9	42	58	17	27	34	44	2
57	60	51	50	33	18	19	26	25	52	43	1
45	55	62	14	28	31	7	53	63	13	46	20
21	12	61	23	38	47	5	37	4	22	15	54

Vòng 5
19 60 43 33 58 26 42 1 11 18 57 51
41 44 35 34 17 2 3 10 9 36 27 50
29 39 46 61 12 15 54 37 47 28 30 4
.5 63 45 7 22 31 20 21 55 6 62 38

Vòng 6
3 44 27 17 42 10 26 50 60 2 41 35
25 57 19 18 1 51 52 59 58 49 11 34
13 23 30 45 63 62 38 21 31 12 14 55
20 47 29 54 6 15 4 5 39 53 46 22

Vòng 7
52 57 11 1 26 59 10 34 44 51 25 19
9 41 3 2 50 35 36 43 42 33 60 18
28 7 14 29 47 46 22 5 15 63 61 39
4 31 13 38 53 62 55 20 23 38 30 6

Vòng 8
36 41 60 50 10 43 59 18 57 35 9 3
58 25 5251 34 19 49 27 26 17 44 2
12 54 61 13 31 30 6 20 62 47 45 23
55 15 28 22 37 46 39 4 721 14 53

Vòng 9
57 33 52 42 2 35 51 10 49 27 1 60
50 17 44 43 26 11 41 19 18 9 36 59
4 46 53 5 23 22 61 12 54 39 37 15
47 7 20 14 29 38 31 63 62 13 6 45

Vòng 10
41 17 36 26 51 19 35 59 33 11 50 44
34 1 57 27 10 60 25 3 2 58 49 43
55 30 37 20 7 6 45 63 38 23 21 62
31 54 4 61 13 22 15 47 46 28 53 29

Vòng 11
25 1 49 10 35 3 19 43 17 60 34 57
18 50 41 11 59 44 9 52 51 42 33 27
39 14 21 4 54 53 29 47 22 7 5 46
15 38 55 45 28 6 62 31 30 12 37 13

Vòng 12
9 50 33 59 19 52 3 27 1 44 18 41
2 34 25 60 43 57 58 36 35 26 17 11
23 61 5 55 38 37 13 31 6 54 20 30
62 22 39 29 12 53 46 15 14 63 21 28

Vòng 13
58 34 17 43 3 36 52 11 50 57 2 25
51 18 9 44 27 41 42 49 19 10 1 60
7 45 20 39 22 21 28 15 53 38 4 14
46 6 23 13 63 37 30 62 61 47 5 12

Vòng 14
42 18 1 27 52 49 36 60 34 41 51 9
35 2 58 57 11 25 26 33 3 59 50 44
54 29 4 23 6 5 12 62 37 22 55 61
30 53 7 28 47 21 14 46 45 31 20 63

Vòng 15
26 2 50 11 36 33 49 44 18 25 35 58
19 51 42 41 60 9 10 17 52 43 34 57
38 13 55 7 53 20 63 46 21 6 39 45
14 37 54 12 31 5 61 30 29 15 4 47

Vòng 16
18 59 42 3 57 25 41 36 10 17 27 50
11 43 34 33 52 1 2 9 44 35 26 49
30 5 47 62 45 12 55 58 13 61 31 37
6 27 46 4 23 28 53 22 21 7 62 39

Phép giải mã được thực hiện nhờ dùng cùng thuật toán như phép mã nếu đầu vào là y nhưng dùng bảng khoá theo thứ tự ngược lại $K_{16},...K_1$. Đầu ra của thuật toán sẽ là bản rõ x.

3.2.1. Một ví dụ về DES.

Sau đây là một ví dụ về phép mã DES. Giả sử ta mã bản rõ (ở dạng mã hexa - hệ đếm 16):

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F

Bằng cách dùng khoá

1 2 3 4 5 7 7 9 9 B B C D F F 1

Khoá ở dạng nhị phân (không chứa các bít kiểm tra) là:

0001001001101001010110111100100110110111101101111111000

Sử dụng IP, ta thu được L_0 và R_0 (ở dạng nhị phân) như sau:

L_0 = 11001100000000000110010011111111
$L_1 = R_0$ = 11110000101010101111000010101010

Sau đó thực hiện 16 vòng của phép mã như sau:

$E(R_0)$ = 011110100001010101010101011110100001010101010101
K_1 = 000110110000000101110111111111110001110000011100 10
$E(R_0) \oplus K_1$ = 011000010001011110111010100001100110010100100111
S-box outputs 01011100100000101011010110010111
$f(R_0,K_1)$ = 00100011010010101010100110111011
$L_2 = R_1$ = 11101111010010100110010101000100

$E(R_1)$ = 011101011110101001010100001100001010101000001001
K_2 = 011110011010111011011001110110111100100111100101
$E(R_1) \oplus K_2$ = 000011000100010010001101111010110110001111101100
S-box outputs 11111000110100000011101010101110
$f(R_1,K_2)$ = 00111100101010111000011110100011
$L_3 = R_2$ = 11001100000000001011011100001001

$E(R_2)$ = 11100101100000000000001010111010111010000101001 1
K_3 = 010101011111110010001010010000101100111110011001
$E(R_2) \oplus K_3$ = 101100000111110010001000111110000010011111001010
S-box outputs 00100111000100001110000101101111
$f(R_2,K_3)$ = 01001101000101100110111010110000
$L_4 = R_3$ = 10100010010111000000101111110100

$E(R_3)$ =010100000100001011111000000001010111111111010100
K_4 = 011100101010110111010110110110110011010100011101
$E(R_3) \oplus K_4$ = 001000101110111100101110110111100100101010110100
S-box outputs 00100001111011011001111100111010
$f(R_3,K_4)$ = 10111011001000110111011101001100
$L_5 = R_4$ = 01110111001000100000000001000101

$E(R_4)$ = 10111010111010010000010000000000000000001000001010
K_5 = 01111100111011000000011111101011010100111010100 0
$E(R_4) \oplus K_5$ = 11000110000001010000001111101011010100011010001 0
S-box outputs 01010000110010000011000111101011
$f(R_4,K_5)$ = 00101000000100111010110111000011
$L_6 = R_5$ = 10001010010011111010011000110111

$E(R_5)$ = 11000101010000100101111111010000110000011010111 1
K_6 = 01100011101001010011111001010000011110110010111 1
$E(R_5) \oplus K_6$ =10100110111001110110000011000000010111010100000000
S-box outputs 01000001111100110100110000111101
$f(R_5,K_6)$ = 10011110010001011100110100101100
$L_7 = R_6$ = 11101001011001111100110101101001

$E(R_6)$ = 11110101001010110000111111100101101010110101001 1
K_7 = 11101100100001001011011111111011000011000101111 00
$E(R_6) \oplus K_7$ = 00011001101011111011100000010011101100111110111 1
S- box outputs 00010000011101010100000010101101
$f(R_6,K_7)$ = 10001100000001010001110000100111
$L_8 = R_7$ = 00000110010010101011101000010000

$E(R_7)$ = 00000000110000100101010101011111010000001010000 0
K_8 = 11110111100010100011101011000001001110111111101 1
$E(R_7) \oplus K_8$ = 11110111010010000110111110011110011110110101101 1
S-box outputs 01101100000110000111110010101110
$f(R_7,K_8)$ = 00111100000011101000011011111001
$L_9 = R_8$ = 11010101011010010100101110010000

$E(R_8)$ = 01101010101010110101001010100101011111100101000 01
K_9 = 11100000110110111110101111101101111001111000000 1
$E(R_8) \oplus K_9$ = 10001010011100001011100101001000100110110010000 0
S-box outputs 00010001000011000101011101110111
$f(R_8,K_9)$ = 00100010001101100111110001101010
$L_{10} = R_9$ = 00100100011111001100011001111010

$E(R_9)$ = 00010000100000111111100101100000110000011111101 00
K_{10} = 10110001111100110100011110111010010000110010011 11
$E(R_9) \oplus K_{10}$ = 10100001011100001011111011011010100001011011101 1
S-box outputs 11011010000001000101001001110101
$f(R_9,K_{10})$ = 01100010101111001001110000100010
$L_{11} = R_{10}$ = 10110111110101011101011110110010

$E(R_{10})$ = 01011010111111101010101111101010111111011010010 1
K_{11} = 00100001010111111101001111011110110100111000011 0
$E(R_{10}) \oplus K_{11}$ = 01111011101000010111100000110100001011100010001 1
S-box outputs 01110011000001011101000100000001
$f(R_{10},K_{11})$ = 11100001000001001111101000000010
$L_{12} = R_{11}$ = 11000101011110000011110001111000

$E(R_{11})$ = 011000001010101111110000000111111000001111110001
K_{12} = 011101010111000111110101100101000110011111101001
$E(R_{11}) \oplus K_{12}$ = 000101011101101000000101100010111110010000011000
S-box outputs 01110011000001011101000100000001
$f(R_{11},K_{12})$ = 11000010011010001100111111101010
$L_{13} = R_{12}$ = 01110101101111010001100001011000

$E(R_{12})$ = 001110101011110111111010100011110000001011110000
K_{13} = 100101111100010111010001111111010101110100100001
$E(R_{12}) \oplus K_{13}$ = 101011010111100000101011011101011011100010110001
Sbox outputs 10011010110100011000101101001111
$f(R_{12},K_{13})$ = 11011101101110110010100100100010
$L_{14} = R_{13}$ = 00011000110000110001010101011010

$E(R_{13})$ = 000011110001011000000110100010101010101011110100
K_{13} = 010111110100001110110111111100101110011100111010
$E(R_{13}) \oplus K_{14}$ = 010100000101010110110001011110000100110111001110
S-box outputs 01100100011110011001101011110001
$f(R_{13},K_{14})$ = 10110111001100011000111001010101
$L_{15} = R_{14}$ = 11000010100011001001011000001101

$E(R_{14})$ = 11100000010101000101100101001010110000000101011
K_{15} = 10111111100100011000110100111101001111110000 1010
$E(R_{14}) \oplus K_{15}$ = 01011111110001011101010001110111111111111010100 01
S-box outputs 10110010111010001000110100111100
$f(R_{14},K_{15})$ = 01011011100000010010011101101110
R_{15} = 01000011010000100011001000110100

$E(R_{15})$ = 00100000011010100000010000011010010000011010 1000
K_{16} = 11001011001111011000101100001110000101111111010 5
$E(R_{15}) \oplus K_{16}$ = 11101011010101111000111100010100010101100101110 1
S-box outputs 10100111100000110010010000101001
$f(R_{15},K_{16})$ = 11001000110000000100111110011000
R_{16} = 00001010010011001101100110010101

Cuối cùng áp dụng IP^{-1} vào L_{16},R_{16} ta nhận được bản mã hexa là:

8 5 E 8 1 3 5 4 0 F 0 A B 4 0 5

3.3. TRANH LUẬN VỀ DES.

Khi DES được đề xuất như một chuẩn mật mã, đã có rất nhiều ý kiến phê phán. Một lý do phản đối DES có liên quan đến các hộp S. Mọi tính toán liên quan đến DES ngoại trừ các hộp S đều tuyến tính, tức việc tính phép hoặc loại trừ của hai đầu ra cũng giống như phép hoặc loại trừ của hai đầu vào rồi tính tóan đầu ra. Các hộp S - chứa đựng thành phần phi tuyến của hệ

mật là yếu tố quan trong nhất đối với độ mật của hệ thống(Ta đã thấy trong chương 1 là các hệ mật tuyến tính - chẳng hạn như Hill - có thể dễ dàng bị mã thám khi bị tấn công bằng bản rõ đã biết). Tuy nhiên tiêu chuẩn xây dựng các hộp S không được biết đầy đủ. Một số người đã gợi ý là các hộp S phải chứa các "cửa sập" được dấu kín, cho phép Cục An ninh Quốc gia Mỹ (NSA) giải mã được các thông báo nhưng vẫn giữ được mức độ an toàn của DES. Dĩ nhiên ta không thể bác bỏ được khẳng định này, tuy nhiên không có một chứng cớ nào được đưa ra để chứng tỏ rằng trong thực tế có các cửa sập như vậy.

Năm 1976 NSA đã khẳng định rằng, các tính chất sau của hộp S là tiêu chuẩn thiết kế:

P_0 Mỗi hàng trong mỗi hộp S là một hoán vị của các số nguyên 0, 1, . . . , 15.

P_1 Không một hộp S nào là một hàm Affine hoặc tuyến tính các đầu vào của nó.

P_2 Việc thay đổi một bít vào của S phải tạo nên sự thay đổi ít nhất là hai bít ra.

P_3 Đối với hộp S bất kì và với đầu vào x bất kì S(x) và S(x $\oplus$ 001100) phải khác nhau tối thiểu là hai bít (trong đó x là xâu bít độ dài 6).

Hai tính chất khác nhau sau đây của các hộp S có thể coi là được rút ra từ tiêu chuẩn thiết kế của NSA.

P_4 Với hộp S bất kì, đầu vào x bất kì và với e, f $\in\{0,1\}$: S(x) $\neq$S(x $\oplus$ 11ef00).

P5 Với hộp S bất kì , nếu cố định một bít vào và xem xét giá trị của một bít đầu ra cố định thì các mẫu vào để bít ra này bằng 0 sẽ xấp xỉ bằng số mẫu ra để bít đó bằng 1.(Chú ý rằng, nếu cố định giá trị bít vào thứ nhất hoặc bít vào thứ 6 thì có 16 mẫu vào làm cho một bít ra cụ thể bằng 0 và có 16 mẫu vào làm cho bít này bằng 1. Với các bít vào từ bít thứ hai đến bít thứ 5 thì điều này không còn đúng nữa. Tuy nhiên phân bố kết quả vẫn gần với phân bố đều. Chính xác hơn, với một hộp S bất kì, nếu ta cố định giá trị của một bít vào bất kì thì số mẫu vào làm cho một bít ra cố định nào đó có giá trị 0 (hoặc 1) luôn nằm trong khoảng từ 13 đến 19).

Người ta không biết rõ là liệu có còn một chuẩn thiết kế nào đầy đủ hơn được dùng trong việc xây dựng hộp S hay không.

Sự phản đối xác đáng nhất về DES chính là kích thước của không gian khoá: 2^{56} là quá nhỏ để đảm bảo an toàn thực sự. Nhiều thiết bi chuyên dụng đã được đề xuất nhằm phục vụ cho việc tấn công với bản rõ đã biết. Phép tấn công này chủ yếu thực hiện tìm khoá theo phương pháp vét cạn. Tức với bản rõ x 64 bít và bản mã y tương ứng, mỗi khoá đều có thể được kiểm tra cho tới khi tìm được một khoá K thảo mãn $e_K(x) = y$. Cần chú ý là có thể có nhiều hơn một khoá K như vậy).

Ngay từ năm 1977, Diffie và Hellman đã gợi ý rằng có thể xây dựng một chíp VLSI (mạch tích hợp mật độ lớn) có khả năng kiểm tra được 10^6khoá/giây. Một máy có thể tìm toàn bộ không gian khoá cỡ 10^6 trong khoảng 1 ngày. Họ ước tính chi phí để tạo một máy như vậy khoảng $2.10^7$$.

Trong cuộc hội thảo tại hội nghị CRYPTO'93, Michael Wiener đã đưa ra một thiết kế rất cụ thể về máy tìm khoá. Máy này xây dựng trên một chíp tìm khoá, có khả năng thực hiện đồng thời 16 phép mã và tốc độ tới 5×10^7 khoá/giây. Với công nghệ hiện nay, chi phí chế tạo khoảng 10,5$/chíp. Giá của một khung máy chứa 5760 chíp vào khoảng 100.000$ và như vậy nó có khả năng tìm ra một khoá của DES trong khoảng 1,5 ngày. Một thiết bị dùng 10 khung máy như vậy có giá chừng 10^6 $ sẽ giảm thời gian tìm kiếm khoá trng bình xuống còn 3,5 giờ.

3.4. DES TRONG THỰC TẾ.

Mặc dù việc mô tả DES khá dài dòng song người ta có thể thực hiện DES rất hữa hiệu bằng cả phần cứng lẫn phần mền. Các phép toán duy nhất cần được thực hiện là phép hoặc loại trừ các xâu bít. Hàm mở rộng E, các hộp S, các hoán vị IP và P và việc tính toán các giá tri K_1,.. . ,K_{16} đều có thể thực hiện được cùng lúc bằng tra bảng (trong phần mền) hoặc bằng cách nối cứng chúng thành một mạch.

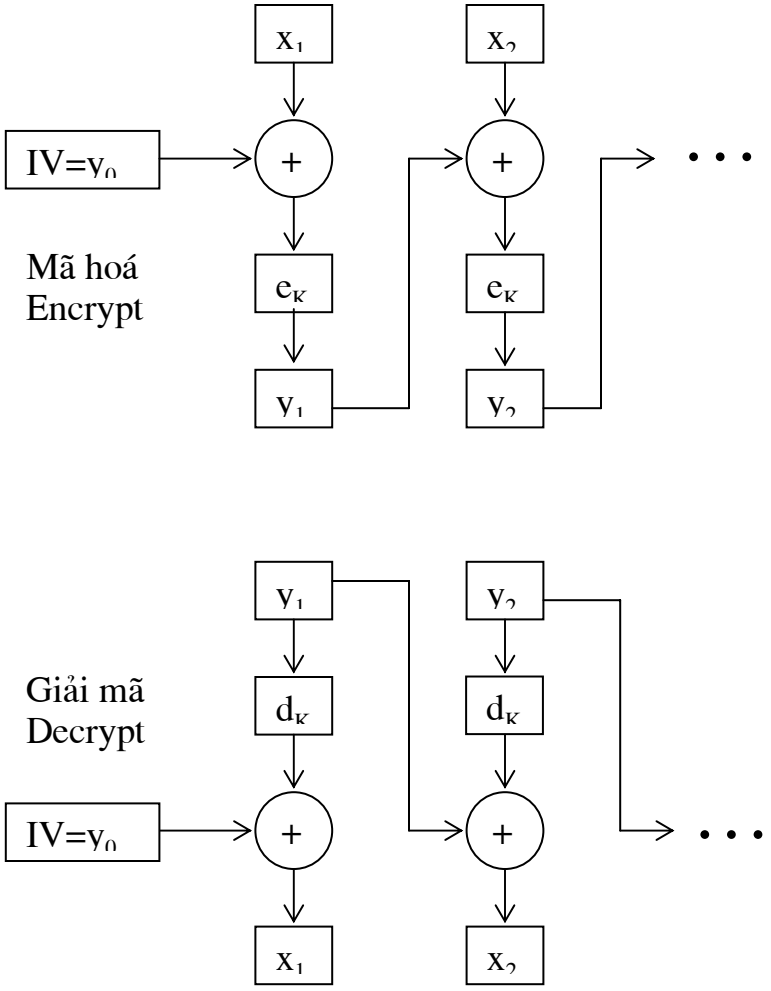
Các ứng dụng phần cứng hiện thời có thể đạt được tốc độ mã hoá cực nhanh. Công ty Digital Equipment đã thông báo tại hội nghị CRUPTO'92 rằng họ sẽ chế tạo một chíp có 50 ngàn tranzistor có thể mã hoá với tốc độ 1 Gbít/s bằng cách dùng nhịp có tốc độ 250MHz. Giá của chíp này vào khoảng 300$. Tới năm 1991 đã có 45 ứng dụng phần cứng và chương trình cơ sở của DES được Uỷ ban tiêu Chuẩn quốc gia Mỹ (NBS) chấp thuận.

