G. POLYA

TOÁN HỌC
và những suy luận có lí

Người dịch:

Hà Sĩ Hồ – Hoàng Chúng – Lê Đình Phi
Nguyễn Hữu Chương – Hồ Thuần

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

40-2010/CXB/89-10/GD

Mã số: 8I696H0-ĐTH

LỜI GIỚI THIỆU

GEORGE POLYA sinh năm 1887 ở Hungary. Ông tốt nghiệp đại học và bảo vệ luận án tiến sĩ tại Đại học tổng hợp Budapest. Năm 1940 ông sang Mỹ, từ 1942 ông là giáo sư Đại học tổng hợp Stanford. Ông mất năm 1985 tại California.

Ngoài những công trình về lí thuyết số, giải tích hàm, toán thống kê và giải tích tổ hợp, G. POLYA rất nổi tiếng với những nghiên cứu về quá trình giải toán và quá trình sáng tạo toán học, được đúc kết trong bộ ba quyển sách (đã được dịch ra rất nhiều thứ tiếng trên thế giới, trong đó có tiếng Việt): How to Solve it? (Giải một bài toán như thế nào?), Mathematical Discovery (Sáng tạo toán học) và Mathematics and Plausible Reasoning (Toán học và những suy luận có lí).

Mặc dù được viết cách đây đã gần một thế kỉ, các quyển sách của G. POLYA đến nay vẫn giữ nguyên giá trị to lớn đối với thầy cô giáo các cấp, đối với sinh viên và học sinh muốn dạy và học toán học (và cả các môn khoa học khác) một cách thông minh và sáng tạo.

TOÁN HỌC VÀ NHỮNG SUY LUẬN CÓ LÍ gồm hai quyển:

I. Quy nạp và tương tự trong toán học;

II. Các sơ đồ của những suy luận có lí.

Đây là bản dịch của quyển I, Quy nạp và tương tự trong toán học (bản dịch tiếng Nga). Bản dịch này đã được Nhà xuất bản Giáo dục cho in ngay trong những năm kháng chiến chống Mỹ cứu nước ác liệt nhất.

Nội dung tác phẩm của G.POLYA rất phong phú, đề cập đến kiến thức toán học từ sơ cấp đến cao cấp, liên hệ đến vật lí và một số ngành khoa học khác. Cách trình bày độc đáo, nhiều chỗ theo lối văn nói, dí dỏm và khá tế nhị. Chúng tôi lại không có nguyên bản tiếng Anh, nên bản dịch không khỏi có những sai sót. Chúng tôi mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc và có điều kiện thuận lợi để sửa chữa bản dịch được tốt hơn.

Những người dịch

LỜI NÓI ĐẦU

Quyển sách này có những mục đích khác nhau liên quan khá chặt chẽ. Trước hết, nó nhằm giúp các học sinh và thầy giáo dạy toán về một vấn đề quan trọng, vấn đề này thường không được chú ý đúng mức. Theo ý nghĩa nào đó, nó cũng là một khảo cứu triết học. Nó là một quyển kế tiếp các công trình khác và đòi hỏi phải có phần tiếp theo.

1. Nói một cách nghiêm khắc thì mọi kiến thức của chúng ta ngoài phạm vi của toán học và logic chứng minh (môn logic này thực tế là một ngành của toán học) đều bao gồm các giả thuyết. Tất nhiên có những giả thuyết này và giả thuyết nọ. Có những giả thuyết có giá trị và đáng tin cậy, thí dụ như những giả thuyết được diễn đạt trong nhiều quy luật tổng quát của vật lí. Có những giả thuyết khác vừa không đáng tin cậy, vừa không có giá trị và một số trong chúng có thể làm bạn phát bực mình, khi bạn đọc các giả thuyết đó ở trong báo. Và giữa các giả thuyết này và giả thuyết kia có mọi loại giả thuyết, linh cảm và dự đoán.

   Chúng ta củng cố các kiến thức toán học của mình bằng các suy luận chứng minh, nhưng chúng ta hỗ trợ các giả thuyết của mình bằng các suy luận có lí. Một chứng minh toán học là suy luận chứng minh, còn kết luận quy nạp của nhà vật lí, những bằng chứng gián tiếp của luật gia, những dẫn chứng tài liệu của nhà sử học và kết luận thống kê của nhà kinh tế học đều thuộc về suy luận có lí.

   Sự khác nhau giữa hai kiểu suy luận này hết sức lớn và muôn màu muôn vẻ. Suy luận chứng minh là suy luận đáng tin cậy không chối cãi được và dứt khoát. Suy luận có lí là suy luận còn bấp bênh, phải tranh cãi và có điều kiện. Suy luận chứng minh thâm nhập các khoa học với cùng mức độ như toán học, song tự nó (cũng như tự bản thân toán học) không có khả năng cung cấp những hiểu biết căn bản mới về thế giới xung quanh ta. Mọi cái mới mà chúng ta hiểu biết được về thế giới đều có liên hệ với các suy luận có lí là suy luận duy nhất mà ta quan tâm trong công việc hằng ngày. Suy luận chứng minh có những tiêu chuẩn chặt chẽ được ghi lại thành luật và được giải thích bằng logic (logic hình thức hay logic chứng minh), logic này là thuyết của các suy luận chứng minh. Những tiêu chuẩn của các suy luận có lí rất linh động và không một lí thuyết nào về các suy luận như vậy lại rõ ràng bằng logic chứng minh và có sự nhất quán như logic chứng minh.

2. Một nhân tố khác liên quan đến hai kiểu suy luận này đáng để ta chú ý. Ai cũng biết rằng toán học có khả năng tuyệt diệu dạy ta cách suy luận chứng minh, nhưng tôi cũng khẳng định rằng trong các chương trình học tập thông thường

của các trường học không có môn học nào có khả năng như vậy để dạy chúng ta về cách suy luận có lí. Với tất cả những ai đang học toán, toán sơ cấp hoặc toán cao cấp và quan tâm nắm vững môn học này, tôi muốn nói rằng: "Tất nhiên chúng ta sẽ học chứng minh, nhưng chúng ta *cũng sẽ học cả dự đoán nữa*".

Điều này nghe ra hơi ngược đời và tôi cần nhấn mạnh một vài điểm để tránh sự hiểu lầm có thể xảy ra.

Toán học được coi như là một môn khoa học chứng minh. Tuy nhiên đó mới chỉ là một khía cạnh của nó. Toán học hoàn chỉnh, được trình bày dưới hình thức hoàn chỉnh, được xem như chứng minh thuần tuý, chỉ bao gồm các chứng minh. Nhưng toán học trong quá trình hình thành gợi lại mọi kiến thức khác của nhân loại trong quá trình hình thành. Bạn phải dự đoán về một định lí toán học trước khi bạn chứng minh nó. Bạn phải dự đoán về ý của chứng minh, trước khi tiến hành chứng minh chi tiết. Bạn phải đối chiếu các kết quả quan sát được và suy ra những điều tương tự, bạn phải thử đi thử lại. Kết quả công tác sáng tạo của nhà toán học là suy luận chứng minh, là chứng minh; nhưng người ta tìm ra cách chứng minh nhờ suy luận có lí, nhờ dự đoán. Nếu việc dạy toán phản ánh ở mức độ nào đó việc hình thành toán học như thế nào thì trong việc giảng dạy đó phải dành chỗ cho dự đoán, cho suy luận có lí.

Như chúng tôi đã nói, có hai kiểu suy luận: suy luận chứng minh và suy luận có lí. Tôi nhận thấy là hai loại suy luận này không mâu thuẫn nhau, mà trái lại bổ sung cho nhau. Trong suy luận chặt chẽ, điều chủ yếu là phân biệt chứng minh với dự đoán, chứng minh có căn cứ với dự đoán không căn cứ. Trong một suy luận có lí, điều chủ yếu là phân biệt dự đoán với dự đoán, dự đoán hợp lí với dự đoán ít hợp lí hơn. Nếu bạn chú ý tới cả hai sự khác nhau đó, thì cả hai suy luận này có thể trở thành rõ ràng hơn.

Một người nghiêm túc nghiên cứu toán học, định lấy toán học làm sự nghiệp của đời mình, phải học tập cách suy luận chứng minh, đó là nghề nghiệp của anh ta và cũng là đặc điểm nổi bật của khoa học của anh ta. Tuy nhiên, để đạt được kết quả thực sự, anh ta cũng cần học tập cả cách suy luận có lí, đó là loại suy luận mà cả hoạt động sáng tạo của anh ta sẽ phụ thuộc vào đó. Người học toán như một môn phụ hoặc chỉ vì yêu toán cũng phải làm quen chút ít với suy luận chứng minh; cũng có thể người đó không đặc biệt cần thiết phải áp dụng trực tiếp những suy luận đó, nhưng anh ta phải nắm được tiêu chuẩn - để có thể so sánh các kết luận có thể xảy ra - được nêu ra như là các chứng minh các kết luận anh ta thường gặp trong cuộc sống hiện đại. Nhưng trong mọi công việc của mình, anh ta cần những suy luận có lí. Trong mọi trường hợp, người nghiên cứu toán học mong muốn có những đóng góp trong lĩnh vực này, dù những hứng thú sau này của anh ta thế nào đi nữa, cũng cần phải cố gắng học thông thạo cả hai loại, suy luận chứng minh và suy luận có lí.

3. Tôi không tin rằng có một phương pháp bảo đảm tuyệt đối việc học thông thạo cách dự đoán. Trong mọi trường hợp nếu có một phương pháp như thế đi nữa, thì tôi cũng chưa được biết và điều hiển nhiên là tôi không hề có tham vọng trình bày phương pháp đó ở những trang sau. Áp dụng một cách có hiệu quả các suy luận có lí là một kĩ năng thực hành và kĩ năng đó cũng như mọi kĩ năng thực hành khác đều học được bằng con đường bắt chước và thực hành. Tôi dự định làm tất cả những gì tôi có thể làm được để giúp bạn đọc ham muốn học thông thạo cách suy luận có lí, song tất cả những gì tôi có thể đề nghị thì đó chỉ là những thí dụ làm mẫu và khả năng thực hành chu đáo.

Trong quyển sách này, tôi sẽ thường bàn đến những phát minh toán học lớn và nhỏ. Tôi không thể kể lại lịch sử thực sự của việc phát minh, bởi vì thực tế không ai biết điều đó. Tuy nhiên, tôi sẽ cố gắng tìm ra lịch sử có thể đúng của việc phát minh đã có thể xảy ra. Tôi cố gắng làm nổi bật các suy nghĩ làm cơ sở phát minh, những suy diễn có lí đã dẫn tới phát minh, nói tóm lại là tất cả những gì đáng bắt chước. Tất nhiên, tôi cố gắng thuyết phục bạn đọc, đó là nhiệm vụ của tôi với tư cách là thầy giáo và là tác giả. Tuy vậy, tôi sẽ hoàn toàn trung thực với bạn đọc trong vấn đề thật sự cơ bản, tôi sẽ chỉ cố gắng thuyết phục bạn đọc ở những chỗ mà tôi cho là đúng và có ích.

Sau mỗi chương đều có nêu ra các thí dụ và chú thích. Các chú thích liên quan tới các vấn đề quá sâu hoặc quá tế nhị đối với nội dung của chương hoặc liên quan tới các vấn đề ít nhiều ở ngoài phương hướng chủ yếu của suy luận. Một số bài tập tạo cho bạn đọc khả năng xét theo cách mới các chi tiết chỉ mới nêu ra ở trong bài. Tuy nhiên, phần lớn các bài tập tạo cho bạn đọc khả năng rút ra các kết luận có lí của chính mình. Trước khi bắt tay vào giải bài toán khó hơn ở cuối chương, bạn đọc cần đọc thật kĩ các phần tương ứng của chương cũng như xem lướt qua các bài toán ở cạnh, phần này hoặc phần kia có thể chứa chiếc chìa khoá. Để đảm bảo cho bạn đọc có được chiếc chìa khoá như thế (hoặc để giấu bạn đọc chiếc chìa khoá đó) nhằm có lợi nhất cho việc học tập, tác giả không chỉ chú ý nhiều đến nội dung và hình thức các bài toán được nêu ra, mà cả đến cách sắp xếp của chúng nữa. Thực tế, việc sắp xếp các bài toán này đòi hỏi nhiều thời gian và công sức hơn là người ta có thể hình dung hoặc xem như là cần thiết, nếu nhìn một chiều.

Để phục vụ được rộng rãi bạn đọc, tôi cố gắng minh hoạ mỗi vấn đề quan trọng bằng thí dụ càng sơ cấp càng tốt. Tuy nhiên, trong một vài trường hợp tôi buộc phải lấy thí dụ không hoàn toàn sơ cấp để làm cho khẳng định đủ sức thuyết phục. Thực tế, tôi cảm thấy rằng tôi phải nêu ra cả những thí dụ có tính chất lịch sử, những thí dụ có vẻ đẹp toán học thực sự và những thí dụ minh hoạ tính chất song hành của các phương pháp trong các môn khoa học khác hoặc trong đời sống hằng ngày.

Cần phải nói thêm là trong các câu chuyện được nêu ra, nhiều câu chuyện có hình thức dứt khoát do kết quả thí nghiệm tâm lí không hình thức. Tôi có trao đổi vấn đề với nhiều nhóm sinh viên khác nhau, thỉnh thoảng lại ngừng trình bày và hỏi, chẳng hạn: "Nếu ở trong trường hợp đó, bạn phải làm thế nào?". Một vài chỗ trong bài viết dưới đây đã nhắc đến các câu trả lời của thính giả hoặc là tôi đã thay đổi luận điểm ban đầu do phản ứng của người nghe.

Nói tóm lại, tôi cố gắng dùng toàn bộ kinh nghiệm của mình, một người nghiên cứu, một thầy giáo, nhằm tạo cho bạn đọc một khả năng thích hợp để bắt chước một cách có suy nghĩ và để độc lập công tác.

4. Các thí dụ về các suy luận có lí được chọn trong quyển sách này có thể soi sáng phần nào một vấn đề đang được tranh luận sôi nổi: vấn đề phương pháp quy nạp. Câu hỏi chính đặt ra như sau: "Có các quy tắc đối với phương pháp quy nạp hay không?". Một số nhà triết học nói "Có", đa số các nhà bác học lại nghĩ "Không có". Để thảo luận một cách có ích, cần đặt vấn đề một cách khác. Ngoài ra, cần phải giải thích vấn đề theo cách khác, phụ thuộc ít nhất vào cách "tầm chương trích cú" cổ truyền hay vào chủ nghĩa hình thức kiểu mới, nhưng tiếp xúc chặt chẽ hơn với thực tiễn của các nhà bác học. Trước hết, ta chú ý rằng suy luận quy nạp là trường hợp riêng của suy luận có lí. Ta cũng nhận thấy (các tác giả hiện đại đã quên hẳn điều đó và vài tác giả xưa như Euler, Laplace đã thấy rõ) rằng vai trò của kết luận quy nạp trong việc nghiên cứu toán học cũng giống như vai trò của chúng trong việc nghiên cứu vật lí. Sau đó, bạn có thể quan sát và so sánh các thí dụ về suy luận có lí trong các vấn đề toán học. Và như thế là việc nghiên cứu quy nạp về phép quy nạp được mở ra.

Khi nhà sinh học định nghiên cứu một vấn đề tổng quát nào đó, chẳng hạn như di truyền học, điều rất quan trọng đối với ông ta là chọn được một dạng đặc biệt nào đó của cây trồng hoặc động vật, dạng đó hoàn toàn thích hợp với thí nghiệm của ông ta. Khi nhà hoá học dự định nghiên cứu một vấn đề tổng quát nào đó, chẳng hạn tốc độ phản ứng hoá học, điều rất quan trọng đối với ông ta là chọn được các chất đặc biệt nào đó, thuận tiện cho việc tiến hành các thí nghiệm thích hợp về vấn đề này. Việc lựa chọn vật liệu thí nghiệm thích hợp thật hết sức quan trọng đối với việc nghiên cứu quy nạp bất kì một vấn đề gì. Tôi cảm thấy có lẽ toán học về phương diện nào đó chính là vật liệu thí nghiệm thích hợp nhất để nghiên cứu suy luận quy nạp. Việc nghiên cứu này yêu cầu có một vài thí nghiệm tâm lí. Bạn hãy dùng kinh nghiệm thử lại xem các loại kết luận khác nhau có ảnh hưởng như thế nào đến niềm tin của bạn về giả thuyết đang được xét. Do các đối tượng toán học thường đơn giản và rõ ràng, nên chúng thích hợp nhất đối với loại thí nghiệm tâm lí này so với các đối tượng của bất kì một ngành nào khác. Trong những trang sau, bạn đọc sẽ hoàn toàn có thể thấy rõ điều đó.

Về quan điểm triết học, tôi nghĩ rằng đáng lẽ xét một trường hợp riêng của suy luận quy nạp, ta xét quan niệm tổng quát hơn về suy luận có lí thì tốt hơn. Tôi cho rằng các thí dụ trong quyển sách này dần dần chuẩn bị cho một quan điểm xác định và hoàn toàn thoả đáng của suy luận có lí. Tuy nhiên, tôi không bắt bạn đọc phải thừa nhận quan điểm của tôi. Thực tế, tôi không phát biểu các quan điểm đó trong quyển I, tôi muốn rằng các thí dụ tự nó nói ra. Bốn chương đầu của quyển II sẽ dành cho việc nghiên cứu tổng quát, rõ ràng hơn về suy luận có lí. Ở đây, tôi thiết lập một cách sơ đồ hoá các suy diễn có lí, nảy sinh từ các thí dụ được nêu, tôi cố gắng hệ thống hoá các sơ đồ này và điểm lại một số trong các quan hệ tương hỗ của chúng với nhau và quan hệ của chúng với các khái niệm về xác suất.

5. Tác phẩm này là phần tiếp theo quyển *Giải một bài toán như thế nào?* (NXB GD, 2008) trước đây của tôi. Bạn đọc quan tâm tới vấn đề nên đọc cả hai quyển, song trật tự không quan trọng lắm. Các bài trong quyển này được cấu tạo sao cho có thể đọc nó mà không phụ thuộc vào quyển trước. Trên thực tế, trong quyển sách này chỉ có một vài chỉ dẫn trực tiếp liên quan đến quyển sách trước và trong khi đọc lần đầu có thể không chú ý đến cũng được. Tuy vậy, các chỉ dẫn gián tiếp về quyển sách trước hầu như đều có trong mỗi trang và hầu như trong mỗi câu của một số trang ở quyển sách này. Thực tế, quyển sách này có nhiều bài tập và một số minh hoạ quan trọng hơn mà quyển sách trước, do khuôn khổ và đặc tính sơ cấp của nó, chưa có.

Nhiều phần của quyển sách này đã được trình bày trong các bài giảng của tôi, một số phần đã được trình bày vài lần. Trong một số phần và về một vài phương diện tôi giữ nguyên giọng văn nói. Tôi không nghĩ rằng nói chung nên dùng giọng văn ấy trong các tài liệu in về toán học, nhưng trong trường hợp này, điều đó có thể thích hợp hoặc ít ra có thể tha thứ được.

6. Việc áp dụng một cách hiệu quả các suy luận có lí đóng vai trò rất quan trọng trong việc giải toán. Quyển sách này cố gắng minh hoạ vai trò đó bằng nhiều thí dụ, nhưng nhiều khía cạnh khác của việc giải toán, đòi hỏi sự minh hoạ tương tự, vẫn còn tồn tại.

Nhiều vấn đề nói đến ở đây cần được tiếp tục hoàn thiện. Bạn đọc nên đối chiếu các quan điểm của tôi về suy luận có lí với quan điểm của các tác giả khác, nên xét các thí dụ có tính chất lịch sử một cách tỉ mỉ hơn, cũng nên nghiên cứu trong phạm vi có thể các quan điểm về phát minh và giảng dạy bằng các phương pháp tâm lí học thực nghiệm,... Còn nhiều vấn đề như vậy nhưng một vài vấn đề có thể là không có tác dụng.

Quyển sách này không phải là sách giáo khoa. Song, tôi hi vọng rằng, với thời gian, quyển sách sẽ có ảnh hưởng đến việc trình bày thông thường của sách giáo khoa và việc lựa chọn phạm vi các vấn đề. Vấn đề viết lại sách giáo khoa thông thường theo hướng vạch ra, không phải là phí công.

George Polya

Chương I

PHÉP QUY NẠP

1. Kinh nghiệm và quan niệm

Kinh nghiệm đưa đến sự thay đổi quan niệm của con người. Chúng ta học tập xuất phát từ kinh nghiệm, hay nói đúng hơn là chúng ta phải học tập từ kinh nghiệm. Sử dụng kinh nghiệm một cách hiệu quả nhất, đó là một trong những nhiệm vụ to lớn của con người, còn lao động để giải quyết nhiệm vụ đó là chức năng chân chính của các nhà bác học.

Nhà bác học, đúng với danh hiệu đó, cố gắng rút ra quan niệm đúng đắn nhất từ kinh nghiệm đã biết và thu thập những kinh nghiệm thích hợp nhất để xây dựng nên quan niệm đúng về một vấn đề đặt ra. Phương pháp nhờ đó nhà bác học xử lí với kinh nghiệm thường gọi là *phép quy nạp*. Trong mục sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một thí dụ đơn giản.

2. Sự tiếp xúc gợi ý

Phép quy nạp thường bắt đầu bằng sự quan sát. Nhà khoa học tự nhiên có thể quan sát cuộc sống của loài chim, nhà tinh thể học quan sát hình dạng các tinh thể. Nhà toán học, quan tâm đến lí thuyết số, quan sát tính chất các số 1, 2, 3, 4, 5,...

Nếu bạn muốn quan sát cuộc sống của loài chim để có thể đạt được những kết quả lí thú, thì trong một chừng mực nào đó, bạn phải hiểu biết về chim, phải thích và thậm chí phải yêu loài chim nữa. Cũng như vậy, nếu bạn muốn quan sát những con số thì bạn phải thích thú với chúng và trong một mức độ nào đó, phải hiểu biết chúng. Bạn phải biết phân biệt số chẵn và số lẻ, phải biết các số chính phương 1, 4, 9, 16, 25,... và các số nguyên tố 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 27, 29... (tốt nhất là xem 1 như là "đơn vị" và không gộp nó vào các số nguyên tố); ngay cả với những kiến thức đơn giản bạn cũng có thể nhận thấy một cái gì thú vị.

Ngẫu nhiên, bạn gặp các hệ thức:

$$3 + 7 = 10; \qquad 3 + 17 = 20; \qquad 13 + 17 = 30$$

và bạn nhận thấy giữa chúng có một vài chỗ giống nhau. Bạn có ngay ý nghĩ là những số 3, 7, 13 và 17 là những số nguyên tố lẻ. Tổng của hai số nguyên tố lẻ tất nhiên là số chẵn. Thật vậy, các số 10, 20, 30 là chẵn. Nhưng có thể nói gì về các số chẵn khác? Chúng có thể được biểu diễn tương tự như vậy không? Số chẵn đầu tiên bằng tổng của hai số nguyên tố lẻ, đương nhiên là

$$6 = 3 + 3.$$

Tìm tiếp, ta thấy:

$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$
$$16 = 3 + 13 = 5 + 11$$

Cứ tiếp tục mãi thế chăng? Dù sao những trường hợp riêng đã khảo sát cũng làm chúng ta nghĩ tới một điều khẳng định chung là: *"Mọi số chẵn lớn hơn 4 đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai số nguyên tố lẻ"*. Phân tích những trường hợp ngoại lệ - các số 2 và 4 không thể là tổng của hai số nguyên tố lẻ - chúng ta có thể bằng lòng với điều khẳng định ít trực tiếp hơn sau đây: *Bất kì một số chẵn nào không phải là số nguyên tố và không phải là bình phương của một số nguyên tố, cũng có thể biểu diễn dưới dạng tổng của hai số nguyên tố lẻ.*

Như thế là chúng ta đã phát biểu một giả thuyết. Chúng ta tìm thấy giả thuyết đó nhờ phép quy nạp. Nói một cách khác, giả thuyết đó nảy sinh trong chúng ta nhờ kết quả của sự quan sát và đã được chỉ ra bằng những thí dụ riêng biệt.

Những chỉ dẫn đó tương đối ít trọng lượng. Chúng ta chỉ có những cơ sở rất mong manh để tin vào giả thuyết của mình. Tuy nhiên, chúng ta có thể tìm thấy một nguồn an ủi ở chỗ là, cách đây hơn 200 năm, Goldbach (Gônbac), nhà toán học đầu tiên đã phát biểu giả thuyết đó, cũng không có cơ sở gì vững chắc hơn.

Giả thuyết của Goldbach có đúng không? Ngày nay chưa ai có thể trả lời câu hỏi đó. Mặc dù một số nhà toán học vĩ đại đã có những cố gắng lớn nhằm làm sáng tỏ vấn đề, nhưng cho đến nay, giả thuyết của Goldbach cũng như ở thời Euler (Ơle), vẫn là một trong "nhiều tính chất của các số mà chúng ta rất quen thuộc, nhưng chúng ta vẫn chưa chứng minh hay bác bỏ được".

Bây giờ, chúng ta hãy nhìn lại sau và cố gắng rút ra từ suy luận ở trên những bước có thể là điển hình đối với quá trình quy nạp.

Trước tiên, chúng ta thấy *một sự giống nhau nào đấy*. Chúng ta biết rằng 3, 7, 13 và 17 là những số nguyên tố, còn 10, 20 và 30 là những số chẵn và ba hệ thức $3 + 7 = 10$; $3 + 17 = 20$; $13 + 17 = 30$ là tương tự.

Bước tiếp theo là *khái quát hoá*. Từ bốn số 3, 7, 13 và 17, chúng ta chuyển sang toàn bộ những nguyên tố lẻ; từ 10, 20 và 30 – sang toàn bộ những số chẵn và sau đó đến hệ thức tổng quát có thể có:

Số chẵn = số nguyên tố + số nguyên tố.

Như vậy là chúng ta đã phát biểu chính xác một điều khẳng định tổng quát. Tuy nhiên, đó chỉ mới là giả thuyết, chỉ mới là điều "khẳng định thử", điều đó có nghĩa là điều khẳng định chưa được chứng minh thì không thể coi là chân lí, nó chỉ mới là cố gắng tiến tới chân lí.

Tuy nhiên, giả thuyết đó có một vài điểm tiếp xúc gợi ý, tiếp xúc với kinh nghiệm, với các "sự kiện", với "thực tế". Giả thuyết đó đúng với những số cụ thể 10, 20, 30 và cả với 6, 8, 12, 14, 16.

Chúng ta đã mô tả trong những nét tổng quát giai đoạn đầu của quá trình quy nạp bằng những nhận xét đó.

3. Sự tiếp xúc củng cố

Bạn không được quá tin vào bất kì một giả thuyết chưa được chứng minh nào, ngay cả những giả thuyết do những người có uy tín lớn đưa ra, cả những giả thuyết do chính bạn nêu ra. Bạn phải cố gắng chứng minh hay bác bỏ nó, bạn phải thử nó.

Chúng ta hãy thử giả thuyết của Goldbach, nghĩa là nghiên cứu một số chẵn nào đó và xét xem nó có phải là tổng của hai số nguyên tố lẻ hay không? Chẳng hạn, nghiên cứu số 60. Hãy thực hiện một phép "tựa thí nghiệm", theo cách nói của Euler. Số chẵn 60 có phải là tổng của hai số nguyên tố lẻ không? Đúng chăng là 60 = 5 + một số nguyên tố? Câu trả lời là không: 55 không phải là số nguyên tố. Nếu cứ như thế mãi thì ta sẽ không tin giả thuyết là đúng.

Song, phép thử tiếp theo cho:

$$60 = 7 + 53$$

và 53 là số nguyên tố. Thế là giả thuyết được xác nhận thêm trong một trường hợp nữa.

Kết quả ngược lại sẽ quyết định số phận cuối cùng của giả thuyết Goldbach. Nếu thử với tất cả những số nguyên tố nhỏ hơn số chẵn đã cho, chẳng hạn 60, mà vẫn không phân tích được số chẵn đó thành tổng hai số nguyên tố, thì ắt là bạn sẽ nghi ngờ giả thuyết. Xác nhận giả thuyết trong trường hợp số 60, bạn vẫn chưa đi đến kết luận dứt khoát. Tất nhiên là bạn không chứng minh định lí bằng một sự xác nhận duy nhất. Song, bạn sẽ xem sự xác nhận đó như là một dấu hiệu thuận lợi, ủng hộ giả thuyết, làm cho nó có lí hơn. Còn việc coi dấu hiệu thận lợi đó có trọng lượng tới mức nào thì dĩ nhiên là việc riêng của bạn.

Hãy trở lại một chút với số 60. Sau khi đã thử các số nguyên tố 3, 5, 7, chúng ta có thể thử tiếp những nguyên tố còn lại cho tới 30 (rõ ràng là không cần thiết phải tiếp tục quá 30 = 60 / 2 vì trong hai số nguyên tố, mà tổng bằng 60, một số phải bé hơn 30). Bằng cách thử, chúng ta có được tất cả các cách phân tích 60 thành tổng của hai số nguyên tố:

$$60 = 7 + 53 = 13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 27 = 29 + 31.$$

Chúng ta có thể tiến hành một cách có hệ thống và nghiên cứu từ số chẵn này đến số chẵn khác như đã làm với số 60. Kết quả có thể viết trong bảng sau:

$$6 = 3 + 3$$
$$8 = 3 + 5$$
$$10 = 3 + 7 = 5 + 5$$
$$12 = 5 + 7$$
$$14 = 3 + 11 = 7 + 7$$
$$16 = 3 + 13 = 5 + 11$$
$$18 = 5 + 13 = 7 + 11$$
$$20 = 3 + 17 = 7 + 13$$
$$22 = 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11$$
$$24 = 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13$$
$$26 = 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13$$
$$28 = 5 + 23 = 11 + 17$$
$$30 = 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17$$

Giả thuyết được xác nhận trong mọi trường hợp đã xét ở đây. Mỗi sự xác nhận kế tiếp trong bảng này nhấn mạnh giả thuyết, làm cho nó đáng tin cậy hơn, có lí hơn. Tất nhiên là không phải sự xác nhận đó được chứng minh với bất cứ số nào.

Chúng ta cần nghiên cứu các quan sát, so sánh đối chiếu chúng và từ đó rút ra cái chìa khoá hiện nay chưa thể hiện rõ ràng. Trong trường hợp ở đây thì rất khó phát hiện ra từ bảng trên chiếc chìa khoá có thể giúp đỡ chúng ta thực sự. Tuy vậy, nhìn bảng cũng có thể nắm được ý nghĩa của giả thuyết. Bảng cho ta thấy có bao nhiêu cách biểu diễn một số chẵn xếp trong bảng đó – thành tổng của hai số nguyên tố (với số 6, có một cách, với số 30, có ba cách). Số các cách biểu diễn đó của một số chẵn $2n$ hình như là "tăng không đều" cùng với n. Giả thuyết của Goldbach phản ánh niềm hi vọng rằng số các cách biểu diễn sẽ không bao giờ tụt xuống số 0 dù chúng ta có mở rộng bảng đến đâu.

Những trường hợp riêng mà chúng ta đã nghiên cứu có thể chia thành hai nhóm, một nhóm trước khi phát biểu giả thuyết và một nhóm sau khi phát biểu giả thuyết. Nhóm đầu dẫn đến giả thuyết, nhóm sau củng cố giả thuyết. Mọi trường hợp – của cả hai nhóm - đều tạo nên một loại tiếp xúc giữa giả thuyết và "sự kiện". Bảng trên không phân biệt những điểm tiếp xúc "gợi ý" và "củng cố".

Bây giờ hãy nhìn lại lập luận trên đây và cố gắng ghi nhớ những nét điển hình đối với quá trình quy nạp. Một khi giả thuyết đã được phát biểu, chúng ta sẽ cố gắng tìm hiểu xem nó đúng hay sai. Giả thuyết có tính chất tổng quát của chúng ta nảy sinh từ một số thí dụ riêng biệt mà nó được nghiệm đúng. Và chúng ta còn nghiên cứu thêm một số trường hợp đặc biệt khác. Vì giả thuyết đó đúng với mọi thí dụ đã được xét, nên niềm tin của chúng ta càng được tăng cường.

Theo tôi, chúng ta mới chỉ làm những điều mà những người có lí trí thường làm. Và như vậy là chúng ta đã công nhận một nguyên tắc: *Một khẳng định tổng quát có tính chất giả định trở nên có lí hơn nếu nó được xác nhận thêm trong một trường hợp đặc biệt khác.*

Phải chăng nguyên tắc đó là cơ sở của quá trình quy nạp?

4. Phương pháp quy nạp

Trong cuộc sống có người thường bám chặt vào ảo tưởng, nói một cách khác họ không dám nghiên cứu những khái niệm dễ dàng bị kinh nghiệm bác bỏ, vì họ ngại tinh thần mất cân bằng.

Trong khoa học, chúng ta cần một phương pháp khác hẳn, đó là *phương pháp quy nạp*. Phương pháp này có mục đích làm cho quan niệm của chúng ta gần với kinh nghiệm ở mức độ có thể được. Nó đòi hỏi sự ưa thích nhất định đối với cái gì thực tế tồn tại. Nó đòi hỏi chúng ta sẵn sàng từ sự khái quát rộng lớn nhất trở về với những quan sát cụ thể nhất. Nó đòi hỏi ta nói "có thể" và "có khả năng" với hàng nghìn mức độ khác nhau. Nó đòi hỏi nhiều điều khác và đặc biệt là ba điều sau đây:

Một là, chúng ta phải sẵn sàng duyệt lại bất kì quan niệm nào của chúng ta.

Hai là, chúng ta phải thay đổi quan niệm khi có lí do xác đáng.

Ba là, chúng ta không được thay đổi quan niệm một cách tuỳ tiện, không có cơ sở đầy đủ.

Những nguyên tắc ấy tưởng như tầm thường nhưng phải có những đức tính khác thường mới theo được. Nguyên tắc thứ nhất đòi hỏi "sự dũng cảm của trí tuệ". Bạn phải dũng cảm xem xét lại quan niệm của bạn. Galilei (Galilê), người đã bác bỏ những thành kiến cũ của những người đương thời và uy tín của Aristote, là một tấm gương vĩ đại về sự dũng cảm của trí tuệ. Nguyên tắc thứ hai đòi hỏi "sự trung thực của trí tuệ". Khư khư bảo vệ giả thuyết, rõ ràng là bị kinh nghiệm bác bỏ, chỉ vì đó là giả thuyết của tôi, như vậy là không trung thực.

Nguyên tắc thứ ba đòi hỏi "tính nhẫn nại sáng suốt". Thay đổi quan niệm mà không có sự nghiên cứu nghiêm chỉnh, chẳng hạn chỉ vì chạy theo "mốt", là một điều ngu xuẩn. Song, chúng ta không có thì giờ và không đủ sức để nghiên cứu một cách nghiêm túc mọi quan niệm của chúng ta. Vì vậy, phải sáng suốt dành công việc hằng ngày, dành những thắc mắc, những nỗi hoài nghi nóng hổi của chúng ta cho những quan niệm mà chúng ta hi vọng có thể sửa được. Sự dũng cảm của trí tuệ, lòng trung thực và tính kiên trì sáng suốt là phẩm chất cao quý của nhà bác học.

NHỮNG THÍ DỤ VÀ CHÚ THÍCH VỀ CHƯƠNG I

1. *Dự đoán xem những số hạng của dãy số sau được chọn theo quy tắc nào?*

$$11, 31, 41, 61, 71, 101, 131, \ldots$$

2. *Xét bảng*

$$\begin{aligned} 1 &= 0 + 1 \\ 2 + 3 + 4 &= 1 + 8 \\ 5 + 6 + 7 + 8 + 9 &= 8 + 27 \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 &= 27 + 64 \end{aligned}$$

Dự đoán xem thí dụ đó theo đúng quy luật chung nào? Biểu diễn bằng kí hiệu toán học và chứng minh.

3. *Xét giá trị của các tổng liên tiếp:*

$$1;\ \ 1 + 3;\ \ 1 + 3 + 5;\ \ 1 + 3 + 5 + 7; \ldots$$

có theo quy tắc đơn giản nào không?

4. *Xét giá trị của các tổng liên tiếp:*

$$1;\ \ 1 + 8;\ \ 1 + 8 + 27;\ \ 1 + 8 + 27 + 64; \ldots$$

có theo quy tắc đơn giản nào không?

5. *Ba cạnh của một tam giác có chiều dài tương ứng là 1, m và n; 1, m, n là những số nguyên dương, $1 \leq m \leq n$. Với một số n cho trước có bao nhiêu tam giác khác nhau? (lấy n = 1, 2, 3, 4, 5...). Tìm quy luật chung biểu diễn số tam giác theo n.*

6. *Ba số hạng đầu của một dãy là 5, 15, 25... (số tận cùng bởi 5) chia hết cho 5. Những số hạng tiếp theo có chia hết cho 5 không?*

   Ba số hạng đầu của một dãy là 3, 13, 23,... (số tận cùng bởi 3) là những số nguyên tố. Những số hạng tiếp theo có phải là số nguyên tố không?

7. *Nhờ các phép tính hình thức, chúng ta tìm thấy:*

$$(1 + 1!\,x + 2!\,x^2 + 3!\,x^3 + 4!\,x^4 + 5!\,x^5 + 6!\,x^6 + \dots)^{-1} =$$
$$= 1 - x - x^2 - 3x^3 - 13x^4 - 71x^5 - 461x^6 - \dots$$

   Từ đó xuất hiện hai giả thuyết về các hệ số tiếp theo của chuỗi luỹ thừa ở vế phải: 1) Tất cả các hệ số đó đều âm. 2) Tất cả các hệ số đó đều là số nguyên tố. Các giả thuyết đó có đáng tin cậy như nhau không?

8. *Đặt*
$$\left(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^{-1} = A_0 + \frac{A_1 x}{1!} + \frac{A_2 x^2}{2!} + \dots$$

   Chúng ta tìm thấy rằng:

$n = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_n = 1$	1	1	2	4	14	38	216	600	6240

   Hãy phát biểu thành một giả thuyết.

9. *Nhà toán học Pháp vĩ đại Fermat (Phecma) đã xét dãy số*

$$5;\ 17;\ 257;\ 65537;\dots$$

   với số hạng tổng quát $2^{2^n} + 1$. Ông nhận thấy rằng bốn số hạng đầu tiên - đã viết ra ở trên - tương ứng với n = 1, 2, 3 và 4, là những số nguyên tố. Ông giả định rằng những số tiếp theo cũng là những số nguyên tố. Tuy không chứng minh được, ông vẫn tin rằng giả thuyết của mình là đúng và đã thách Vallis và các nhà toán học Anh chứng minh giả thuyết đó. Nhưng Euler đã tìm thấy rằng ngay số hạng tiếp theo $2^{32} + 1$ ứng với n = 5 không phải là số nguyên tố (chia hết cho 614). Euler viết: "Chúng ta đã thấy một trường hợp mà phép quy nạp giản đơn dẫn đến sai lầm".

10. *Kiểm tra giả thuyết của Goldbach đối với 2n = 60, chúng ta lần lượt thử với những số nguyên tố p đến n = 30. Nhưng cũng có thể thử với những số*

nguyên tố p' giữa n = 30 và 2n = 60. Đối với những số n lớn thì cách nào nhanh và thuận lợi hơn?

11. *Trong từ điển, bạn thấy trong những lời giải thích về các từ "quy nạp", "thí nghiệm" và "quan sát" những câu như sau:*

"Quy nạp là rút ra quy luật chung từ những trường hợp riêng hay trình bày những sự kiện để chứng minh một điều khẳng định chung".

"Thí nghiệm là biện pháp để kiểm tra giả thuyết".

"Quan sát là theo dõi kĩ và ghi lại những hiện tượng dưới hình thức mà các hiện tượng đó thể hiện trong thiên nhiên, về một nguyên nhân, kết quả hoặc mối liên hệ giữa chúng".

Những câu trên có áp dụng được cho những thí dụ của chúng ta ở §2 và 3 không?

12. ***Có và không***

Nhà toán học cũng như nhà khoa học tự nhiên, khi kiểm tra các hệ quả của một định luật chung đã được nêu lên do quan sát đã đặt câu hỏi sau đây với Thiên nhiên: "Tôi cảm thấy định luật này đúng. Nhưng nó có đúng hay không?". Nếu hệ quả rõ ràng bị bác bỏ, thì định luật ấy không thể đúng. Nếu hệ quả rõ ràng được xác nhận thì có thêm một số chứng cớ chứng tỏ rằng định luật có thể đúng. Thiên nhiên có thể trả lời "có" hoặc "không", nhưng trong khi nó trả lời thầm một cách thì nó lại lớn tiếng nói lên một cách khác. Câu trả lời "có" thì có điều kiện, còn câu trả lời "không" thì dứt khoát.