Một ứng dụng quan trọng của DES là trong giao dịch ngân hàng Mỹ - (ABA) DES được dùng để mã hoá các số định danh cá nhân (PIN) và việc chuyển tài khoản bằng máy thủ quỹ tự động (ATM). DES cũng được Hệ thống chi trả giữa các nhà băng của Ngân hàng hối đoái (CHIPS) dùng để xác thực các giao dịch vào khoản trên $1,5\times10^{12}$ USA/tuần. DES còn được sử dụng rộng rãi trong các tổ chức chính phủ. Chẳng hạn như bộ năng lượng, Bộ Tư pháp và Hệ thống dự trữ liên bang.

3.4.1. Các chế độ hoạt động của DES.

Có 4 chế độ làm việc đã được phát triển cho DES: Chế độ chuyển mã điện tử (ECB), chế độ phản hồi mã (CFB), chế độ liên kết khối mã (CBC) và chế độ phản hồi đầu ra (OFB). Chế độ ECB tương ứng với cách dùng thông thường của mã khối: với một dãy các khối bản rõ cho trước $x_1,x_2,\ldots$ (mỗi khối có 64 bít), mỗi x_i sẽ được mã hoá bằng cùng một khoá K để tạo thành một chuỗi các khối bản mã y_1y_2 ... theo quy tắc $y_i = e_K(y_{i-1} \oplus x_i)$ $i \geq 1$. Việc sử dụng chế độ CBC được mô tả trên hình 3.4.

Hình 3.4. Chế độ CBC.

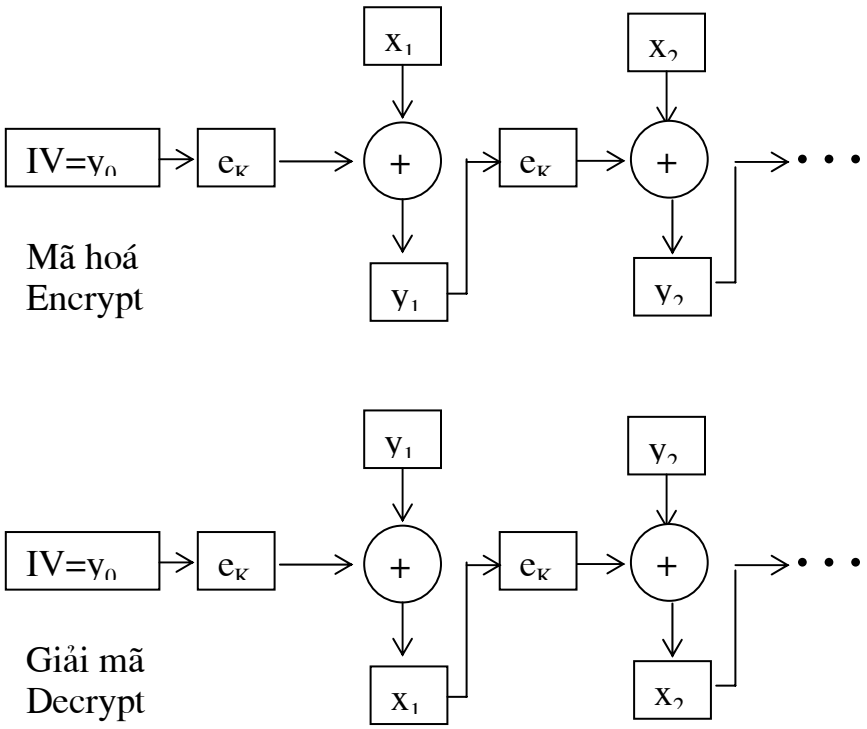


Trong các chế độ OFB và CFB dòng khoá được tạo ra sẽ được cộng mod 2 với bản rõ (tức là nó hoạt động như một hệ mã dòng, xem phần 1.1.7). OFB thực sự là một hệ mã dòng đồng bộ: dòng khoá được tạo bởi việc mã lặp véc tơ khởi tạo 64 bít (véc tơ IV). Ta xác định z_0 =IV và rồi tính dòng

khoá z_1z_2 . . . theo quy tắc $z_i = e_K(z_{i-1})$, i≥1. Dãy bản rõ x_1x_2 . . . sau đó sẽ được mã hoá bằng cách tính $y_i = x_i \oplus z_i$,i ≥1.

Trong chế độ CFB, ta bắt đầu với y_0 = IV (là một véc tơ khởi tạo 64 bít) và tạo phần tử z_i của dòng khoá bằng cách mã hoá khối bản mã trước đó. Tức $z_i = e_K(y_{i-1})$, i ≥1. Cũng như trong chế độ OFB: $y_i = x_i \oplus z_i$,i ≥1. Việc sử dụng CFB được mô tả trên hình 3.5 (chú ý rằng hàm mã DES e_K được dùng cho cả phép mã và phép giải mã ở các chế độ CFB và OFB).

Hình 3.5. Chế độ CFB



Cũng còn một số biến tấu của OFB và CFB được gọi là các chế độ phản hồi K bít (1 < K < 64). Ở đây ta đã mô tả các chế độ phản hồi 64 bít. Các chế độ phản hồi 1 bít và 8 bít thường được dùng trong thực tế cho phép mã hoá đồng thời 1 bit (hoặc byte) số liệu.

Bốn chế độ công tác có những ưu, nhược điểm khác nhau. Ở chế độ ECB và OFB, sự thay đổi của một khối bản rõ x_i 64 bít sẽ làm thay đổi khối bản mã y_i tương ứng, nhưng các khối bản mã khác không bị ảnh hưởng. Trong một số tình huống đây là một tính chất đáng mong muốn. Ví dụ, chế độ OFB thường được dùng để mã khi truyền vệ tinh.

Mặt khác ở các chế độ CBC và CFB, nếu một khối bản rõ x_i bị thay đổi thì y_i và tất cả các khối bản mã tiếp theo sẽ bi ảnh hưởng. Như vậy các chế độ CBC và CFB có thể được sử dụng rất hiệu quả cho mục đích xác thực. Đặc biệt hơn, các chế độ này có thể được dùng để tạo mã xác thực bản tin (MAC - message authentication code). MAC được gắn thêm vào các khối bản rõ để thuyết phục Bob tin rằng, dãy bản rõ đó thực sự là của Alice mà không bị Oscar giả mạo. Như vậy MAC đảm bảo tính toàn vẹn (hay tính xác thực) của một bản tin (nhưng tất nhiên là MAC không đảm bảo độ mật).

Ta sẽ mô tả cáchb sử dụng chế độ BCB để tạo ra một MAC. Ta bắt đầu bằng véc tơ khởi tạ IV chứa toàn số 0. Sau đó dùng chế đô CBC để tạo các khối bản mã $y_1,. . . ,y_n$ theo khoá K. Cuối cùng ta xác định MAC là y_n. Alice sẽ phát đi dãy các khối bản rõ $x_1,x_2,. . . ,x_n$ cùng với MAC. Khi Bob thu được $x_1. . .x_n$ anh ta sẽ khôi phục lại $y_1. . .y_n$ bằng khoá K bí mật và xác minh xem liệu y_n có giống với MAC mà mình đã thu được hay không.

Nhận thấy Oscar không thể tạo ra một MAC hợp lệ do anh ta không biết khoá K mà Alice và Bob đang dùng. Hơn nữa Oscar thu chặn được dãy khối bản rõ $x_1. . .x_n$ và thay đổi ít nhiều nội dung thì thì chắc chắn là Oscar không thể thay đổi MAC để được Bob chấp nhận.

Thông thường ta muốn kết hợp cả tính xác thực lẫn độ bảo mật. Điều đó có thể thực hiện như sau: Trước tiên Alice dùng khoá K_1 để tạo MAC cho $x_1. . . x_n$. Sau đó Alice xác định x_{n+1} là MAC rồi mã hoá dãy x1. . .x_{n+1} bằng khoá thứ hai K_2 để tạo ra bản mã $y_1. . .y_{n+1}$. Khi Bob thu được y1. . .y_{n+1} , trước tiên Bob sẽ giải mã (bằng K_2) và kiểm tra xem x_{n+1} có phải là MAC đối với dãy $x_1. . .x_n$ dùng K_1 hay không.

Ngược lại, Alice có thể dùng K_1 để mã hoá $x_1. . .x_n$ và tạo ra được $y_1...y_n$, sau đó dùng K_2 để tạo MAC y_{n+1} đối với dãy $y_1. . .y_n$. Bob sẽ dùng K_2 để xác minh MAC và dung K_1 để giải mã $y_1. . .y_n$.

3.5. PHÉP TỐI ƯU HOÁ THỜI GIAN - BỘ NHỚ.

Trong phần này sẽ mô tả phép tối ưu hoá thời gian - bô nhớ khá lý thú khi phá DES bằng tấn công bản rõ chọn lọc. Ta nhớ lại rằng, trong phép tấn công bản rõ chọn lọc, Oscar đã thu được cặp rõ - mã được tạo bởi khoá K (chưa biết). Bởi vậy, Oscar có x và y, trong đó $y = e_K(x)$ và anh ta muốn xác định được K.

Một đặc điểm của phép tối ưu hoá thời gian - bộ nhớ này là nó không phụ thuộc vào "cấu trúc" của DES trên mọi phương diện. Khía cạnh duy nhất của DES có quan hệ tới phép tấn công này là các bản rõ và các bản mã 64 bít trong khi các khoá có 56 bít.

Ta đã thảo luận về ý tưởng tìm khoá bằng phương pháp vét cạn: với một cặp rõ - mã cho trước, hãy thử tất cả 2^{56} khoá cụ thể. Điều này không yêu cầu bộ nhớ, nhưng trung bình phải thử 2^{55} khoá trước khi tìm được khoá đúng. Mặt khác, với một bản rõ x cho trước, Oscar có thể tính trước $y_K = e_K(x)$ đối với toàn bộ 2^{56} khoá K và xây dựng một bảng các cặp (y_K,K) được sắp xếp theo các tạo độ đầu của chúng. Sau đó khi Oscar thu được bản mã y (là kết quả của phép mã bản rõ x), anh ta phải nhìn vào giá trị y trong bảng và lập tức tìm được khoá K. Như vậy trong trường hợp này việc tìm được khoá K chỉ yêu câu một thời gian cố định nhưng ta phải có một bô nhớ có dung lượng lớn và cần thời gian tính toán trước lớn (chú ý là quan điểm này không có lợi thế về thời gian tính toán tổng cộng nếu chỉ cần tìm một khoá, bởi vì việc xây dựng bảng cũng mất nhiều thời gian như việc tìm khóa vét cạn. Phương pháp này chỉ có lợi khi cần tìm nhiều khoá trong một khoảng thời gian vì ta chỉ cấn dùng một bảng cho tất cả các trường hợp).

Phép tối ưu hoá thời gian - bộ nhớ sẽ có thời gian tính toán nhỏ hơn phép tìm kiếm vét cạn và có yêu cầu bộ nhớ nhỏ hơn việc lập bangr tra cứu. Thuật toán có thể mô tả theo hai tham số m và t là các số nguyên dương. Thuật toán cần một hàm rút gọn R để rút gọn một xâu bít có độ dài 64 thành một xâu bít có độ dài 56 (chẳng hạn R phải vứt bỏ 8 trong 64 bít). Giả sử x là một xâu bản rõ cố định 64 bít. Hãy xác định hàm $g(K_0) = R(e_{K_o}(x))$ với một xâu bít K_0 có độ dài 56. Chú ý rằng g là một hàm thực hiện ánh xạ 56 bít sab\ng 56 bít.

Trong giai đoạn tiền xử lý, Oscar chọn m xâu bít ngẫu nhiên có độ dài 56 được kí hiệu là X(i,0), $1 \le i \le m$. Oscar tính x(i,j) với $1 \le j \le t$ theo quan hệ truy toán sau: $X(i,j) = g(X(i,j-1))$, $1 \le i\ x \le m$, $1 \le j \le t$ như chỉ trên hình 3.6.

Hình 3.6. Tính X(i,j)

$$X(1,0) \xrightarrow{g} X(1,1) \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} X(1,t)$$
$$X(2,0) \xrightarrow{g} X(2,1) \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} X(2,t)$$
$$\vdots$$
$$X(m,0) \xrightarrow{g} X(m,1) \xrightarrow{g} \ldots \xrightarrow{g} X(m,t)$$

Sau đó Oscar xây dựng một bảng các cặp T = (X(i,t), X(i,0) được sắp xếp theo toạ độ đầu của chúng(tức là chỉ lưu giữ cột đầu và cột cuối của X).

Sau khi thu được bản mã y (là bản mã của bản rõ x đã chọn). Oscar cần phải xác định K và anh ta sẽ xác định được nếu K nằm trong t cột đầu của bảng X, tuy nhiên anh ta chỉ làm điều này bằng cách chỉ nhìn vào bảng T.

Giả sử rằng K = X(i,t-j) với j nào đó, $1 \le j \le t$ (tức giả sử rằng K nằm ở t cột đầu tiên của X). Khi đó rõ ràng là $g^j(K) = x(i,t)$, trong đó g^j kí hiệu hàm nhận được bằng cách lặp g một số lần bằng j. Bây giờ ta thấy rằng:

$$\begin{aligned} g^j(K) &= g^{j-1}(g(K)) \\ &= g^{j-1}(R(e_K(x))) \\ &= g^{j-1}(R(y)) \end{aligned}$$

Giả sử tính $y_j, 1 \le j \le t$, từ quan hệ truy toán

$$y_i = \begin{cases} R(y) & \text{nếu } j = 1 \\ g(y_{j-1}) & \text{nếu } 2 \le j \le t \end{cases}$$

Từ đó rút ra rằng $y_j = X(i,t-j)$ nếu K = X(i,t-j). Tuy nhiên cần chú ý rằng $y_j = X(i,t)$ chưa đủ để đảm bảo là K = X(i,t-j). Sở dĩ như vậy vì hàm rút gọn R không phải là một đơn ánh: miền xác định của R có lực lượng 2^{64} và giá trị của R có lực lượng 2^{56}, bởi vậy tính trung bình có $2^8 = 256$ nghịch ảnh của một xâu bít bất kì cho trước có độ dài 56. Bởi vây cần phải kiểm tra xem $y = e_{X(i,t-j)}(x)$ hay không để biết liệu X(i,t-j) có thực sự là khoá hay không. Ta không lưu trữ giá trị X(i,t-j) nhưng có thể dễ dàng tính lại nó từ X(i,0) bằng cách lặp t-j lần hàm g.

Oscar sẽ thực hiện theo thuật toán được mô tả trên hình 3.7.

Hình 3.7. Phép tối ưu hoá bộ nhớ - thời gian trong DES.

1. Tính $y_1 = R(y)$
2. **for** j = 1 to t **do**
3. **if** $y_j = X(i,t-j)$ với giá trị i nào đó **then**
4. Tính X(i,t-j) từ X(i,0) bằng cách lặp t-j lần hàm g.
5. **if** y = eX(i,t-j)(x) **then**
   đặt K = X(i,t-j) và **QUIT**
6. Tính $y_{j+1} = g(y_j)$

Bằng cách phân tích xác suất thành công của thuật toán, có thể chứng tỏ rằng nếu $mt^2 \approx N = 2^{56}$ thì xác suất để K = X(i,t-j) với i, j nào đó sẽ vào khoảng 0,8môi trường/N. Thừa số 0,8 tính theo điều kiện không phải tất cả cácX(i,t) đều phân biệt . Điều này gợi ý cho ta nên lấy $m \approx t \approx N^{1/3}$ và xây dựng khoảng $N^{1/3}$ bảng, mỗi bảng dùng một hàm rút gọn R khác nhau. Nếu thực hiện đươc điều này thì yêu cầu về bộ nhớ là $112\times N^{1/3}$ bít (vì ta cần lưu trữ $2\times N^{2/3}$ số nguyên, mỗi số có 56 bít). Thời gian tiền tính toán dễ dàng thấy là cỡ O(N).

Việc phân tích thời gian chạy của thuật toán có khó hơn hơn một chút: Trước hết ta thấy rằng, bước 3 có thể chạy trong một thời gian không đổi (sử dụng phép mã hash) hoặc trong trường hợp xấu nhất, bước 3 có thể chạy với thời gian O(logm) khi dùng phép tmf kiếm nhị phân. Nếu bước 3 không thoả mãn (tức là phép tìm kiếm không thành công) thì thời gian chạy là $O(N^{2/3})$. Các phân tích chi tiết hơn chứng tỏ rằng, ngay cả khi tính cả thời gian chạy của các bước 4 và5 thì thời gian chạy trung bình chỉ tăng một lương là hằng số.

3.6 THÁM MÃ VI SAI (DC).

Phương pháp DC do Biham và Shamir đưa ra là một phương pháp tấn công DES rất nổi tiếng. Đây là một phép tấn công với bản rõ chọn lọc. Mặc dù phương pháp này không cho một phương pháp thực tế để phá DES 16 vòng thông dụng, nhưng nó có thể thực hiện thành công trong việc phá DES có số vòng mã hoá ít hơn. Chẳng hạn DES 8 vòng có thể phá được trong vòng vài phút trên một máy tính cá nhân nhỏ.

Bây giờ ta sẽ mô tả những ý tưởng cơ bản dùng trong kỹ thuật này, ta có thể bỏ qua phép hoá vị ban đầu IP và phép hoán vị ngược của nó (không

ảnh hưởng tới việc phân tích mã). Như đã nói ở trên, ta chỉ xét hạn chế DES n vòng với $n \leq 16$. Bởi vậy, với các điều kiện trên, ta coi L_0R_0 là bản rõ và L_nR_n là bản mã trong DES n vòng (cần chú ý rằng ta không cần đảo L_nR_n).

Phương pháp DC xoay quanh việc so sánh kết quả phép hoặc - loại trừ của hai bản rõ với kết quả của phép hoặc - loại trừ của hai bản mã tương ứng. Đại thể ta sẽ xét hai bản rõ L_0R_0 và$L_0^*R_0^*$ với giá trị của phép hoặc - loại trừ $L_0'R_0' = L_0R_0 \oplus L_0^*R_0^*$. Trong phần này ta sẽ sử dụng ký hiệu (') để chỉ phép hoặc - loại trừ (XOR) của hai xâu bít.

Định nghĩa 3.1

Giả sử S_j là một hộp S ($1 \leq j \leq 8$). Xét một cặp đã sắp xếp của các xâu bít độ dài 6 (ký hiệu là B_j, B_j^*). Ta nói rằng XOR vào (của S_j) là $B_j \oplus B_j^*$ và XOR ra (của S_j) là $S_j(B_j) \oplus S_j(B_j^*)$.

Chú ý rằng XOR vào là một xâu bít có độ dài 6 và XOR ra là một xâu bít có độ dài 4.

Định nghĩa 3.2

Với bất kỳ $B_j' \oplus (Z_2)^6$, ta định nghĩa tập $\nabla(B_j')$ gồm các cặp được sắp xếp (B_j,B_j^*) có XOR vào là B_j'.

Dễ dàng thấy rằng một tập $\nabla(B_j')$ bất kỳ đều chứa $2^6 = 64$ cặp và

$$\nabla(B_j') = \{(B_j, B_j \oplus B_j') : B_j \in (Z_2)^6\}$$

Với mỗi cặp trong $\nabla(B_j')$ ta có thể tính XOR ra của S_j và lập bảng phân bố kết quả. Có 64 XOR ra phân bố trong $2^4 = 16$ giá trị có thể. Tính không đều của các phân bố này là cơ sở cho phép tấn công.

Ví dụ 3.1.

Giả sử xét hộp S đầu tiên S_1 và XOR vào 110100, khi đó:

$\nabla(110100) = \{(000000,110100), (000001,110100), \ldots ,(111111,110100)\}$

Với mỗi cặp được sắp trong tập$\nabla(110100)$ ta tính XOR ra của S_1. Ví dụ $S_1(000000) = E_{16} = 1110$ và $S_1(110100) = 9_{16} = 1001$, bởi vậy XOR đối với cặp (000000,110100) là 0111.

Nếu làm công việc này cho tất cả 64 cặp trong $\nabla(110100)$ thì ta sẽ thu được phân bố sau của các XOR ra:

0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
0	8	16	6	2	0	0	12

1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
6	0	0	0	0	8	0	6

Trong ví dụ 3.1 chỉ có 8 trong 16 XOR ra có thể xuất hiện trên thực tế. Ví dụ cụ thể này có phân bố rất không đều. Nói chung nếu ta cố định một hộp S là S_j và một XOR vào B_j' thì trung bình có khoảng 75-80% các XOR ra là có thể xuất hiện.

Để mô tả và đưa ra các phân bố này, ta cần phải có thêm mọt số khái niệm thích hợp. Sau đó là một số định nghĩa.

Định nghĩa 3.3

Với $1 \le j \le 8$ và với các xâu bít B_j' có độ dài 6 còn C_j' có độ dài 4, ta định nghĩa:

$$IN_j(B_j',C_j') = \{ Bj \in (Z_2)^6 : S_j(B_j) \oplus S_j(B_j \oplus B_j') = C_j'\}$$

và

$$N_j(B_j',C_j') = | IN_j(B_j',C_j') |.$$

$N_j(B_j',C_j')$ là số các cặp có XOR vào bằng B_j' và có XOR ra bằng C_j' với hộp S_j. Các cặp thực tế có các XOR vào xác định và tạo nên các XOR ra xác định có thể nhận được từ tập $IN_j(B_j',C_j')$. Ta thấy rằng, tập này có thể được phân thành $N_j(B_j',C_j')/2$ cặp, mỗi cặp có số XOR vào bằng B_j'.

Chú ý rằng phân bố được lập bảng ở trong ví dụ 3.1 chứa các giá trị $N_1(110100,C_1')$, $C_1' \in (Z_2)^4$. Các tập $IN_1(110100,C_1')$ được liệt kê trên hình 3.8.

Với mỗi hộp trong 8 hộp S có 64 XOR và có thể. Bởi vậy có thể tính được tất cả 512 phân bố và dễ dàng dùng máy tính để lập bảng các phân bố này.

Cần nhớ lại rằng, đầu vào của các hộp S ở vong thứ i là $B = E \oplus J$, trong đó $E = E(R_{i-1})$ là một hàm mở rộng của R_{i-1} và $J = K_i$ là các bít khoá của vòng thứ i. Bây giờ số XOR vào (cho tất cả 8 hộp) có thể được tính như sau:

$$B \oplus B^* = (E \oplus J) \oplus (E^* \oplus J)$$
$$= E \oplus E^*$$

Có thể thấy môt điều rất quan trọng là XOR vao không phụ thuộc vào các bít khoá J (tuy nhiên chắc chắn XOR ra sẽ phụ thuộc vào các bít khóa này.

Hình 3.8. Các xâu vào có thể với XOR vào là 110100.

Các XOR ra	Các xâu vào có thể
0000	
0001	000011,001111,011110,011111, 101010,101011,110111,111011
0010	000100,000101,001110,010001, 010010,010100,011010,011011, 100000,100101,010110,101110, 101111,110000,110001,111010
0011	000001,000010,010101,100001, 110101,110110
0100	010011,100111
0101	
0110	
0111	000000,001000,001101,010111 011000,011101,100011,101001 101100,110100,111001,111100
1000	001001,001100,011001,101101 111000,111101
1001	
1010	
1011	
1100	
1101	000110,010000,010110,011100 100010,100100,101000,110010
1110	
1111	000111,001010,001011,001100 111110,111111

Ta viết các E,B, và J là một dãy ghép kế tiếp 8 xâu 6 bít:

$$B = B_1\, B_2\, B_3\, B_4\, B_5\, B_6\, B_7\, B_8$$
$$E = E_1\, E_2\, E_3\, E_4\, E_5\, E_6\, E_7\, E_8$$
$$J = J_1\, J_2\, J_3\, J_4\, J_5\, J_6\, J_7\, J_8$$

và viết B^*, E^*,J^* theo cách tương tự. Nếu biết các giá trị E_j và E_j^* với j nào đó, $1 \le j \le 8$, và giá trị XOR ra (của S_j) là $C_j' = S_j(B_j) \oplus S_j(B_j^*)$. Khi đó chắc chắn rằng:

$$E_j \oplus J_j \in IN_j(E_j',C_j')$$

trong đó $E_j' = E_j \oplus E_j^*$.

Giả sử ta xác định tập $test_j$ như sau:

Định nghĩa 3.4.

Giả sử E_j và E_j^* là các xâu bít độ dài 6 và C_j' là xâu bít độ dài 4. Ta định nghĩa:

$$test_j(E_j , E_j^* , C_j') = \{B_j \oplus E_j : B_j \in IN_j(E_j',C_j')\}$$

trong đó $E_j' = E_j E_j^*$

Nghĩa là lấy XOR E_j với mỗi phần tử của tập $IN_j(E_j',C_j')$.

Kết quả sau đây là một hệ quả trực tiếp rút ra từ suy luận ở trên.

Định lý 3.1

Giả sử E_j và E_j^* là hai xâu vào của hộp S_j còn XOR ra của S_j là C_j. Kí hiệu $E_j' = E_j \oplus E_j^*$. Khi đó các bít khoá J_j sẽ nằm trong tập $test_j (E_j, E_j^* , C_j')$.

Nhận thấy rằng có đúng $N_j(E_j',C_j')$ xâu bít độ dài 6 trong tập $test_j(E_j,E_j^*,C_j')$; giá trị đúng của J_j phải là một trong các khả năng này.

Ví dụ 3.2.

Giả sử $E_1 = 000001$, $E_1^* = 110101$ và $C_1' = 1101$. Vì $N_1(110100,1101) = 8$ nên có đúng 8 xâu bít trong tập $test_1(000001,110101,1101)$. Từ hình 3.8 ta thấy rằng:

$IN_1(110100,1101) =$

{000110,010000,010110,011100,100010,100100,101000,110010}

Bởi vậy

$test_1(000001,110101,1101) =$

{000111,010001,010111,011101,100011,100101,101001,110011}.

Nếu ta có một bộ ba E_1,E_1^*,C_1' thứ hai như vậy thì có thể thu được tập $test_1$ thứ hai chứa các giá trị có thể chứa các bít khoá trong J_1. Giá trị đúng của J_1 phải nằm trong phần giao của hai tập này. Nếu ta có vài bộ ba như vậy thì có thể nhanh chóng xác định được các bít khoá trong J_1. Phương pháp đơn giản để làm điều này là tạo một dãy 64 bộ đếm biểu diễn 64 khả năng của 6 bít khoá trong J_1 . Bộ đếm sẽ đếm tăng mỗi khi các bít khoá tương ứng xuất

hiện trong tập $test_1$ với một bộ ba cụ thể. Với t bộ ba, ta tin rằng sẽ tìm được bộ đếm duy nhất có giá trị t tương ứng với giá trị đúng của các bít khoá trong J_1.

3.6.1. Tấn công DES 3 vòng

Bây giờ ta xét xem việc ứng dụng các ý tưởng của phần trước trong phép tấn công bản rõ chọn lọc lên một hệ DES 3 vòng. Ta bắt đầu bằng một cặp các bản rõ và bản mã tương ứng L_0R_0, $L_0^*R_0^*$,L_3R_3, và $L_3^*R_3^*$. Có thể biểu thị R_3 như sau:

$$\begin{aligned} R_3 &= L_2 \oplus f(R_2,K_3) \\ &= R_1 \oplus f(R_2,K_3) \\ &= L_0 \oplus f(R_0,K_1) \oplus f(R_2,K_3) \end{aligned}$$

Biểu diễn R_3^* theo cách tương tự như vậy

$$R_3' = L_0' \oplus f(R_0,K_1) \oplus f(R_0^*,K_1) \oplus f(R_2,K_3) \oplus f(R_2^*,K_3)$$

Bây giờ, giả sử ta đã chọn được các bản rõ sao cho $R_0 = R_0^*$, nghĩa là để

$$R_0' = 00\ldots0$$

Khi đó $f(R_0,K_1) = f(R_0^*,K_1)$ và như vậy:

$$R_3' = L_0' \oplus f(R_2,K_3) \oplus f(R_2^*,K_3).$$

Lúc này R_3' đã biết vì có thể tính được nó từ hai bản mã. L_0' cũng đã biết do có thể tính được nó từ hai bản rõ. Điều này có nghiã là ta có thể tính $f(R_2,K_3)\oplus f(R_2^*,K_3)$ từ phương trình:

$$f(R_2,K_3)\oplus f(R_2^*,K_3) = R_3' \oplus L_0'$$

Bây giờ ta có $f(R_2,K_3) = P(C)$ và $f(R_2^*,K_3) = P(C^*)$, trong đó C và C^* ký hiệu tương ứng 2 dãy ra của 8 hộp S (hãy nhớ lại rằng P là một phép hoán vị cố định công khai). Bởi vậy:

$$P(C) \oplus P(C^*) = R_3' \oplus L_0'$$

và do đó:

$$C' = C \oplus C^* = P^{-1}(R_3' \oplus L_0') \qquad (3.1)$$

Đây là XOR ra của 8 hộp S ở vòng thứ 3.

Bây giờ $R_2 = L_3$ và $R_2^* = L_3^*$ cũng đã biết (chúng là một phần của các bản mã). Bởi vậy, có thể tính

$$E = E(L_3) \qquad (3.2)$$

và

$$E^* = E(L_3^*) \qquad (3.3)$$

bằng cách dùng hàm mở rộng E được biết công khai. Đây là các mẫu vào các hột S ở vòng thứ 3. Như thế ta đã biết E và E^* và C ' của vòng thứ 3 và có thể thực hiện (như ở phần trước) để xây dựng các tệp $test_1$, . .., $test_8$ chứa các giá trị có thể của các bít trong J_1,. . .,J_8 .

Mô tả dạng giả mã của thuật toán này được cho ở hình 3.9.

Hình 3.9. Cách tấn công DC lên DES 3 vòng.

Đầu vào L_0R_0,$L_0^*R_0^*$, L_3R_3 và $L_3^*R_3^*$, trong đó $R_0 = R_0^*$
1. Tính $C' = P^{-1}(R_3' \oplus L_0')$
2. Tính $E = E(L_3)$ và $E^* = E(L_3^*)$
3. **For** j = 1 **to** 8 **do**
   Tính $test_j(E_j, E_j^*, C_j')$

Trong phương pháp tấn công này sẽ phải dùng một số bộ ba E, E^*,C ' như vậy, Ta phải thiết lập 8 dãy bộ đếm và nhờ vậy xác định được 48 bít trong khoá K_3 (khoá của vòng thứ 3). Sau đó tính 56 bít trong khóa theo cách tìm kiếm vét cạn trong $2^8 = 256$ khả năng cho 8 bít khoá còn lại.

Ta sẽ xem xét một ví dụ để minh hoạ.

Ví dụ 3.3.

Giả sử ta có 3 cặp các bản rõ và các bản mã, trong đó các bản rõ có các phép XOR xác định, chúng được mã hoá bằng cùng một khoá. Để cho gọn ta sẽ biểu thị dưới dạng mã Hexa:

Bản rõ	Bản mã
748502CD38451097 3874756438451097	03C70306D8AO9F10 78560A960E6D4CB
486911026ACDFF31 375BD31F6ACDFF31	45FA285BE5ADC730 134F7915AC253457
357418DA013FEC86 12549847013FEC86	D8A31B2F28BBC5CF 0F317AC2B23CB944

Từ cặp đầu tiên, tính các đầu vào của hộp S (cho vòng 3) theo các phương trình (3.2) và (3.3). Ta có:

E = 000000000111111000001110100000000110100000001100
E^* = 101111110000001010101100000001010100000001010010

XOR ra của các hộp S được tính theo phương trình (3.1) là:

C' = 10010110010111010101101101100111

Từ cặp thứ hai, ta tính được các đầu vào của các hộp S là:

E = 10100000101111111111010000010101000000101111010 6
E^* = 00000101111010011010001010111111010101100000010 0

và XOR ra của các hộp S là:

C' = 11010101011101011101101100101011

Tiếp theo, lập bảng các giá trị trong 8 dãy bộ đếm cho từng cặp. Minh hoạ thủ tục này với dãy bộ đếm cho J_1 theo cặp đầu tiên. Trong cặp này ta có: E' = 101111 và C' = 1001. Khi đó tập:

IN_1(101111,1001) = {000000,000111,101000,101111}

vì E_1 = 000000 nê ta có:

$J_1 \in test_1$(000000,101111,1001) = {000000,000111,101000,101111}

Bởi vậy ta sẽ tăng các giá trị 0,7,40 và 47 trong dãy bộ đếm cho J_1.

Bây giờ sẽ trình bày các bảng cuối cùng. Nếu coi một xâu bít độ dài 6 như biểu diễn nhị phân của một số nguyên nằm giữa 0 và 63 thì 64 giá trị tương ứng là 0,1,. . . ,63. Các mảng bộ đếm sẽ như sau:

J_1															
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

J_2															
0	0	0	1	0	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	2	0	0	0

J_3															
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

J_4															
3	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

J_5															
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0

J_6															
1	0	0	1	1	0	0	3	0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

J_7															
0	0	2	1	0	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	2	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

J_8															
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Trong số 8 mảng bộ đếm (trong 8 mangt ở trên) có duy nhất một bộ đếm có giá trị 3, các vị trí của các bộ đếm này sẽ được xác định các bít khoá trong J_1,.. ., J_8. Các vị trí này tương ứng là 47,5,19,0,24,7,7,49. Đổi các số nguyên sang dạng nhị phân ta nhận được J_1, . . .,J_8:

$J_1 = 101111$
$J_2 = 000101$
$J_3 = 010011$
$J_4 = 000000$
$J_5 = 011000$
$J_6 = 000111$
$J_7 = 000111$
$J_8 = 110001$

Bây giờ ta có thể xây dựng 48 bít của khoá bằng cách nhìn vào bảng khoá đối với vòng 3. Khi đó K có dạng:

0001101 0110001 01?01?0 1?00100
0101001 0000??0 111?11? ?100011

ở đây ta đã bỏ qua các bít kiểm tra chặn lẻ và"?" chỉ bít khoá chưa biết. Khóa đầy đủ (ở dạng hexa gồm cả bít kiểm tra chặn lẻ) là:

1A624C89520DEC46

3.6.2. Tấn công DES 6 vòng

Trong mục này ta sẽ mở rộng các ý tưởng ở trên cho phép tấn công xác suất đối DES 6 vòng. Ý tưởng ở đây là phải chọn cẩn thận một acặp bản rõ với một phép XOR chỉ ra trước rồi xác định các xác suất của một dãy xác định các XOR qua các vong mã. Bây giờ ta sẽ định nghiã một khái niệm quan trọng.

Định nghĩa 3.5.

Cho $n \geq 1$ là một số nguyên. Một đặc trưng n vòng là một danh sách có dạng: $L_0', R_0', L_1', R_1', p_1 \ldots L_n', R_n', p_n$

thảo mãn các tính chất sau:

1. $Li' = R_{i-1}'$ với $1 \le i \le n$.

2. Cho $1 \le i \le n$ và giả sử L_{i-1}, R_{i-1} và L_{i-1}^*, R_{i-1}^* được chọn sao cho $L_{i-1} \oplus L_{i-1}^* = L_{i-1}'$ và $R_{i-1} \oplus R_{i-1}^* = R_{i-1}'$. Giả sử L_i,R_i và L_i^*,R_i^* được tính bằng cách áp dụng một vòng mã hoá của DES; Khi đó xác suất để $L_i \oplus L_i^* = L_i'$ và $R_i \oplus R_i^* = R_i'$ đúng bằng p_i (chú ý rằng xác suất này được tính trên mọi bộ 48 $J = J_1 . . . J_8$ có thể).

Xác suất của đặc trưng này sẽ được xác định bằng tích:

$$p = p_1 \times p_2 \times . . . \times p_n$$

Nhận xét: Giả sử ta chọn L_0,R_0 và L_0^*,R_0^* sao cho $L_0 \oplus L_0^* = L_0'$ và $R_0 \oplus R_0^* = R_0'$. Áp dụng n vòng mã hoá của DES để thu được L_1,. . ., L_n và R_1,. . .,R_n. Khi đó không thể khẳng định rằng xác xuất để $L_i \oplus L_i^* = L_i'$ và $R_i \oplus R_i^* = R_i'$ với mọi i, ($1 \le i \le n$)là $p = p_1 \times . . . \times p_n$. Sở dĩ như vậy vì các bộ 48 trong bảng khoá $K_1 . . . K_n$ không độc lập với nhau (nếu n bộ 48 này được chọn ngẫu nhiên và độc lập với nhau thì khẳng định trên là đúng). Tuy vậy, ta vẫn hy vọng rằng, $p_1 \times .. . \times p_n$ là một ước lượng khá chính xác cho xác suất này.

Cũng cần phải thấy rằng, các xác suất p_i ở một đặc trưng sẽ xác định theo một cặp bản rõ tuỳ ý (nhưng cố định) cho phép XOR xác định trước. Tại đây 48 bít khoá cho một vòng mã DES sẽ thay đổi trên toàn bộ 2^{48} khả năng. Tuy nhiên thám mã lại đang cố gắng xác định một khoá cố định (nhưng chưa biết). Anh ta sẽ chọn ngẫu nhiên các bản rõ (sao cho chúng có các XOR xác định) với hy vọng rằng, các xác suất để các XOR trong n vòng mã phù hợp với các XOR được xác định trong đặc trưng phải khá gần với các p_1,. . . ,p_n tương ứng.