13. ***Kinh nghiệm và hành động***

Kinh nghiệm thay đổi hành động đồng thời thay đổi quan niệm của con người. Hai sự việc đó thực ra không phải độc lập với nhau. Hành động thường là kết quả của quan niệm và quan niệm là cái "thế" của hành động. Tuy nhiên bạn chỉ có thể nhìn thấy hành động của một con người khác, chứ không thể nào nhìn thấy quan niệm của họ. Hành động dễ quan sát hơn là quan niệm. Mọi người đều biết câu tục ngữ: "Trẻ bị bỏng sợ lửa". Câu tục ngữ đó phản ánh đúng điều vừa nói trên: kinh nghiệm làm thay đổi hành động của con người.

Đúng. Kinh nghiệm làm thay đổi cả hành động của loài vật.

Gần chỗ tôi có một con chó dữ, nó sủa và thấy ai là xông đến. Nhưng tôi đã phát hiện ra rằng có thể tự bảo vệ dễ dàng: nếu tôi cúi xuống và làm bộ nhặt một hòn đá thì con chó chạy lồng lên. Không phải con chó nào cũng *hành động như thế. Và cũng dễ biết kinh nghiệm gì đã dạy cho con chó nói trên hành động như vậy.*

Nghiên cứu hành động của loài vật cũng có thể giúp cho ta nghiên cứu đầy đủ phép quy nạp.

14. *Nhà logic học, nhà toán học, nhà vật lí học và kĩ sư*

Nhà logic học nói: "Hãy xem nhà toán học. Ông ta nhận xét rằng 99 số đầu bé hơn 100, và từ đó với cái mà ông ta gọi là quy nạp, ông ta kết luận rằng tất cả các số đều bé hơn 100".

Nhà toán học nói: "Nhà vật lí học tin rằng 60 chia hết cho mọi số. Ông ta nhận xét rằng 60 chia hết cho 1, 2, 3, 4, 5 và 6. Ông ta kiểm tra vớii một vài số khác chẳng hạn 10, 20 và 30. Những số này được chọn - theo ông ta nói - một cách hú hoạ. Vì rằng 60 cũng chia hết cho những số đó nên ông ta cho rằng những thí nghiệm đó là đủ rồi".

Nhà vật lí học nói: "Vâng, hãy theo dõi kĩ sư. Anh ta nghĩ rằng mọi số lẻ đều là nguyên tố.

Anh ta chứng minh như sau: trong mọi trường hợp số 1 đều được xem là số nguyên tố. Tiếp đó 3, 5, 7 rõ ràng là số nguyên tố. Đáng tiếc là sau đó số 9 không phải là số nguyên tố. Nhưng 11 và 13 lại là số nguyên tố. Trở lại trường hợp số 9 - anh ta nói - tôi kết luận rằng 9 phải là một sai lầm của thực nghiệm".

Rõ ràng là quy nạp có thể dẫn đến sai lầm. Song điều nổi bật là phép quy nạp đôi khi cũng đưa đến chân lí, mặc dù khả năng xuất hiện sai lầm trội hơn nhiều. Ta phải bắt đầu nghiên cứu từ những trường hợp hiển nhiên mà phép quy nạp bị thất bại, hay từ những trường hợp lí thú trong đó phép quy nạp đưa đến sự thành công? Nghiên cứu những viên ngọc quý rõ ràng là hấp dẫn hơn nghiên cứu những viên sỏi bình thường. Hơn thế nữa, chính những viên ngọc quý đã đưa nhà khoáng vật học đi vào khoa học tuyệt diệu - khòa tinh thể học.

Chương II

KHÁI QUÁT HOÁ, ĐẶC BIỆT HOÁ VÀ TƯƠNG TỰ

1. Khái quát hoá, đặc biệt hoá, tương tự và quy nạp

Hãy xét lại một lần nữa thí dụ về suy luận quy nạp mà chúng ta đã phân tích khá chi tiết (1.2, 1.3). Đầu tiên chúng ta nhận thấy *sự tương tự* giữa ba hệ thức:

$$3 + 7 = 10, \qquad 3 + 17 = 20, \qquad 13 + 17 = 30.$$

Chúng ta *khái quát hoá*, nâng từ 3, 7, 13 và 17 lên tất cả các số nguyên tố; và từ 10, 20 và 30 lên tất cả các số chẵn, sau đó chúng ta *đặc biệt hoá*, trở về nghiên cứu những số chẵn khác nhau như 6, 8 hay 60.

Thí dụ đầu tiên đó rất đơn giản. Nó minh hoạ hoàn toàn đúng đắn vai trò của khái quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự trong suy luận quy nạp. Tuy nhiên, cần phải nghiên cứu những minh hoạ phong phú hơn, rõ ràng hơn. Và trước đó, cần phải xem xét bản thân sự khái quát hoá, sự đặc biệt hoá, sự tương tự, những nguồn gốc vĩ đại của phát minh.

2. Khái quát hoá

Khái quát hoá là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho đến việc nghiên cứu một tập hợp lớn hơn, bao gồm cả tập hợp ban đầu. Chẳng hạn, chúng ta khái quát hoá khi chuyển từ việc nghiên cứu những tam giác sang việc nghiên cứu những đa giác với số cạnh tuỳ ý. Chúng ta cũng khái quát hoá khi chuyển từ việc nghiên cứu những hàm số lượng giác của góc nhọn sang việc nghiên cứu những hàm số lượng giác của một góc tuỳ ý.

Có thể nhận thấy rằng trong hai thí dụ trên, sự khái quát hoá đã được thực hiện theo hai hướng có tính chất khác nhau. Ở thí dụ đầu, trong việc chuyển từ tam giác sang đa giác n cạnh chúng ta đã thay hằng số bởi biến số, thay số không đổi 3 bởi số tuỳ ý n (chỉ giới hạn bởi bất đẳng thức $n \geq 3$), ở thí dụ 2, khi chuyển từ góc nhọn sang góc tuỳ ý α, chúng ta đã vứt bỏ điều hạn chế $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Chúng ta thường khái quát hoá bằng cách chuyển từ chỗ chỉ xét một đối tượng, sang việc xét toàn thể một lớp bao gồm cả đối tượng đó.

3. Đặc biệt hoá

Đặc biệt hoá là chuyển từ việc nghiên cứu một tập hợp đối tượng đã cho sang việc nghiên cứu một tập hợp nhỏ hơn chứa trong tập hợp đã cho. Chẳng hạn, chúng ta đặc biệt hoá khi chuyển từ việc nghiên cứu đa giác sang nghiên cứu những đa giác đều và tiếp tục đặc biệt hoá khi chuyển từ đa giác đều n cạnh sang tam giác đều.

Hai bước chuyển lần lượt trên đây được thực hiện theo hai phương hướng có tính chất khác nhau. Trong bước chuyển thứ nhất, từ đa giác đến đa giác đều chúng ta có sự hạn chế, cụ thể là yêu cầu tất cả các cạnh và tất cả các góc của đa giác phải bằng nhau. Trong bước chuyển thứ hai, chúng ta thay đối tượng biến thiên bằng đối tượng cụ thể, thay biến số tự nhiên n bằng số 3.

Chúng ta thường tiến hành đặc biệt hoá khi chuyển từ cả một lớp đối tượng đến một đối tượng của lớp đó. Chẳng hạn, muốn kiểm tra một mệnh đề phát biểu chung cho mọi số nguyên tố, chúng ta chọn một số nguyên tố cụ thể nào đó, thí dụ 17 và xét xem mệnh đề khái quát đó đúng hay không với số 17 ấy.

4. Tương tự

Các khái niệm khái quát hoá và đặc biệt hoá đã rõ ràng và không có gì đáng nghi ngờ cả. Nhưng khi bước vào nghiên cứu sự tương tự thì chúng ta có một cơ sở kém vững chắc hơn.

Tương tự là một kiểu giống nhau nào đó. Có thể nói tương tự là giống nhau nhưng ở mức độ xác định hơn và ở mức độ được phản ánh bằng khái niệm. Tuy vậy, chúng ta có thể diễn tả chính xác hơn một chút. Theo tôi, sự khác nhau căn bản giữa tương tự và những loại giống nhau khác là ở ý định của người đang suy nghĩ. Những đối tượng giống nhau phù hợp với nhau trong một quan hệ nào đó. Nếu bạn có ý định quy mối quan hệ trong đó các đối tượng phù hợp với nhau về những khái niệm đã định thì bạn sẽ xem những đối tượng giống nhau ấy như là những đối tượng tương tự. Và nếu bạn đạt tới những khái niệm rõ ràng, thì tức là bạn làm sáng tỏ sự tương tự.

Tôi nghĩ rằng khi so sánh người phụ nữ trẻ với một đoá hoa, nhà thơ cũng cảm thấy một đôi chỗ giống nhau, nhưng thông thường họ không nói đến sự tương tự. Thật vậy, chưa chắc họ đã có ý định gạt bỏ các xúc cảm và đưa sự so sánh đó tới một cái gì có thể đo được, hay xác định được bằng những khái niệm.

Ở viện bảo tàng lịch sử tự nhiên, khi xem những bộ xương của các động vật có vú khác nhau, bạn có thể thấy rằng cái nào cũng khủng khiếp cả. Nhưng nếu chỉ nhìn thấy tất cả sự giống nhau là ở đó, thì bạn sẽ không thấy được một sự tương tự nổi bật. Tuy nhiên, bạn có thể nhận thấy một sự tương tự có nhiều ý nghĩa nếu bạn nghiên cứu bàn tay con người, chân con mèo, chân trước của con ngựa, vây của con cá và cánh của con dơi. Đó là những cơ quan sử dụng rất khác nhau, nhưng lại được cấu tạo bằng những bộ phận giống nhau và có mối quan hệ giống nhau.

Thí dụ cuối cùng minh hoạ một trường hợp tương tự điển hình nhất; hai hệ là tương tự nếu *chúng phù hợp với nhau trong các mối quan hệ xác định rõ ràng giữa những bộ phận tương ứng.*

Thí dụ, tam giác trên mặt phẳng tương tự với tứ diện trong không gian. Trên mặt phẳng hai đường thẳng không thể tạo nên một hình có giới hạn, còn ba đường thẳng thì có thể tạo nên một tam giác. Trong không gian ba mặt phẳng không thể tạo nên một vật thể có giới hạn, còn 4 mặt phẳng thì có thể tạo nên một tứ diện. Quan hệ của tam giác đối với mặt phẳng cũng y như quan hệ của tứ diện đối với không gian, vì cả tam giác và tứ diện đều được giới hạn bởi số tối thiểu những yếu tố cơ bản. Sự tương tự là ở chỗ đó.

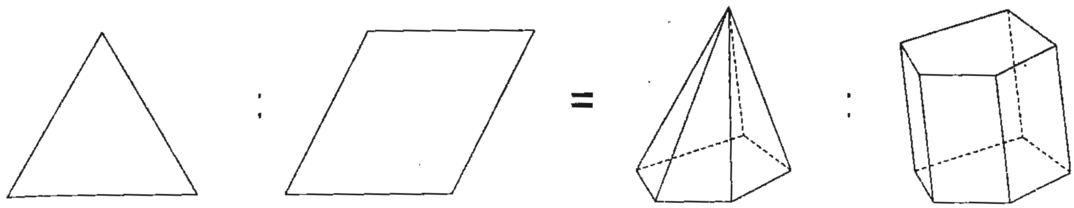
Danh từ "tương tự" bắt nguồn ở một từ Hy-lạp "a-na-lô-gi-a". Từ này có một nghĩa là "tỉ lệ". Thật vậy, hệ hai số 6 và 9 tương tự với hệ hai số 10 và 15, vì tỉ số giữa những số tương ứng thoả mãn hệ thức:

$$6 : 9 = 10 : 15.$$

"Tính tỉ lệ" hay tỉ số giữa những bộ phận tương ứng mà chúng ta có thể thấy một cách trực quan trong những hình đồng dạng của hình học, gợi ý cho ta một trường hợp về tương tự.

Và đây là một thí dụ khác. Có thể xem tam giác và hình chóp như những hình tương tự - một mặt hãy lấy một đoạn thẳng và mặt khác hãy lấy một đa giác. Nối hai điểm của đoạn thẳng với một điểm ở ngoài đường thẳng chứa đoạn thẳng, bạn được một tam giác. Nối tất cả các điểm của đa giác với một điểm ở ngoài mặt phẳng của đa giác, bạn được một hình chóp. Cũng bằng cách đó, có thể xem hình bình hành và hình lăng trụ là tương tự với nhau. Thật vậy, hãy di chuyển đoạn thẳng hay đa giác song song với chính nó - theo một phương không song song với đoạn thẳng hay mặt phẳng của đa giác. Ta sẽ được một hình bình hành trong trường hợp đầu, và một hình lăng trụ trong trường hợp sau.

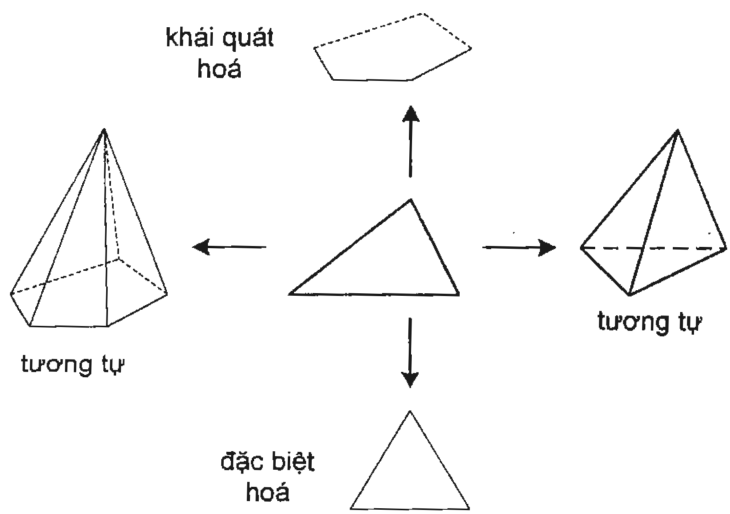
Có thể là bạn sẽ rất muốn diễn tả mối tương quan giữa các hình phẳng và các vật thể không gian bằng một loại "tỉ lệ" nào đó, và nếu bạn chưa giải quyết được thì hãy xem hình 2.1. Trong hình này ý nghĩa thông thường của vài kí hiệu (: và =) đã dược biến dạng, theo hướng như trước đây, trong lịch sử ngôn ngữ, từ "tỉ lệ" đã biến dạng thành từ "tương tự".



Hình 2.1. *Quan hệ tương tự trên mặt phẳng và trong không gian*

Thí dụ trên đây còn có ích ở một phương diện khác. Sự tương tự, nhất là những sự tương tự chưa được giải thích đầy đủ, có thể có hai ý nghĩa. Chẳng hạn như khi so sánh hình học phẳng và hình học không gian, trước hết ta thấy tam giác trên mặt phẳng tương tự với tứ diện trong không gian, và sau đó tam giác tương tự với hình chóp. Cả hai đều hợp lí và mỗi cái có ý nghĩa riêng của nó. Giữa hình học phẳng và hình học không gian có một số điểm tương tự, chứ không phải chỉ có một sự tương tự duy nhất.

Hình 2.2 chỉ rõ xuất phát từ tam giác chúng ta có thể tiến lên đa giác bằng khái quát hoá, trở về tam giác đều bằng đặc biệt hoá, hoặc chuyển sang những vật thể không gian khác nhau bằng tương tự - tương tự trong mọi khía cạnh.



Hình 2.2. *Khái quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự*

Và hãy nhớ rằng, đừng coi thường những sự tương tự lờ mờ, nhưng muốn cho chúng được coi trọng thì cần phải giải thích rõ ràng.

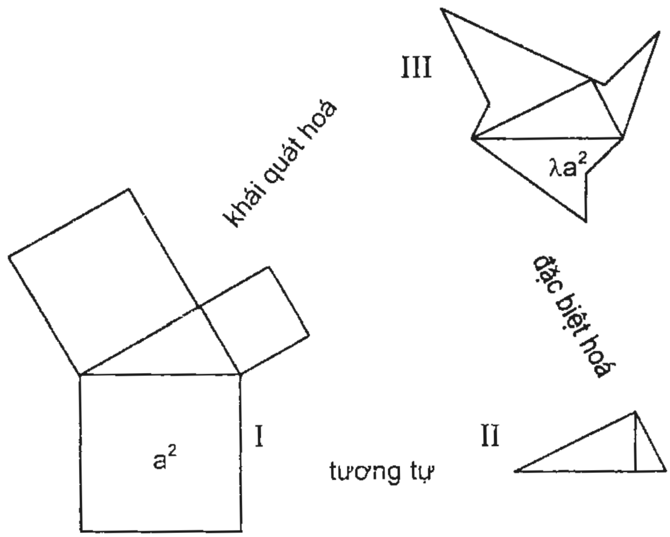
5. Khái quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự thường hợp tác với nhau trong việc giải quyết những vấn đề toán học.

Có thể lấy định lí Pythagore (Py-ta-go), một định lí nổi tiếng của toán học sơ cấp làm thí dụ. Phép chứng minh mà chúng tôi trình bày ở đây không phải là mới, mà chính là phép chứng minh của Euclide (Ơclit).

1) Xét tam giác vuông có cạnh a, b, c; a là cạnh huyền. Chúng ta muốn chứng minh rằng:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{(A)}$$

Mục đích ấy gợi ý cho ta dựng những hình vuông trên ba cạnh của tam giác. Và như vậy, chúng ta tiến tới làm quen với phần I của hình 2.3 (Bạn đọc hãy đánh dấu những phần của hình vẽ này, nó xuất hiện đến đâu đánh dấu đến đấy, để hiểu rõ nó đã được nảy sinh như thế nào).



Hình 2.3

2) Các phát minh, ngay cả những phát minh rất đơn giản, cũng đòi hỏi phải nhận thức được một cái gì đó, hiểu rõ được một mối liên hệ nào đó. Chúng ta có thể tìm ra cách chứng minh - chứng minh này sẽ được trình bày ở dưới - nếu chúng ta nhận thấy sự tương tự giữa phần I đã quen thuộc của hình 2.3 và phần II chưa chắc đã kém quen thuộc hơn: II cũng chính là tam giác vuông trong I được tách thành hai bởi đường cao ứng với cạnh huyền.

3) Có thể bạn không thấy được sự tương tự giữa I và II. Có thể làm sáng tỏ sự tương tự đó bằng cách khái quát hoá đồng thời các hình I và II, thể hiện ở

hình III. Ở đấy, chúng ta vẫn có tam giác vuông đã cho và trên ba cạnh của nó ta dựng ba đa giác tuỳ ý đồng dạng với nhau.

4) Diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền ở hình I bằng a^2. Diện tích của đa giác không đều dựng trên cạnh huyền ở hình III có thể đặt là λa^2, thừa số λ là tỉ số của hai diện tích nói trên. Trong hình III, ba đa giác dựng trên ba cạnh a, b, c của tam giác vuông là đồng dạng với nhau. Từ đó suy ra diện tích của chúng theo thứ tự bằng λa^2, λb^2, λc^2.

Bây giờ, nếu phương trình (A) đúng (theo yêu cầu của định lí cần chứng minh) thì phương trình sau đây cũng đúng:

$$\lambda a^2 = \lambda b^2 + \lambda c^2 \qquad \text{(B)}$$

Thật vậy, chỉ cần sử dụng chút ít đại số là có thể từ (A) suy ra (B). Bây giờ (B) là khái quát hoá của định lí Pythagore nêu ban đầu: *Nếu trên ba cạnh của một tam giác vuông ta dựng ba đa giác đồng dạng thì diện tích của đa giác dựng trên cạnh huyền bằng tổng diện tích của hai đa giác kia.*

Cần chú ý rằng trường hợp tổng quát này *tương đương* với trường hợp riêng xuất phát. Thật vậy, từ đẳng thức (A) có thể suy ra (B) và ngược lại, bằng cách nhân hay chia với λ (λ khác 0 vì là tỉ số hai diện tích).

5) Định lí tổng quát thể hiện ở đẳng thức (B) không những chỉ tương đương với trường hợp riêng (A) mà tương đương với mọi trường hợp riêng khác. Do đó, nếu một trường hợp riêng nào đó đã được chứng minh, thì trường hợp tổng quát cũng được chứng minh.

Vậy chỉ cần tìm một trường hợp riêng nào đó thuận lợi nhất cho việc chứng minh. Có thể chọn trường hợp của hình II. Thật vậy, tam giác vuông dựng trên cạnh huyền của nó rõ ràng là đồng dạng với hai tam giác vuông kia, dựng trên hai cạnh góc vuông của tam giác vuông đã cho. Tất nhiên là diện tích của cả tam giác bằng tổng diện tích hai phần của nó. Như vậy là định lí Pythagore đã được chứng minh.

Suy luận trên đây hết sức có ích. Một trường hợp sẽ được gọi là có ích nếu ta có thể rút ra những bài học áp dụng được cho những trường hợp khác, và nó càng có ích nếu phạm vi áp dụng càng rộng. Trong thí dụ trên đây, chúng ta có thể học tập được những thao tác tư duy cơ bản như khái quát hoá, đặc biệt hoá và nhận thức về tương tự. Có thể là sẽ không có một phát minh nào trong toán học sơ cấp cũng như cao cấp, thậm chí trong bất cứ lĩnh vực nào, nếu ta không dùng những thao tác tư duy đó, đặc biệt là nếu không dùng phép tương tự.

Thí dụ trên đây chỉ rõ rằng từ một trường hợp riêng (trường hợp của hình I), bằng khái quát hoá có thể tiến lên một tình huống tổng quát hơn (hình III) và từ đó, bằng đặc biệt hoá, ta lại trở về một trường hợp tương tự (như hình II). Thí dụ đó còn chứng tỏ rằng một trường hợp tổng quát có thể tương đương về mặt logic với một trường hợp đặc biệt. Sự việc đó rất bình thường trong toán học nhưng không kém phần lí thú đối với người mới học cũng như đối với những nhà triết học thông thái. Thí dụ ấy cũng chứng tỏ một cách rất đơn giản nhưng rõ ràng rằng các phép khái quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự kết hợp một cách tự nhiên trong khi cố gắng tìm kiếm lời giải của bài toán.

Cũng cần chú ý rằng: muốn hiểu đầy đủ những lập luận trên đây, chỉ cần rất ít những kiến thức sơ bộ.

6. Phát minh bằng tương tự

Phép tương tự có lẽ là có mặt trong mọi phát minh, và trong một số phát minh nó chiếm vai trò quan trọng hơn cả. Tôi muốn minh hoạ điều đó bằng một thí dụ, không hoàn toàn sơ cấp, nhưng lí thú về mặt lịch sử và gây được một ấn tượng mạnh mẽ hơn bất cứ một thí dụ sơ cấp nào mà tôi biết.

Jacob Bernoulli (Iacôp Becnuli), nhà toán học Thụy Sĩ (1654 - 1705), người cùng thời với Newton (Niutơn) và Leibniz (Lepnit), đã phát minh ra tổng của nhiều chuỗi vô hạn; nhưng ông không tìm được tổng của các chuỗi nghịch đảo của các bình phương:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \ldots$$

Bernoulli viết: "Cho đến nay, tôi đã cố gắng nhiều nhưng vẫn không tìm ra. Ai tìm được và cho biết thì tôi xin cảm ơn vô cùng".

Một nhà toán học Thụy Sĩ khác đã chú ý tới bài toán đó. Đó là Leonhard Euler (Ơle, 1707-1783). Cũng như Jacob, ông sinh ở Baden và là học trò của Johann Bernoulli (Iôhan Becnuli, 1667-1748), em trai của Jacob. Ông thấy nhiều biểu thức khác nhau của tổng cần tìm (những tích phân định hạn, những chuỗi khác), nhưng không biểu thức nào làm ông vừa lòng. Ông dùng một trong những biểu thức đó để tính tổng trên chính xác đến 7 chữ số (1,644934). Nhưng đó chỉ là giá trị gần đúng, mà mục đích của ông là tìm giá trị đúng. Cuối cùng, ông đã tìm ra giá trị đó. Bằng tương tự ông đã đi đến một giả thuyết cực kì táo bạo.

1) Hãy bắt đầu bằng cách điểm qua một vài sự kiện đại số sơ cấp có vai trò quan trọng trong phát minh của Euler. Nếu phương trình bậc n:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = 0$$

có n nghiệm phân biệt $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ thì đa thức ở vế trái của phương trình có thể biểu diễn thành tích của n thừa số bậc nhất:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n).$$

So sánh những số hạng cùng bậc đối với x ở hai vế của đồng nhất thức ấy, ta rút được những hệ thức đã biết giữa các nghiệm và các hệ số của phương trình. Hệ thức đơn giản nhất là:

$$a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)$$

tìm được bằng cách so sánh những số hạng chứa x^{n-1}.

Việc phân tích thành những thừa số bậc nhất có thể làm theo cách khác. Nếu các nghiệm $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ đều khác 0, hay (cũng thế) nếu a_0 khác 0, thì chúng ta có:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a_0\left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)...\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

và $$a_1 = -a_0\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + ... + \frac{1}{\alpha_n}\right).$$

Còn có một cách khác. Giả sử phương trình bậc $2n$ có dạng:

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 + ... + (-1)^n b_nx^{2n} = 0$$

và có $2n$ nghiệm phân biệt là:

$$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2,..., \beta_n, -\beta_n.$$

Thế thì:

$$b_0 - b_1x^2 + b_2x^4 + ... + (-1)^n b_nx^{2n} = b_0\left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right)...\left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$$

và $$b_1 = b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2} + \frac{1}{\beta_2^2} + ... + \frac{1}{\beta_n^2}\right).$$

2) Euler xét phương trình $\sin x = 0$ hay

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3....7} + ... = 0.$$

Vế trái có vô số số hạng, nó có "bậc vô tận". Vì vậy, Euler nói - không nên ngạc nhiên rằng nó có vô số nghiệm:

$$0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$$

Euler bỏ nghiệm 0 đi, ông chia vế trái của phương trình cho x, thừa số bậc nhất ứng với nghiệm 0, và có phương trình sau đây:

$$1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots7}+\ldots=0$$

với các nghiệm:

$$\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, 3\pi, -3\pi, \ldots$$

Chúng ta đã gặp một tình huống tương tự trước đây, khi xét cách phân tích thành những thừa số bậc nhất ở cuối phần I. Bằng phương pháp tương tự, Euler kết luận rằng:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4.5}-\frac{x^6}{2.3\ldots.7}+\ldots=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)$$

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{6\pi^2}+\ldots$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Đó chính là chuỗi số mà những cố gắng của Jacob Bernoulli không đi đến kết quả. Nhưng kết luận của Euler rất táo bạo.

3) Euler biết rất rõ rằng kết luận của mình là táo bạo. Mười năm về sau ông viết: "Đây là một phương pháp mới và chưa từng được dùng vào mục đích như vậy". Chính ông đã bị một số ý kiến phản đối, trong đó có ý kiến của một số nhà toán học bạn ông đưa ra, khi họ đã trấn tĩnh lại sau những phút khâm phục và kinh ngạc đầu tiên.

Tuy nhiên, Euler đã có những cơ sở để tin vào phát minh của mình. Trước hết, giá trị số tổng của chuỗi mà ông đã tính trước đây đều khớp với $\frac{\pi}{6}$ cho tới chữ số cuối cùng. So sánh những hệ số tiếp theo trong biểu thức của $\sin x$ ở dạng tích, ông đã tìm ra tổng của một chuỗi nổi tiếng khác, đó là chuỗi số nghịch đảo của các luỹ thừa bậc bốn:

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+\ldots=\frac{\pi^4}{90}.$$

Ông lại nghiên cứu giá trị số tổng của chuỗi và lại tìm thấy sự phù hợp.

4) Euler đã thử phương pháp của mình cả với những thí dụ khác. Ông lại tìm thấy tổng là $\frac{\pi^2}{6}$ đối với chuỗi của Jacob Bernoulli bằng những thay đổi khác nhau về hình thức đối với phương pháp đầu tiên của mình. Nhờ đó, Euler cũng đã tính được tổng của một chuỗi quan trọng khác do Leibniz đề ra.

Chúng ta hãy xét vấn đề sau cùng này. Euler làm như sau:

Xét phương trình $1 - \sin x = 0$.

Các nghiệm của phương trình là:

$$\frac{\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2};\ -\frac{11\pi}{2};\ldots$$

Mỗi nghiệm đó đều là nghiệm kép (tại những điểm có hoành độ ấy, đường cong $y = \sin x$ không cắt mà tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$. Đạo hàm bậc nhất của vế trái triệt tiêu với những giá trị trên của x, nhưng đạo hàm bậc hai thì không triệt tiêu).

Do đó, phương trình:

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots = 0$$

có các nghiệm:

$$\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{2};\ -\frac{7\pi}{2},\ldots$$

và bằng kết luận tương tự, Euler đã phân tích thành thừa số bậc nhất:

$$1 - \sin x = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{2x}{3\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{2x}{5\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{2x}{7\pi}\right)^2.$$

So sánh các hệ số của x ở hai vế của đẳng thức, ta được:

$$-1 = -\frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{5\pi} + \frac{4}{7\pi} - \ldots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Đó là chuỗi nổi tiếng của Leibniz. Biện pháp táo bạo của Euler cũng đạt được kết quả đã biết. Euler viết: "Ở đây, phương pháp của chúng ta - một phương pháp hình như chưa đủ vững chắc, đã được xác nhận một cách hùng hồn. Vì vậy, nói chung không nên nghi ngờ những kết quả khác thu được bằng phương pháp này".

5) Tuy thế, Euler vẫn tiếp tục nghi ngờ. Ông vẫn tiếp tục kiểm tra bằng số như đã nói ở phần 3); nghiên cứu thêm nhiều chuỗi, thêm nhiều số thập phân và trong mọi trường hợp ông đều thấy sự phù hợp. Ông thử cả với những phương pháp khác, và cuối cùng không những ông đã tìm được giá trị gần đúng mà cả tổng đúng $\frac{\pi^2}{6}$ của chuỗi Jacob Bernoulli.

Ông đã tìm được một cách chứng minh mới. Phép chứng minh này tuy kín đáo và tế nhị nhưng đã dựa trên những lí lẽ đơn giản hơn và đã được công nhận là hoàn toàn chặt chẽ. Như vậy là hệ quả đáng chú ý nhất của phát minh của Euler đã được hiển nhiên công nhận. Những chứng cớ trên đây chắc đã làm cho Euler tin rằng kết quả của ông là đúng*.

7. Tương tự và quy nạp

Chúng ta muốn biết một cái gì đó về bản chất của những suy luận phát minh và quy nạp. Có thể nhấn mạnh điều gì trong câu chuyện vừa đưa ra ở trên?

1) Bước quyết định của Euler rất táo bạo. Về phương diện logic chặt chẽ thì rõ ràng ông đã phạm sai lầm. Euler đã dùng một quy tắc vào một trường hợp mà quy tắc ấy chưa được xác nhận, dùng một quy tắc của phương trình đại số cho một phương trình không đại số. Về phương diện logic chặt chẽ thì các bước đi của Euler không có cơ sở xác đáng. Tuy nhiên, ông đã có cơ sở ở phép tương tự, phép tương tự với những thành tựu rực rỡ nhất của một nền khoa học đang phát triển; nền khoa học mà vài năm sau chính ông đã gọi là "giải tích của vô hạn". Những nhà toán học khác, trước Euler, đã chuyển từ hiệu hữu hạn đến hiệu vô cùng bé, từ tổng của một số hữu hạn số hạng đến tổng của vô số số hạng, từ tích hữu hạn tới tích vô hạn. Và cũng bằng cách này, Euler đã đi từ phương trình bậc hữu hạn (phương trình đại số) đến phương trình bậc vô hạn, bằng cách ứng dụng vào trường hợp vô hạn quy tắc được thiết lập cho trường hợp hữu hạn.

Sự tương tự này, sự chuyển từ hữu hạn sang vô hạn này, có nhiều cạm bẫy. Euler đã tránh những cạm bẫy đó như thế nào? Một số người nói rằng ông có tố chất thiên tài, và tất nhiên nói như vậy hoàn toàn không phải là giải thích.

* Gần 10 năm sau phát minh đầu tiên của mình, Euler đã trở lại vấn đề đó, đã trả lời những ý kiến phản đối, hoàn thiện thêm một bước phương pháp phát minh đầu tiên của mình và đưa ra cách chứng minh mới hoàn toàn khác.

Euler đã có cơ sở nghiêm túc để tin vào phát minh của mình. Chỉ cần tinh ý một chút là chúng ta có thể hiểu rõ những cơ sở đó, không cần phải có một sự sáng suốt siêu phàm của các bậc thiên tài.

2) Những cơ sở để Euler tin vào phát minh đó, mà ta đã trình bày tóm tắt ở trên, không phải là những cơ sở đã được chứng minh. Euler không quay về nghiên cứu các cơ sở của giả thuyết của ông (biểu diễn sin$x$ dưới dạng tích vô hạn), của việc mạnh dạn chuyển từ hữu hạn sang vô hạn, mà chỉ nghiên cứu những hệ quả của nó. Ông xem sự xác nhận của một hệ quả bất kì nào như thế là bằng chứng thuyết minh cho giả thuyết của mình. Ông công nhận cả những sự xác nhận gần đúng và đúng, nhưng chắc là coi trọng cái sau hơn. Ông cũng nghiên cứu những hệ quả có liên quan chặt chẽ với những giả thuyết tương tự (đặc biệt là tích ứng với $1 - \sin x$) và xem sự xác nhận những hệ quả đó như là bằng chứng thuyết minh cho giả thuyết của mình.

Các cơ sở của Euler đúng là cơ sở quy nạp. Nghiên cứu hệ quả của giả thuyết và đánh giá nó trên cơ sở của sự nghiên cứu ấy là một biện pháp quy nạp điển hình. Trong nghiên cứu khoa học cũng như trong cuộc sống bình thường, chúng ta tin hay phải tin nhiều hay ít vào giả thuyết tuỳ theo những hệ quả của nó có phù hợp với thực tiễn hay không.

Nói tóm lại, như ta đã thấy, có lẽ Euler đã suy luận theo cách mà những người có lí trí, bác học hay không phải là bác học, thường suy luận. Có lẽ ông đã công nhận một số nguyên lí.

Giả thuyết sẽ trở nên có lí hơn mỗi lần một hệ quả mới nào đó được xác nhận.

Và:

Giả thuyết trở nên có lí hơn nếu giả thuyết tương tự trở nên có lí hơn.

Phải chăng những nguyên lí đó nằm trong cơ sở của quá trình quy nạp?

NHỮNG THÍ DỤ VÀ CHÚ THÍCH VỀ CHƯƠNG II

PHẦN MỘT

1. Khái quát hoá đúng

A. *Hãy tìm ba số x, y, z thoả mãn hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 9x - 6y - 10z = 1 \\ -6x + 4y + 7z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Trong ba phép tổng quát hoá B, C và D dưới đây, phép tổng quát nào có thể tạo điều kiện tốt nhất cho việc giải A?

B. Tìm ba ẩn số trong một hệ ba phương trình.

C. Tìm ba ẩn số từ hệ ba phương trình, mà hai phương trình đầu là bậc nhất, còn phương trình thứ ba là bậc hai.

D. Tìm hai ẩn số từ hệ n phương trình, n – 1 phương trình đầu là bậc nhất.

2. *Cho một điểm tuỳ ý và một hình chóp "đều", đáy là hình sáu cạnh (hình chóp gọi là "đều" nếu đáy của nó là đa giác đều và đường cao của hình chóp đi qua tâm của đa giác đáy). Hãy tìm mặt phẳng đi qua điểm đã cho và chia đôi thể tích của hình chóp.*

Để gợi ý, xin hỏi bạn: "Sự khát quát đúng là gì?".

3. *A- Cho ba đường thẳng không nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm O. Dựng mặt phẳng qua O và nghiêng đều đối với ba đường thẳng ấy.*

B- Cho ba đường thẳng không nằm trong một mặt phẳng và cùng đi qua một điểm. P là một điểm nằm trên một trong ba đường thẳng đó. Qua P dựng một mặt phẳng nghiêng đều đối với ba đường thẳng.

So sánh các bài toán A và B. Có thể dùng cách giải của bài này để giải bài kia không? Mối liên hệ logic của chúng ở chỗ nào?

4. *A- Tính tích phân*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + x^2)^{-3} dx$$

B- Tính tích phân

$$\int_{-\infty}^{\infty} (p + x^2)^{-3} dx$$

trong đó p là một số dương cho trước. So sánh các bài toán A và B. Có thể dùng cách giải của bài này để giải bài kia không? Mối liên hệ logic của chúng ở chỗ nào?

5. Trường hợp riêng tới hạn. *Hai người ngồi sau một cái bàn hình chữ nhật. Một người đặt một đồng tiền lên bàn, sau đó người kia cũng đặt một đồng và lần lượt làm tiếp như vậy. Giả thuyết rằng, mỗi đồng tiền nằm phẳng trên mặt bàn và không chồng lên đồng nào đặt trước. Người nào đặt lên bàn đồng tiền cuối cùng sẽ thắng. Ai sẽ thắng nếu người nào cũng chơi theo phương án tối ưu?*

Đó là một bài toán cổ, nhưng là một câu đố nát óc, rất đặc sắc. Có một lần tôi theo dõi một nhà toán học thực sự xuất sắc, khi người ta đề nghị ông giải bài toán đố đó, thì ông đã bắt đầu như sau: "Giả sử rằng cái bàn nhỏ đến mức chỉ cần một đồng tiền để phủ kín nó. Trong trường hợp đó, rõ ràng rằng người nào chơi trước, người ấy thắng". Nói một cách khác, nhà toán học đó đã bắt đầu bằng cách nghiên cứu một trường hợp riêng tới hạn, và với trường hợp đó thì lời giải rất hiển nhiên.

Từ trường hợp riêng này mà bạn có thể tìm được lời giải trọn vẹn. Bạn hãy tưởng tượng rằng cái bàn rộng dần ra và ngày càng chứa được nhiều đồng tiền hơn. Tốt hơn nữa, bạn có thể khái quát hoá bài toán và nghiên cứu những cái bàn có hình dạng và kích thước khác nhau. Nếu để ý rằng cái bàn có tâm đối xứng và khái quát hoá đúng bằng cách xét mọi cái bàn có tâm đối xứng thì bạn có thể tìm được lời giải đáp hay ít ra cũng tiến rất gần đến lời giải.

6. *Hãy dựng tiếp tuyến chung của hai đường tròn cho trước. Để gợi ý, xin hỏi: có một trường hợp riêng tới hạn nào dễ dựng hơn không?*

7. Trường hợp riêng then chốt. *Diện tích một đa giác bằng A, mặt phẳng của đa giác tạo với một mặt phẳng khác một góc α. Chiếu vuông góc đa giác lên mặt phẳng thứ hai. Hãy tìm diện tích của hình chiếu.*

Để ý rằng hình dạng của đa giác không cho trước, và nó có thể có vô số dạng. Vậy cần nghiên cứu dạng nào? Dạng nào cần nghiên cứu trước tiên?

Có một dạng mà ta giải quyết đặc biệt dễ là: Đa giác là một hình chữ nhật có đáy song song với giao tuyến l của mặt phẳng đa giác và mặt phẳng chiếu. Gọi a là đáy hình chữ nhật, b là đường cao của nó; diện tích của nó tất nhiên là ab; những đại lượng tương ứng của hình chiếu sẽ là a, $b\cos\alpha$ và $ab\cos\alpha$. Nếu diện tích của hình chữ nhật là A thì diện tích hình chiếu là $A\cos\alpha$.

Trường hợp riêng của hình chữ nhật có đáy song song với l, không chỉ là một trường hợp dễ giải quyết hơn mà còn là một trường hợp riêng then chốt. Mọi trường hợp khác đều suy từ trường hợp này. Giải bài toán trong trường hợp riêng then chốt bao gồm cả việc giải bài toán trong trường hợp tổng quát. Thật vậy, từ hình chữ nhật với đáy song song với l chúng ta có thể mở rộng quy tắc: "Diện tích hình chiếu bằng $A\cos\alpha$" lần lượt cho mọi hình khác. Đầu tiên xét những tam giác vuông có một cạnh song song với l (cắt hình chữ nhật nói trên thành hai phần bằng nhau). Sau đó xét tam giác thường có cạnh song song với l (ghép hai tam giác vuông lại). Cuối cùng xét một đa giác bất kì (chia nó thành những tam giác thuộc loại vừa nói đến). Cũng có thể chuyển sang những hình giới hạn bởi những đường cong (xem chúng như là giới hạn của những đa giác).

8. *Góc có đỉnh ở tâm hình tròn lớn gấp hai lần góc có đỉnh trên đường tròn cùng chắn một cung.*

Nếu cho một góc với đỉnh ở tâm, thì góc có đỉnh trên đường tròn còn chưa được xác định, đỉnh của nó có thể có những vị trí khác nhau.

Đâu là "vị trí then chốt" trong cách chứng minh thông thường định lí đó? (chứng minh của Euclide).

9. *Định lí Cauchy (Côsi), định lí căn bản của lí thuyết về hàm giải tích, khẳng định rằng tích phân của một hàm biến số phức dọc theo một đường cong kín tuỳ ý sẽ bằng 0, nếu trong miền giới hạn bởi đường cong đó, hàm là chính quy. Có thể xem trường hợp riêng của định lí Cauchy - trường hợp mà đường cong kín là một tam giác - là trường hợp riêng then chốt. Sau khi chứng minh định lí với trường hợp tam giác chúng ta có thể dễ dàng lần lượt mở rộng định lí đối với đa giác (ghép những tam giác lại) và đối với đường cong (xem giới hạn của những đa giác).*

Chú ý sự tương tự giữa bài toán này với các bài toán 7 và 8.

10. Trường hợp riêng tiêu biểu: *Bạn cần giải một bài toán nào đó về những đa giác n cạnh. Bạn vẽ một hình 5 cạnh và giải bài toán đối với hình đó. Nghiên cứu cách giải của mình, bạn nhận xét rằng cách giải ấy trong một chừng mực nào đó, cũng dùng được cho trường hợp chung, với n bất kì cũng như với n = 5. Thế thì bạn có thể gọi n = 5 là trường hợp riêng tiêu biểu. Nó giới thiệu cho bạn trường hợp chung. Tất nhiên, muốn cho trường hợp n = 5 thực sự là tiêu biểu thì nó không được có một sự đơn giản hoá riêng biệt nào, có thể dẫn bạn đến lầm lẫn. Trường hợp riêng tiêu biểu không đơn giản hơn trường hợp tổng quát.*

Những trường hợp riêng tiêu biểu thường thuận tiện trong việc giảng dạy. Chúng ta có thể chứng minh định lí về những định thức cấp n khi nghiên cứu cặn kẽ những định thức cấp ba.

11. Trường hợp tương tự. *Một nhiệm vụ của công việc thiết kế máy bay là làm thế nào để tai nạn vỡ đầu trong trường hợp hỏng máy là thấp nhất. Người bác sĩ nghiên cứu vấn đề này đã làm thí nghiệm với những quả trứng mà ông ta đập vỡ trong những điều kiện khác nhau. Ông ta đã làm gì? Ông đã... biến dạng bài toán ban đầu và nghiên cứu một bài toán phụ. Đập vỡ những quả trứng thay cho việc phá vỡ xương sọ. Mối liên hệ giữa hai bài toán - bài toán ban đầu và bài toán phụ - là mối liên hệ tương tự. Trên quan điểm cơ học, đầu người và trứng gà tương tự nhau trên những nét chung: đầu và trứng đều làm bằng những vỏ cứng dễ vỡ, chứa chất đông đặc.*

12. *Nếu hai đường thẳng trong không gian cắt ba mặt phẳng song song thì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ với nhau.*

Để giúp bạn tìm cách chứng minh, xin hỏi bạn: Có một định lí nào tương tự đơn giản hơn không?

13. *Bốn đường chéo của một hình hộp có một điểm chung, đó là trung điểm của mỗi đường.*

Có một định lí nào tương tự đơn giản hơn không?

14. *Tổng của hai góc phẳng bất kì của một góc tam diện lớn hơn góc phẳng thứ ba.*

Có một định lí nào tương tự đơn giản hơn không?

15. *Hãy xem tứ diện như một hình tương tự với tam giác. Hãy liệt kê những khái niệm của hình học không gian tương tự với những khái niệm sau đây của hình học phẳng:* hình bình hành, hình chữ nhật, hình vuông, đường phân góc của góc. *Phát biểu định lí của hình học không gian tương tự với định lí sau đây của hình học phẳng:* ba đường phân giác trong của tam giác cắt nhau tại một điểm, điểm đó là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

16. *Hãy xem hình chóp như một vật thể tương tự với tam giác. Liệt kê những vật thể tương tự với những hình phẳng dưới đây:* hình bình hành, hình chữ nhật, đường tròn. *Phát biểu định lí của hình học không gian tương tự với định lí sau đây của hình học phẳng:* diện tích của hình tròn bằng diện tích của tam giác có đáy bằng chu vi đường tròn và đường cao bằng bán kính.

17. *Hãy nghĩ ra một định lí của hình học không gian tương tự với định lí sau đây của hình học phẳng:* đường cao của tam giác cân đi qua trung điểm của đáy.

Bạn coi hình không gian nào là tương tự với tam giác cân?

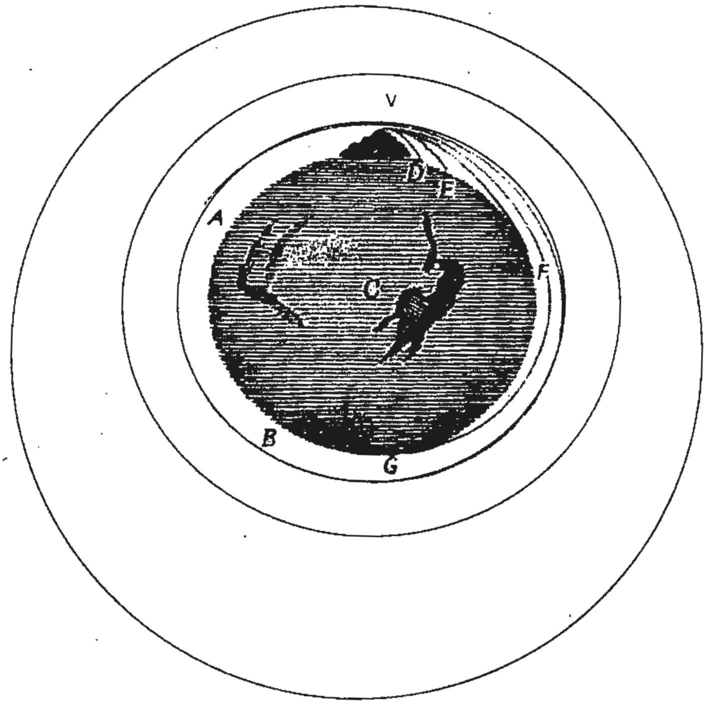
18. Những tương tự to lớn

1) Các thí dụ 12 - 17 trên đây nhấn mạnh sự tương tự giữa hình học phẳng và hình học không gian. Có thể xem sự tương tự này theo nhiều quan điểm và vì vậy thường có hai ý nghĩa và không phải bao giờ cũng thể hiện rõ ràng. Nhưng nó là nguồn vô tận của những ý kiến và những phát minh mới.

2) Số và hình không phải là những đối tượng duy nhất của toán học. Về nguyên tắc, toán học không tách rời logic học và quan hệ đến mọi đối tượng có thể là đối tượng của lí thuyết chính xác. Tuy nhiên, số và hình là những đối tượng thông thường nhất của toán học và các nhà toán học *thường thích minh hoạ những sự kiện liên quan đến hình bằng những tính chất của số. Vì vậy, có vô số dạng tương tự giữa số và hình. Một vài dạng tương tự đó rất rõ ràng. Chẳng hạn như trong hình học giải tích, chúng ta đã nghiên cứu tương quan xác định giữa những đối tượng và quan hệ đại số và hình học. Nhưng những hình hình học muôn hình muôn vẻ, các phép toán thực hiện trên các số cũng thế, cho nên cũng có vô số sự tương ứng có thể có giữa các đa tạp đó.*

3) Việc nghiên cứu những giới hạn và những quá trình tiến tới giới hạn đã dẫn tới một hình thức tương tự khác, có thể gọi là sự tương tự giữa hữu hạn và vô hạn. Chẳng hạn, chuỗi vô hạn và những tích phân không xác định, trong những mối quan hệ khác nhau, là tương tự với những tổng số hữu hạn và chúng là giới hạn. Phép tính vi phân tương tự với phép toán sai phân hữu hạn; phương trình vi phân, đặc biệt là những phương trình tuyến tính đẳng cấp, trong một mức độ nào đó, tương tự với những phương trình đại số v.v... Một ngành toán học quan trọng tương đối mới là lí thuyết phương trình tích phân, lí thuyết đó đã giải đáp câu hỏi độc đáo và lí thú sau đây: Trong phép tính tích phân cái gì tương tự với hệ n phương trình tuyến tính n ẩn? Sự tương tự giữa vô hạn và hữu hạn làm người ta quan tâm đặc biệt vì nó có những khó khăn và dễ dẫn tới các sai lầm độc đáo. Nó có thể dẫn đến việc phát minh hay sai lầm; xem thí dụ 46.

4) Galilei, người khám phá ra quỹ đạo parabolic của những vật thể bị ném đi và định luật định lượng của chuyển động của chúng, đã có những phát minh vĩ đại trong thiên văn học. Chỉ nhờ chiếc kính thiên văn mà ông chế tạo, ông đã phát hiện các vệ tinh của Sao Mộc. Ông nhận thấy rằng những vệ tinh này chuyển động xung quanh Sao Mộc tương tự như Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, đồng thời cũng tương tự với những hành tinh quay quanh Mặt Trời. Ông cũng phát hiện các chu kì của Sao Kim và nhận thấy chúng giống các chu kì của Mặt Trăng. Những phát minh đó được xem như là một chứng minh hùng hồn lí thuyết nhật tâm của Copernic, được thảo luận sôi nổi thời bấy giờ. Có điều lạ là Galilei không nhận thấy sự tương tự giữa chuyển động của các thiên thể và chuyển động của các vật thể bị ném đi, mà điều đó thì hoàn toàn có thể nhận thức bằng trực giác. Quỹ đạo của vật thể bị ném đi hướng bề lõm về phía Trái Đất cũng như quỹ đạo của Mặt Trăng. Newton đã thấy được sự tương tự ấy: "... Một hòn đá bị ném đi, do ảnh hưởng của khối lượng riêng, đáng lẽ phải đi theo đường thẳng, do tác động của cái ném ban đầu đã buộc phải đi chệch khỏi quỹ đạo thẳng, và vạch ra một đường cong trong không trung, rồi... cuối cùng rơi xuống đất. Vì vậy, chúng ta có thể giả định rằng với những vận tốc tăng một cách *thích hợp, hòn đá sẽ vạch một cung 1, 2, 5, 10, 100, 1000 dặm trước khi rơi xuống đất, cho tới khi mà, tất nhiên, rời khỏi giới hạn Trái Đất, nó chuyển vào không trung, không bị ràng buộc vào Trái Đất". Xem hình 2.4.*



Hình 2.4. *Từ quỹ đạo của hòn đá đến quỹ đạo của Mặt Trăng*
Trích "Hệ thống thế giới" của Newton

Biến đổi liên tục, quỹ đạo hòn đá chuyển sang quỹ đạo của Mặt Trăng. Quan hệ giữa hòn đá và Mặt Trăng với Trái Đất cũng như quan hệ giữa Sao Mộc với các hành tinh của nó, hay như quan hệ giữa Sao Kim và các hành tinh khác với Mặt Trời. Không hiểu thấu đáo sự tương tự đó thì chúng ta không thể hiểu đầy đủ phát minh của Newton về định luật vạn vật hấp dẫn, một phát minh mà cho mãi đến bây giờ chúng ta có thể coi là một phát minh khoa học vĩ đại nhất.

19. Sự tương tự rõ ràng. *Sự tương tự thường là không rõ ràng. Cái gì tương tự với cái gì? Câu trả lời thường có hai ý nghĩa. Tính không rõ ràng ấy không làm giảm tầm quan trọng và lợi ích của sự tương tự. Tuy nhiên, những trường hợp mà khái niệm tương tự đạt được sự rõ ràng của các khái niệm logic hay toán học, đáng được nghiên cứu đặc biệt.*

1) Tương tự là sự giống nhau của các quan hệ. Sự giống nhau đó có một ý nghĩa rõ ràng nếu các quan hệ được chi phối bởi cùng một quy luật. Với *quan điểm này, phép cộng các số tương tự với phép nhân các số ở chỗ phép cộng và phép nhân đều tuân theo những quy luật chung. Cả phép cộng và phép nhân đều có tính chất giao hoán và kết hợp:*

$$a + b = b + a \quad ; \quad ab = ba$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad ; \quad (ab)c = a(bc)$$

Cả hai đều có phép toán ngược, các phương trình:

$$a + x = b \quad ; \quad ax = b$$

giống nhau, vì mỗi phương trình cho một nghiệm và không quá một nghiệm (để tránh trường hợp ngoại lệ, chúng ta phải thừa nhận những số âm khi nghiên cứu phép cộng và loại trừ trường hợp $a = 0$ khi nghiên cứu phép nhân). Với mối quan hệ ấy, phép trừ tương tự với phép chia; thật-vậy, nghiệm của những phương trình kể trên theo thứ tự là:

$$x = b - a; \qquad x = \frac{b}{a}.$$

Hơn nữa, số 0 tương tự với số 1. Thật vậy, thêm 0 vào bất kì số nào cũng như nhân một số bất kì với 1, đều không thay đổi số đó:

$$a + 0 = a; \qquad a.1 = a.$$

Những định luật ấy chung cho những lớp số khác nhau; Ở đây, chúng ta có thể nghiên cứu những số hữu tỉ, số thực hay số phức. Nói chung, những hệ thống đối tượng tuân theo những quy luật chung chủ yếu (hay tiên đề), có thể xem như là tương tự với nhau, và loại tương tự này có một ý nghĩa hoàn toàn rõ ràng.

2) Phép cộng những số thực còn tương tự với phép nhân những số dương về một ý nghĩa khác. Một số thực r bất kì là logarit của số dương p nào đó:

$$r = \log p$$

(nếu chúng ta xét logarit thập phân thì $r = -2$, với $p = 0{,}01$). Do tương quan ấy mỗi số dương ứng với một số thực hoàn toàn xác định, và một số thực ứng với một số dương hoàn toàn xác định. Trong tương quan này, phép cộng những số thực ứng với phép nhân những số dương. Nếu

$$r = \log p; \qquad r' = \log p'; \qquad r'' = \log p''$$

thì một trong hai hệ thức sau sẽ kéo theo hệ thức kia:

$$r + r' = r''; \qquad pp' = p''.$$

Công thức bên trái và bên phải cùng nói lên một vấn đề bằng hai ngôn ngữ khác nhau. Gọi một trong những số tương ứng là bản dịch của số kia, thí dụ *gọi số thực r (logarit p) là bản dịch của p, còn p là nguyên bản của r (chúng ta có thể đổi vai trò của những từ "bản dịch" và "nguyên bản", nhưng một khi đã lựa chọn rồi thì phải giữ vững sự lựa chọn đó. Trong thuật ngữ này, phép cộng là bản dịch của phép nhân, phép trừ là bản dịch của phép chia. 0 là bản dịch của 1; luật giao hoán và kết hợp của phép cộng các số thực là bản dịch của những quy luật ấy đối với phép nhân của các số dương. Bản dịch tất nhiên là khác với nguyên bản, nhưng nó là bản dịch đúng đắn theo ý nghĩa sau đây: từ một tương quan bất kì giữa các phần tử của nguyên bản chúng ta có thể rút ra quan hệ tương ứng giữa những phần tử tương ứng của bản dịch và ngược lại. Theo thuật ngữ của nhà toán học, thì bản dịch đúng đó - tức là một sự tương ứng một-một bảo tồn các quy luật của một số tương quan nào đó - được gọi là phép đẳng cấu. Phép đẳng cấu là một hình thức hoàn toàn rõ ràng của phép tương tự.*

3) Một loại thứ ba của sự tương tự hoàn toàn rõ ràng là phép đồng cấu (hay phép đẳng cấu đa trị), theo thuật ngữ của các nhà toán học. Trình bày những thí dụ một cách chi tiết hay mô tả chính xác khái niệm ấy thì sẽ mất khá nhiều thì giờ. Chúng ta có thể cố gắng hiểu sự mô tả gần đúng sau đây. Phép đồng cấu là một loại bản dịch rút gọn một cách có hệ thống. Nguyên bản không những chỉ được dịch sang ngôn ngữ khác, mà còn được rút gọn sao cho sau khi dịch và rút gọn, kết quả cuối cùng được co đều lại một cách hệ thống còn một nửa, hay một phần ba, hay một phần bất kì của đoạn văn ban đầu. Qua phép rút gọn này các chi tiết có thể mất đi, nhưng tất cả các quan hệ có trong nguyên bản đều được thể hiện trong bản dịch và được bảo tồn trong một phạm vi hẹp hơn.

20. Những đoạn văn trích dẫn

"Thử xét xem ta có thể thành công trong việc nghĩ ra một bài toán tổng quát khác nào đó, bao gồm bài toán cho trước và dễ giải quyết hơn không. Chẳng hạn, như khi tìm tiếp tuyến tại một điểm đã cho, ta hình dung rằng chỉ cần tìm đường thẳng cắt đường cong đã cho ở điểm ấy và ở một điểm khác cách điểm ban đầu một khoảng cho trước. Bài toán này luôn luôn có thể giải được dễ dàng bằng đại số. Và sau khi giải bài toán ấy, chúng ta sẽ tìm thấy tiếp tuyến như là một trường hợp đặc biệt, cụ thể là trường hợp mà khoảng cách cho trước là cực tiểu, thu gọn thành một điểm" (Leibniz).

"Thường xảy ra là, bài toán tổng quát có vẻ dễ hơn bài toán đặc biệt, nếu chúng ta cố gắng giải trực tiếp, trực diện" (Dirichlet, Dedekind).

"[Có thể là có ích] đưa một giống về mọi loài riêng lẻ của nó, và như vậy về những loài không nhiều lắm, nhưng đưa một giống về một loài nhỏ nhất là có lợi hơn" (Leibniz).

"Trong triết học, nghiên cứu những sự giống nhau là rất đúng, ngay cả trong những sự việc rất khác nhau" (Aristote).

"Sự so sánh có một ý nghĩa lớn lao, vì nó quy những mối quan hệ chưa biết về những quan hệ đã biết. Nhận thức đúng đắn, rốt cuộc là nắm được những mối quan hệ. Nhưng chúng ta sẽ hiểu những mối quan hệ chính xác hơn, rõ ràng hơn, khi giữa những trường hợp rất khác nhau và những đối tượng hoàn toàn khác loại, chúng ta nhận thức được những mối quan hệ chung" (Schopenhauer).

Tuy nhiên, bạn không nên quên rằng có hai loại khái quát hoá: một loại tầm thường và một loại có giá trị. Khái quát bằng cách "pha loãng" thì dễ, quan trọng hơn là khái quát hoá bằng "ngưng tụ". Dùng một lượng nước lớn để hoà với một ít rượu vang thì rẻ tiền và dễ dàng. Chế ra một chất tinh khiết, đậm đặc từ những chất thành phần tốt thì khó hơn nhiều nhưng rất quý. Khái quát hoá bằng "ngưng tụ" cô đúc nhiều ý ban đầu có vẻ phân tán rời rạc vào một khái niệm chung có phạm vi rộng lớn. Chẳng hạn như lí thuyết nhóm tổng kết những khái niệm tản mạn trong đại số, trong lí thuyết số, giải tích, hình học, tinh thể học và trong các lĩnh vực khác.

Ngày nay, còn có một loại khái quát hoá theo "mốt" hơn. Loại này "pha chế" những ý kiến tủn mủn bằng một thuật ngữ rất kêu. Tác giả thường thích lấy những ý kiến vụn vặt của một người nào đó, mà chẳng bổ sung thêm quan sát riêng và tránh giải quyết bất kì vấn đề nào, trừ một vài vấn đề do khó khăn của thuật ngữ riêng của mình đề ra.

PHẦN HAI

Tất cả những thí dụ và chú thích của phần thứ hai này đều liên quan với nhau và với giả thuyết §6. Nhiều thí dụ đều trực tiếp hay gián tiếp dựa vào thí dụ 21 dưới đây, mà bạn đọc cần đọc trước tiên.

21. Giả thuyết E

Hãy xét đẳng thức:

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

như là một giả thuyết, và gọi là "giả thuyết E". Cũng như Euler, chúng ta sẽ nghiên cứu giả thuyết này bằng phương pháp quy nạp.

Nghiên cứu một giả thuyết theo phương pháp quy nạp bao gồm việc đối chiếu hiệu quả của nó với các sự kiện. Thường chúng ta sẽ "dự đoán, căn cứ vào E và xác nhận lại". "Dự đoán căn cứ vào E" có nghĩa là rút ra kết *luận từ giả thuyết rằng E là đúng. "Xác nhận" có nghĩa là rút ra kết luận đó mà không cần giả thuyết E. Một sự kiện sẽ gọi là "phù hợp với E" nếu nó có thể suy ra (dễ dàng) từ giả thuyết rằng E là đúng.*

Sau đây chúng ta sẽ coi những yếu tố của giải tích toán học như là đã biết, (về hình thức Euler đã biết đầy đủ những yếu tố giải tích đó trong thời gian ông nêu ra phát minh của mình) kể cả khái niệm chính xác về giới hạn (Euler chưa thể biết một cách rõ ràng khái niệm này). Chúng ta sẽ chỉ dùng những quá trình chuyển tới giới hạn đã được chứng minh (phần lớn là rất đơn giản) mà không đi vào chi tiết của việc chứng minh.

22. *Ta đã biết* $\sin(-x) = -\sin x$. *Sự kiện này có phù hợp với E không?*

23. *Căn cứ vào E, bạn dự đoán và xác nhận giá trị của tích vô hạn:*

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ldots$$

24. *Căn cứ vào E bạn hãy dự đoán và xác nhận giá trị của tích vô hạn:*

$$\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{16}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{4}{n^2}\right)$$

25. *So sánh các thí dụ 23 và 24 và khái quát hoá.*

26. *Căn cứ vào E, bạn hãy dự đoán giá trị của tích vô hạn :*

$$\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdot\frac{6.8}{7.7}\cdot\frac{8.10}{9.9}\ldots$$

27. *Chứng minh rằng giả thuyết E tương đương với:*

$$\frac{\sin \pi z}{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{(z+n)\ldots(z+1)z(z-1)\ldots(z-n)}{(-1)^n(n!)^2}$$

28. *Ta biết rằng* $\sin(x+\pi) = -\sin x$. *Sự kiện đó có phù hợp với E không?*

29. *Phương pháp (§6.2) đưa đến giả thuyết:*

$$\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

Bạn hãy chứng tỏ rằng điều đó không chỉ là tương tự với E, mà còn là hệ quả của giả thuyết E.

30. *Ta biết rằng* $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

Sự kiện đó có phù hợp với E không?

31. *Căn cứ vào E, bạn hãy dự đoán và xác nhận giá trị của tích vô hạn:*

$$\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\left(1-\frac{4}{49}\right)\ldots$$

32. *Căn cứ vào E, bạn hãy dự đoán và xác nhận giá trị của tích vô hạn:*

$$\left(1-\frac{16}{1}\right)\left(1-\frac{16}{9}\right)\left(1-\frac{16}{25}\right)\left(1-\frac{16}{49}\right)\ldots$$

33. *So sánh các thí dụ 31 và 32 và tổng quát hoá.*

34. *Ta biết rằng* $\cos(-x) = \cos x$. *Sự kiện đó có phù hợp với E không?*

35. *Ta biết rằng* $\cos(x+\pi) = -\cos x$. *Sự kiện đó có phù hợp với E không?*

36. *Từ E hãy rút ra tích ứng với* $1-\sin x$, *giả thuyết mà ta đã nói ở* §6.4.

37. *Từ E suy ra rằng:*

$$\cot x = \ldots + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \ldots$$

38. *Từ E suy ra rằng:*

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots\right) -$$

$$-\frac{2x^2}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+\ldots\right) -$$

$$-\frac{2x^3}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{64}+\frac{1}{729}+\ldots\right) - \ldots$$

và tìm tổng của những chuỗi vô hạn xuất hiện ở các hệ số của vế phải.

39. *Từ E suy ra rằng:*

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) = -2\left[\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{x+\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{x-\frac{5\pi}{2}}+\frac{1}{x+\frac{7\pi}{2}}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots\right)+\frac{8x}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{16x^2}{\pi^3}\left(1-\frac{1}{27}+\frac{1}{125}-\frac{1}{343}+\ldots\right)+\frac{32x^3}{\pi^4}\left(1+\frac{1}{81}+\frac{1}{625}+\ldots\right)+\ldots$$

và tìm tổng của những chuỗi vô hạn xuất hiện ở các hệ số của biểu thức sau cùng.

40. *Chứng minh rằng:*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots=\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\ldots\right)$$

từ đó suy ra kết luận thứ hai về tổng của chuỗi ở vế trái của đẳng thức.

41. *(Tiếp theo). Hãy thử tìm kết luận thứ ba, biết rằng:*

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}.\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{x^5}{5}+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{x^7}{7}+\ldots$$

và với $n = 0, 1, 2,\ldots$ ta có:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}x^{2n+1}dx = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = \frac{2.4\ldots 2n}{3.5\ldots(2n+1)}$$

42. *(Tiếp theo). Hãy thử tìm kết luận thứ tư, biết rằng:*

$$(\arcsin x)^2 = x^2+\frac{2}{3}.\frac{x^4}{2}+\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{x^6}{3}+\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{x^8}{4}+\ldots$$

và với $n = 0, 1, 2,\ldots$ ta có:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{-1/2}x^{2n}dx = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}t\,dt = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{2n-1}{2n}.\frac{\pi}{2}.$$

43. *Euler đã dùng công thức:*

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots=\ln x.\ln(1-x)+\frac{x(1-x)}{1}+\frac{x^2+(1-x)^2}{4}+\frac{x^3+(1-x)^3}{9}+\ldots$$

đúng với $0 < x < 1$, để tính tổng của chuỗi ở vế trái.

a) Chứng minh công thức đó.

b) Giá trị nào của x là thuận tiện nhất trong việc tính tổng của chuỗi ở vế trái?

44. Sự phản đối và bước đầu đi đến chứng minh

Không có cơ sở để hiển nhiên công nhận rằng $\sin x$ có thể khai triển thành những thừa số bậc nhất tương ứng với các nghiệm của phương trình $\sin x = 0$.

Nhưng ngay cả công nhận điều đó thì chúng ta vẫn còn có chỗ chưa đồng ý: Euler chưa chứng minh được rằng:

$$0,\quad \pi,\quad -\pi,\quad 2\pi,\quad -2\pi,\quad 3\pi,\quad -3\pi,\ldots$$

là tất cả các nghiệm của phương trình ấy. Chúng ta có thể tin rằng không có những nghiệm thực nào khác (bằng cách nghiên cứu đường cong $y = \sin x$). Nhưng Euler chưa hề loại trừ khả năng tồn tại của những nghiệm phức.

Daniel Bernoulli (con trai của Jorhann, 1700 - 1788) đã đưa ra ý kiến phản đối này. Euler đã trả lời bằng cách nghiên cứu

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

trong đó $P_n(x) = \frac{1}{2i}\left[\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n - \left(1-\frac{ix}{n}\right)^n\right]$.

Hãy chứng minh rằng $P_n(x)$ không có nghiệm phức.

45. Bước thứ hai đi đến chứng minh

Giả sử rằng số n trong thí dụ 44 là số lẻ. Khai triển $P_n(x)/x$ thành thừa số; thừa số thứ k, ứng với mỗi k cố định ($k = 1, 2, 3...$) sẽ dẫn tới $1 - \frac{x}{k^2\pi^2}$ *khi n tiến tới ∞.*

46. Sự nguy hiểm của tương tự

Nói tóm lại, sự tương tự giữa hữu hạn và vô hạn đã đưa Euler đến một phát minh vĩ đại. Tuy nhiên, con đường đó cũng dễ dẫn đến khả năng sai lầm. Dưới đây là một thí dụ nói lên sự nguy hiểm đó trong một bài toán thuộc một phạm vi nhỏ.

Chuỗi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + ... = l$$

hội tụ. Ta có thể ước lượng một cách đại khái tổng l nhờ hai số hạng đầu tiên:

$$\frac{1}{2} < l < 1$$

Và

$$2l = \frac{2}{1} - \frac{1}{1} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4}.$$

Trong chuỗi này, chỉ có một số hạng với mẫu số chẵn cho trước (số hạng này âm), nhưng có hai số hạng với số mẫu lẻ cho trước (một dương, một âm). Kết hợp những số hạng có chung mẫu số lẻ, ta có:

$$\frac{2}{1} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - ... - \frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - ... = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... = l.$$

Nhưng $2l \neq 1$ vì $1 \neq 0$. Sai lầm ở đâu và làm thế nào để tránh lặp lại sai lầm đó?

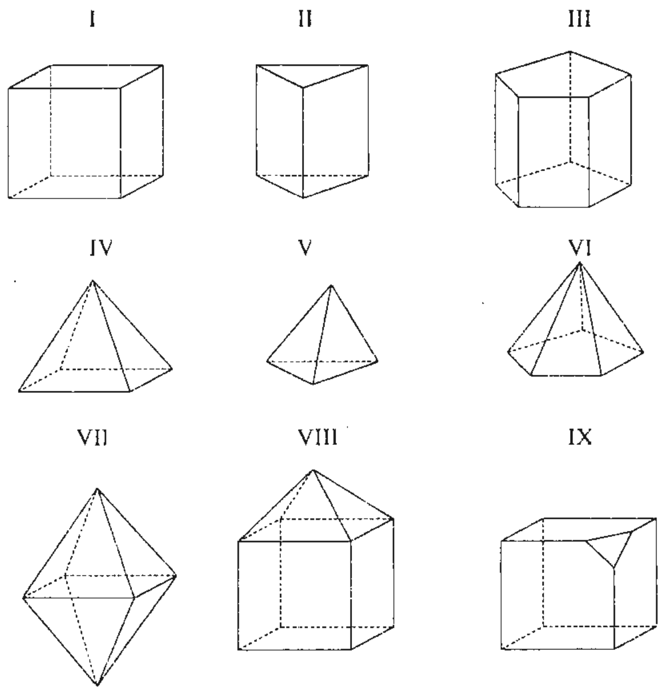
Chương III
QUY NẠP TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. Các hình đa diện

"Một hình đa diện phức tạp có nhiều mặt, nhiều góc và nhiều cạnh". Hầu hết những người mới học hình học không gian đều dễ có một nhận xét lờ mờ kiểu ấy. Nhưng ít người cố gắng thật sự đi sâu vào nhận xét đó để tìm hiểu chính xác hơn. Đúng ra là nên phân biệt rõ ràng những đại lượng tham gia vào và đặt ra một câu hỏi xác định nào đó. Vì thế, ta sẽ kí hiệu số mặt, số đỉnh và số cạnh của một hình đa diện theo thứ tự là M, Đ và C (chữ đầu của những từ tương ứng) và nêu một câu hỏi rõ ràng như sau: "Phải chăng bao giờ cũng đúng là số mặt luôn luôn tăng khi số đỉnh tăng? Có nhất thiết là M tăng cùng với Đ không?".

Bước đầu thì chúng ta chưa thể làm gì hơn là nghiên cứu những thí dụ, những hình đa diện cụ thể. Chẳng hạn, đối với hình lập phương (hình I trên hình 3.1):

$$M = 6, \qquad Đ = 8, \qquad C = 12.$$



Hình 3.1. *Các hình đa diện*

Hay đối với hình lăng trụ đáy tam giác (hình II trên hình 3.1):

$$M = 5, \qquad Đ = 6, \qquad C = 9.$$

Sau khi đã chọn phương hướng đó, tất nhiên chúng ta sẽ nghiên cứu và so sánh những hình khác nhau, thí dụ như những hình trên hình 3.1. Ngoài hình I và II đã nhắc đến ở trên, hãy xét tiếp: hình lăng trụ đáy ngũ giác (III), hình chóp đáy là hình vuông, tam giác, ngũ giác (IV, V, VI), hình bát diện (VII), hình "chiếc tháp có mái" (VIII, hình chóp đặt ở mặt trên của một hình lập phương - đáy của chiếc tháp), hình "lập phương cụt" (IX). Hãy cố gắng tưởng tượng và hình dung lần lượt những hình đó một cách tương đối rõ ràng để tính số mặt, số đỉnh và số cạnh. Các số tìm ra được ghi ở bảng sau đây:

Hình đa diện		M	Đ	C
I.	Hình lập phương	6	8	12
II.	Hình lăng trụ tam giác	5	6	9
III.	Hình lăng trụ ngũ giác	7	10	15
IV.	Hình chóp tứ giác	5	5	8
V.	Hình chóp tam giác	4	4	6
VI.	Hình chóp ngũ giác	6	6	10
VII.	Hình bát diện	8	6	12
VIII.	Hình "chiếc tháp"	9	9	16
IX.	Hình "lập phương cụt"	7	10	15

Về hình thức, hình 3.1. giống một phòng triển lãm khoáng vật học, còn bảng trên đây, trong một chừng mực nào đó, giống quyển sổ tay của nhà vật lí học ghi kết quả các thí nghiệm của mình.

Chúng ta nghiên cứu và so sánh các hình, các số trong bảng trên, cũng như nhà khoáng vật học hay nhà vật lí học đã dày công nghiên cứu những mẫu, những số liệu đã chọn trước của mình. Bây giờ thì chúng ta đã có một cái gì đó trong tay để có thể trả lời câu hỏi nêu ra ban đầu: "Đ cùng tăng với M chăng?". Thực ra không phải như vậy. Khi so sánh hình lập phương và bát diện (I và VII) chúng ta thấy rằng một hình có nhiều đỉnh hơn, còn hình kia thì có nhiều mặt hơn. Như vậy là ý định ban đầu của ta nhằm thiết lập một quy luật chung là không thành công.

Tuy nhiên, chúng ta có thể thử với những cái khác. C và M cùng tăng chăng? Để có thể trả lời một cách có hệ thống những câu hỏi đó, hãy lập lại bảng trên đây. Sắp xếp lại các hình đa diện sao cho C tăng dần khi đọc các cột lần lượt từ trên xuống dưới.

Hình đa diện	M	Đ	C
Hình chóp tam giác	4	4	6
Hình chóp tứ giác	5	5	8
Hình lăng trụ tam giác	5	6	9
Hình chóp ngũ giác	6	6	10
Hình lập phương	6	8	12
Hình bát diện	8	6	12
Hình lăng trụ ngũ giác	7	10	15
Hình "lập phương cụt"	7	10	15
Hình "chiếc tháp"	9	9	16

Nghiên cứu những số liệu đã được sắp xếp thuận tiện hơn trên đây, chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng không có một quy luật nào như đã giả định ở trên cả. Khi C tăng từ 15 đến 16, Đ giảm từ 10 xuống 9. Mặt khác, khi chuyển từ hình bát diện sang hình lăng trụ ngũ giác, C tăng từ 12 đến 15 nhưng M giảm từ 8 xuống 7. Cả M và Đ đều không luôn luôn tăng cùng với C.

Một lần nữa, chúng ta lại không tìm được một quy luật tổng quát. Tuy nhiên, chúng ta không muốn thừa nhận rằng những ý kiến ban đầu của chúng ta là hoàn toàn sai lầm. Dưới một dạng khác nào đó, ý kiến của chúng ta có thể đúng. Đúng là cả M và Đ không cùng tăng với C, nhưng xét toàn bộ thì có lẽ là chúng tăng. Nghiên cứu kĩ bảng trên, chúng ta có thể nhận thấy rằng M và Đ "gộp chung" lại thì tăng dần: M + Đ *tăng dần* khi chúng ta đọc các cột từ trên xuống. Và sau đó đột nhiên chúng ta có thể thấy quy luật chính xác hơn, trong cả bảng thì:

$$M + Đ = C + 2.$$

Hệ thức này được xác nhận với tất cả 9 trường hợp ghi trong bảng. Hình như khó có thể tin được rằng một quy luật rắc rối như vậy hoá ra lại quá đơn giản. Như vậy là chúng ta đã đi đến một giả thuyết rằng không phải chỉ trong các trường hợp đã được xét, mà trong *mọi hình đa diện, số mặt cộng với số đỉnh đều bằng số cạnh cộng thêm 2.*

2. Sự tiếp xúc củng cố đầu tiên

Nhà sinh học, được đào tạo tốt, sẽ không thừa nhận quá dễ dàng một giả thuyết. Ngay cả với một giả thuyết có vẻ có lí và đã được xác nhận trong một số trường hợp, ông ta vẫn nghi ngờ và thu thập những quan sát mới hay tìm tòi những thí dụ mới để kiểm tra. Chúng ta cũng có thể làm vậy. Chúng ta sẽ nghiên cứu những hình đa diện khác, đếm số mặt, số đỉnh và số cạnh của chúng rồi so sánh M + Đ với C + 2. Những số đó có thể bằng nhau hoặc không. Thật là thú vị nếu làm sáng tỏ được điều đó trong thực tế.

Xem hình 3.1 chúng ta có thể nhận thấy rằng chúng ta đã nghiên cứu ba trong số những hình đa diện đều: hình lập phương, tứ diện và bát diện (I, V, VII). Hãy nghiên cứu hai hình còn lại là hình 20 mặt đều và hình 12 mặt đều.

Hình 20 mặt đều có 20 mặt là tam giác. Vậy M = 20. Hai mươi tam giác có $3 \times 20 = 60$ cạnh, đồng thời mỗi cạnh của hình 20 mặt lại là một cạnh chung cho hai tam giác. Do đó, số cạnh bằng $\frac{60}{2} = 30 = C$. Tương tự như vậy, chúng ta có thể tìm Đ. Ta biết rằng xung quanh mỗi đỉnh của hình 20 mặt có 5 mặt. Hai mươi tam giác có $3 \times 20 = 60$ góc. Cứ 5 góc có chung một đỉnh. Vậy số đỉnh bằng

$$\frac{60}{5} = 12 = Đ.$$

Hình 12 mặt đều có 12 mặt là ngũ giác, ngoài ra xung quanh mỗi đỉnh có ba ngũ giác. Từ đó, cũng như trên, ta kết luận:

$$M = 12; \quad Đ = \frac{12 \times 5}{3} = 20; \quad C = \frac{12 \times 5}{2} = 30.$$

Bây giờ có thể thêm vào bảng của chúng ta ở cuối mục 1 (chương III) hai dòng nữa:

Hình đa diện	M	Đ	C
Hình 20 mặt	20	12	30
Hình 12 mặt	12	20	30

Giả thuyết M + Đ = C + 2 được xác nhận trong cả hai trường hợp ấy.

3. Thêm những tiếp xúc củng cố

Nhờ những sự xác nhận ở trên, giả thuyết của chúng ta trở nên có lí hơn, nhưng bây giờ đã có thể chứng minh được chưa? – Chưa có cách nào.

Trong tình huống như vậy, nhà sinh học thận trọng có thể cảm thấy bằng lòng với thành công của những thí nghiệm của mình, nhưng tiếp tục nghĩ ra nhiều thí nghiệm nữa. Và bây giờ chúng ta phải làm thí nghiệm với hình đa diện nào đây?

Vấn đề là ở chỗ, cho đến nay giả thuyết của chúng ta đã được xác nhận đến mức mà nếu có thêm một trường hợp được xác nhận nữa thì niềm tin của chúng ta chỉ được củng cố thêm một ít, có thể là ít đến mức không đáng để chọn thêm một hình đa diện và đếm các bộ phận của nó. Liệu chúng ta có thể tìm được một phương hướng vững chắc hơn để kiểm nghiệm giả thuyết của chúng ta không?

Nghiên cứu hình 3.1, chúng ta có thể nhận thấy rằng các hình ở hàng trên đều cùng một loại: chúng đều là hình lăng trụ. Các hình ở hàng thứ hai cũng thế: đều là hình chóp. Giả thuyết của chúng ta đã đúng với ba hình lăng trụ và ba hình chóp biểu diễn trên hình 3.1; liệu nó có đúng với tất cả các hình lăng trụ và hình chóp không?

Nếu một hình lăng trụ có n mặt bên thì nó có tất cả $n + 2$ mặt, $2n$ đỉnh và $3n$ cạnh. Một hình chóp với n mặt bên có tất cả $n + 1$ mặt, $n + 1$ đỉnh và $2n$ cạnh.

Như vậy, có thể thêm hai dòng vào bảng ở chương III, cuối mục 1.

Hình đa diện	M	Đ	C
Hình chóp có n mặt bên	$n + 1$	$n + 1$	$2n$
Hình lăng trụ có n mặt bên	$n + 2$	$2n$	$3n$

Giả thuyết M + Đ = C + 2 của chúng ta được nghiệm đúng thêm không những chỉ đối với một hoặc hai hình đa diện mà đối với hai họ vô hạn các hình đa diện.