Ví dụ đơn giản trên hình 3.10 là một đặc trưng một vòng, nó là cơ sở cho phép tấn công lên DES 3 vòng (cũng như trước kia, ta dùng biểu diễn hexa). Hình 3.11 mô tả một đặc trưng một vòng khác.

Hình 3.10. Đặc trưng một vòng.

L_0' = bất kì	$R_0' = 00000000_{16}$	
$L_1' = 00000000_{16}$	$R_1' = L_0'$	p = 1

Hình 3.11. Một đặc trưng một vòng khác.

$L_0' = 00000000_{16}$	$R_0' = 60000000_{16}$
$L_1' = 60000000_{16}$	$R_1' = 00808200_{16}$

Ta sẽ xem xét kỹ hơn các đặc trưng trong hình 3.11. Khi $f(R_0,K_1)$ và $f(R_0^*,K_1)$ được tính, bước đầu tiên là phải mở rộng R_0 và R_0^* . Kết quả của phép XOR hai mở rộng này là:

001100. . .0

Bởi vậy XOR vào của S_1 là 001100 và các XOR vào của 7 hộp S khác đều là 000000. Các XOR của S_2 tới S_8 đều là 0000. XOR ra của S_1 sẽ là 1110 với xác suất bằng 14/64 (vì có thể tính được $N_1(001100,1110)= 14$). Như vậy ta được:

$$C' = 11100000000000000000000000000000$$

với xác suất bằng 14/64. Sử dụng P ta có :

$$P(C) \oplus P(C^*) = 00000000100000001000001000000000$$

dưới dạng hexa giá trị này là 00808200_{16}. Khi giá trị này được XOR với L_0' ta sẽ nhận được R_1' chỉ ra với xác suất 14/64. Dĩ nhiên ta luôn có $L_1' = R_0'$.

Việc tấn công DES 6 vòng sẽ dựa trên đặc trưng 3 vòng cho ở hình 3.12.

Hình 3.12. Một đặc trưng 3 vòng.

$L_0' = 40080000_{16}$	$R_0' = 04000000_{16}$	
$L_1' = 04000000_{16}$	$R_1' = 00000000_{16}$	$p = 1/4$
$L_2' = 00000000_{16}$	$R_2' = 04000000_{16}$	$p = 1$
$L_3' = 04000000_{16}$	$R_3' = 40080000_{16}$	$p = 1/4$

Trong tấn công 6 vòng ta sẽ bắt đầu với L_0R_0, $L_0^*R_0^*$, L_6R_6, $L_6^*R_6^*$, trong đó đã chọn các bản rõ để $L_0' = 40080000_{16}$ và $R_0' = 04000000_{16}$. Có thể biểu thị R_6 như sau:

$$\begin{aligned} R_6 &= L_5 \oplus f(R_5,K_6) \\ &= R_4 \oplus f(R_5,K_6) \\ &= L_3 \oplus f(R_3,K_4) \oplus f(R_5,K_6) \end{aligned}$$

R_6^* có thể biểu thị theo cách tương tự và bởi vậy:

$$R_6' = L_3' \oplus f(R_3,K_4) \oplus f(R_3^*,K_4) \oplus f(R_5,K_6) \oplus f(R_5^*,K_6) \qquad (3.4)$$

(hãy chú ý sự tương tự với phép tấn công 3 vòng)

R_6' đã biết. Từ đặc trưng này ta thấy rằng $L_3' = 04000000_{16}$ và $R_3' = 40080000_{16}$ với xác suất1/16. Nếu đây là trường hợp thực tế thì XOR vào của cá hộp S trong vòng 4 có thể tính được theo hàm mở rộng bằng:

$$001000000000000000010000...0$$

Các XOR vào của S_2,S_5,S_6,S_7 và S_8 đều là 000000 và bởi vậy ở vòng 4, các XOR ra của 5 hộp này đều là 0000. Điều đó có nghĩa là có thể tính các XOR ra của 5 hộp S này ở vòng 6 theo (3.4). Bởi vậy giả sử ta tính:

$$C_1'C_2'C_3'C_4'C_5'C_6'C_7'C_8' = P^{-1}(R_6' \oplus 04000000_{16})$$

trong đó mỗi C_i' là một xâu bít có độ dài 4. Khi đó, với xác suất 1/16 các xâu bít C_2',C_5', C_6', C_7' và C_8' tương ứng là các XOR ra của S_2,S_5,S_6,S_7 và S_8 ở vong 6. Các đầu ra của các hộp S ở vòng 6 có thể được tính là E_2, E_5, E_6, E_7, E_8 và E_2^*, E_5^*, E_6^*, E_7^*và E_8^* , trong đó :

$$E_1\ E_2\ E_3\ E_4\ E_5\ E_6\ E_7\ E_8 = E(R_5) = E(L_6)$$

và

$$E_1^*\ E_2^*\ E_3^*\ E_4^*\ E_5^*\ E_6^*\ E_7^*\ E_8^* = E(R_5^*) = E(L_6^*)$$

có thể được tính theo các bản mã như đã mô tả trên hình 3.13.

Hình 3.13. DC đối với DES 6 vòng.

Đầu vào $L_0R_0,L_0^*R_0^*,L_6R_6$,và $L_6^*R_6^*$ trong đó
$L_0' = 40080000_{16}$ và $R_0' = 04000000_{16}$

1. Tính $C' = P^{-1}(R_6' \oplus 40080000_{16})$
2. Tính $E = E(L_6)$ và $E^* = E(L_6^*)$
3. **For** $\in$ j {2, 5, 6, 7, 8} **do**
   Tính $test_j(E_j, E_j^*, C_j')$

Bây giờ ta muốn xác định 30 bít khoá trong J_2, J_5, J_6, J_7 và J_8 như cách đã làm trong tấn công 3 vòng. Vấn đề ở đây là XOR được giả định cho vòng 6 chỉ đúng với xác suất 1/16. Bởi vậy 15/16 thời gian ta chỉ thu được các bít ngẫu nhiên không phải là các bít khoá có thể. Bằng một cách nào đó ta phải có khả năng xác định được các khoá đúng bằng các số liệu đã cho (trong đó có 15/16 các số liệu sai). Điều này có vẻ không sáng sủa cho lắm, song rất may mắn là viễn cảnh của ta không tối tăm như vậy.

Định nghĩa 3.6.

Giả sử $L_0 \oplus L_0^* = L_0'$ và $R_0 \oplus R_0^* = R_0'$. Ta nói rằng cặp bản rõ L_0R_0 và $L_0^*R_0^*$ là cặp đúng ứng với một đặc trưng nếu $L_i \oplus L_i^* = L_i'$ và $R_i \oplus R_i^* = Ri'$ với mọi i, $1 \le i \le n$. Ngược lại, cặp này được xác định là cặp sai.

Hy vọng rằng khoảng 1/16 các cặp là đúng và các cặp còn lại là sai ứng với đặc trưng 3 vòng.

Chiến thuật của ta là tính E_j, E_j^* và C_j' (như đã mô tả ở trên) sau đó xác định các $test_j(E_j, E_j^*, C_j')$ vơi j = 2, 5, 6, 7, 8. Nếu bắt đầu bằng một cặp đúng thì các bít khoá đúng cho mỗi J_j sẽ nằm trong tập $test_j$. Nếu cặp này sai thì giá trị của C_j' sẽ không đúng và giả định rằng mỗi tập $test_j$ sẽ chủ yếu là ngẫu nhiên có thể coi là có lý:

Có thể nhận ra một cặp sai theo phương pháp sau: Nếu $| test_j | = 0$ với bất kì $j \in \{2, 5, 6, 7, 8\}$ thì chắc chắn là ta có một cặp sai. Bây giờ , với một cặp sai cho trước, có thể thấy rằng xác suất để $test_j = 0$ với giá trị j nhất định sẽ xấp xỉ bằng 1/5. Đây là một giả định hợp lý bởi vì $N_j(E_j',C_j') = | test_j |$ và như đã nói ở trên, xác suất để $N_j(E_j',C_j') = 0$ xấp xỉ bằng 1/5. Xác suất để tất cả 5 tập $test_j$ có lực lượng dương được ước lượng bằng $0,8^5 \approx 0,33$. Bởi vậy xác suất để ít nhất một tập $test_j$ có lực lượng bằng 0 sẽ vào khoảng 0,67. Như vậy ta hy vọng loại bỏ được 2/3 số cặp sai bằng cách quan sát đơn giản này (ta sẽ gọi là phép lọc). Tỷ lệ các cặp đúng còn lại sau phép lọc xấp xỉ bằng (1/16)/(1/3) = (3/16).

Ví dụ 3.4.

Giả sử ta có cặp mã - rõ sau:

Bản rõ	Bản mã
86FA1C2B1F51D3BE	1E23ED7F2F553971
C6F21C2B1B51D3BE	296DE2B687AC6340

Nhận thấy rằng $L_0' = 40080000_{16}$ và $R_0' = 04000000_{16}$. Các đầu vào và các đầu ra của các hộp S ở vòng 6 được tính như sau:

j	**E_j**	E_j^*	**C_j'**
2	111100	010010	1101
5	111101	111100	0001
6	011010	000101	0010
7	101111	010110	1100
8	111110	101100	1101

Khi đó tập $test_j$ (2, 5, 6, 7, 8) là:

j	$test_j$
2	14, 15, 26, 30, 32, 33, 48,52
5	
6	7, 24, 36, 41, 54, 59
7	
8	34, 35, 48, 59

Ta thấy tập $test_5$ và $test_7$ là các tập rỗng, bởi vậy cặp này là một cặp sai và sẽ bị loại bỏ bằng phép lọc.

Bây giờ, giả sử rằng ta có một cặp sao cho $| test_j | > 0$, với j = 2, 5, 6, 7, 8, để nó còn tồn tại lại sau phép lọc (tuy nhiên vẫn chưa biết cặp này đúng hay sai). Ta nói rằng xâu bít $J_2\ J_5\ J_6\ J_7\ J_8$ có độ dài 30 là xâu bít được gợi ý bởi cặp trên nếu $J_j \in test_j$ với j = 2,5,6,7,8. Số các xâu bít được gợi ý là:

Thông thường số các xâu bít được gợi ý có giá trị quá lớn (ví dụ: > 80000).

Giả sử ta đã lập bảng tất cả các xâu bít được gợi ý thu được từ N cặp (không bị loại bỏ bởi phép lọc). Với một cặp đúng, xâu bít đúng $J_2\ J_5\ J_6\ J_7\ J_8$ sẽ là một xâu bít được gợi ý. Xâu bít đúng này sẽ xuất hiện vào khoảng 3N/16 lần. Các xâu bít không đúng thường xuất hiện ít hơn nhiều do chúng cơ bản là xuất hiện một cách ngẫu nhiên có 2^{30} khả năng (một số rất lớn).

Việc lập bảng tất cả các xâu bít được ôụi ý sẽ rất cồng kềnh, bởi vậy ta sẽ dùng một thuật toán yêu cầu ít thời gian và không gian (bộ nhớ). Ta có thể mã tập $test_j$ bất kỳ bằng véc tơ T_j có độ dài 64, trong đó tạo độ thứ i của T_j được đặt về giá trị 1 (với $0 \le i \le 63$) nếu xâu bít độ dài 6 (là biểu diễn nhị phân của i) nằm trong tập $test_j$. Trong trường hợp ngược lại, toạ độ thứ i

được đặt về 0 (giống như cách biểu diễn mảng bộ đếm đã dùng trong phép tấn công 3 vòng).

Với mỗi cặp còn lại ta xây dượng các véc tơ này như đã mô tả ở trên về ký hiệu chúng là T_j^i , j = 2,5,6,7,8, $1 \le i \le N$. Với $I \subseteq \{1,. . . ,N\}$ ta nói rằng I là tập được phép nếu với mỗi $j \in \{2,5,6,7,8\}$ có ít nhất một toạ độ bằng $|I|$ trong véc tơ $\sum Tj$ (với $j \in I$).

Nếu cặp thứ i là một cặp đúng với mọi $i \in I$ thì I sẽ là tập được phép. Bởi vậy ta tin rằng sẽ có một tạp được phép với kích thước xấp xỉ 3N/16 chứa các bít khoá đúng và ngoài ra không có một tập nào khác. Có thể dễ dàng xây dựng các tập được phép I bằng một thuật toán đệ quy.

Ví dụ 3.5.

Một số chương trình máy tính đã được thực hiện để kiêmr tra phương pháp này. Trong đó đã tạo ra một mẫu ngẫu nhiên gồm 120 cặp bản rõ với các XOR xác định và các bản rõ này đã được mã hoá bằng cùng một khoá (ngẫu nhiên). Bảng 3.1 đưa ra 120 cặp các bản rõ và các bản mã tương ứng ở dạng mã hexa.

Khi tính các tập được phép ta thu được n_i tập được phép có lực lượng như sau:

i	**n_i**
2	111
3	180
4	231
5	255
6	210
7	120
8	45
9	10
10	1

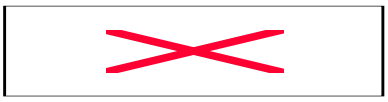
Tập được phép duy nhất có lực lượng 10 là:

{24,29,30,48,50,52,55,83,92,118}

Thực tế tập được tạo ra theo 10 cặp đúng. Chỉ có tập được phép này mới chứa các bít khoá đúng cho J_2, J_5, J_6, J_7, J_8. Chúng có giá trị như sau:

$J_2 = 011001$
$J_5 = 110000$
$J_6 = 001001$
$J_7 = 101010$
$J_8 = 100011$

Chú ý rằng tất cả các tập được phép có lực lượng tối thiểu là 6 không kể 3 tập được phép có lực lượng là 5 sinh ra từ các cặp đúng bởi vì



với $6 \le i \le 10$.

Phương pháp này sẽ cho ta biết 30 bít trong 56 bít khoá. Bằng một đặc trưng 3 vòng khác (nêu ở hình 3.14), ta có thể tính thêm 12 bít khoá nữa (các bít này nằm trong J_1 và J_4). Bây giờ chỉ còn lại 14 bít khoá chưa biết. Vì $2^{14} = 16384$ là một số quá nhỏ nên có thể dùng phép tìm kiếm vét cạn để xác định nốt chúng.

Hình 3.14.

$L_0' = 00200008_{16}$	$R_0' = 00000400_{16}$	
$L_1' = 00000400_{16}$	$R_1' = 00000000_{16}$	$p = 1/4$
$L_2' = 00000000_{16}$	$R_2' = 00000400_{16}$	$p = 1$
$L_3' = 00000400_{16}$	$R_3' = 00200008_{16}$	$p = 1/4$

Toàn bộ khoá (ở dạng hexa, kể cả các bít kiểm tra chẵn lẻ) sẽ là:

34E9F71A20756231

Như đã nói ở trên, 120 cặp được cho ở bảng 3.1. Trong cột thứ hai, dấu (*) kí hiệu cặp đúng, dấu (**) kí hiệu cặp sai nhận biết được và nó sẽ bị loại bỏ bởi phép lọc. Trong số 120 cặp, có 73 cặp được xác định là các cặp sai nhờ quá trình lọc, bởi vậy 47 cặp còn lại sẽ là các cặp đúng có thể.

3.6.3. Các ví dụ khác về DC.

Các kỹ thuật DC có thể được sử dụng để tấn công DES có trên 6 vòng. Với DES 8 vòng cần 2^{14} bản rõ chọn lọc, DES 10, 12, 14, 16 vòng có thể phá được với tương ứng là 2^{24}, 2^{31}, 2^{39} và 2^{47} bản rõ chọn lọc. Vào thời điểm hiện tại, tấn công DES có trên 10 vòng là không thực tế.

Một loại mã tích hoán vị - thay thế khác với DES cũng có thể dùng DC để phá (ở mức độ khác nhau). Trong các hệ này, có một số hệ mật hoán vị - thay thế đã được đưa ra trong những năm gần đây như FEAL,REDOC-II và LOKI.

Ghi chú (của người dịch): theo công bố của Micheal Wiener vào 1993, với 10^7 USD có thể xây dựng thiết bị chuyên dụng để phá DES trong khoảng 21 phút. Với 10^8 USD, các bản tin DES có thể bị phá trong khoảng 2 phút. Như vậy, DES không còn bí mật đối với NAS. Tuy nhiên cũng không cần một thiết bị chuyên dụng đắt tiền như vậy để phá DES. Các thông báo được mã hoá bằng DES có thể bị phá bằng các máy tính thông thường trên với điều kiẹen có vẻ siêu thực: có trên $2^{43} \times 2^6$ bít rõ - mã với một khoá 56 bít cố định, tuy nhiên bạn phải chờ lâu hơn.

Trong hội nghị CRYPTO'94 M.Matsui đã trình bày một kỹ thuật phá DES mới được gọi là " thám mã tuyến tính". Sử dụng 2^{43} (8.796.093.022.208) bản mã đã biết. Matsui có thể phá một khoá DES trong 50 ngày bằng một máy tính cá nhân.

3.7. Các chú giải và tài liệu dẫn.

Smid và Branstad đã có một bài báo hay về lịch sử của DES [SB 92]. Các công bố về Chuẩn xử lý thông tin liên bang (FIPS) liên quan đến DES gồm: mô tả DES [NBS 77]; ứng dụng và sử dụng DES [NBS 81]; các chế độ làm việc của DES [NBS 80]; xác thực bằng DES [NBS 85].

Một số tính chất của các hộp S được Brickell, Moore và Purtill [BMP87] nghiên cứu. Chíp giải mã DES được mô tả trong [EB 93]. Thiết bị tìm khoá của Wiener được mô tả ở CRYPTO' 93 [Wi 94]. Phép tối ưu hoá thời gian - bộ nhớ tổng quát hơn được trình bày bởi Fiat và Naor trong [FN 91]. Kỹ thuật DC được phát triển bởi Biham và Shamir [BS 91] (cũng có thể xem [BS93A] và sách của họ [BS 93] trong đó cũng thảo luận thám mã hệ mật khác). Cách trình bày về DC trong chương này phần lớn dựa trên [BS93]. Một phương pháp mã thám mới có thể dùng để tấn công DES và các hệ mật tương ứng khác là phương pháp thám mã tuyến tính của Matsui [MA 94], [MA 94A].

Các mô tả về hệ mật hoán vị - thay thế khác có thể tìm trong các tài liệu sau: LUCIFER [FE 73], FEAL [MI 91], REDOC-II [CW 91] và LOKI [BKPS 90].

Bảng 3.1. Mã thám DES 6 vòng.

CẶP	CẶP ĐÚNG	BẢN RÕ	BẢN MÃ
1	**	86FA1C2B1F51D3BE C6F21CC2B1B51D3BE	1E23ED7F2F551971 296DE2BG87AC6310
2	**	EDC439EC935E1ACD ADCC39EC975E1ACD	0F847EFE90466588 93E84839E374440B
3	**	9468A0BE00166155 D460A0BE04166155	3D6A906A6566D0BF 3BC3B23698379E1
4	**	D4FF2B18A5A8AACB 94F72B18A1A8AAC8	26B14738C2556BA4 15753FDE86575ABF

BÀI TẬP

3.1.Hãy chứng minh rằng phép giải mã DES có thể thực hiện bằng cách áp dụng thuật toán mã hoá DES cho bản rõ với bảng khoá đảo ngược.