4. Một sự thử thách gian khổ

Nhận xét cuối cùng đã làm cho niềm tin của chúng ta đối với giả thuyết tăng lên gấp bội nhưng tất nhiên đó chưa phải là chứng minh. Vậy chúng ta phải làm gì? Có nên tiếp tục thử với những trường hợp riêng khác không? Giả thuyết của chúng ta hình như đã đứng vững qua những thử thách đơn giản. Vì vậy, cần phải đưa nó vào một cuộc thử thách gian khổ, khắt khe, có những cơ hội tốt để bác bỏ nó.

Hãy điểm lại một lần nữa tập hợp các hình đa diện của chúng ta (hình 3.1), ở đấy có những hình lăng trụ (I, II, III), những hình chóp (IV, V, VI), những hình đa diện đều (I, V, VII). Nhưng chúng ta đã kiểm tra tất cả những hình thuộc loại đó ở đây rồi còn gì nữa? Hình 3.1 còn có "chiếc tháp" (VIII) mà ta có bằng cách dựng một "mái nhà" ở đáy trên của hình lập phương. Đến đây, ta cảm thấy có khả năng khái quát hoá. Thay hình lập phương bằng một hình đa diện bất kì, chọn một mặt bất kì của hình đa diện đó và dựng trên mặt đó một "mái nhà". Giả sử hình đa diện ban đầu có M mặt, Đ đỉnh và C cạnh; và giả sử mặt đã chọn có n cạnh. Chúng ta thêm vào mặt này một hình chóp có n mặt bên và được một hình đa diện mới. Hình đa diện mới có "mái nhà" này có bao nhiêu mặt, đỉnh và cạnh? Qua phép dựng đó, một mặt đã mất đi (mặt đã chọn) đồng thời xuất hiện n mặt mới (n mặt bên của hình chóp) do đó hình đa diện mới có $M - 1 + n$ mặt. Tất cả các đỉnh của hình đa diện cũ đều là đỉnh của hình đa diện mới, nhưng có một đỉnh mới được thêm vào (đỉnh của hình chóp). Và hình đa diện mới có $C + n$ cạnh.

Ta tổng kết: hình đa diện ban đầu có M mặt, Đ đỉnh và C cạnh, hình đa diện mới với "mái nhà" có:

$$M + n - 1 \text{ mặt, } Đ + 1 \text{ đỉnh, } C + n \text{ cạnh.}$$

Điều đó có phù hợp với giả thuyết của chúng ta nữa không?

Nếu hệ thức $M + Đ = C + 2$ được thoả mãn thì tất nhiên hệ thức:

$$(M + n - 1) + (Đ + 1) = (C + n) + 2$$

cũng được thoả mãn. Nói cách khác, nếu giả thuyết của chúng ta được nghiệm đúng với các hình đa diện ban đầu thì nó cũng nghiệm đúng với hình đa diện mới có "mái nhà".

Giả thuyết của chúng ta cũng đúng trong việc "dựng thêm mái nhà" và như vậy là nó đã qua một cuộc thử thách rất gian khổ. Từ những hình đa diện đã nghiên cứu, bằng cách lặp lại việc "dựng mái nhà" chúng ta có thể thu được vô số hình đa diện khác nhau, và như đã chứng minh, giả thuyết của chúng ta đúng với tất cả những hình đa diện đó.

Nhân thể hãy xét thêm: hình "lập phương cụt", hình cuối cùng ở hình 3.1, mở ra một con đường nghiên cứu tương tự. Thay hình lập phương "cụt" bằng hình đa diện bất kì, bằng cách cắt một đỉnh chọn tuỳ ý. Giả sử hình đa diện đầu tiên có M, Đ và C theo thứ tự là số mặt, số đỉnh và số cạnh, và giả sử n là số cạnh tách khỏi đỉnh đã chọn. Cắt đỉnh này ra, chúng ta thêm vào một mặt mới (có n cạnh), n cạnh mới, và cũng thế n đỉnh mới, nhưng lại mất một đỉnh. Tóm lại, hình đa diện "cụt" mới có $M + 1$; $Đ + n - 1$; $C + n$ theo thứ tự là số mặt, số đỉnh và số cạnh. Bây giờ thì từ $M + Đ = C + 2$ sẽ suy ra:

$$(M + 1) + (Đ + n - 1) = (C + n) + 2.$$

nghĩa là giả thuyết của chúng ta đủ vững vàng để chịu đựng một "phép cắt". Và như thế là nó đã trải qua thêm một cuộc thử thách gian khổ nữa.

Tất nhiên, ta coi những nhận xét trên đây là những bằng chứng hùng hồn thuyết minh cho giả thuyết của chúng ta. Từ đó còn có thể khai thác thêm một điều khác nữa: gợi ý đầu tiên của phép chứng minh. Xuất phát từ một số hình đa diện đơn giản nào đó nghiệm đúng giả thuyết, chẳng hạn như hình tứ diện hoặc hình lập phương, bằng cách dựng "mái nhà" hoặc "cắt cụt" chúng ta có thể thu được vô số những hình đa diện khác nhau và giả thuyết của chúng ta cũng đúng với những hình đa diện đó. Chúng ta có thể thu được *tất cả* các hình đa diện chăng? Và nếu thế thì chúng ta đã chứng minh xong! Ngoài ra, còn có thể có những phép khác, giống như phép "cắt cụt" hay "dựng mái nhà", cũng bảo tồn các hệ thức đã nêu ở trên.

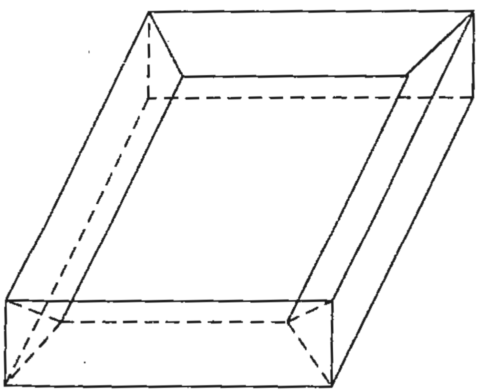
5. Xác nhận và xác nhận

Quá trình tư duy của một nhà sinh học có kinh nghiệm, về cơ bản không khác quá trình tư duy của một người bình thường, nhưng nó cẩn thận hơn. Một số điều quan sát được sẽ dẫn một người bình thường và cả nhà bác học bởi một giả thuyết và cả hai người đều chú ý đến những trường hợp cuối cùng nhất, xem chúng có phù hợp với giả thuyết hay không. Những trường hợp phù hợp sẽ làm cho giả thuyết đáng tin cậy hơn, còn những trường hợp ngược lại thì sẽ bác bỏ nó. Và ở đây bắt đầu có sự khác biệt: những người bình thường có xu hướng thích tìm những trường hợp thuộc loại thứ nhất hơn, còn nhà bác học thì lại thích tìm những trường hợp thuộc loại thứ hai. Nguyên nhân là ở chỗ mỗi một người đều có ít nhiều tự phụ - người bình thường cũng như nhà bác học - nhưng mỗi người đều đánh giá mình một cách khác nhau. Một "Ngài" nào đó không thích thú nhận - ngay cả với mình - rằng mình sai lầm. Vì thế "Ngài" không thích những trường hợp mâu thuẫn, "Ngài" tránh những trường hợp ấy, thậm chí mỗi khi gặp chúng thì "Ngài" có khuynh hướng giải thích thế nào đó để đi đến kết luận là chúng không mâu thuẫn với giả thuyết. Nhà bác học thì ngược lại, sẵn sàng thừa nhận giả thuyết sai, nhưng lại không thích để lại những vấn đề chưa được giải quyết. Và đó chính vì trường hợp phù hợp chưa giải quyết trọn vẹn vấn đề, còn trường hợp mâu thuẫn thì giải quyết vấn đề. Nhà bác học đang cố gắng giải quyết trọn vẹn vấn đề, sẽ tìm những trường hợp phủ nhận giả thuyết và khả năng đó càng lớn thì ông ta càng thú vị. Cần phải thấy một nhân tố quan trọng. Nếu gặp một trường hợp đe doạ phủ nhận giả thuyết, nhưng rốt cuộc nó lại phù hợp với giả thuyết thì qua cuộc thử thách, giả thuyết đó lại càng vững vàng hơn. Càng nguy hiểm bao nhiêu, càng vinh quang bấy nhiêu. Sự thử thách càng gian khổ thì việc công nhận giả thuyết càng vẻ vang, việc xác nhận nó bằng thực nghiệm càng mạnh mẽ. Có thí dụ này và thí dụ khác, có xác nhận này và xác nhận khác. Thí dụ *xác suất bác bỏ giả thuyết lớn* bao giờ cũng đưa giả thuyết đến gần cách giải quyết hơn là một thí dụ mà xác suất đó nhỏ hơn. Điều đó giải thích tại sao nhà bác học lại thích loại trên hơn.

Bây giờ có thể nghiên cứu bài toán cụ thể của chúng ta xem có thể ứng dụng những nhận xét trên đây vào việc "nghiên cứu bằng thực nghiệm các hình đa diện" như thế nào? Mỗi trường hợp mới, xác nhận hệ thức M + Đ = C + 2 làm ta càng thêm tin rằng hệ thức ấy nói chung đúng. Nhưng ta đã quá mệt vì một loạt các xác nhận đơn điệu. Một trường hợp không khác mấy so với những trường hợp đã nghiên cứu trước, nếu nó phù hợp với giả thuyết thì tất nhiên là cũng làm tăng niềm tin của ta, nhưng chỉ tăng rất ít. Thật vậy, trước khi thử ta có thể tin rằng trường hợp đang khảo sát sẽ tiến hành y như những trường hợp trước vì chúng chỉ khác nhau rất ít. Điều ta mong muốn không chỉ là một sự xác nhận khác, mà là một sự xác nhận kiểu khác. Thật vậy, điểm lại những giai đoạn nghiên cứu khác nhau của ta (§2, 3 và 4) ta có thể nhận thấy rằng mỗi một giai đoạn đó cho một kiểu xác nhận "ưu việt" hơn những kiểu trước. Ở mỗi giai đoạn giả thuyết được xác nhận đối với *những trường hợp phong phú hơn so với giai đoạn trước*.

6. Một trường hợp rất đặc biệt

Vì tính muôn màu muôn vẻ là quan trọng nên ta hãy tìm một hình đa diện nào đó khác hẳn với những hình đa diện mà ta đã nghiên cứu từ trước đến nay. Chẳng hạn, ta có thể nghĩ đến một hình đa diện là cái khung ảnh. Hãy lấy một thanh gỗ dài 3 cạnh, chặt nó ra làm 4 đoạn. Nối các đầu mút của 4 đoạn ấy với nhau thành một hình đa diện hình cái khung. Trên hình 3.2 cái khung được đặt trên bàn sao cho các cạnh của thanh gỗ lúc chưa chặt đều nằm ngang. Có 4 lần 3 tức là 12 cạnh nằm ngang, và cũng có 4 lần 3 cạnh không nằm ngang. Vậy, số cạnh tất cả là C = 12 + 12 = 24.



Hình 3.2. *Đa diện có dạng hình xuyến*

Tính số mặt và số đỉnh, chúng ta thấy:

$$M = 4 \times 3 = 12; \ Đ = 4 \times 3 = 12.$$

Bây giờ thì M + Đ = 24 khác với C + 2 = 26. Hoá ra giả thuyết của chúng ta sai trong trường hợp hoàn toàn tổng quát!

Tất nhiên, ta có thể nói rằng ta không định thiết lập giả thuyết trong mức độ tổng quát như vậy, rằng ta luôn luôn chỉ xét những hình đa diện lồi, hay như người ta thường nói những hình đa diện "có dáng hình cầu", chứ không phải những hình đa diện "có dạng hình xuyến" như cái khung ảnh. Nhưng đó chỉ là cái cớ thoái thác. Thực tế, ta phải thay đổi quan điểm của mình và cải biến điều đã khẳng định lúc đầu. Rất có thể là đòn đau đối với ta, rốt cuộc lại là một điều may mắn đưa ta đến chỗ điều chỉnh và phát biểu giả thuyết chính xác hơn. Nhưng dù sao thì vẫn là một đòn đánh vào lòng tin của ta.

7. Tương tự

Thí dụ về "những cái khung ảnh" đã "giết chết" giả thuyết của ta ở dạng đầu tiên, nhưng giả thuyết có thể nhanh chóng "hồi sinh" dưới dạng đã được điều chỉnh (có thể hi vọng là hoàn hảo hơn) với những hạn chế quan trọng. Hình tứ diện là một hình lồi. Hình lập phương cũng thế, tập hợp các hình đa diện trên hình 3.1 cũng thế. Và tất cả những hình đa diện nhận được từ những hình đa diện trên bằng việc "cắt cụt" hay "dựng mái nhà" (dựng những mái nhà khác bằng phẳng trên các mặt khác nhau của hình đa diện) đều là lồi cả. Trong mọi trường hợp đều không thể có nguy cơ là những phép đó biến một hình đa diện lồi hay "có dạng hình cầu" thành một hình đa diện "có dạng hình xuyến".

Nhận xét được điều đó, ở đây ta có một bổ sung rất cần thiết. Ta sẽ giả thuyết rằng, trong một hình đa diện lồi bất kì, bao giờ cũng thoả mãn hệ thức M + Đ = C + 2 giữa số mặt, số đỉnh và số cạnh (có thể là ta thích hạn chế lại trong trường hợp những hình đa diện "dạng hình cầu", nhưng ta không muốn dừng lại để xác định ý nghĩa của thuật ngữ này).

Giả thuyết này có nhiều khả năng là đúng. Nhưng dẫu sao ta cũng chưa dám tin và ta hãy tìm một sự củng cố mới nào đó cho giả thuyết của mình. Ta cũng không thể hi vọng nhiều vào những sự xác nhận sau này. Hình như là ta đã dùng hết những tư liệu rõ ràng nhất. Tuy nhiên, ta còn có thể hi vọng phép tương tự có thể giúp ta trong việc này. Có một trường hợp tương tự nào đó đơn giản hơn có thể có ích đối với ta không?

Tương tự với hình đa diện là hình đa giác. Hình đa giác là một phần của mặt phẳng cũng như hình đa diện là một phần của không gian. Hình đa giác có Đ đỉnh (đỉnh của các góc của nó) và C cạnh. Rõ ràng là Đ = C.

Nhưng hệ thức đó - đúng với những hình đa giác lồi - tỏ ra quá đơn giản và ít soi sáng cho hệ thức phức tạp hơn, hệ thức mà ta nghĩ là đúng đối với những hình đa diện lồi.

$$M + Đ = C + 2$$

Nếu thật sự quan tâm đến vấn đề đang nghiên cứu thì tất nhiên ta sẽ thử làm cho những hệ thức ấy gần với nhau hơn. Có một phương pháp sắc sảo để thực hiện điều đó. Trước hết, ta phải sắp xếp những số khác nhau theo một thứ tự tự nhiên. Hình đa diện là ba chiều, mặt của nó (những đa giác) là hai chiều, cạnh của nó là một chiều, và đỉnh của nó (điểm) dĩ nhiên là không chiều. Bây giờ có thể viết lại các đẳng thức trên, bằng cách xếp các đại lượng theo thứ tự tăng dần về số chiều.

Hệ thức của hình đa giác sẽ viết dưới dạng:

$$Đ - C + 1 = 1.$$

Viết như thế thì có thể so sánh được với hệ thức của hình đa diện dưới dạng:

$$Đ - C + M - 1 = 1.$$

Đơn vị ở vế trái của đẳng thức đối với *hình đa giác* ứng với yếu tố *hai chiều* duy nhất là phần bên trong của đa giác. Đơn vị ở vế trái của đẳng thức đối với *hình đa diện* ứng với yếu tố *ba chiều* duy nhất là phần bên trong của hình đa diện. Các số ở vế trái của đẳng thức, theo thứ tự dùng để đếm các yếu tố không chiều, một chiều, hai chiều và ba chiều, đều được sắp xếp theo thứ tự tự nhiên với các dấu + và – xen kẽ. Trong cả hai trường hợp, vế phải của hai đẳng thức đều giống nhau; sự tương tự hình như là hoàn toàn. Vì rằng đẳng thức đầu rõ ràng là đúng đối với các hình đa giác, nên sự tương tự đó làm tăng niềm tin của ta vào đẳng thức thứ hai đối với các hình đa diện, mà ta đã phát biểu trong giả thuyết.

8. Phân hoạch không gian

Bây giờ, ta chuyển sang một thí dụ khác về phép quy nạp trong không gian.

Ở thí dụ trên, ta đã xuất phát từ nhận xét chung, trong chừng mực nào đó, còn lờ mờ. Bây giờ điểm xuất phát của ta là một bài toán cụ thể, với những nét rõ ràng. Ta sẽ nghiên cứu một bài toán đơn giản, nhưng hơi lạ, của hình học không gian: 5 mặt phẳng chia không gian thành bao nhiêu phần?

Nếu 5 mặt phẳng đó song song với nhau thì câu trả lời sẽ rất đơn giản: rõ ràng là không gian được chia ra làm 6 phần. Song, trường hợp này quá đặc biệt. Nếu những mặt phẳng của ta ở vào "vị trí tổng quát" sao cho không có hai mặt phẳng nào trong số đó song song với nhau thì không gian sẽ được chia ra nhiều hơn 6 phần. Sau khi đã đạt được điểm chủ yếu đó, cần phải diễn đạt bài toán một cách chính xác hơn: *5 mặt phẳng ở vị trí tổng quát chia không gian làm bao nhiêu phần?*

Ta hiểu khái niệm "vị trí tổng quát" một cách hoàn toàn trực giác những mặt phẳng ấy ở vị trí sao cho giữa chúng không có những liên hệ đặc biệt, chúng độc lập với nhau và được chọn một cách tuỳ ý. Có thể dễ dàng giải thích đầy đủ thuật ngữ này bằng một định nghĩa hình thức, nhưng ta không làm như vậy vì hai lí do. Một là: không cần thiết phải trình bày quá hình thức. Hai là: để lại một khái niệm ít nhiều chưa thật rõ ràng, thái độ của ta gần giống thái độ của một nhà sinh học là người thường phải bắt đầu bằng một vài khái niệm chưa thật rõ ràng, rồi trong quá trình tiến lên sẽ giải thích chúng.

9. Biến dạng bài toán

Hãy tập trung chú ý vào bài toán của ta. Người ta cho 5 mặt phẳng ở vị trí tổng quát. Chúng chia không gian thành một số phần nhất định (ta có thể nghĩ đến miếng pho mát được cắt thành những mẩu bằng 5 nhát cắt phẳng của một con dao sắc). Chúng ta cần phải tìm số phần đó (miếng pho mát bị chia làm mấy phần?).

Thật khó có thể nhìn thấy ngay những phần của không gian do 5 mặt phẳng chia cắt ra (có thể là không "nhìn" thấy được. Dù sao đi nữa cũng không nên gắng sức tưởng tượng, tốt hơn là hãy cố gắng suy nghĩ. Trí tuệ có thể dẫn bạn đi xa hơn là trí tưởng tượng). Nhưng tại sao phải là 5 mặt phẳng? Tại sao lại không phải là một số mặt phẳng bất kì? 4 mặt phẳng chia cắt không gian thành mấy phần? 3 mặt phẳng, 2 mặt phẳng hay là chỉ một mặt phẳng chia không gian làm mấy phần?

Ở đây, ta đã đi đến những trường hợp mà trực giác hình học có thể đạt tới được. Một mặt phẳng rõ ràng là chia không gian ra làm hai phần. Hai mặt phẳng chia không gian ra làm ba phần nếu chúng song song. Nhưng ta phải loại bỏ trường hợp đặc biệt này. Hai mặt phẳng ở vị trí tổng quát sẽ cắt nhau và chia không gian làm 4 phần. Ba mặt phẳng ở vị trí tổng quát sẽ chia không gian ra làm 8 phần. Để hiểu thật rõ trường hợp cuối cùng, khó hơn này, có thể hình dung một toà nhà, trong đó có hai bức tường thẳng đứng cắt nhau và một cái trần nằm ngang có xà ngang chống đỡ. Xung quanh giao điểm của cái trần và hai bức tường thì cái trần này vừa là sàn của 4 cái phòng ở tầng trên, vừa là trần của 4 phòng khác ở tầng dưới.

10. Khái quát hoá, đặc biệt hoá và tương tự

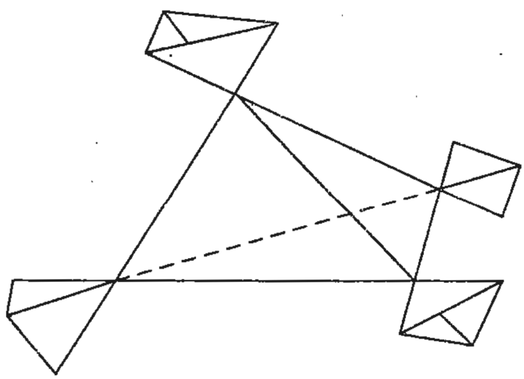
Bài toán của ta có liên quan tới 5 mặt phẳng. Nhưng đáng lẽ nghiên cứu 5 mặt phẳng thì ta đã bắt đầu nghiên cứu 1, 2 và 3 mặt phẳng. Ta đã phí thời giờ chăng? Hoàn toàn không. Ta vừa nghiên cứu những trường hợp tương tự đơn giản hơn, vừa chuẩn bị cho bài toán của ta. Ta đã thử sức ta trong những trường hợp đơn giản hơn này, tìm hiểu những khái niệm cần thiết và đã làm quen với những loại bài tập mà ta phải gặp.

Chính con đường đã dẫn ta đến những bài toán tương tự đơn giản hơn này, là con đường điển hình đáng được chú ý. Trước tiên, ta đi từ trường hợp 5 mặt phẳng đến trường hợp một số bất kì mặt phẳng, chẳng hạn, n mặt phẳng: ta đã thực hiện khái quát hoá. Sau đó, từ n mặt phẳng ta trở lại 4 mặt phẳng, 3 mặt phẳng, 2 mặt phẳng rồi chỉ 1 mặt phẳng, tức là trong bài toán tổng quát ta đặt $n = 4, 3, 2, 1$: ta đã tiến hành đặc biệt hoá.

Những bài toán phân hoạch không gian bằng ba mặt phẳng *tương tự* với bài toán đặt ra đầu tiên về 5 mặt phẳng. Như vậy là ta đã đi đến sự tương tự theo con đường thông thường: *mở đầu là khái quát hoá, tiếp theo là đặc biệt hoá.*

11. Một bài toán tương tự

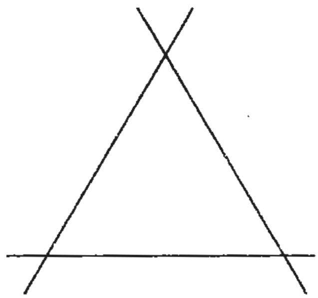
Sự việc sẽ như thế nào đối với trường hợp 4 mặt phẳng? Bốn mặt phẳng ở vị trí tổng quát xác định những phần không gian khác nhau; trong số đó có một phần được giới hạn bằng 4 mặt hình tam giác và gọi là hình tứ diện (xem hình 3.3). Hình tượng này làm ta nhớ đến 3 đường thẳng ở vị trí tổng quát trong mặt phẳng. Chúng xác định những phần mặt phẳng khác nhau, trong số đó có một phần được giới hạn bởi ba đoạn thẳng và gọi là tam giác (xem hình 3.4). Số phần cần tìm là 7.



Hình 3.3. *Phân chia không gian bằng 4 mặt phẳng*

Ta đã tìm được cách giải bài toán tương tự đơn giản hơn; nhưng có thể dùng cách này giải bài toán ban đầu không?

Có thể được, nếu ta khéo phân tích sự tương tự của hai hình này. Ta cần xét sự phân hoạch mặt phẳng bằng ba đường thẳng, sao cho sau đó có thể áp dụng vào việc nghiên cứu sự phân hoạch không gian bằng 4 mặt phẳng.



Hình 3.4. *Phân chia mặt phẳng bằng ba đường thẳng*

Như vậy, ta xét lại lần nữa sự phân hoạch mặt phẳng bằng ba đường thẳng tạo nên một tam giác. Một phần thì hữu hạn là phần bên trong của tam giác. Còn những phần vô hạn thì có chung với tam giác hoặc là một cạnh (cả thảy có 3 phần như thế) hoặc là một đỉnh (cũng có ba phần như vậy). Vậy, có tất cả là:

$$1 + 3 + 3 = 7 \text{ (phần)}.$$

Bây giờ hãy nghiên cứu sự phân hoạch không gian bằng 4 mặt phẳng tạo thành một hình tứ diện. Những phần vô hạn có thể có với hình tứ diện hoặc là một mặt chung (yếu tố hai chiều của biên giới, có 4 phần như thế) hoặc là một đỉnh chung (yếu tố 0 chiều của biên giới, có 4 phần như thế, xem hình 3.3). Vậy, có tất cả là $1 + 4 + 6 + 4 = 15$ (phần).

Ta đã tìm thấy kết quả này nhờ tương tự và đã sử dụng phép tương tự một cách điển hình, cơ bản. Đầu tiên ta nghĩ ra một bài toán tương tự dễ hơn và giải bài toán đó. Sau đó, để giải bài toán ban đầu khó hơn (về hình tứ diện) ta lại dùng bài toán tương tự dễ hơn (về tam giác) làm mô hình; khi giải bài toán khó hơn ta đã theo mẫu giải bài toán dễ hơn. Nhưng trước khi làm điều đó, ta phải nghiên cứu lại cách giải bài toán dễ hơn. Ta đã xây dựng lại, tu chỉnh cách giải đó theo một mẫu mới, dễ bắt chước.

Chú ý đến một bài toán tương tự dễ hơn, giải bài toán đó và tu chỉnh cách giải sao cho nó có thể trở thành mô hình, để cuối cùng giải được bài toán đầu tiên bằng cách lần theo mô hình vừa tạo ra, đó là một phương pháp mà người chưa quen tưởng như là loanh quanh, nhưng thường được áp dụng trong việc nghiên cứu khoa học, toán học cũng như các khoa học khác.

12. Một loạt bài toán tương tự

Tuy nhiên, bài toán đầu tiên của ta vẫn chưa được giải. Đó là sự phân hoạch không gian bằng 5 mặt phẳng. Bài toán tương tự đối với hai chiều là bài toán nào? Sự phân hoạch bằng 5 đường thẳng chăng? Hay 4 đường thẳng? Đối với ta, có lẽ tốt hơn là nghiên cứu bài toán này trong dạng tổng quát nhất: phân hoạch không gian bằng n mặt phẳng và phân hoạch mặt phẳng bằng n đường thẳng. Những đường thẳng dùng để chia ấy, tất nhiên là phải ở vào vị trí tổng quát (không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường thẳng nào đồng quy).

Nếu ta quen dùng phép tương tự hình học, thì có thể tiến thêm một bước nữa và nghiên cứu việc chia đường thẳng bằng điểm phân biệt. Mặc dù bài toán đó có vẻ khá tầm thường, nó cũng có thể có ích cho ta. Ta dễ dàng thấy rằng, một đường thẳng bị một điểm chia thành 2 phần, bị 2 điểm chia thành 3 phần, 3 điểm chia thành 4 phần và tổng quát thì n điểm chia đường thẳng thành $n + 1$ phần khác nhau.

Một lần nữa, nếu ta quen chú ý đến những trường hợp giới hạn, thì ta có thể xem toàn bộ không gian, toàn bộ mặt phẳng hay đường thẳng như là sự phân hoạch do 0 phần tử phân hoạch tạo ra.

Hãy thành lập bảng sau đây ghi tất cả những kết quả mà ta đã thu được từ trước đến giờ:

Số phần tử dùng để chia cắt	**Số phần khi chia**		
	không gian bằng những mặt phẳng	**mặt phẳng bằng những đường thẳng**	**đường thẳng bằng những điểm**
0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15		5
...	...	...	...
n			$n + 1$

13. Đôi khi giải nhiều bài toán lại dễ hơn là chỉ giải một bài

Ta đã chuẩn bị giải bài toán liên quan với việc phân hoạch không gian bằng 5 mặt phẳng. Ta chưa giải bài ấy nhưng đã nêu ra nhiều bài toán mới. Mỗi khoảng trống trong bảng của ta ứng với một vấn đề chưa được giải quyết.

Cách tích luỹ nhiều bài toán mới, đối với người chưa quen, có vẻ như là ngớ ngẩn. Nhưng một số kinh nghiệm giải toán có thể dạy ta rằng việc giải đồng thời nhiều bài toán đôi khi dễ hơn chỉ giải một trong những bài ấy, nếu phần lớn bài toán đó phối hợp với nhau chặt chẽ, còn chính bản thân một bài toán thì đơn độc. Bây giờ bài toán ta nêu ban đầu nổi lên như một trong các bài toán chưa giải được. Nhưng vấn đề là các bài toán chưa giải được này hợp thành một loại: chúng được sắp xếp cẩn thận, nhóm lại với nhau, có sự *tương tự* chặt chẽ với nhau và với một số bài toán đã giải rồi. Nếu so sánh tình hình hiện tại của vấn đề của chúng ta - đã được xếp đúng vào loại các vấn đề tương tự - với tình hình lúc đầu, khi nó còn hoàn toàn cô lập thì, tự nhiên, ta có khuynh hướng tin tưởng rằng sự việc đã khá lên một chút.

14. Giả thuyết

Ta sẽ quan sát những kết quả kê trên bảng như nhà sinh học quan sát tập hợp các mẫu vật thu thập được. Bảng này khêu gợi óc tìm tòi, khả năng khảo sát của ta. Liệu ta có thể tìm thấy được mối liên hệ nào đó, quy luật nào đó không?

Nhìn cột thứ hai (chia không gian bằng các mặt phẳng) ta có thể nhận thấy tổng dãy 1, 2, 4, 8,... một quy luật rõ ràng sau đây: ta có các luỹ thừa liên tiếp của 2. Nhưng thất vọng làm sao! Số hạng tiếp sau trên cột này là 15 chứ không phải là 16 như ta mong đợi. Điều dự đoán của ta không hay lắm và ta phải tìm cách khác.

Rút cuộc, ta có thể ngẫu nhiên cộng hai số nằm kề nhau và nhận thấy tổng của chúng trên bảng. Ta chú ý đến mối liên hệ độc đáo này; ta sẽ có mỗi số ở trong bảng nếu ta cộng hai số khác: một số ở ngay phía trên nó, số kia cũng ở hàng trên nhưng về bên phải. Chẳng hạn, các số:

$$\begin{array}{ll} 8 & 7 \\ 15 & \end{array}$$

liên hệ với nhau bởi hệ thức $8 + 7 = 15$.

Mối liên hệ đặc sắc này là chiếc chìa khoá kì diệu. Có lẽ khó mà tin rằng, mối liên hệ này - mối liên hệ mà có thể quan sát thấy trên toàn bộ bảng đã được tính toán - lại có thể là kết quả của sự ngẫu nhiên đơn thuần.

Như vậy, kết quả trên đây đưa ta đến ý nghĩ rằng, quy luật vừa nêu có thể áp dụng được cả ra ngoài phạm vi những quan sát của ta, những số chưa tìm thấy cũng tuân theo đúng quy luật như những số đã tính được. Và như thế là ta đi đến giả thuyết là quy luật mà ta ngẫu nhiên tìm được luôn luôn đúng.

Nếu đúng như thế thì ta có thể giải được bài toán nêu ra ban đầu bằng cách cộng những số nằm kề nhau, ta có thể kéo dài bảng của ta cho đến số mà ta muốn tìm:

0	1	1	1
1	2	2	2
2	4	4	3
3	8	7	4
4	15	**11**	5
5	**26**		

Trong bảng trên đây xuất hiện hai số mới, được in đậm và tính được bằng các phép cộng: 11 = 7 + 4; 26 = 15 + 11. Nếu điều ta dự đoán là đúng thì số phần của không gian do 5 mặt phẳng ở vị trí tổng quát phân ra phải là 26. Hình như ta đã giải xong bài toán đề ra, hoặc ít nhất ta cũng tìm được giả thuyết có lí, mà tất cả các khảo sát thu thập được từ trước đến nay đã xác nhận.

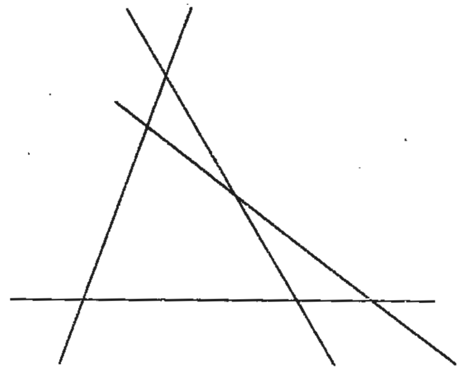
15. Dự đoán và xác nhận

Trên đây ta đã tiến hành theo đúng cách thức điển hình của hoạt động của một nhà sinh học. Nếu nhà sinh học quan sát thấy một quy luật lạ thường nào đó, không thể quy một cách hợp lí vào sự ngẫu nhiên đơn thuần được, thì ông ta giả định rằng quy luật này cũng áp dụng được ngoài phạm vi những khảo sát thực tế của mình. Việc thừa nhận giả thuyết này thường là bước quyết định trong sự nghiên cứu quy nạp.

Bước tiếp theo có thể là sự dự đoán. Trên cơ sở những quan sát đã tiến hành từ trước và sự phù hợp của chúng với quy luật đã giả định, nhà sinh học dự đoán kết quả của sự quan sát tiếp sau của mình... Nhiều điều phụ thuộc vào kết quả của bước quan sát tiếp theo này. Điều dự đoán đúng hay sai? Ta cũng đang ở trong tình trạng như vậy. Ta đã thấy, hoặc đúng hơn, đã dự đoán rằng số miền của mặt phẳng do 4 đường thẳng ở vị trí tổng quát chia ra là 11. Có đúng thế không? Giả thuyết của ta đúng chăng?

Nghiên cứu hình vẽ phác (hình 3.5) ta có thể tin chắc rằng điều ta dự đoán là đúng: số 11 thực sự là số đúng. Điều xác nhận đó về dự đoán của ta là những lí lẽ quy nạp có lợi cho quy tắc mà ta dựa vào để nêu dự đoán. Vượt qua thử thách một cách thắng lợi, giả thuyết của ta trở nên vững chắc hơn.

16. Một lần nữa và tốt hơn



Hình 3.5. *Mặt phẳng bị chia cắt bởi 4 đường thẳng*

Ta tin rằng số 11 đó là đúng sau khi xem hình vẽ và đếm số phần mặt phẳng được chia ra. Đúng, 4 đường thẳng ở vị trí tổng quát, rõ ràng chia mặt phẳng thành 11 phần. Nhưng ta hãy làm lại điều đó lần nữa và làm tốt hơn. Ta đếm lại những phần ấy bằng cách nào đó. Hãy đếm lại các phần và đếm sao cho ta hoàn toàn tin rằng ta không nhầm, không sai và không mắc lừa do vị trí đặc biệt của các đường thẳng.

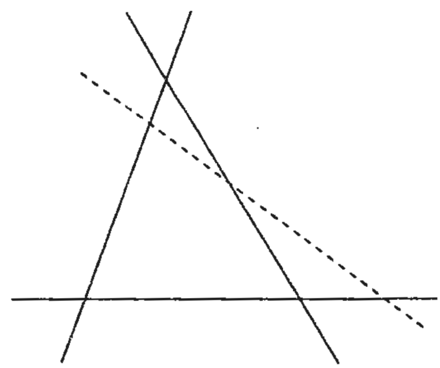
Ta bắt đầu từ 3 đường thẳng xác định đúng 7 phần trong mặt phẳng. Ta có một số cơ sở để tin rằng 4 đường thẳng xác định 11 phần. Vì sao lại thêm đúng 4 phần? Tại sao ở đây lại xuất hiện số 4? Vì sao vạch thêm đường thẳng mới lại làm tăng thêm đúng 4 phần?

Trên hình 3.5 ta tách ra một đường thẳng và vẽ nó bằng nét đứt (hình 3.6). Về hình dạng, hình mới không khác hình cũ mấy, nhưng nó biểu thị một quan điểm rất khác. Ta coi đường thẳng mới tách ra này như một đường mới còn ba đường kia là cũ.

Những đường cũ chia mặt phẳng thành 7 phần. Có gì xảy ra khi ta thêm đường thẳng mới vào?

Đường thẳng mới được vẽ một cách tuỳ ý phải cắt mọi đường thẳng cũ, và hơn nữa, cắt tại những điểm khác nhau. Do đó có 3 điểm. Ba điểm này chia đường thẳng mới thành 4 đoạn. Mỗi đoạn chia từng phần cũ của mặt phẳng thành hai phần mới. Bốn đoạn thẳng của đường thẳng mới này tạo nên 8 phần mới và bỏ đi 4 phần cũ thì số phần được tăng lên đúng bằng 4. Đó chính là nguyên nhân vì sao số các phần bây giờ lại tăng thêm đúng 4 so với trước:

$$4 + 7 = 11$$



Hình 3.6. *Chuyển từ 3 lên 4 đường thẳng*

Cách tìm số 11 này có sức thuyết phục và làm sáng tỏ bài toán mà ta đang xét. Bây giờ ta có thể tìm thấy cơ sở của tính quy luật mà ta đã quan sát và đã dựa vào đó để nêu ra dự đoán về số 11. Ta bắt đầu ngờ là có một sự giải thích nào đó ẩn sau các sự kiện, và lòng tin của ta vào sự đúng đắn của tính quy luật quan sát được đã tăng lên gấp bội.

17. Quy nạp gợi ý cho diễn dịch: trường hợp riêng gợi ý cho chứng minh tổng quát

Ta luôn luôn chỉ ra một cách cặn kẽ rằng cách suy luận của ta và tác phong của nhà sinh học rất giống nhau. Ta đã bắt đầu từ một bài toán riêng giống như nhà sinh học bắt đầu từ những quan sát rắc rối. Lưu ý đến những trường hợp riêng dễ hiểu, rồi quan sát những điều tương tự có ích, ta đã tiến dần lên bằng cách thử và khái quát hoá. Ta đã thử dự đoán một vài quy luật và đã mắc sai lầm, rồi lại cố gắng làm lại và đã làm tốt hơn. Ta đã nêu được quy luật chung, quy luật này đã được củng cố bằng toàn bộ những kết quả thí nghiệm mà ta có khả năng thực hiện. Đem áp dụng thử vào một trường hợp riêng ta thấy rằng nó phù hợp với quy luật dự đoán. Từ đó, ta càng thêm tin vào quy luật nêu ra. Cuối cùng, ta đã lưu ý đến cơ sở của quy luật chung này, giải thích nó và lòng tin của ta tăng thêm rất nhiều. Công việc nghiên cứu của một nhà sinh học có thể cũng trải qua đúng những giai đoạn như vậy.

Tuy nhiên đường đi của nhà toán học so với nhà sinh học vẫn có khác biệt rất lớn. Quan sát là quyền lực cao nhất đối với nhà sinh học chứ không phải đối với nhà toán học. Sự xác nhận, dựa trên nhiều thí dụ chọn hay, là phương pháp duy nhất để củng cố một quy luật nêu ra trong các khoa học tự nhiên. Điều xác nhận trên cơ sở của nhiều thí dụ chọn tốt có thể rất có ích vì có tác dụng khuyến khích, nhưng không thể chứng minh được quy luật nêu ra trong toán học. Hãy xét trường hợp riêng cụ thể của ta. Việc khảo sát các trường hợp riêng khác nhau và so sánh chúng đã dẫn ta đến chỗ nêu ra quy tắc tổng quát mà từ đó suy ra được rằng lời giải của bài toán lúc đầu là số 26. Phải chăng mọi điều quan sát và điều xác nhận như vậy là đủ để chứng minh quy tắc tổng quát đó? Hay nó có thể chứng minh được trường hợp riêng rằng số 26 thực ra là lời giải bài toán của ta không? Không chút nào! Đối với nhà toán học với những tiêu chuẩn chặt chẽ thì số 26 chỉ là một điều dự đoán sáng sủa, còn quy luật chung đang còn nghi vấn kia thì chưa thể được chứng minh bằng bất kì bao nhiêu xác nhận thực nghiệm cả. Phép quy nạp chỉ đưa đến những kết quả có thể đúng chứ không khi nào chứng minh được các kết quả đó.

Tuy nhiên có thể nhận thấy rằng việc nghiên cứu quy nạp có thể có ích trong toán học về một mặt khác mà ta chưa kể đến. Việc quan sát kĩ lưỡng các trường hợp riêng dẫn ta đến kết quả toán học tổng quát, cũng có thể *gợi ý về cách chứng minh* kết quả ấy. Từ việc nghiên cứu chăm chú một trường hợp riêng có thể nảy ra một nhận thức chung.

Thực tế ta đã gặp điều đó trong mục trước. Quy tắc tổng quát mà ta đã tìm ra nhờ phương pháp quy nạp, liên quan đến hai số kế tiếp trong bảng của ta, thí dụ như 7 và 4, và liên quan đến tới tổng của chúng, tổng đó trong trường hợp này bằng 11. Hơn nữa ở mục trước ta đã thấy rõ ý nghĩa hình học của các số 7, 4 và 11 trong bài toán của ta và trong đó ta đã hiểu tại sao lại có hệ thức $7 + 4 = 11$. Trên thực tế, ta đã nói tới việc chuyển từ 3 đường thẳng chia mặt phẳng sang 4 đường thẳng như thế. Song các số 3 và 4 không có một giá trị đặc biệt nào, ta có thể chuyển hoàn toàn như vậy từ một số nguyên bất kì tới số tiếp theo, từ n sang $n + 1$. Trường hợp riêng đã xét có thể cho ta hình dung được về toàn bộ tình huống (thí dụ 2.10). Tôi xin dành cho bạn đọc được hoàn toàn tự do rút ra khái niệm chung từ quan sát riêng ở mục trước. Trong đó bạn đọc có thể chứng minh hình thức đối với quy tắc đã nêu ra bằng quy nạp, ít ra là đến mức có liên quan tới hai cột sau cùng.

Tuy vậy, để thực hiện phép chứng minh, ta không những phải xét việc phân hoạch mặt phẳng bằng những mặt phẳng. Song ta hi vọng rằng nếu ta hiểu rõ được việc phân hoạch mặt phẳng, thì phép tương tự sẽ giúp ta hiểu rõ việc phân hoạch không gian. Một lần nữa, tôi xin dành cho bạn đọc niềm vui khai thác được từ phép tương tự những điều có ích.

18. Lại các giả thuyết

Vấn đề phân hoạch mặt phẳng và không gian vẫn chưa kết thúc. Ta còn phải hoàn thành một vài phát minh nhỏ nữa, và những phát minh này hoàn toàn có thể thực hiện nhờ suy luận quy nạp. Ta dễ dàng đi đến những phát minh đó bằng cách quan sát tỉ mỉ và đối chiếu có ý thức các thí dụ riêng.

Ta có thể hi vọng tìm ra *công thức* tính số các phần tạo nên trong sự phân hoạch mặt phẳng bằng n đường thẳng ở vị trí tổng quát. Trên thực tế ta đã có công thức trong trường hợp tương tự đơn giản nhất: n điểm khác nhau chia đường thẳng ra $n + 1$ phần. Công thức tương tự này, các trường hợp riêng đã được ghi trong bảng của ta, và quy tắc tổng quát (mà hầu như ta đã chứng minh) được tìm ra bằng quy nạp cùng với tất cả các kết quả thu được cho đến nay, có thể giúp ta giải bài toán này. Tôi không đi vào chi tiết. Tôi chỉ đơn thuần nêu lên lời giải mà ta có thể tìm thấy, dựa vào các điều vừa gợi ý, theo các cách khác nhau.

n điểm khác nhau trên một đường thẳng chia đường thẳng đó ra $n + 1$ phần; n đường thẳng, ở vị trí tổng quát, chia mặt phẳng thành

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} \text{ phần.}$$

Bạn đọc có thể tìm ra công thức sau cùng hay ít nhất cũng có thể thử lại công thức đó trong các trường hợp đơn giản nhất với $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Tôi cũng dành cho bạn đọc niềm vui khám phá ra công thức thứ ba cùng loại, đối với các phần của không gian. Khi tìm phát minh nhỏ này, bạn đọc sẽ có thêm kinh nghiệm về suy luận quy nạp trong các vấn đề toán học và sẽ cảm thấy là phép tương tự đã giúp ta rất nhiều trong khi giải các bài toán lớn hoặc nhỏ.

NHỮNG THÍ DỤ VÀ CHÚ THÍCH VỀ CHƯƠNG III

Công thức $M + Đ = C + 2$, mà ta đã nêu lên giả thuyết về nó ở §1, là của Euler. Ta gọi đó là "công thức Euler", xem nó như là một giả thuyết và sẽ nghiên cứu nó trong các thí dụ 1 - 10 bằng các phương pháp khác nhau, khi thì bằng quy nạp và có khi là với mục đích tìm ra cách chứng minh. Ta sẽ trở lại công thức đó ở các thí dụ 21 - 30 và 31 - 41. Trước khi đề cập đến bất kì một thí dụ nào trong các mục đó, bạn hãy đọc các thí dụ tương ứng 21 và 31.

1. *Hai hình chóp, nằm về hai phía của mặt đáy chung, tạo thành một "hình chóp kép". Hình bát diện là một trường hợp riêng của hình chóp kép, mà mặt đáy chung là hình vuông. Công thức Euler có đúng cho mọi hình chóp kép không?*

2. *Hãy lấy một hình đa diện lồi có M mặt, Đ đỉnh và C cạnh, chọn ở trong hình đa diện đó một điểm O (trọng tâm của nó chẳng hạn), dựng một hình cầu tâm O và chiếu hình đa diện lên mặt cầu, qua tâm O. Phép chiếu này biến M mặt thành M vùng (hay M "nước") trên mặt cầu, biến mỗi cạnh thành một đường biên giới của hai "nước" láng giềng và mỗi đỉnh thành một "góc" hay là biên giới chung của ba hay nhiều "nước" ("góc của ba nước" hay "góc của bốn nước", v.v...). Phép chiếu này làm cho các đường biên giới có một bản chất đặc biệt đơn giản (cung của các vòng tròn lớn) nhưng dĩ nhiên là, đối với việc phân chia mặt cầu thành những nước, thì công thức Euler còn đúng hay không, điều đó không phụ thuộc vào hình dạng chính xác của các đường biên giới, việc biến dạng liên tục các đường biên giới không ảnh hưởng gì đến các số M, Đ và C.*

1) Kinh tuyến là nửa đường tròn lớn nối hai cực Nam và Bắc. Vĩ tuyến là giao tuyến của mặt cầu và mặt phẳng song song với xích đạo, m kinh tuyến *và p vĩ tuyến chia mặt cầu ra M "nước". Tính M, Đ và C. Công thức Euler còn đúng không?*

2) Phép chiếu hình bát diện từ tâm của nó lên mặt cầu là một trường hợp đặc biệt của tình huống đã mô tả ở 1). Giá trị của m và p?

3. *Sự ngẫu nhiên cũng có một vai trò nào đó trong các phát minh. Phát minh bằng quy nạp dĩ nhiên là phụ thuộc vào tài liệu khảo sát. Trong §1 ta đã gặp một số hình đa diện, nhưng ta cũng có thể gặp những hình đa diện khác một cách ngẫu nhiên. Có lẽ là ta đã không bỏ sót các hình đa diện đều, nhưng ta có thể đưa ra một bảng kê sau:*

Hình đa diện	*M*	*Đ*	*C*
Hình tứ diện	4	4	6
Hình lập phương	6	8	12
Hình bát diện	8	6	12
Hình lăng trụ ngũ giác	7	10	15
Hình chóp kép đáy ngũ giác	10	7	15
Hình 12 mặt	12	20	30
Hình 20 mặt	20	12	30

Bạn có thấy một quy luật nào không?

Bạn có thể giải thích được quy luật đó không?

Nó liên quan như thế nào với công thức Euler?

4. *Bạn hãy khái quát hoá quan hệ giữa 2 hình đa diện quan sát được trong bảng ở thí dụ 3.*

(Quan hệ mô tả trong lời giải của thí dụ 2, trong 2) là "hẹp" và "tỉ mỉ". Tuy nhiên, bạn hãy lấy một hình lập phương và một hình bát diện, tô đỏ các cạnh của một hình và tô xanh các cạnh của hình kia rồi chiếu chung từ một tâm chung P lên mặt cầu, như đã mô tả ở thí dụ 2. Sau đó hãy khái quát hoá).

5. *Đã có thể chứng minh được công thức Euler trong trường hợp đặc biệt đối với những hình đa diện lồi mà các mặt đều là tam giác. Tại sao?* /§4/.

6. *Đã có thể chứng minh được công thức Euler trong trường hợp đặc biệt đối với những hình đa diện lồi mà các đỉnh đều là đỉnh của các góc tam diện. Tại sao?* /§4/.

7. *Khi chứng minh công thức Euler, ta có thể giới hạn trong những hình phẳng. Thật vậy, hãy tưởng tượng rằng, M – 1 mặt của hình đa diện làm* *bằng bìa cứng và một mặt thì làm bằng thuỷ tinh, gọi mặt đó là "cửa sổ". Bạn hãy nhìn phía trong của hình đa diện qua cửa sổ và để mắt gần cửa sổ, sao cho có thể thấy hết phần bên trong của hình đa diện. (Điều đó sẽ không thực hiện được nếu hình đa diện không phải là lồi). Bạn có thể thể hiện những cái nhìn thấy trên một hình phẳng, vẽ lên tấm kính cửa sổ, bạn sẽ thấy cửa sổ phân chia thành những đa giác nhỏ hơn. Trong sự phân chia đó có N_2 đa giác, N_1 đường thẳng biên giới (một số ở ngoài, một số khác ở trong) và N_0 đỉnh.*

1) Hãy biểu diễn N_0, N_1, N_2 qua M, Đ và C.

2) Nếu M, Đ và C thoả mãn công thức Euler thì N_0, N_1, N_2 thoả mãn công thức nào?

8. *Một hình chữ nhật có chiều dài l cm và chiều rộng m cm: l và m là những số tự nhiên. Chia hình chữ nhật ra $l \times m$ hình vuông bằng nhau bằng những đường thẳng song song với các cạnh của nó.*

1) Biểu diễn N_0, N_1, N_2 (định nghĩa ở thí dụ 7) qua l và m.

2) Trong trường hợp này hệ thức ở thí dụ 7.2 có đúng không?

9. *Các thí dụ 5 và 7 dẫn đến ý nghĩ là cần khảo sát việc phân chia một tam giác thành N_2 tam giác với $N_0 - 3$ đỉnh ở trong tam giác được phân chia. Tính tổng các góc của N_2 tam giác ấy theo hai cách khác nhau, bạn có thể chứng minh công thức Euler.*

10. *§7 đưa đến ý nghĩ mở rộng công thức Euler vào trường hợp bốn chiều, hay nhiều chiều hơn nữa. Làm thế nào để có thể thực hiện việc mở rộng ấy một cách cụ thể? Có thể hình dung rõ ràng việc mở rộng như thế nào?*

Thí dụ 7 chứng tỏ rằng trường hợp hình đa diện có thể đưa về việc phân chia một đa giác phẳng. Phép tương tự gợi ý cho ta rằng trường hợp bốn chiều có thể đưa về việc phân chia một hình đa diện, trong không gian ba chiều mà ta nhìn thấy được. Nếu chúng ta muốn vận dụng phép quy nạp, thì chúng ta phải nghiên cứu những thí dụ về việc phân chia ấy. Tương tự với thí dụ 8 có thí dụ sau đây. Một cái hộp (tức là hình hộp chữ nhật) có các kích thước là l, m và n, cả ba là số tự nhiên. Chia hộp thành $l \times m \times n$ hình lập phương bằng nhau bằng những mặt phẳng song song với các mặt của nó. Giả sử N_0, N_1, N_2 và N_3 theo thứ tự là số đỉnh, số cạnh, số mặt và số hình đa diện (của hình lập phương) do việc phân chia tạo nên.

1) Hãy biểu diễn N_0, N_1, N_2 *và* N_3 *qua l, m và n.*

2) Có một hệ thức nào tương tự với đẳng thức 2) trong lời giải của thí dụ 7 không?

11. *Giả sử n đường thẳng, ở vị trí tổng quát, chia mặt phẳng ra làm* L_n *phần. Chứng minh rằng:*

$$L_{n+1} = L_n + (n + 1).$$

12. *Giả sử n mặt phẳng ở vị trí tổng quát chia không gian ra* S_n *phần.*

Chứng minh rằng: $S_n + 1 = S_n + L_n$.

13. *Hãy kiểm tra công thức giả định sau đây:*

$$L_n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$$

và $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

14. *Hãy dự đoán công thức đối với* S_n *và chứng tỏ rằng công thức đó đúng với* $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

15. *Trong số 11 phần mặt phẳng do bốn đường thẳng ở vị trí tổng quát phân chia mặt phẳng tạo ra, có mấy phần hữu hạn? mấy phần vô hạn?*

16. *Khái quát hoá bài toán trên đây.*

17. *Trong số 26 phần không gian do năm mặt phẳng phân hoạch không gian tạo ra có mấy phần là vô hạn?*

18. *Năm mặt phẳng đi qua tâm của hình cầu, còn mọi quan hệ khác về vị trí của chúng đều là tổng quát. Chúng chia mặt cầu ra làm mấy phần?*

19. *Năm cặp đường tròn ở vị trí tổng quát và cắt nhau từng đôi chia mặt phẳng ra làm mấy phần?*

20. *Khái quát hoá bài toán trên.*

21. Phép quy nạp: sự thích ứng của trí tuệ, sự thích ứng của ngôn ngữ

Phép quy nạp làm cho trí tuệ chúng ta thích ứng với các sự kiện. Khi so sánh những ý kiến của chúng ta với những điều kiện quan sát thì có thể có sự phù hợp hay không. Nếu có sự phù hợp thì chúng ta cảm thấy tin những ý kiến của mình hơn, nếu không phù hợp thì chúng ta phải thay đổi ý kiến. Sau một số lần biến đổi, ý kiến của chúng ta có thể thích ứng hơn với sự kiện. Những ý kiến đầu tiên của chúng ta về một đối tượng mới hình như bao giờ cũng sai, hay ít ra cũng không hoàn toàn đúng; quá trình quy nạp *sẽ giúp ta điều chỉnh chúng, làm cho chúng thích ứng với thực tại. Những thí dụ của chúng ta đã nêu quá trình đó trong một phạm vi hẹp, nhưng cũng đủ rõ ràng. Trong §1, sau hai hoặc ba giả thuyết sai lầm, rốt cuộc chúng ta đã đến một giả thuyết đúng. Bạn có thể nói rằng chúng ta đã đi đến kết quả đó một cách ngẫu nhiên. "Nhưng những sự ngẫu nhiên như vậy chỉ đến với những người xứng đáng với chúng". Có một lần Lagrange (La-gơ-răng) đã nói như vậy nhân thảo luận về một phát minh tuyệt diệu của Newton.*

Sự thích ứng của trí tuệ có thể ít nhiều ăn khớp với sự thích ứng của ngôn ngữ, nhưng dù sao chúng cũng đi sát nhau như hình với bóng. Sự tiến bộ của thuật ngữ đánh dấu sự tiến bộ của khoa học. Khi các nhà vật lí học bắt đầu nói về "điện", hoặc người thầy thuốc nói về "sự truyền nhiễm" thì những thuật ngữ đó còn tối nghĩa, lờ mờ, lộn xộn. Các thuật ngữ mà các nhà bác học dùng ngày nay như "điện tích", "dòng điện", "truyền nhiễm bằng nấm", "truyền nhiễm bằng siêu vi trùng" hoàn toàn rõ ràng hơn và xác định hơn. Nhưng ở giữa hai thuật ngữ ấy là rất nhiều những sự quan sát, những thí nghiệm thành thục, và cả những phát minh vĩ đại nữa. Phép quy nạp thay đổi thuật ngữ và làm sáng tỏ các khái niệm. Chúng ta có thể minh hoạ cả khía cạnh ấy của quá trình, tức là giải thích các khái niệm một cách quy nạp bằng một ít thí dụ toán học thích hợp. Và đây là một tình huống không phải là ít gặp trong khi nghiên cứu toán học; ta đã phát biểu được định lí, nhưng ta cần làm cho thuật ngữ có nghĩa chính xác hơn để định lí thành đúng một cách thật hoàn hảo. Điều đó, như ta đã thấy, có thể tiến hành thuận lợi nhờ quá trình quy nạp.

Hãy quay lại thí dụ 2 và cách giải nó. Chúng ta đã nói đến "việc phân chia mặt cầu thành những nước" mà chưa đưa ra được định nghĩa hình thức của thuật ngữ đó. Chúng ta hi vọng rằng công thức Euler vẫn còn đúng nếu gọi M, C và Đ theo thứ tự là số nước, số đường biên giới và số góc trong phép phân chia đó. Song, chúng ta lại dựa vào những thí dụ và vào cách mô tả sơ lược mà chưa đưa ra một định nghĩa hình thức nào về M, C và Đ. Ta cần phải chọn những thuật ngữ ấy theo nghĩa chính xác nào để công thức Euler đúng đến mức thật hoàn hảo? Chúng ta sẽ gọi việc phân chia mặt cầu với cách giải thích tương ứng các kí hiệu M, C và Đ là "chuẩn tắc" nếu ở đây hệ thức Euler nghiệm đúng, và "không chuẩn tắc" trong trường hợp ngược lại. Bạn hãy dẫn ra những thí dụ về phân chia có thể giúp chúng ta thấy rõ một sự khác nhau rõ ràng và đơn giản nào đó giữa các trường hợp "chuẩn tắc" và "không chuẩn tắc".

22. *Toàn bộ mặt cầu chỉ tạo nên một nước. Trường hợp ấy có chuẩn tắc không? (Chúng ta hiểu "chuẩn tắc" theo quan điểm của công thức Euler).*

23. *Một đường tròn lớn chia mặt cầu thành hai "nước", bán cầu phía Tây và bán cầu phía Đông. Không chuẩn tắc chăng?*

24. *Hai vĩ tuyến chia mặt cầu thành ba "nước". Chuẩn tắc hay không chuẩn tắc?*

25. *Ba kinh tuyến chia mặt cầu thành ba "nước". Chuẩn tắc hay không chuẩn tắc?*

26. *Gọi phép phân chia mặt cầu bằng m kinh tuyến và p vĩ tuyến là phép "phân chia (m, p)" (xem thí dụ 2.1). Trường hợp giới hạn (0, p) chuẩn tắc hay không chuẩn tắc?*

27. *Trường hợp giới hạn (m, 0) là chuẩn tắc hay không chuẩn tắc? (xem thí dụ 26).*

28. *Những phép chia (m, p) nào (xem thí dụ 26) có thể phát sinh trong quá trình đã được mô tả ở thí dụ 2? (Chiếu hình đa diện lồi lên mặt cầu, sau đó biến dạng liên tục các mặt, giữ nguyên số nước và số đường biên giới xung quanh mỗi nước). Những điều kiện nào giữa m và n đặc trưng những phép phân chia đó?*

29. *Cái gì không chuẩn tắc trong những thí dụ không nghiệm đúng công thức Euler? Những điều kiện hình học nào làm cho ý nghĩa của M, Đ và C chính xác hơn và bảo đảm thoả mãn công thức Euler?*

30. *Hãy dẫn thêm những thí dụ minh hoạ câu trả lời thí dụ 29.*

31. Công trình của Descartes về hình đa diện

Trong những bản thảo mà Descartes để lại có những bút kí ngắn nói về lí thuyết tổng quát của hình đa diện. Bản sao những bút kí đó (do Leibniz sao) đã được phát hiện và công bố năm 1860, hơn 200 năm sau khi Descartes mất. Những bút kí ấy nêu một vấn đề liên quan mật thiết với định lí Euler. Mặc dù các bút kí ấy không thiết lập được định lí đó một cách rõ ràng, nhưng có chứa những kết quả mà từ đó có thể suy ra ngay định lí.

Ta hãy cùng với Descartes xét một hình đa diện lồi. Gọi một góc bất kì của mỗi mặt hình đa diện là góc phẳng và giả sử $\Sigma\alpha$ là tổng tất cả các góc phẳng. Descartes tính $\Sigma\alpha$ bằng hai cách khác nhau, và định lí Euler có thể suy ra ngay bằng cách so sánh hai biểu thức.

Các thí dụ dưới đây sẽ giúp bạn đọc có thể xây dựng lại một số kết luận của Descartes. Chúng ta sẽ dùng các kí hiệu sau:

M_n biểu thị số mặt có n cạnh. $Đ_n$ là số đỉnh chung của n cạnh, thế thì:

$$M_3 + M_4 + M_5 + \ldots = M$$

$$Đ_3 + Đ_4 + Đ_5 + \ldots = Đ.$$

Ta vẫn kí hiệu C là số cạnh của hình đa diện.

32. *Bạn hãy biểu diễn số góc phẳng bằng ba cách khác nhau, lần lượt qua* $M_3, M_4, M_5,...$, *qua* $Đ_3, Đ_4, Đ_5,...$ *và qua* C.

33. *Bạn hãy tính* $\Sigma\alpha$ *đối với 5 hình đa diện đều: hình tứ diện, hình lập phương, hình bát diện, hình 12 mặt và hình 20 mặt.*

34. *Hãy biểu diễn* $\Sigma\alpha$ *qua* $M_3, M_4, M_5,...$

35. *Hãy biểu diễn* $\Sigma\alpha$ *qua* C *và* M.

36. *Các góc khối bù, các đa giác cầu bù.*

Ta sẽ gọi góc đa diện là góc khối.

Cho hai góc khối lồi có cùng một số mặt và một đỉnh chung, và không có thêm một điểm chung nào khác nữa. Mỗi mặt của góc khối này tương ứng với một cạnh của góc khối kia, và mặt này vuông góc với cạnh tương ứng đó. (Quan hệ đó giữa hai góc khối có tính chất tương hỗ: Cạnh e, giao tuyến của hai mặt kề của góc khối thứ nhất, sẽ tương ứng với mặt f góc khối thứ hai, nếu f ' được giới hạn bởi hai cạnh tương ứng với hai mặt nêu ở trên). Hai góc khối có quan hệ tương hỗ ấy gọi là hai góc khối bù (đó không phải là cách gọi thông thường, song hai góc bù theo nghĩa thông thường có thể chuyển dịch về vị trí tương hỗ tương tự). Một trong hai góc khối bù gọi là góc bù của cái kia.

Mặt cầu có bán kính bằng 1 và tâm là đỉnh chung của hai góc khối bù, sẽ cắt chúng theo hai đa giác cầu gọi là hai đa giác cầu bù.

Xét hai đa giác cầu bù. Giả sử $a_1, a_2,..., a_n$ *là các cạnh của đa giác thứ nhất,* $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ *là các góc của nó. A là diện tích và P là chu vi của nó. Và giả sử* $a'_1, a'_2,..., a'_n, \alpha'_1, \alpha'_2,..., \alpha'_n, A', P'$ *là những bộ phận tương ứng của đa giác cầu thứ hai. Thế thì, sau khi đã chọn các kí hiệu một cách thích hợp, ta có:*

$$a_1 + \alpha'_1 = a_2 + \alpha'_2 = ... = a_n + \alpha'_n = \pi$$

$$a'_1 + \alpha_1 = a'_2 + \alpha_2 = ... = a'_n + \alpha_n = \pi.$$

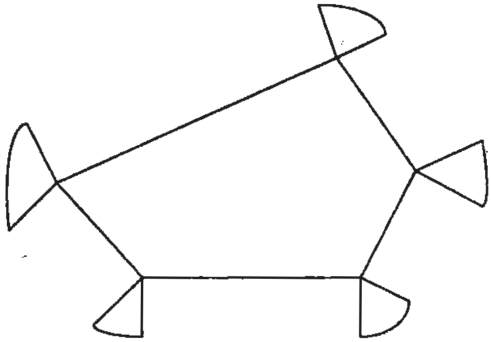
Điều đó thì chúng ta đã biết, và kiểm nghiệm dễ dàng.

Hãy chứng minh rằng:

$$P + A' = P' + A = 2\pi.$$

(Cho biết diện tích một tam giác cầu với các góc là α, β, γ *bằng "sai số mặt cầu";* $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ *(bán kính mặt cầu bằng 1)).*

37. *"Trong một vật thể không gian, tổng các góc khối ngoài bằng 8 góc vuông". Thử diễn đạt nhận xét đó (tìm thấy trong các bút kí của Descartes) thành định lí và chứng minh (xem hình 3.7).*



Hình 3.7. *Các góc ngoài của một hình đa giác*

38. *Bạn hãy biểu diễn $\Sigma\alpha$ qua Đ.*

39. *Bạn hãy chứng minh định lí Euler.*

40. *Nhận xét đầu tiên ở §1 còn mơ hồ nhưng có thể gợi cho chúng ta một vài điều khẳng định chính xác. Đây là một điều khẳng định mà chúng ta chưa nghiên cứu ở §1. "Nếu một trong ba đại lượng M, Đ và C dần tới ∞ thì hai đại lượng kia cũng dần tới ∞".*

Bạn hãy chứng minh các bất đẳng thức sau đây, đúng với mọi hình đa diện lồi, và cho biết những tài liệu chính xác hơn:

$$2C \geq 3M,\ 2Đ \geq M + 4,\ 3Đ \geq C + 6$$

$$2C \geq 3Đ,\ 2M \geq Đ + 4,\ 3M \geq C + 6.$$

Các bất đẳng thức ấy có thể trở thành đẳng thức không? Đối với những loại hình đa diện nào thì ta có thể có đẳng thức?

41. *Có những hình đa diện lồi mà tất cả các mặt đều là những đa giác cùng một loại, tức là những đa giác cùng có một số cạnh. Chẳng hạn, tất cả các mặt của hình tứ diện đều là những hình tam giác, tất cả các mặt của hình hộp đều là những hình tứ giác, tất cả các mặt của hình 12 mặt đều, đều là những hình ngũ giác. Có lẽ bạn muốn nói: "và vân vân". Tuy nhiên, phép quy nạp đơn giản như thế có thể dẫn đến sai lầm: không có một hình đa diện lồi nào mà tất cả các mặt đều là hình lục giác. Bạn hãy thử chứng minh điều đó (thí dụ 31).*

Chương IV

QUY NẠP TRONG LÍ THUYẾT SỐ

1. Các tam giác vuông mà các cạnh là những số nguyên

Tam giác có cạnh bằng 3, 4 và 5 là tam giác vuông, và

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Đó là một thí dụ đơn giản nhất về tam giác vuông có số đo các cạnh là số nguyên. Những "tam giác vuông nguyên" như vậy giữ một vai trò quan trọng trong lịch sử lí thuyết số. Ngay cả những người cổ Babilon cũng đã khám phá ra một số tính chất của chúng.

Một trong những bài toán hiển nhiên nhất thuộc về các tam giác loại đó là bài toán sau đây:

Liệu có thể có những tam giác vuông nguyên mà cạnh huyền là một số n đã cho không?

Ta hãy chú ý tới bài toán này. Ta sẽ tìm một tam giác mà số đo cạnh huyền là số nguyên n đã cho còn số đo hai cạnh góc vuông là các số nguyên x và y nào đó. Ta có thể giả sử rằng, x biểu thị cạnh dài hơn trong hai cạnh góc vuông. Thành thử đối với số n đã cho, ta tìm được hai số nguyên x và y sao cho

$$n^2 = x^2 + y^2, \qquad 0 < y \leq x < n.$$

Ta có thể giải bài toán bằng quy nạp, và nếu ta không có những kiến thức chuyên môn nào đó thì không thể giải bài toán này bằng cách nào khác được. Ta hãy lấy một thí dụ. Ta chọn $n = 12$. Như vậy, ta sẽ tìm hai số nguyên dương x và y, sao cho $x \geq y$, và

$$144 = x^2 + y^2.$$

x^2 có thể lấy những giá trị nào? Nó có thể lấy những giá trị sau:

$$1, 4, 9, 16, 25, 49, 64, 81, 100, 121.$$

Có thể $x^2 = 121$ được không? Nghĩa là hiệu

$$144 - x^2 = 144 - 121 = y^2$$

có thể là một bình phương không? Không, 23 không phải là một bình phương. Bây giờ ta hãy thử những bình phương khác. Song, trong thực tế ta không cần phải thử nhiều lắm. Bởi vì $y \le x$ cho nên:

$$144 = x^2 + y^2 \le 2x^2,$$

$$x^2 \ge 72.$$

Thành thử $x^2 = 100$ và $x^2 = 81$ là những khả năng duy nhất còn lại.

Nhưng không một số nào trong các số:

$$144 - 100 = 44, \ 144 - 81 = 63$$

là một bình phương cả. Do đó câu trả lời là: Không có một tam giác vuông nguyên nào có cạnh huyền bằng 12.

Bằng cách tương tự, ta hãy xét cạnh huyền bằng 13. Trong ba số:

$$169 - 144 = 25; \qquad 169 - 121 = 48; \qquad 169 - 100 = 69.$$

chỉ có một số là bình phương. Như vậy, chỉ có một tam giác vuông nguyên có cạnh huyền bằng 13:

$$169 = 144 + 25.$$

Làm tương tự như vậy và kiên nhẫn một chút, ta có thể nghiên cứu tất cả những số đến một giới hạn không cao lắm như đến số 20 chẳng hạn. Ta chỉ tìm được năm "cạnh huyền" nhỏ hơn 20. Đó là những số 5, 10, 13, 15 và 17:

$$25 = 16 + 9$$

$$100 = 64 + 36$$

$$169 = 144 + 25$$

$$225 = 144 + 81$$

$$289 = 225 + 64.$$

Ở đây, các trường hợp 10 và 15 không hay lắm. Tam giác có các cạnh 10, 8, 6 đồng dạng với một tam giác đã biết có các cạnh 5, 4 và 3. Điều này cũng đúng đối với tam giác có các cạnh 15, 12 và 9. Chỉ còn lại ba tam giác vuông với các cạnh huyền tương ứng bằng 5, 13 và 17 là thực sự khác nhau và không một tam giác nào đồng dạng với tam giác nào cả.

Ta có thể nhận thấy rằng tất cả ba số 5, 13, và 17 là những *số nguyên tố lẻ*. Tuy nhiên, đó không phải là tất cả các số nguyên tố lẻ trong phạm vi 20. Không một số nguyên tố lẻ 3, 7, 11 và 19 nào là "cạnh huyền" cả. Tại sao? Cái khác nhau giữa hai tập hợp này là cái gì? *Khi nào với những điều kiện nào một số nguyên tố lẻ là "cạnh huyền", khi nào không phải là "cạnh huyền"?* ...

Đây là một biến dạng của bài toán ban đầu. Nó có thể có nhiều hứa hẹn hơn vì dù sao nó cũng là một bài toán mới. Ta hãy nghiên cứu nó một lần nữa bằng quy nạp. Kiên trì một chút, ta sẽ lập được bảng sau đây (dấu gạch ngang cho biết không có tam giác vuông có cạnh huyền p).

Số nguyên tố lẻ p	*Các tam giác vuông có cạnh huyền p*
3	–
5	25 = 16 + 9
7	–
11	–
13	169 = 144 + 25
17	289 = 225 + 64
19	–
23	–
29	841 = 441 + 400
31	–

Khi nào số nguyên tố là cạnh huyền, khi nào không? Cái khác nhau giữa hai trường hợp này là gì? Nhà vật lí học có thể tự đề ra cho mình những câu hỏi rất giống như thế. Chẳng hạn, ông ta đang nghiên cứu hiện tượng lưỡng chiết của các tinh thể. Một số tinh thể quả thực là có tính chất lưỡng chiết, một số khác lại không có. Những tinh thể nào là tinh thể lưỡng chiết, những tinh thể nào không phải? Cái khác nhau giữa hai trường hợp này là gì?

Nhà vật lí học quan sát các tinh thể của mình, còn ta, ta quan sát hai tập hợp số nguyên tố của ta

$$5, 13, 17, 29,\ldots \quad \text{và} \quad 3, 7, 11, 19, 23, 31,\ldots$$

Ta sẽ tìm một khác biệt đặc trưng nào đó giữa hai tập hợp này. Các số trong cả hai tập hợp tăng bằng những bước nhảy không đồng đều. Ta hãy xét chiều dài các bước nhảy này, tức là những hiệu liên tiếp:

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & & 13 & & 17 & & 29 \\ & 8 & & 4 & & 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccc} 3 & & 7 & & 11 & & 19 & & 23 & & 31 \\ & 4 & & 4 & & 8 & & 4 & & 8 & \end{array}$$

Có nhiều hiệu bằng 4 và ta cũng thấy dễ dàng rằng *tất cả các hiệu đều chia hết cho 4*. Các số trong tập hợp thứ nhất, bắt đầu từ 5, khi chia cho 4 còn dư 1. Chúng có dạng $4n + 1$ với n nguyên. Các số trong tập hợp thứ hai, bắt đầu bằng 3, có dạng $4n + 3$. Phải chăng, đây là sự khác biệt đặc trưng mà ta muốn tìm? Nếu ngay từ đầu ta không loại trừ khả năng này thì sẽ đi tới giả thuyết sau: *số nguyên tố dạng $4n + 1$ đúng là cạnh huyền của tam giác vuông nguyên; số nguyên tố dạng $4n + 3$ không phải là cạnh huyền của một tam giác vuông nguyên nào.*

2. Tổng các bình phương

Bài toán về tam giác vuông nguyên mà ta vừa mới xét một mặt của nó (trong §1), như ta đã nói, giữ một vai trò quan trọng trong lịch sử lí thuyết số. Thực tế nó dẫn tới nhiều vấn đề khác. Những số nào, bình phương hay không phải là bình phương, có thể phân tích thành tổng hai bình phương? Có thể nói gì về các số không thể phân tích thành tổng của hai bình phương? Có thể là chúng có thể phân tích thành tổng của ba bình phương, nhưng có thể nói gì về các số không thể phân tích thành tổng của ba bình phương?

Chúng ta có thể đi xa vô hạn, nhưng - và điều đó rất kì diệu - ta không cần làm như thế. Basê đơ Mêzơriắc (tác giả quyển sách in đầu tiên về giải trí toán học) đã nhận thấy rằng mọi số (tức là số nguyên dương) hoặc là một bình phương hoặc là tổng của hai, ba hay bốn bình phương. Ông không có ý định chứng minh. Ông đã tìm ra những ẩn ý trong một số bài toán của Diophante dẫn tới khẳng định này và ông tin rằng, nó đúng với tất cả các số cho tới 325.

Nói một cách ngắn gọn hơn khẳng định của Basê chỉ là một giả thuyết tìm bằng quy nạp. Theo tôi, thành tích chủ yếu của ông ta là cách đặt câu hỏi: cần ***BAO NHIÊU*** bình phương để biểu diễn tất cả các số nguyên? Một khi câu hỏi này được đặt ra rõ ràng như thế, việc tìm câu trả lời bằng quy nạp cũng không gặp một khó khăn đặc biệt nào. Ta lập một bảng, bắt đầu từ

$1 = 1$

$2 = 1 + 1$

$3 = 1 + 1 + 1$

$4 = 4$

$5 = 4 + 1$

$6 = 4 + 1 + 1$

$7 = 4 + 1 + 1 + 1$

$8 = 4 + 4$

$9 = 9$

$10 = 9 + 1$

Theo bảng trên, giả thuyết được xác nhận với 10 con số đầu tiên. Chỉ có số 7 là cần bốn bình phương, các số khác được biểu diễn bằng một, hai hay ba bình phương. Basê đã mở rộng bảng của mình tới 325 và thấy nhiều số cần bốn bình phương, và không một số nào cần nhiều hơn. Những lập luận quy nạp như vậy hình như là đã làm cho ông tin, ít ra tới một mức độ nào đó, và ông đã công bố khẳng định của mình. Ông đã gặp may. Giả thuyết của ông là đúng và như vậy ông đã phát minh ra "định lí về bốn bình phương". Ta có thể phát biểu định lí đó dưới dạng sau.

Phương trình:

$$n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

với n là một số nguyên dương bất kì luôn luôn có nghiệm, trong đó x, y, z, w là những số nguyên không âm.

Có thể xét việc phân tích một số thành tổng các bình phương theo quan điểm khác. Chẳng hạn, ta có thể nghiên cứu số nghiệm của phương trình:

$$n = x^2 + y^2$$

trong đó x và y là số nguyên. Ta có thể chỉ ra đối với x và y các giá trị nguyên dương hoặc tất cả các giá trị nguyên, dương, âm hoặc 0. Nếu ta quan niệm bài toán theo cách này và lấy thí dụ $n = 25$ thì sẽ tìm được 12 nghiệm của phương trình:

$$25 = x^2 + y^2$$

mà cụ thể là những nghiệm sau:

$$\begin{aligned}25 &= 5^2 + 0^2 = (-5)^2 + 0^2 = 0^2 + 5^2 = 0^2 + (-5)^2 = \\ &= 4^2 + 3^2 = (-4)^2 + 3^2 = 4^2 + (-3)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = \\ &= 3^2 + 4^2 = (-3)^2 + 4^2 = 3^2 + (-4)^2 = (-3)^2 + (-4)^2.\end{aligned}$$

Ngoài ra, ta có cách minh hoạ hình học lí thú các nghiệm này nhưng ta không cần xét đến ở đây. Xem thí dụ 2.

3. Về tổng của bốn bình phương lẻ

Trong số rất nhiều bài toán về tổng các bình phương, tôi chọn một bài toán hơi có vẻ giả tạo nhưng rất có ích.

Giả sử u là một số dương, lẻ. Nghiên cứu bằng quy nạp số nghiệm của phương trình:

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

với x, y, z và w là những số dương lẻ.

Chẳng hạn, nếu $u = 1$ thì ta có phương trình

$$4 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

và hiển nhiên rằng chỉ có một nghiệm $x = y = z = w = 1$. Thật vậy, ta không coi

$$x = -1, y = 1, z = 1, w = 1;$$

hay

$$x = 2, y = 0, z = 0, w = 0;$$

là nghiệm của phương trình vì ta đã giả sử rằng x, y, z, w, chỉ có thể là những số dương lẻ. Nếu $u = 3$ thì phương trình có dạng:

$$12 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

và

$$x = 3, y = 1, z = 1, w = 1$$

$$x = 1, y = 3, z = 1, w = 1.$$

là hai nghiệm khác nhau.

Để làm nổi bật điều hạn chế đã đặt ra với các số x, y, z, w ta sẽ tránh không dùng danh từ "nghiệm" mà dùng một cách mô tả đặc biệt hơn: "cách biểu diễn số $4u$ dưới dạng tổng của bốn bình phương lẻ". Vì cách mô tả này dài dòng nên ta sẽ rút ngắn nó bằng nhiều cách khác, đôi khi ta chỉ dùng một danh từ "cách biểu diễn".

4. Nghiên cứu thí dụ

Để đi sâu vào nội dung bài toán, ta hãy xét một thí dụ. Ta chọn $u = 25$. Khi đó $4u = 100$, và ta phải tìm tất cả các cách biểu diễn của 100 dưới dạng tổng của bốn bình phương lẻ. Những bình phương lẻ nào phù hợp với mục đích này? Những bình phương lẻ sau đây:

$$1, 9, 25, 49, 81,$$

nếu 81 là một trong bốn bình phương mà tổng bằng 100 thì tổng của ba bình phương kia phải bằng

$$100 - 81 = 19.$$

Những bình phương lẻ nhỏ hơn 19 là 1 và 9. Rõ ràng là chỉ có một khả năng duy nhất để biểu diễn 19 dưới dạng tổng của ba bình phương lẻ nếu các số hạng của nó được sắp xếp theo thứ tự giảm dần. Ta có:

$$100 = 81 + 9 + 9 + 1$$

Cũng bằng phương pháp tương tự ta được

$$100 = 49 + 49 + 1 + 1$$

$$100 = 49 + 25 + 25 + 1$$

$$100 = 25 + 25 + 25 + 25$$

Làm có hệ thống, bằng cách đầu tiên tách ra bình phương lớn nhất, ta có thể tin rằng ta đã khai thác mọi khả năng với điều kiện là 4 bình phương được sắp xếp theo thứ tự giảm dần (chính xác hơn là theo thứ tự không tăng).

Nhưng nếu ta tính toán đến tất cả các cách sắp xếp các số hạng thì sẽ có được nhiều khả năng hơn. Chẳng hạn:

$$\begin{aligned} 100 &= 49 + 49 + 1 + 1 \\ &= 49 + 1 + 49 + 1 \\ &= 49 + 1 + 1 + 49 \\ &= 1 + 49 + 49 + 1 \\ &= 1 + 49 + 1 + 49 \\ &= 1 + 1 + 49 + 49. \end{aligned}$$

Sáu tổng này có những số hạng như nhau nhưng thứ tự của các số hạng thì khác nhau; theo cách đặt bài toán của ta chúng phải được coi là 6 cách biểu diễn khác nhau. Một cách biểu diễn

$$100 = 49 + 49 + 1 + 1$$

với các số hạng không tăng là nguồn gốc của năm cách biểu diễn kia và chỉ có tất cả sáu cách biểu diễn. Cũng bằng cách tương tự ta có:

Các số hạng không tăng	*Số cách sắp xếp*
81 + 9 + 9 + 1	12
49 + 49 + 1 + 1	6
49 + 25 + 25 + 1	12
25 + 25 + 25 + 25	1

Tóm lại, trong trường hợp $u = 25$ và $4u = 100$ có: $12 + 6 + 12 + 1 = 31$ cách biểu diễn của số $4u = 100$ dưới dạng tổng của 4 bình phương lẻ.