3.2.Cho DES(x,K) là phép mã hoá DES của bản rõ x với khoá K. Giả sử y = DES(x,K) và y' = DES(c(x),c(K)) trong đó c(.) kí hiệu là phần bù theo các bít của biến. Hãy chứng minh rằng y' = c(y) (tức là nếu lấy phần bù của bản rõ và khoá thì bản mã kết quả cũng là phần bù của bản mã ban đầu). Chú ý rằng kết quả trên có thể chứng minh được chỉ bằng cách sử dụng mô tả "mức cao" của DES - cấu trúc thực tế của các hộp S và các thành phần khác của hệ thống không ảnh hưởng tới kết quả này.

3.3.Mã kép là một cách để làm mạnh thêm cho DES: với hai khóa K_1 và K_2 cho trước, ta xác định $y = e_{K2}(e_{K1}(x))$ (dĩ nhiên đây chính là tích của DES với chính nó. Nếu hàm mã hoá e_{K2} giống như hàm giải mã d_{K1} thì K_1 và K_2 được gọi là các khoá đối ngẫu (đây là trường hợp không mong muốn đối với phép mã kép vì bản mã kết quả lại trùng với bản rõ). Một khoá được gọi là tự đối ngẫu nếu nó đối ngẫu với chính nó.

a/ Hãy chứng minh rằng nếu C_0 gồm toàn các số 0 hoặc gồm toàn các số 1 và D_0 cũng vậy thì K là tự đối ngẫu.

b/ Hãy tự chứng minh rằng các khoá sau (cho ở dạng hexa) là tự đối ngẫu:

0101010101010101
FEEFEFEFEFEFEFE
1F1F1F1F0E0E0E0E
E0E0E0E0F1F1F1F1

c/ Hãy chứng tỏ rằng nếu C_0 = 0101. . . 01 hoặc 1010. . .10 (ở dạng nhị phân) thì XOR các xâu bít C_i và C_{17-i} là 111. . .11, vơi $1 \le i \le 16$ (khẳng định tương tự cũng đúng đối với D_i).

d/ Hãy chứng tỏ các cặp khoá sau là đối ngẫu:

E001E001F101F101	01E001E001F101F1
FE1FFE1FF0EFE0E	1FFE1FFE0EFE0EFE
E01FE01FFF10FF10	1FE01FE00EF10EF1

3.4.Có thể tạo một mã xác thực thông báo bằng chế độ CFB cũng như chế độ CBC. Cho dãy các khối bản rõ x_1. . .x_n , giả sư ta xác định véc tơ khởi đầu IV là x_1 . Sau đó mã hoá x_2. . .x_n bằng khoá K ở chế độ CFB để thu được

$y_1...y_{n-1}$ (chú ý rằng chỉ có n-1 khối bản mã). Cuối cùng xác định $e_K(y_{n-1})$ làm MAC. Hãy chứng minh rằng MAC này đồng nhất với MAC được tạo trong phần 3.4.1. dùng chế độ CBC.

3.5.Giả sử một dãy các khối bản rõ $x_1. . .x_n$ được mã hoá bằng DES, tạo ra các khối bản mã $y_1. . .y_2$. Giả sử rằng một khối bản mã (chẳng hạn y_i) bị phát sai (tức là có một số số 1 bị chuyển thành số 0 và ngược lại). Hãy chỉ ra rằng số các khối bản rõ bị giải mã không đúng bằng một nếu ta dùng các chế độ ECB và OFB để mã hoá; và bằng hai nếu dùng các chế độ CBC và CFB để mã hoá.

3.6.Bài tập này nhằm nghiên cứu một phép tối ưu hoá thời gian - bộ nhớ đơn giản đối với phép tấn công bản rõ chọn lọc. Giả sử có một hệ mật trong đó $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K}$ và đạt được độ mật hoàn thiện. Khi đó $e_K(x) = e_{K1}(x)$ có nghĩa là $K = K_1$. Kí hiệu $P = Y = \{y_1,. . .,y_N\}$. Cho x là bản rõ cố định. Định nghĩa hàm g: $Y \rightarrow Y$ theo quy tắc $g(y) = e_y(x)$. Ta xác định một đồ thì có hướng G chứa tập đỉnh Y, trong đó tập cạnh chứa tất cả các cạnh có hướng có dạng $(y_i,g(y_i))$, $1 \le i \le N$.

a/ Hãy chứng minh rằng G gồm tất cả các chu trình có hướng không liên thông.

b/ Cho T là một tham số thời gian mong muốn. Giả sử ta có một tập các phần tử $Z = \{z_1,. . .,z_m\} \subseteq Y$ sao cho với mỗi phần tử $y_i \in Y$ nằm trong một chu trình có độ dài tối đa là T hoặc tồn tại một phần tử $z_j \neq y_i$ sao cho khoảng cách tử y_i tới z_j trong G tối đa là T. Hãy chứng tỏ rằng tồn tại một tập Z như vậy sao cho: $| Z | \le 2N/T$ và như vậy $| Z | = 0(N/T)$.

c/ Với mỗi $z_j \in Z$ ta xác định $g^{-T}(z_j)$ là phần tử y_i sao cho $g^T(y_i) = z_j$, trong đó g^T là một hàm gồm T phép lặp của g. Hãy xây dựng một bảng X gồm các cặp $(z_i,g^{-T}(z_j))$ được sắp xếp theo các toạ độ đầu của chúng.

Một mô tả giả mã của một thuật toán tìm K với $y = e_K(x)$ cho trước được trình bày ở hình 3.15. Hãy chứng tỏ thuật toán này tìm K trong tối đa là T bước (bởi vậy cỡ của phép tối ưu hoá thời gian - bộ nhớ là 0(N)).

Hình 3.15. Phép tối ưu hoá thời gian - bộ nhớ.

1. $Y_{start} = y$
2. Backup = **false**
3. **While** $g(y) \neq y_{start}$ **do**
4. **if** $y = z_j$ với mỗi j nào đó **and not** backup **then**
5. $y = g^{-T}(z_j)$
6. backup = **true**

else

7. $y = g(y)$
8. $K = y$

d/ Hãy mô tả thuật toán giải mã để xây dựng một tập Z mong muốn trong thời gian 0(NT) không dùng một mảng có kích thước N.

3.7. Hãy tính các xác suất của đặc trưng 3 vòng sau:

$L_0' = 00200008_{16}$ $R_0' = 00000400_{16}$
$L_1' = 00000400_{16}$ $R_1' = 00000000_{16}$ p = ?
$L_2' = 00000000_{16}$ $R_2' = 00000400_{16}$ p = ?
$L_3' = 00000400_{16}$ $R_3' = 00200008_{16}$ p = ?

3.8. Sau đây là một phép tấn công vi sai đối với DES 4 vòng sử dụng đặc trưng sau (đây là một trường hợp đặc biệt của đặc trưng được trình bày ở hình 3.10).

$L_0' = 20000000_{16}$ $R_0' = 00000000_{16}$
$L_1' = 00000000_{16}$ $R_1' = 20000000_{16}$ p = 1

a/ Giả sử rằng thuật toán sau (được nêu ở hình 3.16) được dùng để tính các tập $test_2$,. . .,$test_8$. Hãy chứng tỏ rằng $J_j \in test_j$ với $2 \leq j \leq 8$.

Hình 3.16. Tấn công DC lên DES 4 vong.

Vào : L_0R_0, $L_0^*R_0^*$, L_3R_3 và $L_3^*R_3^*$, trong đó
$L_0' = 10000000_{16}$ và $R_0' = 00000000_{16}$
1. Tính $C' = P^{-1}(R_4')$
2. Tính $E = E(L_4)$ và $E^* = E^*(L_4^*)$
3. **For** j =2 **to** 8 **do**
Tính testj(E_j,E_j^*,C_j')

b/ Với các cặp bản rõ - mã sau, hãy xác định các bít khoá trong $J_2,...,J_8$.

Bản rõ	Bản mã
18493AC485B8D9A0	E332151312A18B4F
38493AC485B8D9A0	87391C27E5282161
482765DDD7009123	B5DDD833D82D1D1
682765DDD7009123	81F4B92BD94B6FD8
ABCD098733731FF1	93A4B42F62EA59E4
8BCD098733731FF1	ABA494072BF411E5
13578642AAEDCB	FDEB526275FB9D94
33578642AAFFEDCB	CC8F72AAE685FDB1

c/ Hãy tính toàn bộ khoá (14 bít khoá còn lại cần phải xác định có thể tìm theo phương pháp tìm kiếm vét cạn).

CHƯƠNG 2

LÝ THUYẾT SHANNON

Năm 1949, Claude shannon đã công bố một bài báo có nhan đề " Lý thuyết thông tin trong các hệ mật" trên tạp chí " The Bell System Technical Journal". Bài báo đã có ảnh hưởng lớn đến việc nghiên cứu khoa học mật mã. Trong chương này ta sẽ thảo luận một vài ý tưởng trong lý thuyết của Shannan.

2.1 ĐỘ MẬT HOÀN THIỆN.

Có hai quan điểm cơ bản về độ an toàn của một hệ mật.

Độ an toàn tính toán:

Đo độ này liên quan đến những nỗ lực tính toán cần thiết để phá một hệ mật. Một hệ mật là an toàn về mặt tính toán nếu có một thuật toán tốt nhất để phá nó cần ít nhất N phép toán, N là số rất lớn nào đó. Vấn đề là ở chỗ, không có một hệ mật thực tế đã biết nào có thể được chứng tỏ là an toàn theo định nghĩa này. Trên thực tế, người ta gọi một hệ mật là "an toàn về mặt tính toán" nếu có một phương pháp tốt nhất phá hệ này nhưng yêu cầu thời gian lớn đến mức không chấp nhận được.(Điều này tất nhiên là rất khác với việc chứng minh về độ an toàn).

Một quan điểm chứng minh về độ an toàn tính toán là quy độ an toàn của một hệ mật về một bài toán đã được nghiên cứu kỹ và bài toán này được coi là khó. Ví dụ, ta có thể chứng minh một khẳng định có dạng " Một hệ mật đã cho là an toàn nếu không thể phân tích ra thừa số một số nguyên n cho trước". Các hệ mật loại này đôi khi gọi là " an toàn chứng minh được". Tuy nhiên cần phải hiểu rằng, quan điểm này chỉ cung cấp một chứng minh về độ an toàn có liên quan đế một bài toán khác chứ không phải là một chứng minh hoàn chỉnh về ọ an toàn. (Tình hình này cũng tương tự như việc chứng minh một bài toán là NP đầy đủ: Có thể chứng tỏ bài toán đã cho chí ít cũng khó như một bài toán NP đầy đủ khác , song không phải là một chứng minh hoàn chỉnh về độ khó tính toán của bài toán).

Độ an toàn không điều kiện.

Độ đo này liện quan đến độ an toàn của các hệ mật khi không có một hạn chế nào được đặt ra về khối lượng tính toán mà Oscar được phép thực

hiện. Một hệ mật được gọi là an toàn không điều kiện nếu nó không thể bị phá thậm chí với khả năng tính toán không hạn chế.

Khi thảo luận về độ an toàn của một mật, ta cũng phải chỉ ra kiểu tấn công đang được xem xét. Trong chương 1 đã cho thấy rằng, không một hệ mật nào trong các hệ mã dịch vòng, mã thay thế và mã Vigenère được coi là an toàn về mặt tính toán với phương pháp tấn công chỉ với bản mã (Với khối lượng bản mã thích hợp).

Điều này mà ta sẽ làm trong phần này là để phát triển lý thuyết về các hệ mật có độ an toàn không điều kiện với phương pháp tấn công chỉ với bản mã. Nhận thấy rằng, cả ba hệ mật nêu trên đều là các hệ mật an toàn vô điều kiện chỉ khi mỗi pkần tử của bản rõ được mã hoá bằng một khoá cho trước!.

Rõ ràng là độ an toàn không điều kiện của một hệ mật không thể được nghiên cứu theo quan điểm độ phức tạp tính toán vì thời gian tính toán cho phép không hạn chế. Ở đây lý thuyết xác suất là nền tảng thích hợp để nghiên cứu về độ an toàn không điều kiện. Tuy nhiên ta chỉ cần một số kiến thức sơ đẳng trong xác suất; các định nghĩa chính sẽ được nêu dưới đây.

Định nghĩa 2.1.

Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên. Kí hiệu xác suất để X nhận giá trị x là p(x) và để Y nhận giá trị y là p(y). Xác suất đồng thời p(x,y) là xác suất để X nhận giá trị x và Y nhận giá trị y. Xác suất có điều kiện p(x / y) là xác suất để X nhận giá trị với điều kiện Y nhận giá trị y. Các biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là độc lập nếu p(x,y) = p(x) p(y) với mọi giá trị có thể x của X và y của Y.

Quan hệ giữa xác suất đồng thời và xác suất có điều kiện được biểu thị theo công thức:

$$p(x,y) = p(x \mid y)\, p(y)$$

Đổi chỗ x và y ta có :

$$p(x,y) = p(y \mid x)\, p(x)$$

Từ hai biểu thức trên ta có thể rút ra kết quả sau:(được gọi là định lý Bayes)

Định lý 2.1: (Định lý Bayes).

Nếu p(y) > 0 thì:

$$p(x \mid y) = \frac{p(x)\, p(y \mid x)}{p(y)}$$

Hệ quả 2.2.

X và Y là các biến độc lập khi và chỉ khi:

$$p(x \mid y) = p(x) \text{ với mọi } x,y.$$

Trong phần này ta giả sử rằng, một khoá cụ thể chỉ dùng cho một bản mã. Giả sử có một phân bố xác suất trên không gian bản rõ $\mathcal{P}$. Kí hiệu xác suất tiên nghiệm để bản rõ xuất hiện là $p_{\mathcal{P}}(x)$. Cũng giả sử rằng, khóa K được chọn (bởi Alice và Bob) theo một phân bố xác suất xác định nào đó. (Thông thường khoá được chọn ngẫu nhiên, bởi vậy tất cả các khoá sẽ đồng khả năng, tuy nhiên đây không phải là điều bắt buộc). Kí hiệu xác suất để khóa K được chọn là $p_{\mathcal{K}}(K)$. Cần nhớ rằng khóa được chọn trước khi Alice biết bản rõ. Bởi vậy có thể giả định rằng khoá K và bản rõ x là các sự kiện độclập.

Hai phân bố xác suất trên $\mathcal{P}$ và $\mathcal{K}$ sẽ tạo ra một phân bố xác suất trên $\mathcal{C}$. Thật vậy, có thể dễ dàng tính được xác suất $p_{\mathcal{C}}(y)$ với y là bản mã được gửi đi. Với một khoá $K \in \mathcal{K}$, ta xác định:

$$C(K) = \{ e_K(x) : x \in \mathcal{P} \}$$

Ở đây C(K) biểu thị tập các bản mã có thể K là khóa. Khi đó với mỗi $y \in \mathcal{C}$, ta có :

$$p_{\mathcal{C}}(y) = \sum_{\{K:y \in C(K)\}} p_{\mathcal{K}}(K)\, p_{\mathcal{P}}(d_K(y))$$

Nhận thấy rằng, với bất kì $y \in \mathcal{C}$ và $x \in \mathcal{P}$, có thể tính được xác suất có điều kiện $p_{\mathcal{C}}(y \mid x)$.(Tức là xác suất để y là bản mã với điều kiện bản rõ là x):

$$p_{\mathcal{C}}(y \mid x) = \sum_{\{K:x = d_K(y)\}} p_{\mathcal{K}}(K)$$

Bây giờ ta có thể tính được xác suất có điều kiện $p_{\mathcal{P}}(x \mid y)$ (tức xác suất để x là bản rõ với điều kiện y là bản mã) bằng cách dùng định lý Bayes. Ta thu được công thức sau:

$$p_{\mathcal{P}}(x) = \sum_{\{K:x = d_K(y)\}} p_{\mathcal{K}}(K)$$

$$p_{\mathcal{P}}(y \mid x) = \frac{}{\sum_{\{k,U:y \in c(k)\}} p_{\mathcal{K}}(K)\, p_{\mathcal{P}}(d_K(y))}$$

Các phép tính này có thể thực hiện được nếu biết được các phân bố xác suất.

Sau đây sẽ trình bày một ví dụ đơn giản để minh hoạ việc tính toán các phân bố xác suất này.

Ví dụ 2.1.

Giả sử $\mathcal{P} = \{a,b\}$ với $p_{\mathcal{P}}(a) = 1/4$, $p_{\mathcal{P}}(b) = 3/4$. Cho $K = \{ K_1, K_2, K_3\}$ với $p_{\mathcal{K}}(K_1) = 1/2$, $p_{\mathcal{K}}(K_2) = p_{\mathcal{K}}(K_3) = 1/4$. Giả sử $\mathcal{C} = \{1,2,3,4\}$ và các hàm mã được xác định là $e_{K1}(a) = 1$, $e_{K2}(b) = 2$, $e_{K2}(a) = 2$, $e_{K2}(b) = 3$, $e_{K3}(a) = 3$, $e_{K3}(a) = 4$. Hệ mật này được biểu thị bằng ma trận mã hoá sau:

	a	b
K_1	1	2
K_2	2	3
K_3	2	4

Tính phân bố xác suất p_C ta có:

$$p_C(1) = 1/8$$
$$p_C(2) = 3/8 + 1/16 = 7/16$$
$$p_C(3) = 3/16 + 1/16 = 1/4$$
$$p_C(4) = 3/16$$

Bây giờ ta đã có thể các phân bố xác suất có điều kiện trên bản rõ với điều kiện đã biết bản mã. Ta có :

$p_{\mathcal{P}}(a \mid 1) = 1$ $p_{\mathcal{P}}(b \mid 1) = 0$ $p_{\mathcal{P}}(a \mid 2) = 1/7$ $p_{\mathcal{P}}(b \mid 2) = 6/7$
$p_{\mathcal{P}}(a \mid 3) = 1/4$ $p_{\mathcal{P}}(b \mid 3) = 3/4$ $p_{\mathcal{P}}(a \mid 4) = 0$ $p_{\mathcal{P}}(b \mid 4) = 1$

Bây giờ ta đã có đủ điều kiện để xác định khái niệm về độ mật hoàn thiện. Một cách không hình thức, độ mật hoàn thiện có nghiã là Oscar với bản mã trong tay không thể thu được thông tin gì về bản rõ. Ý tưởng này sẽ được làm chính xác bằng cách phát biểu nó theo các thuật ngữ của các phân bố xác suất định nghĩa ở trên như sau:

Định nghĩa 2.2.

Một hệ mật có độ mật hoàn thiện nếu $p_{\mathcal{P}}(x \mid y) = p_{\mathcal{P}}(x)$ với mọi $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{C}$. Tức xác suất hậu nghiệm để bản rõ là x với điều kiện đả thu được bản mã y là đồng nhất với xác suất tiên nghiệm để bản rõ là x.