5. Lập bảng các kết quả quan sát

Qua trường hợp đặc biệt $u = 25$ trong đó $4u = 100$ và số các cách biểu diễn bằng 31, ta thấy một cách rõ ràng ý nghĩa của bài toán. Bây giờ, ta có thể nghiên cứu một cách có hệ thống các trường hợp đơn giản nhất $u = 1, 3, 5,...$ cho tới $u = 25$. Ta lập một bảng (bạn đọc phải tự lập lấy bảng hoặc ít nhất cũng kiểm tra mấy dòng).

Bảng I

u	*4u*	*Các số hạng không tăng*	*Số cách sắp xếp*	*Số cách biểu diễn*
1	4	1 + 1 + 1 + 1	1	1
3	12	9 + 1 + 1 + 1	4	4
5	20	9 + 9 + 1 + 1	6	6
7	28	25 + 1 + 1 + 1	4	8
		9 + 9 + 9 + 1	4	
9	36	25 + 9 + 1 + 1	12	13
		9 + 9 + 9 + 9	1	
11	44	25 + 9 + 9 + 1	12	12
13	52	49 + 1 + 1 + 1	4	14
		25 + 25 + 1 + 1	6	
		25 + 9 + 9 + 9	4	
15	60	49 + 9 + 1 + 1	12	24
		25 + 25 + 9 + 1	12	
17	68	49 + 9 + 9 + 1	12	18
		25 + 25 + 9 + 9	6	
19	76	49 + 25 + 1 + 1	12	20
		49 + 9 + 9 + 9	4	
		25 + 25 + 25 + 1	4	
21	84	81 + 1 + 1 + 1	4	32
		49 + 25 + 9 + 1	24	
		25 + 25 + 25 + 9	4	
23	92	81 + 9 + 1 + 1	12	24
		49 + 25 + 9 + 9	12	
25	100	81 + 9 + 9 + 1	12	31
		49 + 49 + 1 + 1	6	
		49 + 25 + 25 + 1	12	
		25 + 25 + 25 + 25	1	

6. Quy tắc sẽ như thế nào?

Liệu ta có thể ra một quy luật nào đó, một mối liên hệ đơn giản nào đó giữa số u và số cách biểu diễn khác nhau của số $4u$ dưới dạng tổng của bốn bình phương lẻ không?

Vấn đề này là trung tâm của bài toán của ta. Sang mục tiêu sau, ta phải giải đáp được nó bằng cách dựa trên những kết quả quan sát đã thu thập được và được đưa lên bảng. Bây giờ ta ở vào tình huống của nhà khoa học tự nhiên đang cố gắng rút ra một quy tắc hay một công thức nào đó từ các dữ kiện thực nghiệm của mình. Lúc này tài liệu thực nghiệm nằm trong tay ta gồm hai dãy song song:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
1	4	6	8	13	12	14	24	18	20	32	24	31

Dãy thứ nhất gồm những số lẻ liên tiếp. Nhưng quy tắc nào chi phối dãy thứ hai?

Khi cố gắng tìm cách trả lời câu hỏi này thì đầu tiên ta cảm thấy gần như là tuyệt vọng. Dãy thứ hai này hoàn toàn không có quy luật nào cả. Nguồn gốc phức tạp của nó làm ta thất vọng, chưa chắc ta đã tìm ra được một quy tắc nào đó. Tuy nhiên, nếu ta bỏ qua nguồn gốc phức tạp của nó và chú ý tới cái ở trước mắt thì có thể dễ dàng nhận ra một tình huống. Có nhiều trường hợp một số hạng của dãy thứ hai lớn hơn số hạng tương ứng của dãy thứ nhất một đơn vị. Sau khi làm nổi bật những trường hợp này bằng những số in đậm trong dãy thứ nhất, ta có thể trình bày dữ liệu thực nghiệm theo cách sau:

1	**3**	**5**	**7**	9	**11**	**13**	15	**17**	**19**	21	**23**	25
1	4	6	8	13	12	14	24	18	20	32	24	31

Ta chú ý tới những số in đậm. Dễ dàng nhận ra chúng là những *số nguyên tố*. Thật vậy, đó là *tất cả* những số nguyên tố có trong dãy thứ nhất trong bảng của ta. Nếu ta nhớ tới nguồn gốc của dãy thì nhận xét này làm ta rất ngạc nhiên. Ta đã xét các bình phương và không dính dáng gì tới các số nguyên tố cả. Trong bài toán của ta mà các số nguyên tố có một vai trò nào đó thì không lạ hay sao? Khó mà tránh được ấn tượng rằng nhận xét của ta có một ý nghĩa quan trọng, rằng sau nó còn có một cái gì đó đặc sắc.

Ta có thể nói gì về các số không in đậm trong dãy số thứ nhất? Chúng là những số lẻ nhưng không phải là số nguyên tố. Số 1 đầu tiên là đơn vị, còn các số khác là hợp số:

$$9 = 3 \times 3, \qquad 15 = 3 \times 5, \qquad 21 = 3 \times 7, \qquad 25 = 5 \times 5.$$

Bản chất của các số tương ứng trong dãy thứ hai là gì?

Nếu số lẻ u là nguyên tố thì số tương ứng bằng $u + 1$, nếu u không phải là nguyên tố thì số tương ứng không bằng $u + 1$. Ta cũng đã nhận ra điều đó. Ta có thể thêm vào một nhận xét nhỏ. Nếu $u = 1$ thì số tương ứng cũng bằng 1 và như vậy là *nó nhỏ hơn* $u + 1$, nhưng trong tất cả các trường hợp khác thì u không phải là nguyên tố, số tương ứng *lớn hơn* $u + 1$. Nói cách khác, số ứng với u, sẽ nhỏ hơn, bằng hoặc lớn hơn $u + 1$ là tuỳ theo u là đơn vị, số nguyên tố hay hợp số. Có một quy luật nào đó.

Ta chú ý tới những hợp số ở dòng thứ nhất và những số tương ứng ở dòng dưới.

$$\begin{array}{cccc} 3 \times 3 & 3 \times 5 & 3 \times 7 & 5 \times 5 \\ 13 & 24 & 32 & 31 \end{array}$$

Có một cái gì khá kì lạ. Các bình phương ở dòng thứ nhất tương ứng với các số nguyên tố của dòng thứ hai. Tuy nhiên, các quan sát của ta hãy còn quá ít, và tất nhiên ta không thể đánh giá quá cao nhận xét này. Ngược lại, dưới các hợp số không phải là bình phương trong dòng thứ nhất là những số không phải là nguyên tố trong dòng thứ hai.

$$\begin{array}{cc} 3 \times 5 & 3 \times 7 \\ 4 \times 6 & 4 \times 8 \end{array}$$

Lại có một cái gì cũng kì lạ. Mỗi thừa số ở dòng thứ hai đều lớn hơn thừa số tương ứng ở dòng thứ nhất đúng một đơn vị. Tuy nhiên, ta quan sát vẫn còn ít, tốt hơn là không nên đánh giá quá cao nhận xét này. Dù sao nhận xét của ta cũng giống phần nào đó với nhận xét trước. Trước kia, ta nhận thấy:

$$\begin{array}{c} p \\ p + 1 \end{array}$$

còn bây giờ ta thấy:

$$\begin{array}{c} p\,q \\ (p + 1)\,(q + 1) \end{array}$$

trong đó p và q là những số nguyên tố. Có một quy luật nào đó.

Ta sẽ nhìn thấy điều này rõ ràng hơn, nếu ta viết số tương ứng pq bằng cách khác:

$$(p + 1)(q + 1) = pq + p + q + 1.$$

Ta có thể nhìn thấy những gì ở đây? Có cái gì ẩn náu sau các số pq, p, q, 1? Dù sao chăng nữa, các trường hợp:

$$\begin{array}{cc} 9 & 25 \\ 13 & 21 \end{array}$$

vẫn chưa được sáng tỏ. Thật vậy, các số viết dưới 9 và 25, như ta đã nhận xét ở trên, tương ứng lớn hơn 9 + 1 và 25 + 1.

$$13 = 9 + 1 + 3; \quad 31 = 25 + 1 + 5.$$

Những số này là những số gì?

Bây giờ chỉ cần một tia sáng nhỏ loé lên là ta có thể kết hợp được những nhận xét tản mạn của mình thành một thể chặt chẽ và kết hợp những chỉ dẫn rải rác của ta thành một bức tranh tương ứng đầy đủ:

$$\begin{array}{ccccc} p & pq & 9 & 25 & 1 \\ p+1 & pq+p+q+1 & 9+3+1 & 25+5+1 & 1 \end{array}$$

CÁC ƯỚC SỐ! Dòng thứ hai chỉ các ước số của các số trong dòng thứ nhất. Đó có thể là một quy tắc muốn tìm và là một phát minh, phát minh chân chính.

Mỗi số trong dòng thứ nhất ứng với tổng các ước số của nó.

Và như vậy là ta đã đi tới một giả thuyết, rất có thể, tới một trong những "chân lí mới kiều diễm nhất" của Gauss (Gaoxơ):

Nếu u là số lẻ thì số cách biểu diễn của số 4u dưới dạng tổng của bốn bình phương lẻ bằng tổng các ước số của u.

7. Bản chất của phát minh quy nạp

Khi xét những mục trên (từ 3 đến 6) ta có thể tìm được nhiều vấn đề cần phải giải đáp.

Ta đã thu được những gì? Ta thu được không phải một chứng minh, thậm chí không phải một bóng dáng của chứng minh mà chỉ một giả thuyết: một sự mô tả đơn giản các sự kiện trong khuôn khổ tài liệu thực nghiệm của ta và một niềm hi vọng rằng sự mô tả này có thể áp dụng được ngoài phạm vi tài liệu thực nghiệm đó.

Ta đã suy ra giả thuyết như thế nào? Về căn bản, đó cũng chính là phương pháp mà những người bình thường hay các nhà bác học làm việc trong một lĩnh vực không phải toán học đã dùng để suy ra giả thuyết của mình. Ta đã thu thập những kết quả quan sát xung quanh vấn đề, ta đã nghiên cứu và so sánh chúng, ta đã nhận ra một số quy luật rải rác, ta đã dao động, đã do dự và cuối cùng, ta đã *kết hợp những chi tiết tản mạn thành một thể nguyên vẹn rõ ràng, có nhiều ý nghĩa*. Bằng một phương pháp hoàn toàn tương tự như vậy, nhà khảo cổ dựa trên một số chi tiết lẻ tẻ trên những di vật có thể phục hồi cả một hoá thạch của con vật đã chết, có thể khôi phục những nét chính của nó. Trong trường hợp của ta, thể nguyên vẹn mang nhiều ý nghĩa đã xuất hiện đúng vào lúc ta nhận ra được khái niệm liên kết thích hợp (các ước số).

8. Về bản chất của các lí lẽ quy nạp

Hãy còn một số vấn đề.

Những lí lẽ này có hiệu lực đến mức độ nào? Câu hỏi của bạn không đầy đủ. Cố nhiên, bạn định nói về những lí lẽ quy nạp đối với giả thuyết đã được phát biểu trong §6 của ta. Những lí lẽ này ta có thể suy ra từ bảng 1, §5. Đó là điều dễ hiểu. Tuy nhiên, bạn hiểu từ "hiệu lực" như thế nào? Lí lẽ có hiệu lực nếu nó có sức thuyết phục, nếu nó làm cho một người nào đó tin tưởng. Tuy nhiên, bạn đã không nói nó phải thuyết phục ai - thuyết phục tôi, hay bạn, hay Euler, hay một người mới bắt đầu học toán, hay một người nào đó nữa?

Cá nhân tôi, tôi đã thấy những lí lẽ khá thuyết phục. Tôi cảm thấy tin tưởng rằng, Euler đã nghĩ về chúng rất hợp (tôi nhắc tới Euler vì ông đã đi rất gần tới chỗ khám phá ra giả thuyết của ta, xem thí dụ 6.24). Tôi nghĩ rằng, một người mới học toán có biết chút ít nào đó về tính chất chia hết của các số hẳn cũng thấy những lí lẽ khá thuyết phục. Một bạn đồng nghiệp của tôi, một nhà toán học xuất sắc, tuy không biết đến ngõ ngách này của lí thuyết số, cũng đã thấy những lí lẽ "có sức thuyết phục trăm phần trăm".

Tôi không quan tâm đến các ấn tượng chủ quan. Các lí lẽ quy nạp chính xác và khách quan đã biện hộ niềm tin có lí trí đến mức độ nào? Bạn cho tôi một (A), không cho tôi cái thứ hai (B) và hỏi tôi về cái thứ ba (C).

(A) Bạn chỉ cho tôi những lí lẽ quy nạp: giả thuyết đã được xác nhận trong mười ba trường hợp đầu đối với các số 4, 12, 20,..., 100. Điều đó đã hoàn toàn rõ ràng.

(B) Bạn muốn tôi đánh giá mức độ niềm tin được biện hộ bằng những lí lẽ này. Tuy nhiên, niềm tin như vậy phải phụ thuộc, nếu không vào tính thất thường và tính tình, thì vào sự *hiểu biết của* người tiếp thu lí lẽ. Anh ta có thể biết cách chứng minh một định lí đã nêu ra, có thể biết một thí dụ mâu thuẫn làm tổn thương định lí. Trong cả hai trường hợp này, mức độ niềm tin đã được xác lập vững chắc của anh ta không thay đổi do ảnh hưởng của các lí lẽ quy nạp. Tuy nhiên, nếu anh ta biết một cái gì đó dẫn gần tới chứng minh đầy đủ định lí hay gần tới phủ nhận hoàn toàn định lí thì niềm tin của anh ta còn có thể thay đổi và các lí lẽ quy nạp thu nhận được ở đây đã tác động đến lòng tin, mặc dù, tuỳ theo tính chất trí thức của anh ta, từ những lí lẽ này sẽ đẻ ra nhiều mức độ tin tưởng khác nhau. Vì thế, nếu bạn muốn có một câu trả lời xác định, bạn phải chỉ ra một mức độ tri thức nhất định để trên cơ sở đó đánh giá các lí lẽ quy nạp đã nêu ra (A). Bạn phải cho tôi một số sự kiện đã biết về vấn đề đang xét (có thể đó là một bản danh sách tỉ mỉ những mệnh đề cơ bản trong lí thuyết số).

(C) Bạn muốn tôi đánh giá chính xác xem các lí lẽ quy nạp đã biện hộ niềm tin có lí trí tới mức độ nào. Có lẽ tôi phải tính nó theo phần trăm của "niềm tin đầy đủ"? (Ta có thể quy ước gọi "niềm tin đầy đủ" là mức độ niềm tin xác nhận bằng chứng minh toán học đầy đủ của định lí đang xét). Bạn không thích nghe rằng những lí lẽ biện hộ cho niềm tin bằng 99% hay 2,875% hay 0,000001% của niềm tin đầy đủ?

Nói ngắn gọn hơn, bạn muốn tôi giải bài toán:

Giả sử cho (A) những lí lẽ quy nạp và (B) một tập hợp nhất định các sự kiện và các mệnh đề đã biết; tính (C) số phần trăm của niềm tin đầy đủ suy ra một cách có lí từ (A) và (B).

Giải bài toán này có nghĩa là đã làm một việc quá sức so với khả năng của tôi. Tôi không biết ai có thể làm được điều đó, không biết ai có can đảm làm điều đó.

Bạn có thể so sánh trường hợp này của suy luận quy nạp trái với trường hợp khác đã biết nào đó và như vậy sẽ đánh giá được sức mạnh của lí lẽ một cách sáng suốt. Ta so sánh những lí lẽ quy nạp bênh vực cho giả thuyết của ta với những lí lẽ của Basê bênh vực cho giả thuyết của ông ta.

Đây là giả thuyết của Basê: đối với $u = 1, 2, 3,..., n$, phương trình:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

có ít nhất một nghiệm nguyên không âm x, y, z, w, bằng tổng các ước số của u. Ta thấy rằng, giả thuyết này đúng đối với $u = 1, 3, 5, 7,..., 25$ (xem §2, đặc biệt là bảng tóm tắt).

Đây là giả thuyết của ta: đối với số u lẻ đã cho, số nghiệm của phương trình:

$$4u = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

với các số lẻ dương x, y, z, w, bằng tổng các ước số của u. Ta thấy rằng, giả thuyết này đúng đối với $u = 1, 3, 5, 7,..., 25$ (13 trường hợp) (xem §3 - 6).

Tôi so sánh hai giả thuyết này và những lí lẽ quy nạp mà các xác nhận tương ứng của chúng đã cung cấp về ba phương diện.

Số lần xác nhận. Giả thuyết của Basê được xác nhận trong 325 trường hợp, còn giả thuyết của ta chỉ được xác nhận trong 13 trường hợp. Về mặt này, Basê có ưu thế.

Độ chính xác của lời tiên đoán. Giả thuyết của Basê tiên đoán rằng số nghiệm ≥ 1; giả thuyết của ta tiên đoán số nghiệm đúng bằng một đại lượng nào đó. Hiển nhiên là thừa nhận một điều như thế này là sáng suốt: xác nhận một lời tiên đoán chính xác hơn thì khôn ngoan hơn là xác nhận một lời tiên đoán kém chính xác hơn. Về mặt này, rõ ràng ta có ưu thế.

Những giả thuyết ganh đua nhau. Giả thuyết của Basê nói về số tối đa các bình phương. M chẳng hạn, cần thiết để biểu diễn một số nguyên dương bất kì dưới dạng tổng các bình phương. Thật vậy, giả thuyết của Basê khẳng định rằng M = 4. Tôi không nghĩ rằng, Basê đã tiên nghiệm có một cơ sở nào đó để ưa thích M = 4, hay M = 5 hay bằng bất kì giá trị nào khác, chẳng hạn M = 6 hay M = 7; tiên nghiệm không loại trừ cả khả năng $M = \infty$ (lẽ tất nhiên $M = \infty$ có nghĩa rằng, có những số nguyên ngày càng lớn đòi hỏi số bình phương ngày càng lớn; mới nhìn thì $M = \infty$ có vẻ là một giả thuyết có khả năng đúng nhiều nhất). Nói vắn tắt, giả thuyết của Basê có nhiều đối thủ hiển nhiên. Còn giả thuyết của ta không có một đối thủ nào, ở trên, khi ta xét dãy số các cách biểu diễn (§6) ta đã có ấn tượng rằng không thể tìm được một quy tắc nào cả. Bây giờ dù sao ta cũng đã tìm được quy tắc hết sức rõ ràng. Ta khó mà hi vọng tìm được một quy tắc nào khác.

Một giả thuyết có nhiều đối thủ hiển nhiên sẽ khó được thừa nhận hơn là một giả thuyết không có đối thủ nào. Nếu bạn cũng nghĩ như tôi thì bạn phải thấy rằng, về phương diện này, giả thuyết của ta có ưu thế chứ không phải giả thuyết của Basê.

Xin bạn hãy thấy cho rằng, những lí lẽ bênh vực cho giả thuyết của Basê mạnh hơn về một phương diện, còn những lí lẽ bênh vực cho giả thuyết của ta thì mạnh hơn về hai phương diện khác và không nên nêu ra những câu hỏi mà không trả lời được.

NHỮNG THÍ DỤ VÀ CHÚ THÍCH VỀ CHƯƠNG IV

1. Các kí hiệu

Giả sử n và k là những số nguyên dương và ta xét phương trình Diophante (Điôphăng):

$$n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 .$$

Ta nói rằng, hai nghiệm $x_1, x_2, ..., x_k$ và $x'_1, x'_2, ..., x'_k$ bằng nhau chỉ trong trường hợp $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, ..., x_k = x'_k$. Nếu ta gán cho $x_1, x_2, ..., x_k$ tất cả các số nguyên dương, âm hoặc bằng 0 thì ta sẽ kí hiệu số nghiệm bằng $R_k(n)$. Nếu ta chỉ gán những số dương lẻ thì sẽ kí hiệu số nghiệm bằng $S_k(n)$. Những kí hiệu này sẽ rất quan trọng trong phần lớn các bài toán sau đây.

Giả thuyết của Basê (§2) được biểu diễn qua các kí hiệu này bằng bất đẳng thức:

$$R_4(n) > 0 \text{ đối với } n = 1, 2, 3, ...$$

Giả thuyết ta nêu ra ở §6 khẳng định rằng $S_4[4(2n - 1)]$ bằng tổng các số ước của số $2n - 1$ đối với $n = 1, 2, 3, ...$ Hãy tìm $R_2(25)$ và $S_3(11)$.

2. *Giả sử x và y là những toạ độ vuông trên mặt phẳng. Các điểm tại đó x và y là những số nguyên gọi là "nút mạng" trên mặt phẳng. Các nút mạng trong không gian cũng được định nghĩa một cách tương tự.*

Hãy tìm cách minh hoạ bằng hình học $R_2(n)$ và $R_3(n)$ qua thuật ngữ nút mạng.

3. *Hãy diễn tả giả thuyết ở §1 bằng cách dùng kí hiệu $R_2(n)$.*

4. *Khi nào một số lẻ là tổng của hai bình phương? Bạn hãy cố gắng trả lời câu hỏi này bằng quy nạp sau khi đã nghiên cứu bảng:*

3	—
5 = 4 + 1	
7	—
11	—
13 = 9 + 4	
17 = 16 + 1	
19	—
23	—
29 = 25 + 4	
31	—

Nếu thấy cần, bạn hãy kéo dài thêm bảng này và so sánh nó với bảng §1.

5. *Bạn có thể bằng cách suy diễn toán học xác nhận một phần nào đó của câu trả lời ở thí dụ 4 mà bạn đã tìm được bằng quy nạp không? Sau lần xác nhận đó mà thay đổi niềm tin của bạn vào giả thuyết thì có hợp lí không?*

6. *Bạn hãy kiểm tra giả thuyết của Basê (§2) đối với các số đến 30. Những số nào thực sự cần bốn bình phương?*

7. *Giả sử a^2, b^2, c^2 và d^2 và bốn bình phương lẻ khác nhau. Để hiểu rõ bảng I ở §5 hơn bạn hãy xét các tổng*

1) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$; *4)* $a^2 + a^2 + a^2 + b^2$;

2) $a^2 + a^2 + b^2 + c^2$; *5)* $a^2 + a^2 + a^2 + a^2$.

3) $a^2 + a^2 + b^2 + b^2$;

Bằng cách hoán vị các số hạng, từ một tổng bạn có thể có bao nhiêu cách biểu diễn khác nhau (theo nghĩa ở §3).

8. *Số cách biểu diễn số 4u dưới dạng tổng của bốn số bình phương lẻ là một số lẻ chỉ khi nào u là một bình phương (theo những kí hiệu §3 ta giả sử rằng u là lẻ). Bạn hãy chứng minh khẳng định này và chứng tỏ rằng nó phù hợp với giả thuyết §6. Nhận xét này có ảnh hưởng gì đến niềm tin của bạn vào giả thuyết này?*

9. *Bây giờ giả sử a, b, c và d là những số nguyên dương khác nhau (chẵn hoặc lẻ). Bạn hãy xét năm tổng ở thí dụ 7 cũng như những tổng sau đây:*

6) $a^2 + b^2 + c^2$ *9)* $a^2 + b^2$

7) $a^2 + a^2 + b^2$ *10)* $a^2 + a^2$

8) $a^2 + a^2 + a^2$ *11)* a^2

Hãy tìm xem mỗi trường hợp trong mười một trường hợp này đóng góp vào $R_4(n)$ như thế nào. Từ mỗi tổng, bạn hãy rút ra tất cả những cách biểu diễn có thể nhờ những phép tính hiển nhiên sau: cần bao nhiêu 0^2 thì thêm bấy nhiêu 0^2 vào để đưa số số hạng lên tới 4, thay đổi thứ tự và thay thế một vài số (có thể là một hay tất cả) a, b, c, d tương ứng bằng các số –a, –b, –c, –d (Hãy kiểm tra các thí dụ trong bảng II).

10. *Bạn hãy nghiên cứu bằng quy nạp số nghiệm nguyên x, y, z, w dương, âm hoặc 0 của phương trình $n^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$. Hãy bắt đầu từ việc xây dựng bảng tương tự như bảng I.*

11. *(tiếp theo) Bạn hãy thử sử dụng phương pháp hay kết quả của §6.*

12. *(tiếp theo) Dựa vào sự tương tự với §6 hay các quan sát bảng II, bạn hãy tách ra những lớp số nguyên thích hợp và hãy nghiên cứu riêng mỗi lớp.*

13. *(tiếp theo) Hãy tập trung chú ý vào những lớp mà nỗ lực của bạn chưa đem lại kết quả.*

14. *(tiếp theo) Hãy thử tổng kết tất cả những quy luật lẻ tẻ và hãy diễn tả định luật thành một mệnh đề.*

15. *(tiếp theo) Kiểm tra quy tắc đã tìm được trong ba trường hợp đầu không có trong bảng II.*

16. *Tìm $R_8(5)$ và $R_8(40)$.*

17. *Bạn hãy kiểm tra ít nhất là hai dòng trong bảng III chưa có trong bảng I và II.*

18. *Bằng cách dùng bảng III, hãy nghiên cứu bằng quy nạp $R_8(n)$ và $S_8(8n)$.*

19. *(tiếp theo) Bạn hãy thử sử dụng phương pháp hay kết quả của §6 và các thí dụ 10 - 15.*

20. *(tiếp theo) Dựa vào sự tương tự hay sự quan sát, bạn hãy tách ra những lớp số nguyên thích hợp và nghiên cứu từng lớp một.*

21. *(tiếp theo) Thử tìm chiếc chìa khoá trong trường hợp dễ nhất.*

22. *(tiếp theo) Hãy thử tìm một khái niệm liên kết nào đó có thể tổng kết những quy luật lẻ tẻ.*

Bảng II

n	*Các số hạng không tăng*	*Các cách biểu diễn*	*$R_4(n)/8$*
1	1	4 × 2	1
2	1 + 1	6 × 4	3
3	1 + 1 + 1	4 × 8	4
4	4 1 + 1 + 1 + 1	4 × 2 1 × 16	3
5	4 + 1	12 × 4	6
6	4 + 1 + 1	12 × 8	12
7	4 + 1 + 1 +1	4 × 16	8
8	4 + 4	6 × 4	3
9	9 4 + 4 + 1	4 × 2 12 × 8	13
10	9 + 1 4 + 4 + 1 + 1	12 × 4 6 × 16	18
11	9 + 1 + 1	12 × 8	12

n	*Các số hạng không tăng*	*Các cách biểu diễn*	*$R_4(n)/8$*
12	9 + 1 + 1 + 1 4 + 4 + 4	4 × 16 4 × 8	12
13	9 + 4 4 + 4 + 4 + 1	12 × 4 4 × 16	14
14	9 + 4 + 1	24 × 8	24
15	9 + 4 + 1 + 1	12 × 6	24
16	16 4 + 4 + 4 + 4	4 × 2 1 × 16	3
17	16 + 1 9 + 4 + 4	12 × 4 12 × 8	18
18	16 + 1 + 1 9 + 9 9 + 4 + 4 + 1	12 × 8 6 × 4 12 × 6	39
19	16 + 1 + 1 + 1 9 + 9 + 1	4 × 16 12 × 8	20
20	16 + 4 9 + 9 + 1 + 1	12 × 4 6 × 16	18
21	16 + 4 + 1 9 + 4 + 4 + 4	24 × 8 4 × 16	32
22	16 + 4 + 1 + 1 9 + 9 + 4	12 × 16 12 × 8	36
23	9 + 9 + 4 + 1	12 × 16	24
24	16 + 4 + 4	12 × 8	12
25	25 16 + 9 16 + 4 + 4 + 1	4 × 2 12 × 4 12 × 16	31
26	25 + 1 16 + 9 + 1 9 + 9 + 4 + 4	12 × 4 24 × 8 6 × 16	42

n	*Các số hạng không tăng*	*Các cách biểu diễn*	$R_4(n)/8$
27	25 + 1 + 1 16 + 9 + 1 + 1 9 + 9 + 9	12 × 8 12 × 16 4 × 8	40
28	25 + 1 + 1 + 1 16 + 4 + 4 + 4 9 + 9 + 9 + 1	4 × 16 4 × 16 4 × 16	24
29	25 + 4 16 + 9 + 4	12 × 4 24 × 8	30
30	25 + 4 + 1 16 + 9+ 4 + 1	24 × 8 24 × 16	72

23. *(tiếp theo) Thử diễn tả định luật bằng một mệnh đề*

Bảng III

n	$R_4(n)/8$	$R_8(n)/16$	$S_8(8n)$	$S_4[4(2n-1)]$	$2n-1$
1	1	1	1	1	1
2	3	7	8	4	3
3	4	28	28	6	5
4	3	71	64	8	7
5	6	126	126	13	9
6	12	196	244	12	11
7	8	344	344	14	13
8	3	583	512	24	15
9	13	757	757	18	17
10	18	882	1008	20	19
11	12	1332	1332	32	21
12	12	1988	1792	24	23
13	14	2198	2198	31	25
14	24	2408	2752	40	27
15	24	3528	3528	30	29

n	$R_4(n)/8$	$R_8(n)/16$	$S_8(8n)$	$S_4[4(2n-1)]$	$2n-1$
16	3	4679	4096	32	31
17	18	4914	4914	48	33
18	39	5299	6056	48	35
19	20	6860	6860	38	37
20	18	8946	8064	56	39

24. *Những số nguyên nào có thể và những số nào không thể biểu diễn dưới dạng* $3x + 5y$, *trong đó* x *và* y *là những số nguyên không âm.*

25. *Thử đoán xem bảng sau đây được lập theo định luật nào.*

a	b	**Số nguyên cuối cùng không biểu diễn được dưới dạng $ax + by$**
2	3	1
2	5	3
2	7	5
2	9	7
3	4	5
3	5	7
3	7	11
3	8	13
4	5	11
5	6	19

Hiểu ngầm rằng x *và* y *là những số nguyên không âm, bạn hãy kiểm tra một số dòng, nếu thấy cần hãy kéo dài thêm bảng (theo dõi những biến đổi diễn ra trong cột cuối cùng khi chỉ có một trong hai số* a *và* b *biến đổi).*

26. *Những nguy hiểm của quy nạp.*

Bạn hãy nghiên cứu bằng quy nạp những khẳng định sau đây:

1) $(n-1)! + 1$ *chia hết cho* n *khi* n *là số nguyên tố, nhưng không chia hết cho* n *khi* n *là một hợp số.*

2) $2^{n-1} - 1$ *chia hết cho* n *khi* n *là số nguyên tố lẻ, nhưng không chia hết cho* n *khi* n *là một hợp số.*

Chương V
NHỮNG THÍ DỤ KHÁC VỀ QUY NẠP

1. Các biểu thức khai triển

Khi tiếp xúc với những bài toán thuộc một loại nào đó, ta cần có những lập luận quy nạp thuộc loại nhất định. Trong những lĩnh vực khác nhau của toán học thường gặp một số bài toán đòi hỏi phải có những lập luận quy nạp có tính chất điển hình. Chương này sẽ minh hoạ luận điểm này bằng một số thí dụ. Ta bắt đầu từ một thí dụ tương đối đơn giản.

Khai triển hàm số $\dfrac{1}{1-x+x^2}$ *theo luỹ thừa của x.*

Có thể giải bài toán này bằng nhiều cách: Cách giải dưới đây tuy có cồng kềnh một chút nhưng nó dựa trên một nguyên tắc đúng đắn và người mới học, dù kiến thức còn ít, cũng có thể hiểu được nếu biết tổng của cấp số nhân:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}$$

Trong bài toán, ta có khả năng sử dụng công thức đó:

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-x(x-x)} =$$

$$= 1 + x(1-x) + x^2(1-x)^2 + x^3(1-x)^3 + \ldots =$$

$$\begin{aligned}
= 1 + x - x^2 &+ \\
&+ x^2 - 2x^3 + x^4 + \\
&\qquad + x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6 + \\
&\qquad\qquad + x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad + x^5 - 5x^6 + 10x^7 - 10x^8 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + x^6 - 6x^7 + 15x^8 - \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x^7 + 7x^8 + \ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x^8 - \ldots
\end{aligned}$$

$$= 1 + x - x^3 - x^4 \quad + x^6 + x^7.$$

Kết quả thật không ngờ. Mọi hệ số khác 0 có giá trị 1 hoặc −1. Dãy các hệ số rõ ràng là có một quy luật nào đó, quy luật này có thể trở thành hiển nhiên hơn nếu ta tính thêm một số hệ số nữa:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{12} + x^{13} \ldots$$

Tính chất tuần hoàn! Dãy các hệ số có tính chất tuần hoàn với chu kì 6.

1, 1, 0, −1, −1, 0 1, 1, 0, −1, −1, 0 1, 1,...

Lẽ tự nhiên là ta hi vọng rằng tuần hoàn này còn vượt ra ngoài giới hạn quan sát của ta. Nhưng đó là một kết luận quy nạp hay chỉ là một dự đoán mà ta phải có thái độ hoài nghi đối với nó. Tuy nhiên, dự đoán này dựa trên những sự thật vì thế nó cần phải được nghiên cứu một cách nghiêm túc. Nghiên cứu nó, tựu trung là diễn tả nó theo một cách khác. Có một phương pháp thú vị để diễn tả giả thuyết của ta theo một cách khác.

$$\frac{1}{1-x+x^2} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \ldots +$$
$$+ x - x^4 + x^7 - x^{10} + x^{13} - \ldots$$

Bây giờ, ta có thể dễ dàng thấy ở vế bên phải của đẳng thức có hai cấp số nhân có cùng một công bội $-x^3$ mà tổng của chúng ta có thể tìm được. Và như vậy, giả thuyết được quy về đẳng thức:

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{1+x^3} + \frac{x}{1+x^3} = \frac{1+x}{1+x^3}.$$

Đẳng thức này cố nhiên là đúng. Ta đã chứng minh giả thuyết của ta.

Thí dụ của ta mặc dù đơn giản nhưng lại là một thí dụ điển hình về nhiều mặt. Nếu ta cần khai triển một hàm số đã cho, thông thường ta có thể thu được dễ dàng một số hệ số đầu tiên. Khi xét những hệ số này, ta phải cố gắng, như đã làm ở đây, dự đoán định luật chi phối biểu thức khai triển. Sau khi đã đoán nhận được định luật, ta phải cố gắng, như đã làm ở đây, chứng minh nó. Có thể là rất hợp lí nếu chứng minh theo chiều ngược lại như ở đây, xuất phát từ giả thuyết được phát biểu một cách rõ ràng, thích hợp.

Ngoài ra, thí dụ của ta cũng rất có lợi (mà còn điển hình nữa). Nó dẫn tới một hệ thức kì lạ giữa các hệ số nhị thức.

Ta không sợ thừa khi nói thêm rằng, bài toán khai triển hàm số đã cho thành chuỗi đã xuất hiện trong các lĩnh vực khác nhau của toán học. Xem mục sau cũng như những thí dụ và nhận xét đối với chương VI.

2. Các biểu thức gần đúng

Giả sử E là độ dài của cung elip có các nửa trục a và b. Không có một biểu thức đơn giản nào biểu diễn E theo a và b. Nhưng có thể nêu ra một số biểu thức gần đúng, trong đó các biểu thức sau đây chẳng hạn là rõ ràng nhất :

$$P = \pi (a + b),\ P' = 2\pi (ab)^{1/2}$$

P và P' là những biểu thức gần đúng, E là biểu thức chính xác đối với cùng một đại lượng - chiều dài của cung elip. Khi a trùng với b, elip biến thành đường tròn và P cũng như P' trùng với E.

P và P' sát E đến mức nào khi a khác b? Biểu thức nào, P hay P' sát E hơn? Những câu hỏi thuộc loại này thường xuất hiện trong các lĩnh vực toán học ứng dụng và có một phương pháp được mọi người thừa nhận để giải quyết nó mà ta sẽ mô tả một cách đại cương như sau. *Khai triển sai số tương đối (P – E)/E của biểu thức gần đúng, theo luỹ thừa của đại lượng bé thích hợp và lấy số hạng đầu của biểu thức khai triển* (số hạng thứ nhất khác 0) *làm cơ sở suy luận.*

Ta hãy xét xem phương pháp này được ứng dụng vào trường hợp của ta như thế nào. Ban đầu, ta hãy chọn một "đại lượng bé thích hợp". Ta thử ε, tâm sai của elip; ε được xác định bởi công thức:

$$\varepsilon = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a}$$

ta coi a là nửa trục lớn và b là nửa trục nhỏ. Khi a biến thành b, elip biến thành đường tròn, ε biến thành 0. Khi elip không khác đường tròn mấy thì ε nhỏ. Vì thế, ta khai triển sai số tương đối theo luỹ thừa của ε. Ta được (sau khi đã bỏ qua các chi tiết):

$$\frac{P-E}{E} = \frac{-1}{64}\varepsilon^4 + \ldots; \qquad \frac{P'-E}{E} = -\frac{3}{64}\varepsilon^4 + \ldots$$

Ta chỉ tính số hạng đầu tiên chứa ε^4. Số hạng này trong cả hai trường hợp có bậc 4. Trong cả hai biểu thức khai triển ta không viết các số hạng bậc cao chứa ε^5, ε^6,... Khi ε rất nhỏ (vô cùng nhỏ) tức là khi elip hầu như là tròn thì các số hạng không được viết ra so với số hạng đầu rất không đáng kể. Vì thế, đối với elip hầu như là tròn thì P sát giá trị thực E hơn P' (thật vậy, tỉ số của các sai số tiến dần tới 1: 3 khi ε tiến dần tới 0). Và P và P' tiến dần tới E từ phía dưới:

$$E > P > P'.$$

Tất cả những điều đó chỉ đúng đối với ε rất nhỏ, đối với những elip gần như là tròn. Ta vẫn chưa biết khi ε không nhỏ như thế thì phần nào của những kết quả này vẫn còn đúng. Trong lúc này, thực tế, ta chỉ biết những quan hệ giới hạn, đúng khi $\varepsilon \to 0$. Khi $\varepsilon = 0{,}5$ hay $\varepsilon = 0{,}1$ ta vẫn chưa biết một cái gì có tính chất xác định về sai số của các biểu thức gần đúng đó. Cố nhiên, cái mà ta cần trong thực tiễn lại chính là thông tin về những trường hợp cụ thể đó.

Thực tế, trong những tình huống này, ta kiểm tra những công thức của mình bằng số. Ta có thể theo dõi các công thức đó. Nhưng đầu tiên ta phải kiểm tra trường hợp nào? Kinh nghiệm là không nên quên những trường hợp ngoại biên. Tâm sai ε biến đổi giữa những cực trị 0 và 1. Khi $\varepsilon = 0$, $b = a$ và elip biến thành đường tròn. Tuy nhiên, bây giờ ta biết trường hợp này đã khá rõ cho nên tốt hơn là chuyển sang trường hợp ngoại biên khác. Khi $\varepsilon = 1$, $b = 0$, elip biến thành một đoạn thẳng có chiều dài bằng $2a$, còn chiều dài cung của nó bằng $4a$. Ta có:

$$E = 4a,\ P = \pi a,\ P' = 0 \text{ khi } \varepsilon = 1.$$

Ta thấy rằng, trong cả hai trường hợp ngoại biên đối với $\varepsilon = 1$ cũng như đối với ε rất nhỏ, $E > P > P'$. Liệu những bất đẳng thức này có đúng với mọi giá trị của ε không?

Đối với bất đẳng thức thứ hai, câu trả lời không có gì là khó. Thật vậy, đối với $a > b$ ta có:

$$P = \pi (a + b) > 2\pi (ab)^{1/2} = P'$$

vì giá trị này tương đương với bất đẳng thức:

$$(a + b)^2 > 4ab,$$

hay

$$(a - b)^2 > 0.$$

Ta hãy chú ý vào câu hỏi còn lại. Phải chăng bất đẳng thức $E > P$ bao giờ cũng đúng? Tất nhiên ta nêu giả thuyết rằng, cái mà ta đã tìm được trong những trường hợp ngoại biên (ε nhỏ và $\varepsilon = 1$) thì vẫn còn đúng trong các trường hợp trung gian (đối với mọi giá trị của ε giữa 0 và 1). Giả thuyết của ta không được củng cố bằng số lớp các quan sát, điều đó đúng nhưng nó lại được củng cố bằng sự tương tự. Về câu hỏi tương tự (đối với $P > P'$) đã được nêu ra đồng thời và dựa trên những cơ sở tương tự thì câu trả lời là khẳng định.

Ta hãy kiểm tra một trường hợp nào đó bằng số. Ta biết về trường hợp ε gần 0 nhiều hơn một chút so với trường hợp khi nó gần 1. Ta chọn cho ε một giá trị đơn giản sao cho nó gần 1 hơn là 0: a = 5, b = 3, $\varepsilon = 4/5$. Đối với giá trị này của ε (sau khi dùng những bảng tương ứng) ta tìm được:

$$E = 2\pi \times 4{,}06275, \qquad P = 2\pi \times 4{,}00000.$$

Bất đẳng thức E > P đã được xác nhận. Điều xác nhận này đối với giả thuyết của ta suy ra từ một khía cạnh mới, từ một nguồn khác và vì thế nó có một trọng lượng nào đó. Ta cũng thấy rằng:

$$(P - E)/E = -0{,}0155, \quad -\varepsilon^4/64 = 0{,}0064.$$

Sai số tương đối gần bằng 1,5%. Nó lớn hơn rất nhiều so với số hạng đầu trong biểu thức khai triển của nó nhưng lại có cùng dấu. Vì $\varepsilon = 4/5 = 0{,}8$ không phải là quá nhỏ cho nên nhận xét của ta có thể áp dụng vào toàn bộ vấn đề và nó làm ta càng tin vào giả thuyết.

Các công thức gần đúng giữ một vai trò quan trọng trong toán học ứng dụng. Khi muốn đánh giá một công thức trong thực tế, ta thường hay tiến hành theo cách làm ở mục này. Ta tính số hạng đầu tiên của biểu thức khai triển của sai số tương đối và bổ sung kết quả thu được bằng những kiểm tra bằng số, bằng các phân tích bằng tương tự v.v... Nói tóm lại, bằng những suy luận quy nạp không chứng minh.

3. Các giới hạn

Để thấy các suy luận quy nạp có tác dụng trong một lĩnh vực khác nữa, ta hãy xét bài toán sau:

Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ là một dãy bất kì các số dương. Chứng tỏ rằng:

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n} \right)^n \geq e.$$

Bài toán này đòi hỏi một số tri thức sơ bộ, đặc biệt là biết khái niệm "lim sup" hay "giới hạn trên của một dãy". Tuy nhiên, dù cho bạn có biết đầy đủ khái niệm này bạn vẫn có thể gặp một số khó khăn trong việc tìm cách chứng minh. Tôi xin khen ngợi sinh viên nào sau vài giờ, có thể tự lực giải được bài toán này.

4. Cố gắng bác bỏ

Ta hãy bắt đầu từ những vấn đề thông thường.

Giả thiết là gì? Chỉ có $a_n > 0$, ngoài ra không còn gì khác nữa.

Kết luận là cái gì? Trong bất đẳng thức này có e ở vế bên phải và giới hạn phức tạp ở vế bên trái.

Bạn đã biết một định lí nào đó cùng loại như thế chưa? Chưa. Điều này chẳng có gì giống với tất cả những cái mà tôi đã biết.

Có thể là định lí này đúng. Hay rất có thể là nó không đúng? Cố nhiên là nó không đúng. Thực tế, tôi không thể tin rằng từ một giả thiết rộng như thế, chỉ có $a_n > 0$, mà lại có thể suy ra một hệ quả chính xác như vậy được.

Người ta đòi hỏi bạn phải làm gì? Chứng minh định lí hay là bác bỏ nó. Tôi rất muốn bác bỏ nó.

Bạn có thể kiểm tra một trường hợp riêng nào đó của định lí không? Có, cái đó tôi có thể làm được.

(Để cho công thức được đơn giản, ta đặt:

$$\left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n = b_n$$

và ta sẽ viết $b_n \to b$ thay cho $\lim b_n = b$).

Tôi thử $a_n = 1$, với $n = 1, 2, 3, \ldots$ Khi đó

$$b_n = \left(\frac{1+1}{1}\right)^n = 2^n \to \infty.$$

Trong trường hợp này điều khẳng định trong định lí được xác nhận.

Tuy nhiên tôi có thể đặt $a_1 = 0$, $a_n = 1$, với $n = 2, 3, 4, \ldots$ Khi đó

$$b_n = \left(\frac{0+1}{1}\right)^n = 1^n \to 1 < e.$$

Định lí bị bác bỏ rồi! Không, không phải như thế. Giả thiết cho phép $a_1 = 0{,}00001$ nhưng cấm $a_1 = 0$. Thật đáng tiếc.

Tôi thử một số khác nào đó. Giả sử $a_n = n$. Khi đó

$$b_n = \left(\frac{1 + (n+1)}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \to e^2.$$

Bây giờ giả sử $a_n = n^2$. Khi đó

$$b_n = \left(\frac{1 + (n+1)^2}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{2}{n}.\frac{n+1}{n}\right)^n \to e^2.$$

Lại được xác nhận. Lại một lần nữa e^2. Vậy thì liệu có thể thay thế e ở vế phải bằng e^2 được không? Điều đó càng làm cho định lí thêm mạnh.

Tôi đưa vào thông số. Tôi sẽ lấy... Đúng tôi sẽ lấy $a_1 = c$, ở đây tôi có c, nhưng $a_n = n$ đối với $n = 2, 3, 4, \ldots$ khi đó

$$b_n = \left(\frac{c+(n+1)}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1+c}{n}\right)^n \to e^{1+c}$$

$1 + c$ bao giờ cũng lớn hơn e vì $c = a_1 > 0$. Tuy nhiên, e^{1+c} có thể gần bao nhiêu tuỳ ý vì e có thể nhỏ bao nhiêu cũng được. Tôi không thể bác bỏ, tôi không thể chứng minh.

Chỉ còn mỗi một cách thử. Tôi lấy $a_n = n^c$. Khi đó (ta bỏ qua một vài phép tính):

$$b_n = \left(\frac{1+(n+1)^c}{n^c}\right)^n \to \begin{cases} \infty \text{ nếu } 0 < c < 1, \\ e^2 \text{ nếu } c = 1, \\ e^c \text{ nếu } c > 1. \end{cases}$$

Lại một lần nữa giới hạn có thể tiến gần e bao nhiêu tuỳ ý nhưng bao giờ cũng lớn hơn e. Tôi không còn cách nào khác để hạ thấp giới hạn này xuống dưới e. Đã đến lúc phải thay đổi quan điểm.

5. Cố gắng chứng minh

Thực tế, những điều buộc ta *phải thay đổi quan điểm* có sức mạnh rất lớn. Dưới ánh sáng của những lí lẽ quy nạp đã tích luỹ được, triển vọng bác bỏ định lí rất mờ mịt, còn triển vọng chứng minh nó đã tương đối rõ ràng.

Vì thế không còn gì khác nữa ngoài việc bắt tay vào nghiên cứu định lí, cách phát biểu của nó, giả thiết của nó, kết luận của nó và những khái niệm liên quan với nó v.v... theo quan điểm mới.

Bạn có thể giảm nhẹ giả thiết được không? Không, tôi không thể làm được. Nếu tôi cho $a_n = 0$ thì kết luận không còn đúng nữa, định lí trở thành sai ($a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = 1$).

Bạn có thể làm cho kết luận mạnh thêm lên được không? Không được, tôi không thể làm nó mạnh thêm lên được bằng cách thay e bằng một số lớn nào đó, vì trong trường hợp này không còn đúng nữa, định lí trở thành sai (các thí dụ ở §4 trước).

Bạn đã xét đến tất cả những khái niệm quan trọng liên quan với bài toán chưa? Chưa, tôi chưa xét. Có thể là khó khăn từ đấy mà ra.

Bạn chưa xét những gì? Định nghĩa *lim sup*. Định nghĩa số *e*. Lim$\sup b_n$ là gì? Đó là giới hạn trên của dãy b_n khi $n \to \infty$.

Số *e* là gì? Tôi có thể định nghĩa số *e* bằng nhiều cách. Những thí dụ ở trên làm tôi nghĩ rằng, định nghĩa thông thường của *e* là định nghĩa tốt nhất:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Bạn có thể phát biểu định lí theo một cách khác không?

Bạn có thể phát biểu định lí dưới một hình thức dễ hiểu hơn được không?

Bạn có thể phát biểu kết luận theo một cách khác không? Kết luận gồm những gì? Kết luận có chứa e. Số *e* là gì? (Trên kia tôi đã trả lời câu hỏi này rồi).

Ồ, đúng, đây là kết luận:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

hay

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right]^n \geq 1.$$

Tình hình xem ra khá hơn!

Khi giả thiết được thoả mãn, kết luận có thể là sai được không? Có, đó là vấn đề của ta. Tôi đang nghĩ về vấn đề ấy. Tôi xét điều phủ nhận, đối lập hẳn với cái được khẳng định trong định lí. Tôi sẽ viết nó:

$$\limsup_{n\to\infty}\left[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right]^n < 1 \ (?).$$

Tôi đặt bên cạnh nó một dấu hỏi vì chính điểm này còn nghi ngờ. Tôi gọi nó là "công thức (?)". (?) có nghĩa là gì? Cố nhiên nó có nghĩa là có một số N, sao cho:

$$\left[\frac{n(a_1+a_{n+1})}{(n+1)a_n}\right]^n < 1 \text{ với } n \geq N.$$

Từ đó suy ra rằng:

$$\frac{n(a_1 + a_{n+1})}{(n+1)a_n} < 1 \text{ với } n \geq N.$$

Sau nữa, suy ra.... Tôi thử một cái gì đó. Đúng, tôi có thể viết điều đó một cách rất cân đối! Từ (?) suy ra rằng:

$$\frac{a_1}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_n}{n}$$

hay

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} < -\frac{a_1}{n+1} \text{ với } n \geq N.$$

Tôi sẽ viết điều này tỉ mỉ hơn. Từ đó suy ra rằng:

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n-1}}{n-1} < \frac{a_1}{n}$$

$$\frac{a_{n-1}}{n-1} - \frac{a_{n-2}}{n-2} < -\frac{a_1}{n-1}$$

$$\frac{a_{N+1}}{N+1} - \frac{a_N}{N} < -\frac{a_1}{N+1}$$

và như vậy

$$\frac{a_n}{n} < \frac{a_N}{N} - a_1\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{C} - a_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

trong đó C là một hằng số không phụ thuộc vào n, chỉ cần $n \geq N$. Điều đó hoàn toàn không có gì quan trọng trong thực tế:

$$C = \frac{N}{N} + a_1\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N}\right).$$

Cái quan trọng là n có thể lớn bao nhiêu cũng được, là chuỗi điều hoà phân kì. Vì thế, từ đó suy ra:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = -\infty.$$

Nhưng điều này dứt khoát mâu thuẫn với giả thiết $a_n > 0$ với $n = 1, 2, 3$... Nhưng dù sao mâu thuẫn này rõ ràng được suy ra từ công thức (?). Thế thì, quả thực công thức (?) là nguồn phát sinh mâu thuẫn. Công thức (?) không phù hợp với giả thiết $a_n > 0$; khẳng định đối lập với (?) phải là một khẳng định đúng - định lí đã được chứng minh!

6. Vai trò của giai đoạn quy nạp

Khi xét các chứng minh trên một cách hời hợt, ta có thể nghĩ rằng, giai đoạn thứ nhất, tức là giai đoạn quy nạp của cách giải (§4) nói chung không thể ứng dụng vào giai đoạn thứ hai, tức là giai đoạn chứng minh (§5) được. Thực ra, không phải thế. Giai đoạn quy nạp có ích lợi về nhiều mặt.

Thứ nhất, khi xét những trường hợp riêng cụ thể của định lí, cuối cùng ta đã hiểu được nó và nhận thức được ý nghĩa đầy đủ của nó. Ta đã tin rằng, giả thiết của nó có ý nghĩa quan trọng, kết luận của nó là đúng. Sự hiểu biết này có ích trong giai đoạn thứ hai: ta đã thấy rằng phải sử dụng toàn bộ giả thiết của nó và phải tính giá trị chính xác của hằng số.

Thứ hai, sau khi thấy định lí đúng trong nhiều trường hợp, ta đã có những lí lẽ quy nạp mạnh mẽ bênh vực cho nó. Giai đoạn quy nạp đã làm tiêu tan mối hoài nghi ban đầu của ta, nó làm cho ta tin tưởng mãnh liệt vào định lí. Không có niềm tin ấy chưa hẳn ta đã có đủ can đảm tìm cách chứng minh mà rõ ràng là đây hoàn toàn không phải là một công việc quen thuộc. "Khi bạn tin rằng định lí là đúng, bạn hãy bắt tay vào chứng minh nó" các nhà toán học lão luyện đã dạy thế.

Thứ ba, những thí dụ mà trong đó công thức giới hạn đối với e được viết ra ngày càng mới, đã có ta cơ sở chắc chắn để đi sâu vào công thức giới hạn này và đi sâu vào cách phát biểu của định lí. Và chính điều đó là bước quyết định trên con đường tìm lời giải.

Xét về toàn bộ thì giai đoạn quy nạp đi trước giai đoạn chứng minh là tự nhiên và hợp lí. Ban đầu bạn hãy phỏng đoán rồi thì bạn hãy chứng minh.

NHỮNG THÍ DỤ VÀ NHỮNG CHÚ THÍCH VỀ CHƯƠNG V

1. *Sau khi nhân các chuỗi*

$$(1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}x^4 + \ldots$$

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{x^5}{5} + \ldots$$

bạn sẽ tìm thấy những số hạng đầu tiên của biểu thức khai triển:

$$y = (1 - x^2)^{-1/2} \arcsin x = x + \frac{2}{3}x^3 + \dots$$

a) Hãy thêm mấy số hạng nữa và hãy thử dự đoán xem số hạng tổng quát sẽ như thế nào.

b) Hãy chứng tỏ rằng, y thoả mãn phương trình vi phân

$$(1 - x^2)y' - xy = 1$$

và hãy dùng phương trình này để chứng minh điều dự đoán.

2. *Sau khi nhân các chuỗi*

$$e^{x^2/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \dots$$

$$\int_0^x e^{-t^2/2}dt = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2.4}\frac{x^5}{5} - \dots$$

bạn sẽ tìm được những số hạng đầu tiên của biểu thức khai triển

$$y = e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}dt = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

a) Hãy tính thêm mấy số hạng và thử đoán xem số hạng tổng quát sẽ như thế nào.

b) Dự đoán của bạn nếu đúng sẽ đưa tới ý nghĩ rằng y thoả mãn một phương trình vi phân đơn giản. Hãy lập phương trình vi phân này và chứng minh điều dự đoán.

3. *Chuỗi luỹ thừa*

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{64}x^4 + \frac{25}{256}x^6 + \frac{1225}{16384}x^8 + \dots$$

thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) = \frac{1}{1+x} f\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

Bạn hãy kiểm tra những hệ số này, nếu thấy cần hãy xác định thêm mấy hệ số nữa và thử đoán xem số hạng tổng quát sẽ như thế nào.

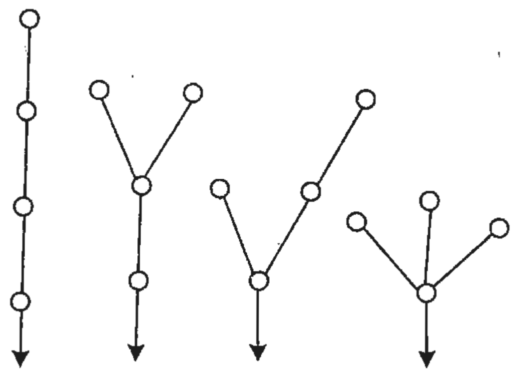
4. *Chuỗi luỹ thừa*

$$f(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

thoả mãn phương trình hàm

$$f(x) = 1 + \frac{x}{6}\left[f(x)^3 + 3f(x)f(x^2) + 2f(x^3)\right]$$

Người ta khẳng định rằng, a_n là số các hợp chất hoá học khác nhau về cấu trúc (rượu béo) có cùng một công thức hoá học $C_nH_{2n+1}OH$. Trong trường hợp $n = 4$ câu trả lời là đúng. Có $a_4 = 4$ loại rượu C_4H_9OH, chúng được biểu diễn trên hình 5.1, mỗi hợp chất được biểu diễn dưới dạng một "cây", mỗi C - dưới dạng một hình tròn hay một "nút" và gốc OH - dưới dạng mũi tên; H bị bỏ đi (*). Bạn hãy kiểm tra những giá trị khác của n.

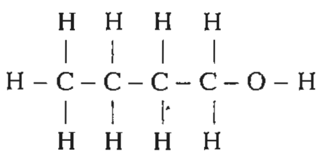


Hình 5.1. *Các hợp chất C_4H_9OH*

5. $$\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n-k}{k} = 1, 1, 0, -1, -1, 0$$

khi một cách tương ứng, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ *(mod 6).*

(*) Chẳng hạn như "cây" thứ nhất tương ứng với công thức cấu trúc



(rượu bu-ti-lic)

Chú thích của bản dịch tiếng Nga.

6. *Elip sẽ quét một phỏng cầu dẹp hay phồng tuỳ theo nó quay xung quanh trục lớn hay trục nhỏ.*

Đối với diện tích của phỏng cầu dẹp, ta có biểu thức đúng và gần đúng (a, b và ε như ở §2):

$$E = 2\pi ab(1-\varepsilon^2)^{1/2} + (\arcsin\varepsilon)/\varepsilon,$$

$$P = 4\pi(a^2 + 2b^2)/3.$$

Bạn hãy tìm:

a) Số hạng đầu của sai số tương đối.

b) Sai số tương đối khi b = 0.

Có thể nói gì về dấu của sai số tương đối?

7. *Đối với diện tích của phỏng cầu phồng, ta có biểu thức đúng và gần đúng:*

$$E = 2\pi a^2\left[1+\frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right],$$

$$P = \frac{4\pi(2a^2 + b^2)}{3}$$

Bạn hãy tìm

a) Số hạng đầu của sai số tương đối.

b) Sai số tương đối khi b = 0.

Có thể nói gì về dấu của sai số tương đối?

8. *Khi so sánh các thí dụ 6 và 7 bạn đã rút ra được công thức gần đúng nào cho diện tích của một elipxoit ba trục, có các nửa trục a, b và c?*

Có thể nói gì về dấu của sai số tương đối?

9. */§2/ Xuất phát từ phương trình tham số của elip: x = asint, y = bcost, hãy chứng minh rằng:*

$$E = 4a\int_0^{\pi/2}(1-\varepsilon^2\sin^2 t)^{1/2}dt = 2\pi a\left[1-\sum_1^{\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2\frac{\varepsilon 2n}{2n-1}\right]$$

từ đó, hãy tách những số hạng đầu đã được nêu ra không chứng minh ở §2.

10. *(tiếp theo) Bằng cách sử dụng biểu thức khai triển theo luỹ thừa của ε, hãy chứng minh rằng E > P đối với 0 < ε ≤ 1.*

11. *|§2| Xác định số α sao cho biểu thức:*

$$P'' = \alpha P + (1-\alpha)P'$$

càng gần đúng E bao nhiêu càng tốt đối với ε nhỏ (tức là bậc của số hạng đầu của biểu thức khai triển $(P''-E)/E$ càng cao càng tốt).

12. *(tiếp theo) Nghiên cứu biểu thức gần đúng qua P" theo phương pháp ở §2 (bằng quy nạp).*

13. *Giả sử cho số nguyên dương p và dãy các số dương $a_1, a_2, a_3,\dots a_n\dots$*

Chứng minh rằng:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(a_1+\frac{a_{n+p}}{a_n}\right)^n \geq e^p .$$

14. *(tiếp theo) Bạn hãy chỉ ra dãy $a_1, a_2, a_3,\dots$ thoả mãn đẳng thức.*

15. Giải thích các quy luật đã quan sát được

Người ta thường tìm được một phát minh trong vật lí học qua hai bước. Ban đầu, người ta nhận thấy có một quy luật nào đó trong các dữ kiện quan sát. Sau đó, quy luật này được giải thích như một hệ quả của một quy luật chung nào đó. Hai bước này có thể cách nhau một khoảng thời gian dài và chúng có thể do những người khác nhau tiến hành. Thí dụ rất rõ ràng về điểm này là Kepler và Newton: những quy luật chuyển động của các hành tinh do Kepler quan sát được và được giải thích bằng định luật hấp dẫn do Newton khám phá ra. Trong nghiên cứu toán học cũng có một cái gì tương tự như thế. Và đây là một thí dụ trong sáng nhất. Muốn hiểu thí dụ này cần có một số tri thức sơ bộ.

Bảng lôgarit thông thường có bốn chữ số thập phân chứa 900 định trị, cụ thể là định trị của các số nguyên từ 100 đến 999. Trước khi quan sát có thể bạn thường nghĩ rằng trong các bảng này ta sẽ gặp mười chữ số 0, 1, 2,..., 9, với số lần gần bằng nhau. Nhưng không phải thế; với tư cách là chữ số thứ nhất của định trị, rõ ràng là chúng xuất hiện không thường xuyên như nhau. Tính những định trị có cùng những chữ số đầu tiên, ta được bảng I (bạn hãy kiểm tra lại!) (xem bảng I).

Khi xét cột thứ hai của bảng I ta có thể thấy rằng mọi cặp gồm hai số liên tiếp nhau trong cột đó có tỉ số gần như nhau. Điều đó thúc đẩy ta tính những tỉ số này với nhiều chữ số thập phân: chúng được ghi vào cột cuối cùng của bảng.

Tại sao những tỉ số này lại gần bằng nhau? Dựa vào quy luật gần đúng đã quan sát được bạn hãy cố gắng phát hiện ra một quy luật chính xác nào đó. Các số trong cột thứ hai của bảng I xấp xỉ là các số hạng của một cấp số nhân. Bạn có thể khám phá ra một cấp số nhân đúng nào đó mà các số hạng của cấp số gần đúng liên hệ với nó một cách đơn giản không?

Bảng I - Các định trị có cùng chữ số đầu tiên trong các lôgarit với bốn chữ số thập phân

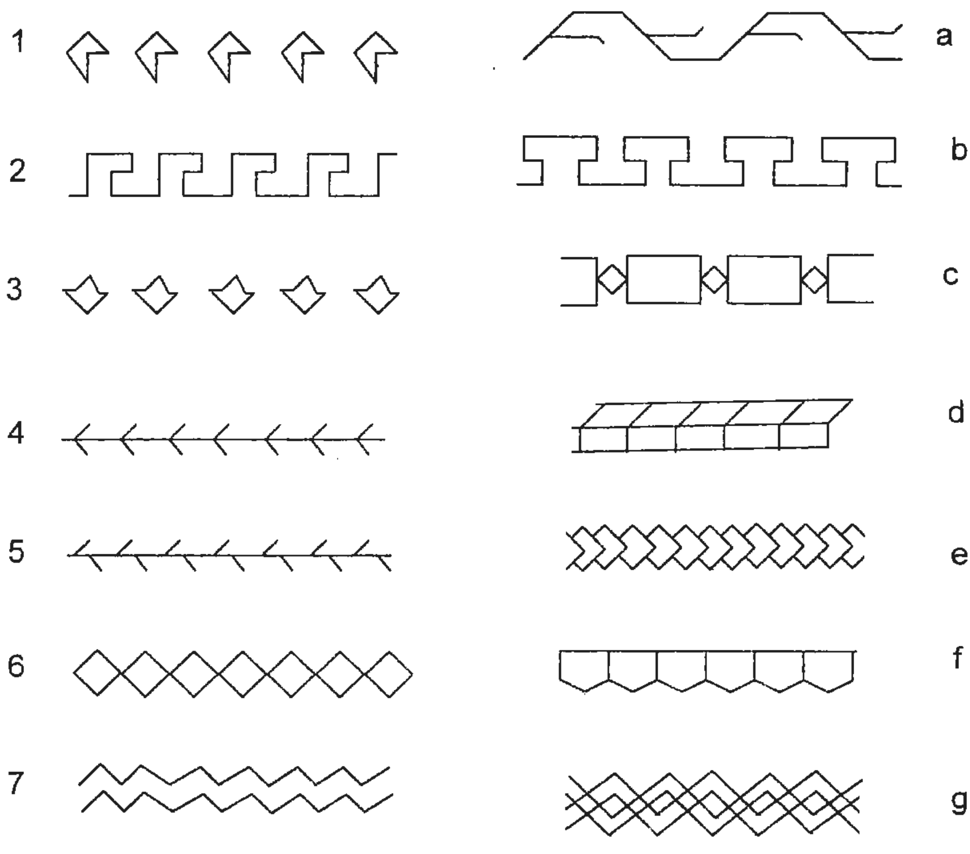
Chữ số đầu tiên	*Số các định trị*	*Tỉ số*
1	26	1,269
2	33	1,242
3	41	1,268
4	52	1,250
5	65	1,262
6	82	1,256
7	103	1,252
8	129	1,271
9	164	1,250
	205	
	Tổng cộng 900	

16. Phân loại các sự kiện quan sát được

Phần lớn công việc của nhà khoa học tự nhiên là mô tả và phân loại các sự vật mà ông ta quan sát. Trong một thời gian dài sau Lin-né, đây là công việc chủ yếu của nhà khoa học tự nhiên. Lúc đó, hoạt động chính của họ là mô tả những loài và giống cây động vật, phân loại lại những loài và giống đã biết. Các nhà khoa học tự nhiên không những chỉ mô tả và phân loại các cây và động vật mà còn mô tả và phân loại những đối tượng khác, đặc biệt là các khoáng chất, phân loại các tinh thể dựa trên sự đối xứng của chúng. Một sự phân loại tốt là quan trọng; nó đưa các đối tượng quan sát muôn hình muôn vẻ về một số nhỏ các loại được sắp xếp theo một trật tự nhất định và có những tính chất điển hình. Nhà toán học ít khi có thể cho phép mình thoả mãn với sự mô tả và phân loại. Nhưng điều đó cũng có thể xảy ra.

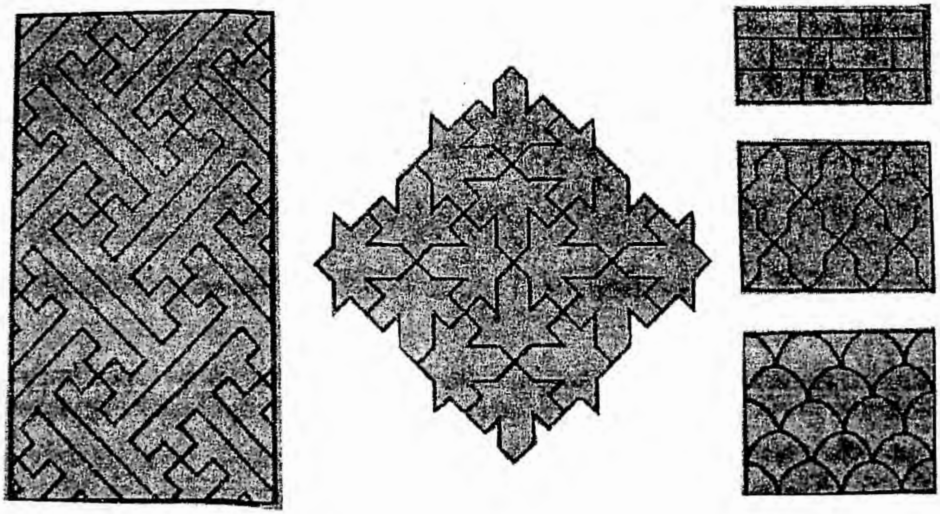
Nếu bạn đã biết một số khái niệm đơn giản của hình học phẳng (trục đối xứng, tâm đối xứng) thì bạn có thể lấy các mẫu thêu để giải trí một chút.

Hình 5.2 trình bày mười bốn dải thêu mà mỗi dải thêu có một hình đơn giản sắp xếp có chu kì dọc theo đường thẳng (nằm ngang). Ta gọi dải thêu ấy là "băng". Bạn hãy chọn cho mỗi "băng" ở phía bên trái (đánh dấu bằng số) một "băng" ở bên phải (đánh dấu bằng chữ) sao cho cả hai "băng" được chọn có cùng một loại đối xứng. Ngoài ra, bạn hãy nghiên cứu những dải thêu mà bạn có thể tìm thấy trên tất cả các loại đồ vật hay trên các công trình kiến trúc cổ và bạn hãy cố gắng chọn các dải thêu đó cho mỗi "băng" trên hình 5.2. Cuối cùng, bạn hãy lập một bảng danh sách đầy đủ các loại đối xứng khác nhau mà các "băng" có thể có và hãy mô tả cặn kẽ mỗi loại đối xứng đó. (Bạn hãy coi các "bảng" đó dài vô tận về cả hai phía, còn các hình ghép thì như được lặp lại vô số lần một cách có chu kì. Bạn sẽ thấy rằng, thuật ngữ "kiểu đối xứng" không phải là được định nghĩa một cách hình thức. Bạn sẽ tìm ra cách giải thích thích hợp cho thuật ngữ này. Đó là phần quan trọng của bài toán của bạn).



Hình 5.2. *Sự đối xứng của các băng*

17. *Bạn hãy tìm trên hình 5.3 hai mẫu thêu có cùng một kiểu đối xứng. Hãy hình dung mỗi mẫu thêu là nhiều mẫu ghép lại và bao phủ toàn bộ mặt phẳng.*



Hình 5.3. *Sự đối xứng của giấy bồi tường*

18. *Khác nhau ở cái gì?*

Hai mươi sáu chữ cái trong bộ chữ La-tinh được chia thành năm nhóm như sau:

AM T U V W Y

BC D E K

N S Z

H I O X

FG J L P Q R

Chúng khác nhau ở cái gì? Có thể có một cơ sở đơn giản cho sự phân loại nói trên không? (Bạn hãy xét năm phương trình:

$$y = x^2, \qquad y^2 = x, \qquad y = x^3, \qquad x^2 + 2y^2 = 1, \qquad y = x + x^4.$$

Chúng khác nhau ở cái gì?).

Chương VI

MỘT KHẲNG ĐỊNH TỔNG QUÁT HƠN

1. Euler

Trong tất cả những nhà toán học mà ta biết ít nhiều về các công trình của họ thì rõ ràng Euler là người quan trọng nhất đối với vấn đề mà ta nghiên cứu. Là bậc thầy của nghiên cứu quy nạp trong toán học, ông đã có những phát minh quan trọng (về các chuỗi vô hạn, trong lí thuyết số và trong lĩnh vực khác của toán học) nhờ quy nạp, tức là nhờ quan sát, phỏng đoán táo bạo và những xác nhận sáng suốt. Tuy nhiên, về mặt này, ngoài Euler, những nhà toán học khác, lớn hoặc nhỏ, trong công việc của mình cũng sử dụng quy nạp một cách rộng rãi.

Nhưng dầu sao đối với tôi, Euler vẫn là người duy nhất về một phương diện: ông cố gắng trình bày một cách cẩn thận, tỉ mỉ, rành mạch các lí lẽ quy nạp thuộc vấn đề nào đó. Ông đã trình bày một cách thuyết phục nhưng chân thực như một nhà bác học chân chính quen làm. Cách trình bày của ông là "cách trình bày thành thực những ý nghĩ dẫn ông tới các phát minh này" và có một sức hấp dẫn đặc biệt. Lẽ tự nhiên là, cũng như mọi tác giả khác, ông đã cố gắng thuyết phục độc giả của mình, nhưng là một tác giả thực sự xuất sắc, ông cố gắng thuyết phục họ chỉ bằng những lí lẽ mà chính ông đã dùng để thuyết phục mình.

Mục sau đây sẽ cho ta thấy Euler đã viết như thế nào. Đoạn hồi kí được chọn chỉ đòi hỏi một số ít tri thức sơ bộ và hoàn toàn dành để trình bày về suy luận và quy nạp.

2. Hồi kí của Euler

Hồi kí được dẫn ra ở đây trong bản dịch toàn văn, chỉ có một số thay đổi nhỏ cho dễ hiểu hơn đối với độc giả ngày nay.

PHÁT MINH RA ĐỊNH LUẬT LẠ NHẤT CỦA CÁC SỐ,
THUỘC VỀ TỔNG CÁC ƯỚC SỐ CỦA CHÚNG

1. Cho tới nay, các nhà toán học đã cố gắng phát hiện một trật tự nào đó trong dãy số nguyên tố. Và ta có đầy đủ cơ sở để tin rằng ở đây có một bí mật

nào đó mà trí tuệ loài người chưa tìm ra. Để thấy rõ điều đó chỉ cần nhìn vào bảng số nguyên tố mà một số người đã dày công tìm đến số trên 10 vạn và họ nhận ra rằng ở đây không có một trật tự, một quy tắc nào cả. Điều đó càng đáng ngạc nhiên hơn vì số học đã cho ta những quy tắc nhất định để kéo dài dãy các số nguyên tố ra bao nhiêu tuỳ ý, tuy nhiên ta vẫn không hề nhận thấy một tí vết tích gì về trật tự cả. Bản thân tôi, cố nhiên, vẫn còn xa mới đạt tới mục đích này nhưng tôi đã khám phá ra một định luật vô cùng kì lạ chi phối dãy tổng các ước số của các nguyên tố. Mới nhìn thì thấy dãy này không có quy tắc nào cả giống như dãy các số nguyên tố và theo một nghĩa nào đó dãy này bao hàm trong dãy các số nguyên tố. Định luật mà tôi sắp giải thích đây, theo tôi càng đặc sắc ở chỗ nó có một tính chất là ta có thể tin rằng nó đúng mà chưa chứng minh chặt chẽ. Dù sao, để bênh vực cho nó tôi sẽ trình bày những lí lẽ mà có thể coi như gần tương đương với sự chứng minh chặt chẽ.

2. Số nguyên tố không có ước số nào ngoài đơn vị và chính nó, đó là điều khác biệt giữa các số nguyên tố và các số khác. Chẳng hạn, 7 là số nguyên tố vì rằng nó chỉ chia hết cho đơn vị và cho chính nó. Các hợp số là những số mà ngoài đơn vị và chính nó ra, nó còn có những ước số khác. Chẳng hạn số 15, ngoài 1 và 15 ra còn có các ước số khác là 3 và 5. Một cách tổng quát, nếu p là số nguyên tố thì nó chỉ chia hết cho 1 và p, nhưng nếu p là hợp số thì ngoài 1 và p ra, nó còn có các ước số khác. Vì thế, trong trường hợp thứ nhất, tổng các ước số của p bằng $1 + p$, còn trong trường hợp thứ hai, tổng đó lớn hơn $1 + p$. Vì tôi định nghiên cứu tổng các ước số của các số khác nhau cho nên tôi sẽ dùng kí hiệu $\sigma(n)$(*) để chỉ tổng các ước số của số n. Chẳng hạn, $\sigma(12)$ chỉ tổng các ước số của 12, tức là của những số 1, 2, 3, 4, 6 và 12, do đó $\sigma(12) = 28$. Cũng bằng cách đó có thể thấy $\sigma(60) = 168$, $\sigma(100) = 217$. Vì đơn vị chỉ chia hết cho chính nó cho nên $\sigma(1) = 1$. Sau nữa, 0 (số không) chia hết cho tất cả các số. Vì thế, $\sigma(0)$ phải bằng vô hạn (tuy nhiên sau này tôi sẽ gán cho nó những giá trị hữu hạn khác nhau tuỳ từng trường hợp và điều đó là có ích).

3. Sau khi đã xác định giá trị của kí hiệu $\sigma(n)$ như trên, ta thấy rằng, nếu p là số nguyên tố thì $\sigma(p) = 1 + p$. Bên cạnh đó, $\sigma(1) = 1$ (chứ không phải bằng $1 + 1$). Từ đó ta thấy cần phải loại trừ 1 ra khỏi các dãy số nguyên tố: 1 là

(*) Euler là người đầu tiên dùng kí hiệu đối với tổng các ước số. Ông đã dùng kí hiệu $\int n$, chứ không phải kí hiệu $\sigma(n)$ như hiện nay.

số nguyên đầu tiên, không phải là số nguyên tố, cũng không phải là hợp số. Tuy nhiên, nếu là hợp số thì $\sigma(n)$ lớn hơn $1 + n$.

Trong trường hợp này, ta có thể dễ dàng tìm được $\sigma(n)$ theo các thừa số của n. Nếu $a, b, c, d,\ldots$ là những số nguyên tố thì dễ dàng thấy rằng:

$$\sigma(ab) = 1 + a + b + ab = (1 + a)\,(1 + b) = \sigma(a).\,\sigma(b)$$

$$\sigma(abc) = (1 + a)\,(1 + b)\,(1 + c) = \sigma(a).\,\sigma(b).\,\sigma(c)$$

$$\sigma(abcd) = \sigma(a).\,\sigma(b).\,\sigma(c).\,\sigma(d)$$

...

Ta cần có những quy tắc đặc biệt đối với luỹ thừa của các số nguyên, ví như:

$$\sigma(a^2) = 1 + a + a^2 = \frac{a^3-1}{a-1}$$

$$\sigma(a^2) = 1 + a + a^2 + a^3 = \frac{a^4-1}{a-1}$$

và tổng quát:

$$\sigma(a^n) = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

Dùng quy tắc này, ta có thể tìm được tổng các ước số của mọi số dù cho nó được lập nên bằng cách nào cũng vậy. Ta sẽ thấy điều này từ công thức:

$$\sigma(a^2b) = \sigma(a^2).\sigma(b)$$

$$\sigma(a^3b^2) = \sigma(a^3).\sigma(b^2)$$

$$\sigma(a^3b^4c) = \sigma(a^3).\sigma(b^4).\sigma(c)$$

và tổng quát:

$$\sigma(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta e^\varepsilon) = \sigma(a^\alpha).\,\sigma(b^\beta).\,\sigma(c^\gamma).\,\sigma(d^\delta).\,\sigma(e^\varepsilon).$$

Chẳng hạn, muốn tìm $\sigma(360)$, vì 360 có thể phân tích thành các thừa số $2^3.3^2.5$ nên ta có:

$$\sigma(360) = \sigma(2^3).\,\sigma(3^2).\,\sigma(5).$$

4. Để trình bày dãy tổng các ước số, tôi xin dẫn ra bảng sau đây(*) chứa tổng các ước số của tất cả các số nguyên từ 1 đến 99.

(*) Số ghi ở giao của dòng số 60 với cột số 7 là $\sigma(67)$. Nếu p là số nguyên tố thì $\sigma(p)$ được in đậm. Bảng đã được rút gọn so với nguyên bản.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-	1	3	**4**	7	**6**	12	**8**	15	13
10	18	**12**	28	**14**	24	24	31	**18**	39	**20**
20	42	32	36	**24**	60	31	42	40	56	**30**
30	72	**32**	63	48	54	48	91	**38**	60	56
40	90	**42**	96	**44**	84	78	72	48	124	57
50	93	72	98	**54**	120	72	120	**80**	90	**60**
60	168	**62**	96	104	127	84	144	**68**	126	96
70	144	**72**	195	**74**	114	124	140	96	168	**80**
80	186	121	126	**84**	224	108	132	120	180	**90**
90	234	112	168	128	144	120	252	**98**	171	156

Nhìn qua dãy các số này có lẽ ta sẽ thất vọng. Không có hi vọng tìm ra một tí trật tự nào cả. Tính thất thường của các số nguyên tố đã quán triệt sâu sắc bảng này thành ra nếu ta không biết định luật chi phối dãy bản thân các số nguyên tố thì ta đành phải thừa nhận rằng không tìm đâu ra được định luật chi phối dãy các số này. Dãy số ở trên hình như còn bí hiểm hơn cả dãy các số nguyên tố.