Trong ví dụ 2.1 chỉ có bản mã 3 mới thoả mãn tính chất độ mật hoàn thiện, các bản mã khác không có tính chất này.

Sau đây sẽ chứng tỏ rằng, MDV có độ mật hoàn thiện. Về mặt trực giác, điều này dường như quá hiển nhiên. Với mã dịch vòng, nếu đã biết một phần tử bất kỳ của bản mã $y \in Z_{26}$, thì một phần tử bất kỳ của bản rõ $x \in Z_{26}$ cũng có thể là bản mã đả giải của y tuỳ thuộc vào giá trị của khoá. Định lý

sau cho một khẳng định hình thức hoá và được chứng minh theo các phân bố xác suất.

Định lý 2.3.

Giả sử 26 khoá trong MDV có xác suất như nhau và bằng1/26 khi đó MDV sẽ có độ mật hoàn thiện với mọi phân bố xác suất của bản rõ.

Chứng minh: Ta có $\mathcal{P} = C = \mathcal{K} = Z_{26}$ và với $0 \le K \le 25$, quy tắc mã hoá e_K là $e_K(x) = x + K \bmod 26$ $(x \in 26)$. Trước tiên tính phân bố $\mathcal{P}_C$. Giả sử $y \in Z_{26}$, khi đó:

$$p_C(y) = \sum_{K \in Z_{26}} p_{\mathcal{K}}(K)\, p_{\mathcal{P}}(d_K(y))$$
$$= \sum_{K \in Z_{26}} 1/26\, p_{\mathcal{P}}(y - K)$$
$$= 1/26 \sum_{K \in Z_{26}} p_{\mathcal{P}}(y - K)$$

Xét thấy với y cố định, các giá trị y -K mod 26 sẽ tạo thành một hoán vị của Z_{26} và $p_{\mathcal{P}}$ là một phân bố xác suất. Bởi vậy ta có:

$$\sum_{K \in Z_{26}} p_{\mathcal{P}}(y - K) = \sum_{y \in Z_{26}} p_{\mathcal{P}}(y)$$

$$= 1$$

Do đó $p_C(y) = 1/26$

với bất kỳ $y \in Z_{26}$.

Tiếp theo ta có:

$$p_C(y|x) = p_{\mathcal{K}}(y - x \bmod 26)$$

$$= 1/26$$

Vơi mọi x,y vì với mỗi cặp x,y, khóa duy nhất K (khoá đảm bảo $e_K(x) = y$) là khoá $K = y\text{-}x \bmod 26$. Bây giờ sử dụng định lý Bayes, ta có thể dễ dàng tính:

$$p_{\mathcal{P}}(x|y) = \frac{p_{\mathcal{P}}(x)\, p_C(y|x)}{p_C(y)}$$

$$= \frac{p_{\mathcal{P}}(x) \cdot (1/26)}{(1/26)}$$

$$= p_{\mathcal{P}}(x)$$

Bởi vậy, MDV có độ mật hoàn thiện.

Như vậy, mã dịch vòng là hệ mật không phá được miễn là chỉ dùng một khoá ngẫu nhiên để mã hoá mỗi ký tự của bản rõ.

Sau đây sẽ ngiên cứu độ mật hoàn thiện trong trường hợp chung. Trước tiên thấy rằng,(sử dụng định lý Bayes) điều kiện để $p_{\mathcal{P}}(x \mid y) = p_{\mathcal{P}}(x)$ với mọi $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{P}$ là tương đương với $p_C(y \mid x) = p_C(y)$ với mọi $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{P}$.

Giả sử rằng $p_C(y) > 0$ với mọi $y \in C$ ($p_C(y) = 0$ thì bản mã sẽ không được dùng và có thể loại khỏi C). Cố định một giá trị nào đó $x \in \mathcal{P}$. Với mỗi $y \in C$ ta có $p_C(y \mid x) = p_C(y) > 0$. Bởi vậy, với mỗi $y \in C$ phải có ít nhất một khoá K sao cho $e_K(x) = y$. Điều này dẫn đến $|\mathcal{K}| \geq |C|$. Trong một hệ mật bất kỳ ta phải có $|C| \geq |\mathcal{P}|$ vì mỗi quy tắc mã hoá là một đơn ánh. Trong trường hợp giới hạn, $|\mathcal{K}| = |C| = |\mathcal{P}|$, ta có định lý sau (Theo Shannon).

Định lý 2.4

Giả sử $(\mathcal{P}, C, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ là một hệ mật , trong đó $|\mathcal{K}| = |C| = |\mathcal{P}|$. Khi đó, hệ mật có độ mật hoàn thiện khi và mỗi khi khoá K được dùng với xác suất như nhau bằng $1/|\mathcal{K}|$, và mỗi $x \in \mathcal{P}$,mỗi $y \in C$ có một khoá duy nhất K sao cho $e_K(x) = y$.

Chứng minh

Giả sử hệ mật đã cho có độ mật hoàn thiện. Như đã thấy ở trên, với mỗi $x \in \mathcal{P}$ và $y \in C$, phải có ít nhất một khoá K sao cho $e_K(x) = y$. Bởi vậy ta có bất đẳng thức:

$$|C| = |\{e_K(x) : K \in \mathcal{K}\}| \leq |\mathcal{K}|$$

Tuy nhiên, ta giả sử rằng $|C| = |\mathcal{K}|$. Bởi vậy ta phải có:

$$|\{e_K(x) : K \in \mathcal{K}\}| = |\mathcal{K}|$$

Tức là ở đây không tồn tại hai khoá K_1 và K_2 khác nhau để $e_{K1}(x) = e_{K2}(x) = y$. Như vậy ta đã chứng tỏ được rằng, với bất kỳ $x \in \mathcal{P}$ và $y \in C$ có đúng một khoá K để $e_K(x)=y$.

Ký hiệu n = | $\mathcal{K}$| . Giả sử $\mathcal{P}$ = { x_i: 1 ≤ i ≤ n } và cố định một giá trị y ∈$\mathcal{C}$. Ta có thể ký hiệu các khoá $K_1,K_2,\ldots,K_n$ sao cho $e_{Ki}(x_i) = y_i$, 1 ≤ i ≤ n. Sử dụng định lý Bayes ta có:

$$p_{\mathcal{P}}(x_i|y) = \frac{p_{\mathcal{C}}(y|x_i)\, p_{\mathcal{P}}(x_i)}{p_{\mathcal{C}}(y)}$$

$$= \frac{p_{\mathcal{K}}(K_1).\,(p_{\mathcal{P}}(x_i))}{p_{\mathcal{C}}(y)}$$

Xét điều kiện độ mật hoàn thiện $p_{\mathcal{P}}(x_i|y) = p_{\mathcal{P}}(x_i)$. Điều kiện này kéo theo $p_{\mathcal{K}}(K_i) = p_{\mathcal{C}}(y)$ với 1 ≤ i ≤ n. Tức là khoá được dùng với xác suất như nhau (chính bằng $p_{\mathcal{C}}(y)$). Tuy nhiên vì số khoá là | $\mathcal{K}$| nên ta có $p_{\mathcal{K}}(K) = 1/|\mathcal{K}|$ với mỗi K ∈$\mathcal{K}$.

Ngược lại, giả sử hai điều giả định đều thảo mãn. Khi đó dễ dàng thấy được hệ mật có độ mật hoàn thiện với mọi phân bố xác suất bất kỳ của bản rõ (tương tự như chướng minh định lý 2.3). Các chi tiết dành cho bạn đọc xem xét.

Mật mã khoá sử dụng một lần của Vernam (One-Time-Pad:OTP) là một ví dụ quen thuộc về hệ mật có độ mật hoàn thiện. Gillbert Verman lần đầu tiên mô tả hệ mật này vào năm 1917. Hệ OTP dùng để mã và giải mã tự động các bản tin điện báo. Điều thú vị là trong nhiều năm OTP được coi là một hệ mật không thể bị phá nhưng không thể chướng minh cho tới khi Shannon xây dựng được khái niệm về độ mật hoàn thiện hơn 30 năm sau đó.

Mô tả về hệ mật dùng một lần nêu trên hình 2.1.

Sử dụng định lý 2.4, dễ dàng thấy rằng OTP có độ mật hoàn thiện. Hệ thống này rất hấp dẫn do dễ thực hiện mã và giải mã.

Vernam đã đăng ký phát minh của mình với hy vọng rằng nó sẽ có ứng dụng thương mại rộng rãi. Đáng tiếc là có nhưỡng những nhược điểm quan trọng đối với các hệ mật an toàn không điều kiện, chẳng hạn như OTP. Điều kiện $|\mathcal{K}| \geq |\mathcal{P}|$ có nghĩa là lượng khóa (cần được thông báo một cách bí mật) cũng lớn như bản rõ. Ví dụ , trong trường hợp hệ OTP, ta cần n bit khoá để mã hoá n bit của bản rõ. Vấn đề này sẽ không quan trọng nếu có thể dùng cùng một khoá để mã hoá các bản tin khác nhau; tuy nhiên, độ an toàn của các hệ mật an toàn không điều kiện lại phụ thuộc vào một thực tế là mỗi

khoá chỉ được dùng cho một lần mã. Ví dụ OTP không thể đứng vững trước tấn công chỉ với bản rõ đã biết vì ta có thể tính được K băngf phép hoặc loại trừ xâu bít bất kỳ x và $e_K(x)$. Bởi vậy, cần phải tạo một khóa mới và thông báo nó trên một kênh bảo mật đối với mỗi bản tin trước khi gửi đi. Điều nàytạo ra khó khăn cho vấn đề quản lý khoá và gây hạn chế cho việc sử dụng rộng rãi OTP. Tuy nhiên OTP vẫn được áp dụng trong lĩnh vực quân sự và ngoại giao, ở những lĩnh vực này độ an toàn không điều kiện có tầm quan trọng rất lớn.

Hình 2.1. Hệ mật sử dụng khoá một lần (OTP)

Giả sử n ≥1 là số nguyên và $\mathcal{P} = \mathcal{C} = \mathcal{K} = (Z_2)^n$. Với K $(Z_2)^n$, ta xác định $e_K(x)$ là tổng véc tơ theo modulo 2 của K và x (hay tương đương với phép hoặc loại trừ của hai dãy bit tương ứng). Như vậy, nếu $x = (x_1,..., x_n)$ và $K = (K_1,..., K_n)$ thì:

$$e_K(x) = (x_1 + K_1,..., x_n + K_n) \bmod 2.$$

Phép mã hoá là đồng nhất với phép giải mã. Nếu $y = (y_1,..., y_n)$ thì:

$$d_K(y) = (y_1 + K_1,..., y_n + K_n) \bmod 2.$$

Lịch sử phát triển của mật mã học là quá trình cố gắng tạo các hệ mật có thể dùng một khoá để tạo một xâu bản mã tương đối dài (tức có thể dung một khoá để mã nhiều bản tin) nhưng chí ít vẫn còn dữ được độ an toàn tính toán. Chuẩn mã dữ liệu (DES) là một hệ mật thuộc loại này (ta sẽ nghiên cứu vấn đề này trong chương 2).

2.2. ENTROPI

Trong phần trước ta đã thảo luận về khái niệm độ mật hoàn thiện và đặt mối quan tâm vào một trường hợp đặc biệt, khi một khoá chỉ được dùng cho một lần mã. Bây giờ ta sẽ xét điều sẽ xẩy ra khi có nhiều bản rõ được mã bằng cùng một khoá và bằng cách nào mà thám mã có thể thực hiện có kết quả phép tấn công chỉ chỉ với bản mã trong thời gian đủ lớn.

Công cụ cơ bản trong nghiên cứu bài toán này là khái niệm entropi. Đây là khái niệm trong lý thuyết thông tin do Shannon đưu ra vào năm 1948. Có thể coi entropi là đại lượng đo thông tin hay còn gọi là độ bất định. Nó được tính như một hàm phân bố xác suất.

Giả sử ta có một biến ngẫu nhiên X nhận các giá trị trên một tập hữu hạn theo một phân bố xác suất p(X). Thông tin thu nhận được bởi một sự kiện xảy ra tuân theo một phân bố p(X) là gì?. Tương tự, nếu sự kiện còn chưa xảy ra thì cái gì là độ bất định và kết quả?. Đại lượng này được gọi là entropi của X và được kí hiệu là H(X).

Các ý tưởng này có vẻ như khá trìu tượng, bởi vậy ta sẽ xét một ví dụ cụ thể hơn. Giả sử biến ngẫu nhiên X biểu thị phép tung đồng xu. Phân bố xác suất là: p(mặt xấp) = p(mặt ngữa) = 1/2. Có thể nói rằng, thông tin (hay entropi) của phép tung đồng xu là một bit vì ta có thể mã hoá mặt xấp bằng 1 và mặt ngữa bằng 0. Tương tự entropi của n phép tung đồng tiền có thể mã hoá bằng một xâu bít có độ dài n.

Xét một ví dụ phức tạp hơn một chút. Giả sử ta có một biến ngẫu nhiên X có 3 giá trị có thể là x_1, x_2, x_3 với xác suất tương ứng bằng 1/2, 1/4, 1/4. Cách mã hiệu quả nhất của 3 biến cố này là mã hoá x_1 là 0, mã của x_2 là 10 và mã của x_3 là 11. Khi đó số bít trung bình trong phép mã hoá này là:

$$1/2 \times 1 + 1/4 \times 2 + 1/4 \times 2 = 3/2.$$

Các ví dụ trên cho thấy rằng, một biến cố xảy ra với xác suất 2^{-n} có thể mã hoá được bằng một xâu bít có độ dài n. Tổng quát hơn, có thể coi rằng, một biến cố xảy ra với xác suất p có thể mã hoá bằng một xâu bít có độ dài xấp xỉ $-\log_2 p$. Nếu cho trước phân bố xác suất tuỳ ý $p_1, p_2, \ldots, p_n$ của biến ngẫu nhiên X, khi đó độ đo thông tin là trọng số trung bình của các lượng $-\log_2 p_i$. Điều này dẫn tới định nghĩa hình thức hoá sau.

Định nghĩa 2.3

Giả sử X là một biến ngẫu nhiên lấy các giá trị trên một tập hữu hạn theo phân bố xác suất p(X). Khi đó entropy của phân bố xác suất này được định nghĩa là lượng:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

Nếu các giá trị có thể của X là $x_i, 1 \le i \le n$ thì ta có:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(X=x_i) \log_2 p(X= x_i)$$

Nhận xét

Nhận thấy rằng, $\log_2 p_i$ không xác định nếu $p_i = 0$. Bởi vậy đôi khi entropy được định nghĩa là tổng tương ứng trên tất cả các xác suất khác 0. Vì $\lim_{x\to 0} x\log_2 x = 0$ nên trên thực tế cũng không có trở ngại gì nếu cho $p_i = 0$ với giá trị i nào đó. Tuy nhiên ta sẽ tuân theo giả định là khi tính entropy của một phân bố xác suất p_i, tổng trên sẽ được lấy trên các chỉ số i sao cho $p_i \neq 0$. Ta cũng thấy rằng việc chọn cơ số của logarit là tuỳ ý; cơ số này không nhất thiết phải là 2. Một cơ số khác sẽ chỉ làm thay đổi giá trị của entropy đi một hằng số.

Chú ý rằng, nếu $p_i = 1/n$ với $1 \le i \le n$ thì $H(X) = \log_2 n$. Cũng dễ dàng thấy rằng $H(X) \ge 0$ và $H(X) = 0$ khi và chỉ khi $p_i = 1$ với một giá trị i nào đó và $p_j = 0$ với mọi $j \neq i$.

Xét entropy của các thành phần khác nhau của một hệ mật. Ta có thể coi khoá là một biến ngẫu nhiên K nhận các giá trị tuân theo phân bố xác suất p_K và bởi vậy có thể tính được H(K). Tương tự ta có thể tính các entropy H(P) và H(C) theo các phân bố xác suất tương ứng của bản mã và bản rõ.

Ví dụ 2.1: (tiếp)

Ta có:
$$\begin{aligned} H(P) &= -1/4\log_2 1/4 - 3/4\log_2 3/4 \\ &= -1/4(-2) - 3/4(\log_2 3 - 2) \\ &= 2 - 3/4\log_2 3 \\ &\approx 0{,}81 \end{aligned}$$

bằng các tính toán tương tự, ta có H(K) = 1,5 và H(C) ≈1,85.

2.2.1. Mã huffman và entropy

Trong phần này ta sẽ thảo luận sơ qua về quan hệ giữa entropy và mã Huffman. Vì các kết quả trong phần này không liên quan đến các ứng dụng trong mật mã của entropy nên ta có thể bỏ qua mà không làm mất tính liên tục. Tuy nhiên các hệ quả ở đây có thể dùng để nghiên cứu sâu hơn về khái niệm entropy.

Ở trên đã đưa ra entropy trong bối cảnh mã hoá các biến cố ngẫu nhiên xảy ra theo một phân bố xác suất đã định. Trước tiên ta chính xác hoá thêm những ý tưởng này. Cũng như trên, coi X là biến ngẫu nhiên nhận các giá trị trên một tập hữu hạn và p(X) là phân bố xác suất tương ứng.

Một phép mã hoá X là một ánh xạ bất kỳ:
$$f: X \to \{0,1\}^*$$

trong đó $\{0,1\}^*$ kí hiệu tập tất cả các xâu hữu hạn các số 0 và 1. Với một danh sách hữu hạn (hoặc một xâu) các biến cố $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ta có thể mở rộng phép mã hoá f nhờ sử dụng định nghĩa sau:

$$f(x_1x_2...x_n) = f(x_1) || ... || f(x_n)$$

trong đó || kí hiệu phép ghép. Khi đó có thể coi f là ánh xạ:

$$f:X^* \rightarrow \{0,1\}^*$$

Bây giờ giả sử xâu $x_1...x_n$ được tạo từ một nguồn không nhớ sao cho mỗi x_i xảy ra đều tuân theo phân bố xác suất trên X. Điều đó nghĩa là xác suất của một xâu bất kì $x_1...x_n$ được tính bằng $p(x_1) \times ... \times p(x_n)$ (Để ý rằng xâu này không nhất thiết phải gồm các giá trị phân biệt vì nguồn là không nhớ). Ta có thể coi dãy n phép tung đồng xu là một ví dụ.

Bây giờ giả sử ta chuẩn bị dùng ánh xạ f để mã hoá các xâu. Điều quan trọng ở đây là giải mã được theo một cách duy nhất. Bởi vậy phép mã f nhất thiết phải là một đơn ánh.

Ví dụ 2.2.

Giả sử X = {a,b,c,d} , xét 3 phép mã hoá sau:

f(a) = 1	f(b) = 10	f(c) = 100	f(d) = 1000
g(a) = 0	g(b) = 10	g(c) = 110	g(d) = 111
h(a) = 0	h(b) = 01	h(c) = 10	h(d) = 11

Có thể thấy rằng, f và g là các phép mã đơn ánh, còn h không phải là một đơn ánh. Một phép mã hoá bất kỳ dùng f có thể được giải mã bằng cách bắt đầu ở điểm cuối và giải mã ngược trở lại: Mỗi lần gặp số một ta sẽ biết vị trí kết thúc của phần tử hiện thời.

Phép mã dùng g có thể được giải mã bằng cách bắt đầu ở điểm đầu và xử lý liên tiếp. Tại thời điểm bất kì mà ở đó có một dãy con là các kí tự mã của a ,b,c hoặc d thì có thể giải mã nó và có thể cắt ra khỏi dãy con. Ví dụ, với xâu10101110, ta sẽ giải mã 10 là b, tiếp theo 10 là b, rồi đến 111 là d và cuối cùng 0 là a. Bởi vậy xâu đã giải mã là bbda.

Để thấy rằng h không phải là một đơn ánh, chỉ cần xét ví dụ sau:

$$h(ac) = h(bc) = 010$$

Theo quan điểm dễ dàng giải mã, phép mã g tốt hơn f. Sở dĩ như vậy vì nếu dùng g thì việc giải mã có thể được làm liên tiếp từ đầu đến cuối và bởi vậy không cần phải có bộ nhớ. Tính chất cho phép giải mã liên tiếp đơn giản của g được gọi là tính chất tiền tố độclập (một phép mã g được gọi là có tiền

tố độc lập nếu không tồn tại 2 phần tử x,y $\in$ X và một xâu z $\in \{0,1\}^*$ sao cho g(x) = g(y) || z).

Thảo luận ở trên không liên hệ gì đến entropy. Tuy nhiên không có gì đáng ngạc nhiên khi entropy lại có liên quan đến tính hiệu quả của phép mã. Ta sẽ đo tính hiệu quả của phép mã f như đã làm ở trên: đó là độ dài trung bình trọng số (được kí hiệu là *l (f)*) của phép mã một phần tử của X. Bởi vậy ta có định nghĩa sau:

$$l(f) = \sum_{x \in X} p(x) \mid f(x) \mid$$

Trong đó |y| kí hiệu là độ dài của xâu y.

Bây giờ nhiệm vụ chủ yếu của ta là phải tìm một phép mã hoá đơn ánh sao cho tối thiểu hoá được *l(f)* . Thuật toán Huffman là một thuật toán nổi tiếng thực hiện được mục đích này. Hơn nữa, phép mã f tạo bởi thuật toán Huffman là một phép mã có tiền tố độc lập và

$$H(X) \leq l(f) \leq H(X) + 1$$

Như vậy, giá trị của entropy cho ta đánh giá khá chính xác về độ dài trung bình của một phép mã đơn ánh tối ưu.

Ta sẽ không chứng minh các kết quả đã nêu mà chỉ đưa ra một mô tả ngắn gọn hình thức hoá về thuật toán Huffman. Thuật toán Huffman bắt đầu với phân bố xác suất trên tập X và mã mỗi phần tử ban đầu là trống. Trong mỗi bước lặp, 2 phần tử có xác suất thấp nhất sẽ được kết hợp thành một phần tử có xác suất bằng tổng của hai xác suất này. Trong 2 phần tử, phần tử có xác suất nhỏ hơn sẽ được gán giá trị "0", phần tử có giá trị lớn hơn sẽ được gán giá trị "1". Khi chỉ còn lại một phần tử thì mã của x $\in$ X sẽ được cấu trúc bằng dãy các phần tử ngược từ phần tử cuối cùng tới phần tử ban đầu x.

Ta sẽ minh hoạ thuật toán này qua ví dụ sau.

Ví dụ 2.3.

Giả sử X = {a,b,c,d,e} có phân bố xác suất: p(a) = 0,05; p(b) = 0,10; p(c) = 0,12; p(d) = 0,13 và p(e) = 0,60. Thuật toán Huffman được thực hiện như trong bảng sau:

A	b	c	d	e

0,05	0,10	0,12	0,13	0,60
0	1			

0,15		0,12	0,13	0,60
		0	1	

0,15		0,25	0.60
0		1	

0,40			0,60
0			1

1,0

Điều này dẫn đến phép mã hoá sau:

x	*f(x)*
a	000
b	001
c	010
d	011
e	1

Bởi vậy độ dài trung bình của phép mã hoá là:

$$l(\mathrm{f}) = 0{,}05 \times 3 + 0{,}10 \times 3 + 0{,}12 \times 3 + 0{,}13 \times 3 + 0{,}60 \times 1 = 1{,}8$$

So sánh giá trị này với entropy:

$$\begin{aligned} \mathrm{H(X)} &= 0{,}2161 + 0{,}3322 + 0{,}3671 + 0{,}3842 + 0{,}4422 \\ &= 1{,}7402. \end{aligned}$$

2.3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA ENTROPI

Trong phần này sẽ chứng minh một số kết quả quan trọng liên quan đến entropi. Trước tiên ta sẽ phát biểu bất đẳng thức Jensen. Đây là

một kết quả cơ bản và rất hữu ích. Bất đẳng thức Jensen có liên quan đến hàm lồi có định nghĩa như sau.

Định nghĩa 2.4.

Một hàm có giá trị thực f là lồi trên khoảng I nếu:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

với mọi x,y $\in$I. f là hàm lồi thực sự trên khoảng I nếu:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) > \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

với mọi x,y $\in I, x \neq y$.

Sau đây ta sẽ phát biểu mà không chứng minh bất đẳng thức Jensen.

Định lý 2.5.(Bất đẳng thức Jensen).

Giả sử h là một hàm lồi thực sự và liên tục trên khoảng l,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

và $a_i > 0, 1 \leq i \leq n$. Khi đó:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)$$

trong đó $x_i \in I, 1 \leq i \leq n$. Ngoài ra dấu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = \ldots = x_n$.

Bây giờ ta sẽ đưa ra một số kết quả về entropi. Trong định lý sau sẽ sử dụng khẳng định: hàm $\log_2 x$ là một hàm lồi thực sự trong khoảng $(0, \infty)$ (Điều này dễ dàng thấy được từ những tính toán sơ cấp vì đạo hàm cấp 2 của hàm logarith là âm trên khoảng $(0, \infty)$).

Định lý 2.6.

Giả sử X là biến ngẫu nhiên có phân bố xác suất $p_1, p_2, \ldots, p_n$, trong đó $p_i > 0, 1 \leq i \leq n$. Khi đó $H(X) \leq \log_2 n$. Dờu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi $p_i = 1/n, 1 \leq i \leq n$.

Chứng minh:

Áp dụng bất đẳng thức Jensen, ta có:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 (1/p_i)$$

$$\leq \log_2 \sum_{i=1}^{n} (p_i \times 1/p_i)$$

$$= \log_2 n$$

Ngoài ra, dấu "=" chỉ xảy ra khi và chỉ khi $p_i = 1/n$, $1 \leq i \leq n$.

Định lý 2.7.

$$H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$$

Đẳng thức (dấu "=") chỉ xảy ra khi và chỉ khi X và Y là các biến cố độc lập

Chứng minh.

Giả sử X nhận các giá trị x_i, $1 \leq i \leq m$; Y nhận các giá trị y_j, $1 \leq j \leq n$. Kí hiệu: $p_i = p(X = x_i)$, $1 \leq i \leq m$ và $q_j = p(Y = y_j)$, $1 \leq j \leq n$. Kí hiệu $r_{ij} = p(X = x_i, Y = y_j)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. (Đây là phân bố xác suất hợp).

Nhận thấy rằng

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$$

($1 \leq i \leq m$) và

$$q_j = \sum_{i=1}^{m} r_{ij}$$

($1 \leq j \leq n$). Ta có

$$H(X) + H(Y) = -(\sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i + \sum_{j=1}^{n} q_j \log_2 q_j)$$

$$= -(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 p_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij} \log_2 q_j)$$

$$= -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 p_i q_j$$

Mặt khác

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 r_{ij}$$

Kết hợp lại ta thu được kết quả sau:

$$H(X,Y) - H(X) - H(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 (1/r_{ij}) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 p_i q_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \log_2 (p_i q_j / r_{ij})$$

$$= \log_2 \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j$$

$$= \log_2 1$$

$$= 0$$

(ở đây đã áp dụng bất đẳng thức Jensen khi biết rằng các r_{jj} tạo nên một phân bố xác suất).

Khi đẳng thức xảy ra, có thể thấy rằng phải có một hằng số c sao cho $p_{jj} / r_{jj} = c$ với mọi i,j. Sử dụng đẳng thức sau:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i q_j = 1$$

Điều này dẫn đến c=1. Bởi vậy đâửng thức (dấu "=") sẽ xảy ra khi và chỉ khi $r_{jj} = p_j q_j$, nghĩa là:

$$p(X = x_j, Y = y_j) = p(X = x_j) p(Y = y_j)$$

với $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Điều này có nghĩa là X và Y độc lập.

Tiếp theo ta sẽ đưa ra khái niệm entropi có điều kiện

Định nghĩa 2.5.

Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên. Khi đó với giá trị xác định bất kỳ y của Y, ta có một phân bố xác suất có điều kiện p(X/y). Rõ ràng là :

$$H(X \mid y) = -\sum_{x} p(x \mid y) \log_2 p(x \mid y)$$

Ta định nghĩa entropi có điều kiện H(X/Y) là trung bình trọng số (ứng với các xác suất p(y) của entropi H(X/y) trên mọi giá trị có thể y. H(X/y) được tính bằng:

$$H(X \mid Y) = -\sum_{y} \sum_{x} p(y) p(x \mid y) \log_2 p(x \mid y)$$

Entropi có điều kiện đo lượng thông tin trung bình về X do Y mang lại.

Sau đây là hai kết quả trực tiếp (Bạn đọc có thể tự chứng minh)

Định lý 2.8.

$$H(X,Y) = H(Y) + H(X/Y)$$

Hệ quả 2.9.

$$H(X/Y) \leq H(X)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi và chỉ khi X và Y độc lập.

2.4. CÁC KHOÁ GIẢ VÀ KHOẢNG DUY NHẤT

Trong phần này chúng ta sẽ áp dụng các kết quả về entropi ở trên cho các hệ mật. Trước tiên sẽ chỉ ra một quan hệ cơ bản giữa các entropi của các thành phần trong hệ mật. Entropi có điều kiện H(K|C) được gọi là độ bất định về khoá. Nó cho ta biết về lượng thông tin về khoá thu được từ bản mã.

Định lý 2.10.

Giả sử(𝒫, 𝒞, 𝒦, ℰ, 𝒟) là một hệ mật. Khi đó:

$$H(K/C) = H(K) + H(P) - H(C)$$

Chứng minh:

Trước tiên ta thấy rằng H(K,P,C) = H(C | K,P) + H(K,P). Do $y = e_K(x)$ nên khoá và bản rõ sẽ xác định bản mã duy nhất. Điều này có nghĩa là H(C|K,C) = 0. Bởi vậy H(K,P,C) = H(K,P). Nhưng K và P độc lập nên H(K,P) = H(K) + H(P). Vì thế:

$$H(K,P,C) + H(K,P) = H(K) + H(P)$$

Tương tự vì khoá và bản mã xác định duy nhất bản rõ (tức $x = d_K(y)$) nên ta có H(P | K,C) = 0 và bởi vậy H(K,P,C) = H(K,P). Bây giờ ta sẽ tính như sau:

$$H(K \mid C) = H(K,C) - H(C)$$
$$= H(K,P,C) - H(C)$$

$$= H(K) + H(P) - H(C)$$

Đây là nội dung của định lý.

Ta sẽ quay lại ví dụ 2.1 để minh hoạ kết quả này.

Ví dụ 2.1 (tiếp)

Ta đã tính được $H(P) \approx 0,81$, $H(K) = 1,5$ và $H(C) \approx 1,85$. Theo định lý 2.10 ta có $H(K \mid C) \approx 1,5 + 0,85 - 1,85 \approx 0,46$. Có thể kiểm tra lại kết quả này bằng cách áp dụng định nghĩa về entropi có điều kiện như sau. Trước tiên cần phải tính các xác suất xuất $p(K_j \mid j)$, $1 \le i \le 3$, $1 \le j \le 4$. Để thực hiện điều này có thể áp dụng định lý Bayes và nhận được kết quả như sau:

$P(K_1 \mid 1) = 1$	$p(K_2 \mid 1) = 0$	$p(K_3 \mid 1) = 0$
$P(K_1 \mid 2) = 6/7$	$p(K_2 \mid 2) = 1/7$	$p(K_3 \mid 2) = 0$
$P(K_1 \mid 3) = 0$	$p(K_2 \mid 3) = 3/4$	$p(K_3 \mid 3) = 1/4$
$P(K_1 \mid 4) = 0$	$p(K_2 \mid 4) = 0$	$p(K_3 \mid 4) = 1$

Bây giờ ta tính:

$$H(K \mid C) = 1/8 \times 0 + 7/16 \times 0,59 + 1/4 \times 0,81 + 3/16 \times 0 = 0,46$$

Giá trị này bằng giá trị được tính theo định lý 2.10.

Giả sử $(\mathcal{P}, \mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{E}, \mathcal{D})$ là hệ mật đang được sử dụng. Một xâu của bản rõ $x_1x_2 \ldots x_n$ sẽ được mã hoá bằng một khoá để tạo ra bản mã $y_1y_2 \ldots y_n$. Nhớ lại rằng, mục đích cơ bản của thám mã là phải xác định được khoá. Ta xem xét các phương pháp tấn công chỉ với bản mã và coi Oscar có khả năng tính toán vô hạn. Ta cũng giả sử Oscar biết bản rõ là một văn bản theo ngôn ngữ tự nhiên (chẳng hạn văn bản tiếng Anh). Nói chung Oscar có khả năng rút ra một số khoá nhất định (các khoá có thể hay các khoá chấp nhận được) nhưng trong đó chỉ có một khoá đúng, các khoá có thể còn lại (các khoá không đúng) được gọi là các khoá giả.

Ví dụ, giả sử Oscar thu được một xâu bản mã WNAJW mã bằng phương pháp mã dịch vòng. Dễ dàng thấy rằng, chỉ có hai xâu bản rõ có ý nghĩa là *river* và *arena* tương ứng với các khoá F(= 5) và W(= 22). Trong hai khoá này chỉ có một khoá đúng, khoá còn lại là khoá giả. (Trên thực tế, việc tìm một bản mã của MDV có độ dài 5 và 2 bản giải mã có nghĩa không phải quá khó khăn, bạn đọc có thể tìm ra nhiều ví dụ khác). Mục đích của ta là phải tìm ra giới hạn cho số trung bình các khoá giả. Trước tiên, phải xác định giá trị này theo entropi (cho một kí tự) của một ngôn ngữ tự nhiên L (kí hiệu là H_L). H_L là lượng thông tin trung bình trên một kí tự trong một xâu có nghĩa của bản rõ. (Chú ý rằng, một xâu ngẫu nhiên các kí tự của bảng chữ

cái sẽ có entropi trên một kí tự bằng $\log_2 26 \approx 4{,}76$). Ta có thể lấy H(P) là xấp xỉ bậc nhất cho H_L. Trong trường hợp L là Anh ngữ, sử dụng phân bố xác suất trên bảng 1.1, ta tính được $H(P) \approx 4{,}19$.

Dĩ nhiên các kí tự liên tiếp trong một ngôn ngữ không độc lập với nhau và sự tương quan giữa các kí tự liên tiếp sẽ làm giảm entropi. Ví dụ, trong Anh ngữ, chữ Q luôn kéo theo sau là chữ U. Để làm xấp xỉ bậc hai, tính entropi của phân bố xác suất của tất cả các bộ đôi rồi chia cho 2. Một cách tông quát, ta định nghĩa P^n là biến ngẫu nhiên có phân bố xác suất của tất cả các bộ n của bản rõ. Ta sẽ sử dụng tất cả các định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.6

Giả sử L là một ngôn ngữ tự nhiên. Entropi của L được xác định là lượng sau:

$$H_L = \lim_{n\to\infty} \frac{H(P^n)}{n}$$

Độ dư của L là: $R_L = l - (H_L / \log_2 |\mathcal{P}|)$

Nhận xét: H_L đo entropi trên mỗi kí tự của ngôn ngữ L. Một ngôn ngữ ngẫu nhiên sẽ có entropi là $\log_2 |\mathcal{P}|$. Bởi vậy đại lượng R_L đo phần "kí tự vượt trội" là phần dư.

Trong trường hợp Anh ngữ, dựa trên bảng chứa một số lớn các bộ đôi và các tần số, ta có thể tính được $H(P^2)$. Ước lượng theo cách này, ta tính được $H(P^2) \approx 3{,}90$. Cứ tiếp tục như vậy bằng cách lập bảng các bộ ba .v.v... ta thu được ước lượng cho H_L. Trên thực tế, bằng nhiều thực nghiệm khác nhau, ta có thể đi tới kết quả sau $1{,}0 \le H_L \le 1{,}5$. Tức là lượng thông tin trung bình trong tiếng Anh vào khoảng 1 bít tới 1,5 bít trên mỗi kí tự!.

Giả sử lấy 1,25 là giá trị ước lượng của giá trị của H_L. Khi đó độ dư vào khoảng 0,75. Tức là tiếng Anh có độ dư vào khoảng 75%! (Điều này không có nghĩa loại bỏ tuỳ ý 3 trên 4 kíb tự của một văn bản tiếng Anh mà vẫn có khả năng đọc được nó. Nó chỉ có nghĩa là tìm được một phép mã Huffman cho các bộ n với n đủ lớn, phép mã này sẽ nén văn bản tiếng Anh xuống còn 1/4 độ dài của bản gốc).

Với các phân bố xác suất đã cho trên $\mathcal{K}$ và $\mathcal{P}^n$. Có thể xác định phân bố xác suất trên $\mathcal{C}^n$ là tập các bộ n của bản mã. (Ta đã làm điều này trong trường

hợp n =1). Ta đã xác định P^n là biến ngẫu nhiên biểu diễn bộ n của bản rõ. Tương tự C^n là biến ngẫu nhiên biểu thị bộ n của bản mã.

Với $y \in C^n$, định nghĩa:

$$K(y) = \{ K \in \mathcal{K}: \exists x \in \mathcal{P}^n, p_{\mathcal{P}^n}(x) > 0, e_K(x) = y\}$$

nghĩa là K(y) là tập các khoá K sao cho y là bản mã của một xâu bản rõ độ dài n có nghĩa, tức là tập các khoá "có thể" với y là bản mã đã cho. Nếu y là dãy quan sát được của bản mã thì số khoá giả sẽ là $| K(y) | -1$ vì chỉ có một khoá là khoá đúng trong số các khoá có thể. Số trung bình các khoá giả (trên tất cả các xâu bản mã có thể độ dài n) được kí hiệu là s_n và nó được tính như sau:

$$\begin{aligned}\bar{s}_n &= \sum_{y \in C^n} p(y)(| K(y) | -1) \\ &= \sum_{y \in C^n} p(y) | K(y) | - \sum_{y \in C^n} p(y) \\ &= \sum_{y \in C^n} p(y) | K(y) | -1\end{aligned}$$

Từ định lý 2.10 ta có:

$$H(K| C^n) = H(K) + H(P^n) - H(C^n).$$

Có thể dùng ước lượng sau:

$$H(P^n) \approx nH_L = n(1 - R_L)\log_2 | \mathcal{P} |$$

với điều kiện n đủ lớn. Hiển nhiên là:

$$H(C^n) \leq n\log_2 | C |.$$

Khi đó nếu $| \mathcal{P} | = | C |$ thì:

$$H(K| C^n) \geq H(K) - nR_L \log_2 | \mathcal{P} | \qquad (2.1)$$

Tiếp theo xét quan hệ của lượng $H(K | C^n)$ với số khoá giả s_n. Ta có:

$$\begin{aligned}H(K | C^n) &= \sum_{y \in C^n} p(y) H(K | y) \\ &\leq \sum_{y \in C^n} p(y) \log_2 | K(y) | \\ &\leq \log_2 \sum_{y \in C^n} p(y) | K(y) | \\ &= \log_2 (\bar{s}_n + 1)\end{aligned}$$

ở đây ta áp dụng bất đẳng thức Jensen (định lý 2.5) với $f(x) = \log_2 x$. Bởi vậy ta có bất đẳng thức sau:

$$H(K | C^n) \leq \log_2 (\bar{s}_n + 1) \qquad (2.2)$$

Kết hợp hai bất đẳng thức (2.1) và (2.2), ta có :

$$\log_2 (\bar{s}_n + 1) \geq H(K) - nR_L \log_2 | P |$$

Trong trường hợp các khoá được chọn đồng xác suất (Khi đó H(K) có giá trị lớn nhất) ta có kết quả sau.

Định lý 2.11

Giả sử ($\mathcal{P}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$) là một hệ mật trong đó | C | = | P | và các khoá được chọn đồng xác suất. Giả sử R_L là độ dư của ngôn ngữ gốc. Khi đó với một xâu bản mã độ dài n cho trước (n là số đủ lớn), số trung bình các khoá giả s_n thoả mãn bất đẳng thức như sau:

$$\overline{s_n} \geq \{| K | /(| P | nR_L)\} - 1$$

Lượng |K| / |P|nR_L-1 tiến tới 0 theo hàm mũ khi n tăng. Ước lượng này có thể không chính xác với các giá trị n nhỏ. Đó là do $H(P^n)$/ n không phải là một ước lượng tốt cho H_L nếu n nhỏ.

Ta đưa ra đây một khái niệm nữa

Định nghĩa 2.7.

Khoảng duy nhất của một hệ mật được định nghĩa là giá trị của n mà ứng với giá trị này, số khoá giả trung bình bằng 0 (kí hiệu giá trị này là n_0). Điều đó có nghĩa là n_0 là độ dài trung bình cần thiết của bản mã để thám mã có thể tính toán khoá một cách duy nhất với thời gian đủ lớn.

Nếu đặt s_n =0 trong định lý 2.11 và giải theo n ta sẽ nhận được ước lượng cho khoảng duy nhất:

$$n_0 \approx \log_2|\mathcal{K}| / R_L \log_2 |\mathcal{P}|$$

Ví dụ với MTT, ta có $|\mathcal{P}| = 26$ và $|\mathcal{K}| = 26!$. Nếu lấy R_L =0,75 thì ta nhận được ước lượng cho khoảng duy nhất bằng:

$$n_0 \approx 88{,}4/ (0{,}75 \times 4{,}7) \approx 25$$

Điều đó có nghĩa là thông thường nếu mã thám có được xâu bản mã với độ dài tối thiểu là 25, anh ta có thể nhận được bản giải mã duy nhất.

2.5. CÁC HỆ MẬT MÃ TÍCH

Một phát minh khác do Shannon đưa ra trong bài báo của mình năm 1949 là ý tưởng kết hợp các hệ mật bằng cách tạo tích của chúng. Ý tưởng này có tầm quan trọng to lớn trong việc thiết kế các hệ mật hiện nay (chẳng hạn chuẩn mã dữ liệu -DES).

Để đơn giản, trong phần này chỉ hạn chế xét các hệ mật trong đó $\mathcal{C}=\mathcal{P}$: các hệ mật loại này được gọi là tự đồng cấu. Giả sử $S_1= (\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_1, \mathcal{E}_1, \mathcal{D}_1)$ và $S_2= (\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_2, \mathcal{E}_2, \mathcal{D}_2)$ là hai hệ mật tự đồng cấu có cùng các không gian bản mã và rõ. Khi đó, tích của S_1 và S_2 (kí hiệu là $S_1 \times S_2$) được xác định là hệ mật sau:

$$(\mathcal{P}, \mathcal{P}, \mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2, \mathcal{E}, \mathcal{D})$$

Khoá của hệ mật tích có dạng $K = (K_1,K_2)$ trong đó $K_1 \in \mathcal{K}_1$ và $K_2 \in \mathcal{K}_2$. Các quy tắc mã và giải mã của hệ mật tích được xác định như sau: Với mỗi K = (K1,K2), ta có một quy tắc mã E_K xác định theo công thức:

$$e_{(K_1,K_2)}(x) = e_{K_2}(e_{K_1}(x))$$

và quy tắc giải mã:

$$d_{(K_1,K_2)}(y) = d_{K_1}(d_{K_2}(y))$$

Nghĩa là trước tiên ta mã hoá x bằng e_{K1} rồi mã lại bản kết quả bằng e_{K2}. Quá trình giải mã tương tự nhưng thực hiện theo thứ tự ngược lại:

$$\begin{aligned} & d_{(K_1,K_2)}(e_{(K_1,K_2)}(x) = d_{(K_1,K_2)}(e_{K_2}(e_{K_1}(x))) \\ & = d_{K_1}(d_{K_2}(e_{K_2}(e_{K_1}(x))) \\ & = d_{K_1}(e_{K_1}(x))) \\ & = x. \end{aligned}$$

Ta biết rằng, các hệ mật đều có các phân bố xác suất ứng với các không gian khoá của chúng. Bởi vậy, cần phải xác định phân bố xác suất cho không gian khoá $\mathcal{K}$ của hệ mật tích. Hiển nhiên ta có thể viết:

$$p_{\mathcal{K}}(K_1,K_2)= p_{\mathcal{K}1}(K_1) \times p_{\mathcal{K}2}=(K_2)$$

Nói một cách khác, ta chọn K_1 có phân bố $p_{\mathcal{K}1}$ rồi chọn một cách độc lập K_2 có phân bố $p_{\mathcal{K}2}(K_2)$.

Sau đây là một ví dụ đơn giản để minh hoạ khái niệm hệ mật tích. Giả sử định nghĩa hệ mật mã nhân như trong hình 2.2 sau.

Hình 2.2. Mã nhân

Giả sử $\mathcal{P} = \mathcal{C} = Z_{26}$ và giả sử:

$$K = \{a \ Z_{26}: UCLN(a,26) = 1\}$$

Với $a \in \mathcal{K}$, ta xác định: $e_a(x) = ax \bmod 26$

và $d_a(y) = a^{-1}y \bmod 26$

$(x,y) \in Z_{26}$.

Cho M là một hệ mã nhân (Với các khoá được chọn đồng xác suất) và S là MDV (với các khoá chọn đồng xác suất). Khi đó dễ dàng thấy rằng M×S chính là hệ mã Affine (cùng với các khoá được chọn đồng xác suất). Tuy nhiên việc chướng tỏ S ×M cũng là hệ mã Affine khó hơn một chút (cũng với các khóa đồng xác suất).

Ta sẽ chứng minh các khẳng định này. Một khoá dịch vòng là phần tử $K \in Z_{26}$ và quy tắc giải mã tương ứng là $e_K(x) = x + K \bmod 26$. Còn khoá trong hệ mã nhân là phần tử $a \in Z_{26}$ sao cho UCLN(a,26) = 1. Quy tắc mã tương ứng là $e_a(x) = a \bmod 26$. Bởi vậy, một khoá trong mã tích M × S có dạng (a,K), trong đó

$$e_{(a,K)}(x) = a\,x + K \bmod 26$$

Đây chính là định nghĩa về khoá trong hệ mã Affine. Hơn nữa, xác suất của một khoá trong hệ mã Affine là:1/312 = 1/12 × 1/26. Đó là tích của xác suất tương ứng của các khoá a và K. Bởi vậy M ×S là hệ mã A ffine.

Bây giờ ta sẽ xét S ×M. Một khoá này trong hệ mã này có dạng (K ,a) trong đó:

$$e_{(K,a)}(x) = a(x+K) = a\,x + aK \bmod 26$$

Như vậy khoá (K,a) của mã tích S×M đồng nhất với khoá (a, aK) của hệ mã Affine. Vấn đề còn lại là phải chứng tỏ rằng mỗi khoá của mã Affine xuất hiện với cùng xác suất 1/312 như trong mã tích S×M. Nhận thấy rằng, aK = K_1 khi và chỉ khi $K = a^{-1}K_1$, (hãy nhớ lại rằng UCLN(a,26) =1, bởi vậy a có phần tử nghịch đảo). Nói cách khác, khoá (a, K_1) của hệ mã Affine tương đương với khoá ($a^{-1}K_1$,a) của mã tích S×M. Bởi vậy, ta có một song ánh giữa hai không gian khoá. Vì mỗi khoá là đồng xác suất nên có thể thấy rằng S×M thực sự là mã Affine.

Ta chứng minh rằng M ×S = S × M. Bởi vậy, hai hệ mật là giao hoán. Tuy nhiên không phải mọi cặp hệ mật đều giao hoán; có thể tìm ta được các cặp phản ví dụ, Mặt khác ta thấy rằng phép tích luôn kết hợp:

$$(S_1 \times S_2) \times S_3 = S_1 \times (S_2 \times S_3)$$

Nếu lấy tích của một hệ mật tự đồng cấu với chính nó thì ta thu được hệ mật S×S (kí hiệu là S^2). Nếu lấy tích n lần thì hệ mật kết quả là S^n. Ta gọi S^n là hệ mật lặp.

Một hệ mật S được gọi là luỹ đẳng nếu $S^2 = S$. Có nhiều hệ mật đã nghiên cứu trong chương 1 là hê mật luỹ đẳng. Chẳng hạn các hệ MDV, MTT, Affine, Hill, Vigenère và hoán vị đều là luỹ đẳng. Hiển nhiên là nếu

hệ mật S là luỹ đẳng thì không nên sử dụng hệ mâth tích S^2 vì nó yêu cầu lượng khoá cực lớn mà không có độ bảo mật cao hơn.

Nếu một hệ mật không phải là luỹ đẳng thì có khả năng làm tăng độ mật bằng cách lặp nhiều lần. Ý tưởng này đã được dùng trong chuẩn mã dữ liệu (DES). Trong DES dùng 16 phép lặp, tất nhiên hệ mật ban đầu phải là hệ mật không luỹ đẳng. Một phương pháp có thể xây dựng các hệ mật không luỹ đẳng đơn giản là lấy tích của hai hệ mật đơn giản khác nhau.

Nhận xét:

Có thể dễ dàng chứng tỏ rằng, nếu cả hai hệ mật S_1 và S_2 là luỹ đẳng và giao hoán thì S_1 và S_2 cũng là luỹ đẳng. Điều này rút ra từ các phép toán đại số sau:

$$\begin{aligned}(S_1 \times S_2) \times (S_1 \times S_2) &= S_1 \times (S_2 \times S_1) \times S_2 \\ &= S_1 \times (S_1 \times S_2) \times S_2 \\ &= (S_1 \times S_1) \times (S_2 \times S_2) \\ &= S_1 \times S_2.\end{aligned}$$

(Chú ý dùng tính chất kết hợp trong chứng minh trên)

Bởi vậy, nếu cả S_1 và S_2 đều là luỹ đẳng và ta muốn $S_1 \times S_2$ là không luỹ đẳng thì điều kiện cần là S_1 và S_2 không giao hoán.

Rất may mắn là nhiều hệ mật đơn giản thoả mãn điều kiện trên. Kỹ thuật thường được sử dụng trong thực tế là lấy tích các hệ mã kiểu thay thế và các hệ mã kiểu hoán vị. Trong chương sau ta sẽ xét một thể hiện cụ thể của kỹ thuật này.

2.5. CÁC CHÚ GIẢI.

Khái niệm độ mật hoàn thiện và việc sử dụng các kỹ thuật entropi trong các hệ mật lần đầu tiên do Shannon đưa ra trong [SH49]. Các hệ mật tích cũng được thảo luận trong bài báo này. Khái niệm entropi cũng do Shannon đưa ra trong [SH48]. Các sách nhập môn tốt về entropi, mã Huffman và các vấn đề có liên quan có trong các tài liệu của Welsh [WE88] và Goldie, Pinch [GP91]. Các kết quả trong phần 2.4 được lấy theo Beauchemin và Brassard [BB88], các tác giả này đã tổng quát hoá các kết quả ban đầu của Shannon.

BÀI TẬP

2.1. Cho n là một số nguyên dương. Một hình vuông Latin cấp n (L) là một bảng n × n các số nguyên 1, . . . , n sao cho mỗi một số trong n số nguyên này chỉ xuất hiện đúng một lần ở mỗi hàng và mỗi cột của L. Ví dụ hình vuông Latin cấp 3 có dạng:

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Với một hình vuông Latin L bất kỳ cấp n, ta có thể xác định một hệ mã tương ứng. Giả sử P = C = K = { 1, . . ., n}. Với $1 \le i \le n$, quy tắc mã hoá e_i được xác định là $e_i(j) = L(i,j)$. Do đó mỗi hàng của L sẽ cho một quy tắc mã hoá).

Hãy chứng minh rằng, hệ mật hình vuông Latin này có độ mật hoàn thiện.

2.2. Hãy chứng tỏ rằng mã Affine có độ mật hoàn thiện

2.3. Giả sử một hệ mật đạt được độ mật hoàn thiện với phân bố xác suất p_0 nào đó của bản rõ. Hãy chứng tỏ rằng độ mật hoàn thiện vẫn còn dữ được đối với một phân bố xác suất bất kì của bản rõ.

2.4. Hãy chứng tỏ rằng nếu một hệ mật có độ mật hoàn thiên và $|\mathcal{K}| = |C| = |\mathcal{P}|$ thì mọi bản mã là đồng xác suất.

2.5. Giả sử X là tập có lực lượng n, trong đó $2^k \le n \le 2^{k+1}$ và p(x) =1/n với mọi $x \in X$.

a/ Hãy tìm một phép mã hoá có tiền tố độc lập của X (kí hiệu là f) sao cho $l(f) = k+2 - 2^{k+1}/n$

Chỉ dẫn: Hãy mã hoá 2^{k+1}-n các phần tử của X bằng các xâu có độ dài k và mã hoá các phần tử còn lại bằng các xâu có độ dài k+1.

b/ Hãy minh hoạ cấu trúc của bạn khi n = 6. Tính $l(f)$ và H(X) trong trường hợp này.

2.6. Giả sử X = {a,b,c,d,e} có phân bố xác suất như sau: p(a) = 0,32, p(b) = 0,23 p(c) = 0,20, p(d) = 0,15, p(e) = 0,10. Hãy dùng thuật toán Huffman để tìm phép mã hoá tối ưu có tiền tố độc lập của X. So sánh độ dài của phép mã này với H(X).

2.7. Hãy chứng tỏ rằng H(X,Y) = H(Y) +H(X|Y). Sau đó chứng minh bổ đề là $H(X|Y) \le H(X)$, đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ khi X và Y độc lập.

2.8. Chứng minh rằng, một hệ mật có độ mật hoàn thiện khi và chỉ khi H(P|C) = H(P).

2.9. Chứng minh rằng trong một hệ mật bất kỳ H(K|C) ≥H(P C) (về mặt trực giác, kết quả này nói rằng với bản mã cho trước, độ bất định của thám mã về khoá ít nhất cũng lớn bằng độ bất định khi thám mã bản rõ).
2.10. Xét một hệ mật trông đó $\mathcal{P}$= {a,b,c}, $\mathcal{K}$= {K_1,K_2,K_3} và $\mathcal{C}$ = {1,2,3,4}. Giả sử ma trận mã hoá như sau:

	a	B	c
K_1	1	2	3
K_2	2	3	4
K_3	3	4	1

Giả sử các khoá được chọn đồng xác suất và phần bố xác suất của bản rõ là $p_{\mathcal{P}}$(a) = 1/2, $p_{\mathcal{P}}$(b) = 1/3, $p_{\mathcal{P}}$(c) = 1/6. Hãy tính H(P), H(C), H(K), H(K|C) và H(P|C).
2.11. Hãy tính H(K|C) và H(K|P,C) của hệ mã Affine.
2.12. Xét hệ mã Vigenère có độ dài từ khoá là m. Hãy chứng tỏ khoảng duy nhất là 1/R_L, trong đó R_L là độ dư của ngôn ngữ đang xét. (kết quả này được hiểu như sau: Nếu n_0 là số kí tự cần mã hoá thì độ dài của bản rõ là n_0/m vì mỗi phần tử của bản rõ gồm m kí tư. Bởi vậy, khoảng duy nhất 1/R_L ứng với một bản rõ gồm m/R_L kí tự).
2.13. Hãy chỉ ra rằng, khoảng duy nhất của hệ mã Hill (với ma trận mã hoá m×m) là nhỏ hơn m/R_L (hãy chú ý rằng số kí tự trong môt bản rõ có độ dài là m^2/R_L).
2.14. MTT trên không gian rõ (có kích thước n) sẽ có |$\mathcal{K}$| = n!. Công thức Stirling cho ước lượng sau đối với n:

$$n \approx \sqrt{2\pi m}(n/e)^n$$

a/ Dùng công thức Stirling, đưa ra một khoảng ước lượng cho khoảng duy nhất của MTT.

b/ Cho m ≥1 là một số nguyên. MTT bộ m là hệ mã thay thế trong đó các không gian rõ (và bản mã) chứa tất cả 26^m các bộ m. Hãy đánh giá khoảng duy nhất của MTT bộ m nếu R_L = 0,75.
2.15. Hãy chứng minh rằng MDV là luỹ đẳng.
2.16. Giả sử S_1 là MDV (với các khoá đồng xác suất) và S_2 là MDV trong đó các khoá được chọn theo một phân bố xác suất $p_{\mathcal{K}}$ nào đó (không đồng xác suất). Hãy chứng tỏ rằng S_1×S_2 = S_1.
2.17. Giả sử S_1 và S_2 là các hệ mã Vigenère có độ dài từ khoá tương ứng là m_1 và m_2 trong đó $m_1 \geq m_2$.

a/ Nếu m_1 | m_2 thì chỉ ra rằng $S_1 \times S_2 = S_1$.

b/ Ta thử tổng quát hoá kết quả trên bằng giả định rằng $S_2 \times S_1 = S_3$, S_3 là hệ mã Vigenère có độ dài từ khoá là BCNN(m_1,m_2) (BCNN - bội chung nhỏ nhất). Hãy chứng tỏ rằng giả định này là không đúng.

Chỉ dẫn: Nếu $m_1 \neq 0 \bmod m_2$ thì số các khoá trong hệ mã tích $S_1 \times S_2$ nhỏ hơn số khoá trong S_3.