5. Mặc dù vậy, tôi đã nhận thấy rằng dãy này tuân theo một định luật hoàn toàn xác định và có thể coi nó là một dãy truy toán. Cách diễn đạt toán học này có nghĩa rằng mỗi số hạng có thể tính được theo các số hạng trước bằng một quy tắc không đổi nào đó. Thật vậy, nếu $\sigma(n)$ là một số hạng nào đó của dãy này, còn $\sigma(n-1)$, $\sigma(n-2)$, $\sigma(n-3)$, $\sigma(n-4)$, $\sigma(n-5)$... là những số hạng đứng trước nó thì tôi khẳng định rằng, bao giờ cũng có thể tính được giá trị $\sigma(n)$ theo một số số hạng đứng trước nó nhờ công thức sau:

$$\begin{aligned}\sigma(n) = {}& \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7)\\ &+ \sigma(n-12) + \sigma(n-15) - \sigma(n-22) - \sigma(n-26)\\ &+ \sigma(n-35) + \sigma(n-40) - \sigma(n-51) - \sigma(n-57)\\ &+ \sigma(n-70) + \sigma(n-77) - \sigma(n-92) - \sigma(n-100) + \ldots\end{aligned}$$

Ta phải nêu những nhận xét sau đối với công thức này:

I - Các dấu + và – ở vế phải công thức xen kẽ nhau từng cặp một:

$$\sigma(1) = \sigma(0) = 1 = 1$$

$$\sigma(2) = \sigma(1) + \sigma(0) = 1 + 2 = 3$$

$\sigma(3) = \sigma(2) + \sigma(1) = 3 + 1 = 4$

$\sigma(4) = \sigma(3) + \sigma(2) = 4 + 3 = 7$

$\sigma(5) = \sigma(4) + \sigma(3) - \sigma(0) = 7 + 4 - 5 = 6$

$\sigma(6) = \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1) = 6 + 7 - 1 = 12$

$\sigma(7) = \sigma(6) + \sigma(5) - \sigma(3) - \sigma(0) = 12 + 6 - 3 - 7 = 8$

$\sigma(8) = \sigma(7) + \sigma(6) - \sigma(3) - \sigma(1) = 8 + 12 - 4 - 1 = 15$

$\sigma(9) = \sigma(8) + \sigma(7) - \sigma(4) - \sigma(2) = 15 + 8 - 7 - 3 = 13$

$\sigma(10) = \sigma(9) + \sigma(8) - \sigma(5) - \sigma(3) = 13 + 15 - 6 - 4 = 18$

$\sigma(11) = \sigma(10) + \sigma(9) - \sigma(6) - \sigma(4) = 18 + 13 - 12 - 7 = 12$

$\sigma(12) = \sigma(11) + \sigma(10) - \sigma(7) - \sigma(5) + \sigma(0) =$

$= 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28$

$\sigma(13) = \sigma(12) + \sigma(11) - \sigma(8) - \sigma(6) + \sigma(1)$

$= 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14$

$\sigma(14) = \sigma(13) + \sigma(12) - \sigma(9) - \sigma(7) + \sigma(2)$

$= 14 + 28 - 13 - 8 + 3 = 24$

$\sigma(15) = \sigma(14) + \sigma(13) - \sigma(10) - \sigma(8) + \sigma(3) + \sigma(0)$

$= 24 + 14 - 18 - 15 + 4 + 15 = 24$

$\sigma(16) = \sigma(15) + \sigma(14) - \sigma(11) - \sigma(9) + \sigma(4) + \sigma(1)$

$= 24 + 24 - 12 - 13 + 7 + 1 = 31$

$\sigma(17) = \sigma(16) + \sigma(15) - \sigma(12) - \sigma(10) + \sigma(5) + \sigma(2)$

$= 31 + 24 - 28 - 18 + 6 + 3 = 18$

$\sigma(18) = \sigma(17) + \sigma(16) - \sigma(13) - \sigma(11) + \sigma(6) + \sigma(3)$

$= 18 + 31 - 14 - 12 + 12 + 4 = 39$

$\sigma(19) = \sigma(18) + \sigma(17) - \sigma(14) - \sigma(12) + \sigma(7) + \sigma(4)$

$= 39 + 18 - 24 - 28 + 8 + 7 = 20$

$\sigma(20) = \sigma(19) + \sigma(18) - \sigma(15) - \sigma(13) + \sigma(8) + \sigma(5)$

$= 20 + 39 - 24 - 14 + 15 + 6 = 42$

II - Định luật của các số 1, 2, 5, 7, 12, 15,... mà ta phải tính từ số *n* đang xét sẽ trở thành rõ ràng nếu ta lấy các hiệu của chúng.

Các số 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 70, 77, 92, 100,...

Các hiệu **1**, 3, **2**, 5, **3**, 7, **4**, 9, **5**, 11, **6**, 13, **7**, 15, **8**,...

Ở đây ta thấy tất cả các số nguyên 1, 2, 3, 4, 5, 6,... và các số lẻ 3, 5, 7, 9, 11,... xen kẽ nhau và vì thế ta có thể kéo dài dãy các số này ra mãi mãi.

III - Mặc dù dãy là vô tận nhưng trong mỗi trường hợp ta chỉ phải lấy những số hạng mà đối với chúng, những số đứng trong dấu σ hãy còn là dương và ta bỏ σ đối với những giá trị âm.

IV - Nếu trong công thức ta gặp kí hiệu σ(0) thì, vì bản thân giá trị của nó là vô định, ta lấy số *n* được xét để thay cho σ(0).

6. Sau những nhận xét này, ta có thể dễ dàng áp dụng công thức vào mọi trường hợp riêng đã cho và như vậy ai cũng có thể kiểm nghiệm để thấy rằng nó đúng bằng cách lấy bao nhiêu thí dụ cũng được. Và vì tôi không thể chứng minh nó một cách chặt chẽ nên tôi phải biện hộ cho nó bằng nhiều thí dụ (ở trang trước).

Tôi nghĩ rằng, những thí dụ này cũng đủ để buộc mọi người bỏ ý nghĩ cho rằng công thức của tôi chỉ phù hợp với chân lí một cách ngẫu nhiên đơn thuần.

7. Song, vì trong những thí dụ đã xét chỉ có sáu số đầu trong các số 1, 3, 5, 7, 12, 15, 22,... mà ta phải tính nên ai đó còn có thể nghi ngờ rằng chưa chắc định luật mà tôi nêu ra đã đúng với các số khác, ngoài các số nói trên. Như vậy, định luật này hãy còn chưa đủ vững chắc, cho nên tôi xin dẫn ra mấy thí dụ với các số lớn.

I - Cho số 101, tìm tổng các ước số của nó. Ta có:

$$\begin{aligned}\sigma(101) &= \sigma(100) + \sigma(99) - \sigma(96) - \sigma(94)\\ &\quad + \sigma(89) + \sigma(86) + \sigma(79) - \sigma(75)\\ &\quad + \sigma(66) + \sigma(61) + \sigma(50) - \sigma(44)\\ &\quad + \sigma(31) + \sigma(24) + \sigma(9) - \sigma(1)\\ &= 217 + 156 - 252 - 144 +\\ &\quad + 90 + 132 - 80 - 124 +\\ &\quad + 144 + 62 - 93 - 84 +\\ &\quad + 32 + 60 - 13 - 1\\ &= 893 - 791 = 102\end{aligned}$$

và từ đó có thể kết luận rằng 101 là số nguyên tố.

II- Cho số 301, tìm tổng các ước số của nó. Ta có:

Hiệu 1 3 2 5

$\sigma(301) = \sigma(300) + \sigma(299) - \sigma(296) - \sigma(294) +$

3 7 4 9

$+ \sigma(289) + \sigma(286) - \sigma(279) - \sigma(275) +$

5 11 6 13

$+ \sigma(266) + \sigma(261) - \sigma(250) - \sigma(244) +$

7 15 8 17

$+ \sigma(231) + \sigma(224) - \sigma(209) - \sigma(201) +$

9 19 10 21

$+ \sigma(184) + \sigma(175) - \sigma(156) - \sigma(146) +$

13 27 14

$+ \sigma(54) + \sigma(41) - \sigma(14) - \sigma(0).$

Qua thí dụ này, ta thấy rằng dùng các hiệu, có thể kéo dài công thức khi cần. Sau khi thực hiện các phép tính, ta được:

$$\sigma(301) = 4939 - 4587 = 352.$$

Từ đó, ta thấy rằng, 301 không phải là số nguyên tố. Thật vậy $301 = 7\times43$ và ta có:

$$\sigma(301) = \sigma(7)\times\sigma(43) = 8\times44 = 352$$

như quy tắc của ta đã cho thấy.

8. Những thí dụ tôi vừa xét ở trên đã làm tiêu tan mọi mối nghi ngờ rằng công thức của tôi chưa chắc đúng. Tính chất tuyệt mĩ này của các số càng đáng ngạc nhiên ở chỗ ta không cảm thấy một mối liên hệ có lí nào giữa cấu trúc của công thức của tôi và bản chất của các ước số với tổng mà ta vừa xét. Dãy các số 1, 2, 5, 7, 12, 15,... hình như là không liên quan gì tới vấn đề đang xét. Hơn nữa, vì định luật của các số này "đứt quãng từng hồi" và thực tế chúng là một hỗn hợp của hai dãy có quy luật đều đặn: 1, 5, 12, 22, 35, 51,... và 2, 7, 15, 26, 40, 57,... ta không thể hi vọng tìm thấy tính chất không đều đặn đó trong giải tích. Việc không chứng minh được còn làm cho ta ngạc nhiên hơn nữa bởi vì hầu như hoàn toàn không thể khám phá ra được tính chất đó, nếu như không dựa vào một phương pháp vững chắc nào đó có thể thay thế cho phép chứng minh chặt chẽ. Ta thừa nhận rằng không phải thuần tuý ngẫu nhiên mà tôi đi tới phát minh này nhưng một mệnh đề khác đã mở ra con đường đi tới tính chất tuyệt mĩ này, một mệnh đề khác cùng tính chất mà ta phải thừa nhận là đúng mặc dù tôi không chứng minh được nó. Và mặc dù ở đây ta xét tính chất các số nguyên, trong đó phép tính các vô cùng bé không thể áp dụng được, song tôi đã suy ra được kết luận của mình nhờ các phép lấy vi phân và một số mưu mẹo khác. Tôi chúc mừng một người nào đó tìm ra con đường ngắn hơn, tự nhiên hơn và có thể là, việc xét con đường mà tôi đã đi ở đây sẽ có chút ít có ích nào đó.

9. Nhiều năm về trước, khi xét sự phân hoạch các số tôi đã nghiên cứu biểu thức:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)(1-x^8)\ldots$$

trong đó tích được coi là vô hạn. Để thấy kết quả là một chuỗi loại nào, thực tế, tôi đã nhân một số lớn các thừa số với nhau và tìm được:

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots$$

Dãy các số mũ của luỹ thừa x trùng với dãy các số có trong công thức đã dẫn ra ở trên; các dấu + và - xen kẽ nhau từng cặp một. Chỉ cần thực hiện phép nhân này và kéo dài nó bao nhiêu tuỳ ý để thấy rằng chuỗi này là đúng. Tuy nhiên, tôi không có một lí lẽ nào khác để chứng minh cho điều đó ngoài phép quy nạp dài mà tôi áp dụng khá xa đến mức không có cách nào làm tôi có thể nghi ngờ định luật chi phối sự hình thành các số hạng này và các luỹ thừa của chúng. Trong một thời gian dài, tôi đã tìm cách chứng minh chặt chẽ sự bằng nhau giữa chuỗi này và tích vô hạn $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$ đã viết ở trên và tôi cũng đã trình bày vấn đề này với một số bạn bè mà khả năng của họ về mặt này thì tôi đã biết trước. Nhưng tất cả những người ấy đều đồng ý với tôi rằng, phép biến đổi tích này thành chuỗi là đúng, mặc dù không một người nào tìm ra được chiếc chìa khoá để chứng minh. Như vậy, đây là một chân lí đã nhận thức được nhưng vẫn chưa được chứng minh, nếu ta đặt:

$$s=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ldots$$

thì có thể biểu diễn đại lượng s này bằng cách sau:

$$s=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots$$

Vì mỗi người chúng ta có thể tin vào chân lí này sau khi đã nhân một số lớn bao nhiêu tuỳ ý các thừa số với nhau và hình như không thể là định luật đã được thoả mãn với 20 số hạng chẳng hạn lại không được thoả mãn với số các số hạng sau.

10. Vì bằng cách đó ta đã thấy hai biểu thức vô hạn này bằng nhau mặc dù không thể chứng minh được điều đó, tất cả các kết luận có thể suy ra từ đó cũng sẽ có cùng một bản chất, tức là sẽ đúng nhưng không chứng minh được. Hoặc là nếu có thể chứng minh được một trong những kết luận này thì có nghĩa là ta đã có chiếc chìa khoá để chứng minh sự bằng nhau đó. Và với ý đồ đó, tôi đã vận dụng nhiều phương pháp khác nhau vào hai biểu thức này và bằng cách đó, bên cạnh những phát minh khác, tôi đã đi tới phát minh mà tôi đã giải thích ở trên; vì thế, phát minh đó cũng như sự bằng nhau giữa hai biểu thức vô hạn này phải đều hiển nhiên đúng. Tôi đã làm như sau. Giả sử đã cho hai biểu thức sau đây bằng nhau:

$$s = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ldots$$

$$s = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots$$

Tôi tránh các thừa số ở biểu thức thứ nhất bằng cách lấy lôgarit:

$$\ln s = \ln(1-x) + \ln(1-x^2) + \ln(1-x^3) + \ln(1-x^4) + \ldots$$

Để tránh các lôgarit, tôi lấy vi phân và được đẳng thức:

$$-\frac{1}{s}\frac{ds}{dx} = -\frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2} - \frac{3x^2}{1-x^3} - \frac{4x^3}{1-x^4} - \frac{5x^4}{1-x^5} - \ldots$$

hay:

$$-\frac{x}{s}\frac{ds}{dx} = -\frac{x}{1-x} - \frac{2x^2}{1-x^2} - \frac{3x^3}{1-x^3} - \frac{4x^4}{1-x^4} - \frac{5x^5}{1-x^5} - \ldots$$

Từ biểu thức thứ hai đối với s dưới dạng chuỗi vô hạn, ta được một giá trị khác của chính đại lượng đó:

$$-\frac{x}{s}\frac{ds}{dx} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{25} + x^{22} + x^{26} - \ldots}$$

11. Ta đặt:

$$-\frac{x}{s}\frac{ds}{dx} = t$$

Ở trên ta có hai biểu thức đối với đại lượng t. Trong biểu thức thứ nhất, tôi phân tích mỗi số hạng thành một cấp số nhân và tôi được:

$$
\begin{aligned}
t = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \dots \\
+ 2x^2 \quad + 2x^4 \quad + 2x^6 \quad + 2x^8 + \dots \\
+ 3x^3 \quad + 3x^6 \quad + \dots \\
+ 4x^4 \quad + 4x^8 + \dots \\
+5x^5 \quad + \dots \\
+ 6x^6 \quad + \dots \\
+ 7x^7 + \dots \\
+ 8x^8 + \dots
\end{aligned}
$$

Ở đây, ta dễ dàng thấy rằng, mỗi luỹ thừa x xuất hiện bao nhiêu lần thì số mũ của nó có bấy nhiêu ước số, mỗi ước số xuất hiện với tư cách là hệ số của cùng một luỹ thừa x. Thành thử, nếu ta tập hợp những số hạng có những luỹ thừa giống nhau thì hệ số của mỗi luỹ thừa x sẽ là tổng của các ước số của số mũ của luỹ thừa. Do đó, nếu dùng kí hiệu $\sigma(n)$ đã được đưa vào ở trên đối với tổng các ước số của n, tôi được:

$$t = \sigma(1)x + \sigma(2)x^2 + \sigma(3)x^3 + \sigma(4)x^4 + \sigma(5)x^5 + \dots$$

Định luật của chuỗi đã hiển nhiên. Và mặc dù phép quy nạp có tham gia vào việc xác định các hệ số, ta có thể dễ dàng tin rằng, định luật này là một hệ quả tất yếu.

12. Do việc xác định t, công thức cuối cùng trong 10 có thể viết như sau:

$$
\begin{aligned}
&t(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots) - \\
&\quad - x - 2x^2 + 5x^5 + 7x^7 - 12x^{12} - 15x^{15} + 22x^{22} + 26x^{26} - \dots = 0.
\end{aligned}
$$

Sau khi thay t bằng giá trị ta vừa thu được ở cuối 11, ta có:

$$
\begin{aligned}
0 = \sigma(1)x + \sigma(2)x^2 + \sigma(3)x^3 + \sigma(4)x^4 + \sigma(5)x^5 + \sigma(6)x^6 + \dots \\
- x - \sigma(1)x^2 - \sigma(2)x^3 - \sigma(3)x^4 + \sigma(4)x^5 + \sigma(5)x^6 - \dots \\
- 2x^2 - \sigma(1)x^3 - \sigma(2)x^4 + \sigma(3)x^5 + \sigma(4)x^6 - \dots \\
+ 5x^5 \quad + \sigma(1)x^6 + \dots
\end{aligned}
$$

Bằng cách rút gọn những số hạng đồng dạng, ta tìm được hệ số của mọi luỹ thừa x đã cho. Hệ số này có nhiều số hạng. Trước hết, có xuất hiện tổng các ước số của số mũ của luỹ thừa x rồi đến tổng các ước số của mấy số nhỏ hơn mà ta có được bằng cách trừ liên tiếp 1, 3, 5, 7, 12, 15, 22, 26, ... vào số mũ này của luỹ thừa. Cuối cùng, nếu số mũ của luỹ thừa thuộc về dãy này thì tự nó sẽ xuất hiện. Không cần thiết phải giải thích một lần nữa các dấu của các số hạng vừa mới tính được. Do đó, nói chung, hệ số của x sẽ là:

$$\sigma(n) - \sigma(n-1) - \sigma(n-2) + \sigma(n-5) + \sigma(n-7) - \sigma(n-12) - \sigma(n-15) + \ldots$$

Cứ tiếp tục như vậy chừng nào mà số dưới dấu sigma vẫn còn là số không âm. Tuy nhiên, nếu có xuất hiện số hạng $\sigma(0)$ ta phải thay nó bằng n.

13. Vì tổng của chuỗi vô hạn xét trong mục 12 bằng 0 cho nên dù giá trị của x là như thế nào chăng nữa, hệ số của mỗi luỹ thừa riêng lẻ của x cũng phải bằng 0. Do đó, ta được một định luật mà tôi đã giải thích trong mục 5 ở trên, tức là định luật chi phối các tổng của các ước số và nó giúp ta tính bằng cách truy toán các ước số của tất cả các số. Trong kết luận trên, ta có thể tìm được một cơ sở nào đó cho các dấu, một cơ sở nào đó cho dãy số:

1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, 51, 57, 70, 77...

và đặc biệt là cơ sở cho biết vì sao ta phải thay chính số n cho $\sigma(0)$ và điều đó có thể là tính chất kì lạ nhất của quy tắc của tôi. Suy luận này tuy chưa phải là sự chứng minh đầy đủ nhưng tuyệt nhiên không gây ra một nghi hoặc nào đối với định luật kì lạ mà tôi đã giải thích ở đây.

3. Chuyển sang quan điểm tổng quát hơn

Bài của Euler dẫn ra ở trên vô cùng có ích. Từ đó, ta có thể rút ra nhiều hiểu biết về toán học, hay về tâm lí học của sự phát minh hay về các suy luận quy nạp. Những thí dụ và những nhận xét ở cuối chương này sẽ giúp ta nghiên cứu một số quan niệm toán học của Euler nhưng bây giờ ta muốn chú ý tới suy luận quy nạp của ông.

Định lí mà Euler nghiên cứu đặc sắc về mấy phương diện và đến bây giờ vẫn có giá trị toán học to lớn. Tuy nhiên, ở đây ta quan tâm đến nội dung toán học không nhiều bằng quan tâm đến những lí lẽ đã buộc Euler tin ở định lí này khi nó vẫn chưa được chứng minh. Để hiểu rõ hơn bản chất của những lí lẽ này, tôi sẽ không chú ý đến nội dung toán học trong hồi kí của Euler mà chỉ nêu lên một lược đồ, nhấn mạnh một số phương diện tổng quát của suy luận quy nạp của ông.

Vì ta bỏ qua nội dung toán học của một số định lí mà ta phải xét cho nên để cho tiện lợi, ta sẽ kí hiệu chúng bằng các chữ cái T, T*, C_1, C_2,..., C_1^*, C_2^*... Độc giả có thể hoàn toàn không cần biết đến ý nghĩa của những chữ cái này.

Nhưng nếu bạn muốn tìm kiếm chúng trong hồi kí của Euler thì đây là chìa khoá. T là định lí

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$

Định luật của các số 1, 2, 5, 7, 12, 15,... đã được giải thích trong §2, mục 5, 11.

C_n là mệnh đề khẳng định rằng các hệ số của x_n ở cả hai vế của đẳng thức trước là như nhau. Chẳng hạn, C_6 khẳng định rằng, sau khi khai triển tích ở vế trái của đẳng thức, hệ số của x^6 bằng 0. Chú ý rằng C_n là hệ quả của định lí T.

C_{n*} là đẳng thức

$$\sigma(n) = \sigma(n-1) + \sigma(n-2) - \sigma(n-5) - \sigma(n-7) + \ldots$$

đã được giải thích tỉ mỉ ở §2, mục 5. Chẳng hạn, C_{6*} khẳng định rằng:

$$\sigma(6) = \sigma(5) + \sigma(4) - \sigma(1)$$

T* là "định luật kì lạ nhất" khẳng định rằng, tất cả C_1^*, C_2^*, C_3^*, ... là đúng. Chú ý rằng C_{n*} là hệ quả (trường hợp riêng) của định lí $T*$.

4. Lược đồ hồi kí của Euler

Định lí T có tính chất là ta có thể tin ở sự đúng đắn của nó trong khi chưa đưa ra một chứng minh chặt chẽ. Song do lợi ích của nó, tôi xin trình bày những lí lẽ mà ta có thể coi gần như tương đương với sự chứng minh chặt chẽ.

Định lí T bao hàm vô số các trường hợp riêng C_1, C_2, C_3... Ngược lại, tập hợp vô hạn các trường hợp riêng C_1, C_2, C_3... tương đương với định lí T. Nhờ một phép tính đơn giản, ta có thể biết C_1 có đúng hay không. Một phép tính khác cho biết C_2 có đúng hay không và bằng một phép tương tự như vậy đối với C_3 v.v... Tôi đã làm những phép tính này và thấy tất cả C_1, C_2, C_3,... C_{40} đều đúng. Chỉ cần thực hiện những phép tính này và kéo dài chúng ra xa bao nhiêu tuỳ ý để tin rằng, dãy được kéo dài vô hạn này là đúng. Tuy nhiên, để làm điều đó, tôi không có một lí lẽ nào, trừ phép quy nạp mà tôi đã áp dụng mãi đến khi mà tôi không thể nghi ngờ tí nào vào định luật mà C_1, C_2, C_3... là những trường hợp riêng. Tôi đã tìm cẩn thận và lâu dài cách chứng minh chặt chẽ cho định lí T và tôi đã trình bày vấn đề này với một số bạn bè mà tôi biết rõ khả năng của họ về mặt này nhưng tất cả đều đồng ý với tôi rằng định lí T là đúng mặc dù không một người nào tìm được cách chứng minh. Như vậy, đây là một chân lí đã nhận thức được nhưng chưa chứng minh được vì rằng mỗi người chúng tôi đều khảo nghiệm được chân lí này bằng cách tính thực tế một số lớn bao nhiêu cũng được các trường hợp C_1, C_2, C_3,... và hình như không thể xảy ra là định luật được thoả mãn, chẳng hạn với 20 số hạng, lại không được thoả mãn với những số số hạng sau.

Vì bằng cách đó, ta thấy rằng định lí *T* là đúng mặc dù không chứng minh được nó, tất cả những kết luận có thể suy ra từ nó có cùng một tính chất là chúng đều đúng nhưng không được chứng minh. Hoặc là nếu có thể chứng minh được một trong những kết luận này thì ngược lại có thể tìm được cách chứng minh định lí *T*. Và chính với ý đồ đó, tôi đã vận dụng nhiều phương pháp khác nhau vào định lí *T* và bên cạnh những phát minh khác, tôi tìm thấy *định lí T**, định lí này cũng phải hiển nhiên đúng như định lí *T* vậy.

Các định lí T và T là tương đương, cả hai hoặc đều đúng, hoặc đều không đúng. Chúng cũng đứng vững với nhau hoặc cùng sụp đổ với nhau. Tương tự như T, định lí T* bao hàm vô số trường hợp riêng* C_1^*, C_2^*, C_3^*,... *và dãy các trường hợp riêng này tương đương với định lí T*. Ở đây, phép tính đơn giản lại một lần nữa cho thấy rằng* C_1^* *có đúng hay không. Bằng cách tương tự có thể xác định được* C_2^* *có đúng hay không v.v...* Dễ dàng ứng dụng định lí *T** vào mọi trường hợp riêng đã cho và như vậy, ai cũng có thể khảo nghiệm rằng nó đúng qua bao nhiêu thí dụ mà ta muốn cũng được. Và vì tôi phải thừa nhận rằng mình không thể chứng minh được nó một cách chặt chẽ cho nên tôi phải dùng một số lớn các thí dụ C_1^*, C_2^*, C_3^*,..., C_{20}^* để biện hộ cho nó. Tôi nghĩ, những thí dụ này cũng đủ để buộc mọi người phải từ bỏ quan niệm cho rằng quy tắc của tôi chỉ phù hợp với chân lí một cách ngẫu nhiên đơn thuần.

Nếu còn có người nghi ngờ rằng, định luật chỉ vẻn vẹn như tôi đã nêu ra, tôi xin dẫn ra một số thí dụ với các số lớn. *Bằng cách kiểm tra tôi đã thấy rằng* C_{101}^* *và* C_{301}^* *là đúng và như vậy, tôi đã thấy định lí T là đúng ngay cả với những trường hợp khác xa với những trường hợp mà tôi đã kiểm nghiệm trước kia.* Những thí dụ mà tôi vừa phân tích sẽ đánh tan mọi mối hoài nghi có thể có về các định lí *T* và *T** đúng hay sai.

NHỮNG THÍ DỤ VÀ CHÚ THÍCH VỀ CHƯƠNG VI

Sau khi khám phá ra "định luật kì lạ nhất của các số", Euler đã "rút ra kết luận của mình nhờ phép vi phân và một số mưu mẹo khác" mặc dù "Phép tính các vô cùng bé hình như không thể áp dụng vào các số nguyên". Để hiểu phương pháp của Euler, ta hãy áp dụng nó vào các thí dụ tương tự. Ta bắt đầu từ chỗ đặt tên cho "mưu mẹo" chính hay công cụ toán học của ông.

1. Các hàm dẫn xuất

Ta hãy diễn đạt kết quả của mục 11 trong hồi kí của Euler qua các kí hiệu hiện nay vẫn dùng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}=\sigma(1)x+\sigma(2)x^2+\ldots+\sigma(n)x^n+\ldots$$

Trong vế phải của đẳng thức có chuỗi luỹ thừa của x. Hệ số của x^n trong chuỗi luỹ thừa này là $\sigma(n)$ tức là tổng các ước số của n. Có hai vế của đẳng thức biểu diễn cùng một hàm của x. Sự khai triển hàm này theo luỹ thừa của x sẽ "dẫn tới" dãy $\sigma(1)$, $\sigma(2)$,..., $\sigma(n)$... Như vậy, ta gọi hàm này là hàm dẫn xuất của dãy $\sigma(n)$. Tổng quát, nếu:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

thì ta nói rằng f(x) là hàm dẫn xuất đối với a_n hay là hàm dẫn tới dãy a_0, a_1, a_2,..., a_n...

Danh từ "hàm dẫn xuất" do Laplace đặt ra. Tuy nhiên, trong khi chưa đặt tên cho nó, Euler đã sử dụng công cụ của các hàm dẫn xuất trước Laplace khá lâu trong một số tác phẩm, và ta vừa tìm hiểu một trong những tác phẩm đó ở §2. Ông đã ứng dụng công cụ toán học này vào nhiều bài toán giải tích tổ hợp và lí thuyết số.

Hàm dẫn xuất là một cơ cấu gần giống như cái túi. Mang nhiều vật nhỏ có thể rất khó, ta bỏ chúng vào một cái túi và lúc đó ta chỉ cần phải mang một vật là cái túi. Hoàn toàn tương tự như vậy, đáng lẽ phải xét riêng từng số hạng của dãy a_0, a_1, a_2,..., a_n... ta đặt chúng vào chuỗi luỹ thừa $\sum a_nx_n$ và khi đó ta chỉ phải xét một đối tượng toán học là chuỗi luỹ thừa.

2. *Hãy tìm hàm dẫn xuất đối với n. Cũng vậy, hãy tìm tổng các chuỗi $\sum nx_n$.*

3. *Cho f(x) là hàm dẫn xuất của dãy a_0, a_1, a_2,..., a_n... Hãy tìm hàm dẫn xuất của dãy:*

$$0a_0,\ 1a_1,\ 2a_2,\ldots,\ na_n.$$

4. *Cho f(x) là hàm dẫn xuất của dãy a_0, a_1, a_2,..., a_n,... Hãy tìm hàm dẫn xuất của dãy 0, a_0, a_1, a_2,..., a_{n-1}.*

5. *Cho f(x) là hàm dẫn xuất của dãy a_n. Hãy tìm hàm dẫn xuất của dãy:*

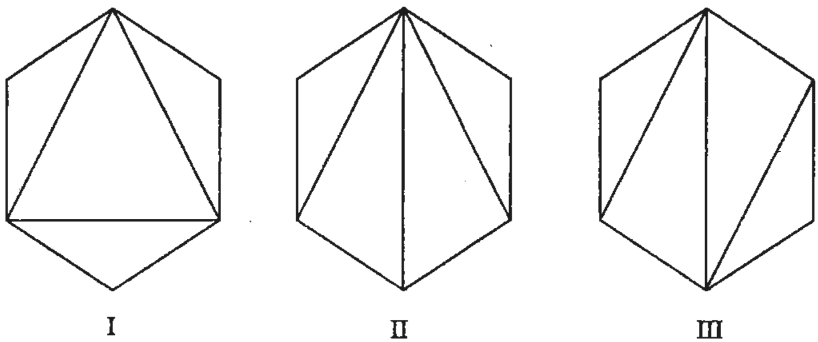
$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

6. *Cho f(x) và g(x) là những hàm dẫn xuất tương ứng đối với a_n và b_n. Hãy tìm hàm dẫn xuất đối với:*

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0.$$

7. Một bài toán tổ hợp của hình học phẳng

$n-3$ đường chéo của một đa giác lồi n cạnh chia nó thành $n-2$ tam giác, xem hình 6.1. Ta gọi D_n là số cách chia khác nhau.



Hình 6.1. *Ba cách cắt hình lục giác*

Hãy tìm D_n đối với $n = 3, 4, 5, 6$.

8. *(tiếp theo) Dựa trên những giá trị bằng số đã xét trong thí dụ 7 để đoán ra được biểu thức chung đối với D_n thì không phải dễ. Tuy nhiên, dãy D_3, D_4, D_5,... là "dãy truy toán" theo nghĩa rất tổng quát sau: mỗi số hạng của nó có thể tính được theo những số hạng đứng trước nó theo một quy tắc không đổi tức là "công thức truy toán" (xem hồi kí của Euler mục 5).*

Theo định nghĩa, bạn hãy đặt $D_2 = 1$ và chứng tỏ rằng đối với $n \geq 3$:

$$D_n = D_2D_{n-1} + D_3D_{n-2} + D_4D_{n-3} + \ldots + D_{n-1}D_2$$

(Hãy dựa vào hình 6.2 kiểm tra những trường hợp đầu).

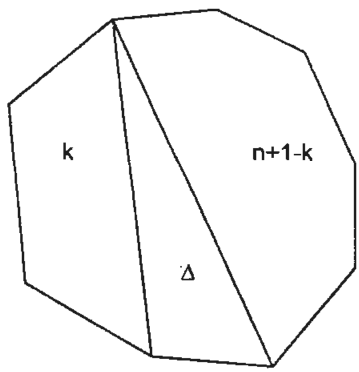
9. *(tiếp theo) Cách chứng minh biểu thức đối với D_n suy ra từ công thức truy toán ở thí dụ 8 không được hiển nhiên. Tuy nhiên, bạn hãy xét hàm dẫn xuất:*

$$g(x) = D_2x^2 + D_3x^3 + D_4x^4 + \ldots + D_nx^n.$$

Bạn hãy chứng tỏ rằng $g(x)$ thoả mãn phương trình bậc hai và từ đó suy ra:

$$D_n = \frac{2}{2}\frac{6}{3}\frac{10}{4}\frac{14}{5}\cdots\frac{4n-10}{n-1}$$

đối với $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$



Hình 6.2. *Nguyên tắc cắt đa giác n cạnh*

10. Tổng các bình phương

Hãy nhớ lại định nghĩa của kí hiệu $R_k(n)$ (thí dụ 4.1) kéo dài nó cho trường hợp $n = 0$ với giả thiết rằng $R_k(0) = 1$ (một sự kéo dài hợp lí), xét hàm dẫn xuất:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_3(n)x^n = R_k(0) + R_k(1)x + R_k(2)x^2 + \ldots$$

và chứng tỏ rằng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_2(n)x^n = (1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \ldots)^3$$

$R_3(n)$ là gì? Số nghiệm u, v, w, nguyên, dương, âm hay bằng 0 của phương trình:

$$u^2 + v^2 + w^2 = n$$

Chuỗi trong vế phải của đẳng thức mà bạn cần chứng minh giữ vai trò gì?

$$1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \ldots = \sum_{u=-\infty}^{\infty} x^{u^2} = \sum_{n=0}^{\infty} R_1(n)x^n$$

Bạn quan niệm vế phải của đẳng thức mà bạn phải chứng minh như thế nào? Có thể là:

$$\sum x^{u^2} . \sum x^{v^2} . \sum x^{w^2}$$

11. *Khái quát kết quả của thí dụ 10.*

12. *Hãy nhớ lại định nghĩa của kí hiệu $S_k(n)$ (thí dụ 4.1) và biểu diễn hàm dẫn xuất:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_k(n)x^n .$$

13. *Dùng thí dụ 11, hãy chứng minh rằng $R_2(n)$ chia hết cho 4, $R_4(n)$ chia hết cho 8 và $R_8(n)$ chia hết cho 16, với $n \geq 1$ (Ta được dùng kết quả này trong chương IV, bảng II và III).*

14. *Dùng thí dụ 12, chứng minh rằng:*

$S_2(n) = 0$ nếu n không phải là số dạng $8m + 2$,

$S_4(n) = 0$ nếu n không phải là số dạng $8m + 4$,

$S_8(n) = 0$ nếu n không phải là số dạng $8m$.

15. *Dùng thí dụ 11, chứng minh rằng:*

$$R_{k+l}(n) = R_k(0)R_l(n) + R_k(1)R_l(n-1) + \dots + R_k(n)R_l(0).$$

16. *Chứng minh rằng:*

$$R_{k+l}(n) = S_k(1)S_l(n-1) + S_k(2)S_l(n-2) + \dots + S_k(n-1)R_l(1).$$

17. *Bạn hãy nêu ra một phương pháp đơn giản để lập bảng III và IV theo các bảng I và II của cùng chương này.*

18. *Giả sử $\sigma_k(n)$ là tổng bậc k của các ước số của n. Chẳng hạn:*

$$\sigma_3(15) = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 15^3 = 3528$$

$$\sigma_1(n) = \sigma(n)$$

1) Hãy chứng tỏ rằng, từ các giả thuyết tìm được trong §4.6 và trong thí dụ 4.23, suy ra rằng:

$$\sigma(1)\sigma(2u-1) + \sigma(3)\sigma(2u-3) + \dots + \sigma(2u-1)\sigma(1) = \sigma_3(u),$$

trong đó u là một số lẻ.

2) Hãy kiểm tra bằng số các trường hợp riêng của hệ thức tìm được trong 1.

3) Xác nhận ấy có ảnh hưởng gì đến niềm tin của bạn vào giả thuyết giúp bạn đã suy ra hệ thức trên?

19. Một công thức truy toán khác

Ta hãy xét các hàm dẫn xuất:

$$G = \sum_{m=1}^{\infty} S_1(m)x^m,\ H = \sum_{m=1}^{\infty} S_4(m)x^m$$

Ta đặt:

$$S_4(4u) = S_u$$

trong đó u là số lẻ. Khi đó theo các thí dụ 14 và 12:

$$\mathrm{G} = x + x^9 + x^{25} + \dots + x^{(2n-1)^2} + \dots$$

$$\mathrm{H} = s_1x^4 + s_3x^{12} + s_5x^{20} + \dots + s_{2n-1}x^{8n-4} + \dots$$

Từ hệ thức sau cùng, sau khi lấy logarit và lấy vi phân, ta suy ra:

$$4\ln G = \ln H,$$

$$\frac{4G'}{G} = \frac{H'}{H},$$

$$G.xH' = 4.xG'.H,$$

$$(x + x^9 + x^{25} + \ldots)(4s_1x^4 + 12s_3x^{12} + 20s_5x^{20} + \ldots) =$$

$$= 4(x + 9x^9 + 25x^{25} + \ldots)(s_1x^4 + s_3x^{12} + s_5x^{20} + \ldots)$$

Sau khi so sánh các hệ số của x^5, x^{13}, x^{21},... *ở cả hai vế của đẳng thức trên và sau khi thực hiện một số phép tính đơn giản, ta tìm được các hệ thức sau:*

$$0s_1 = 0,$$

$$1s_3 - 4s_1 = 0,$$

$$2s_5 - 3s_3 = 0,$$

$$3s_7 - 2s_5 - 12s_1 = 0,$$

$$4s_9 - 1s_7 - 11s_2 = 0,$$

$$5s_{11} - 10s_5 = 0,$$

$$6s_{13} - 1s_{11} - 9s_7 - 24s_1 = 0,$$

$$7s_{15} - 2s_{13} - 8s_9 - 23s_3 = 0,$$

$$8s_{17} - 3s_{15} - 7s_{11} - 22s_5 = 0,$$

$$9s_{19} - 4s_{17} - 6s_{13} - 21s_7 = 0,$$

$$10s_{21} - 5s_{19} - 5s_{15} - 20s_9 - 40s_1 = 0,$$

$$11s_{23} - 6s_{21} - 4s_{17} - 19s_{11} - 39s_3 = 0.$$

Phương trình đầu của hệ này không có nội dung, nó được viết ra đây chỉ để làm nổi bật quy luật chung. Tuy nhiên, chúng ta biết rằng $s_1 = 1$. *Sau khi biết* s_1 *từ phương trình tiếp sau, ta có* s_3. *Sau khi biết* s_3, *từ phương trình tiếp theo, ta có* s_5, *v.v... Bằng phương pháp truy toán, từ hệ phương trình này, ta có thể tính bao nhiêu số hạng tuỳ ý, liên tiếp nhau của dãy* s_1, s_3, s_5...

Hệ phương trình này có cấu trúc đáng chú ý. Có một phương trình chứa một trong những đại lượng s_1, s_3, s_5,... *hai phương trình chứa hai trong các đại lượng ấy, ba phương trình chứa ba trong các đại lượng ấy v.v... Trong mỗi cột, khi ta chuyển từ dòng này sang dòng khác thì các hệ số tăng lên 1, còn các chỉ số tăng lên 2. Chỉ số đầu tiên trong mỗi cột bằng 1 còn hệ số bằng hệ số đầu tiên của dòng này nhân với* -4.

Ta có thể kết thúc toàn bộ hệ thống này vào một phương trình (vào công thức truy toán). Tìm công thức đó.

20. Định luật kì lạ nhất khác về các số, thuộc về Tổng các ước số của chúng

Nếu giả thuyết ở §4.6 vẫn còn hiệu lực, thì:

$$S_{2n-1} = S_4[4(2n-1)] = \sigma(2n-1)$$

và như vậy, thí dụ 19 sẽ có công thức truy toán liên kết các số hạng của dãy $\sigma(1)$, $\sigma(3)$, $\sigma(5)$, $\sigma(7)$..., mà về nhiều phương diện, hết sức giống công thức Euler.

Bạn hãy viết và kiểm tra tỉ mỉ bằng số những trường hợp đầu tiên đối với công thức truy toán kể trên.

21. *Đối với ta, giữa công thức truy toán của Euler đối với $\sigma(n)$ (§2) và công thức truy toán trên đối với $\sigma(2n-1)$ (thí dụ 20) chỉ giống nhau ở tính chất gợi mở.*

Đối với ta, công thức truy toán sau là một giả thuyết. Ta đã suy ra giả thuyết này giống như Euler đã suy ra giả thuyết của mình từ các giả thuyết khác "bằng phép lấy vi phân và một mưu mẹo khác".

Bạn hãy chứng tỏ rằng, công thức đối với $\sigma(2n-1)$ ở thí dụ 20 tương đương với đẳng thức:

$$S_4[4(2n-1)] = \sigma(2n-1)$$

mà ta suy ra ở §4.6, tức là một trong hai xác nhận này đúng thì xác nhận kia nhất thiết cũng đúng.

22. *Khái quát hoá thí dụ 12.*

23. *Hãy tìm ra một phương pháp để tính $R_8(n)$ không phụ thuộc vào $R_4(n)$.*

24. Euler đã bỏ qua một phát minh như thế nào?

Phương pháp được minh hoạ bằng các thí dụ 19 và 23 và được phát biểu dưới dạng tổng quát trong thí dụ 22 là công thức của Euler. Nghĩ ra phương pháp này, Euler nhằm mục đích giải bài toán về bốn bình phương và một số bài toán liên quan với nó. Thực tế, ông đã áp dụng phương pháp của mình vào bài toán về bốn bình phương và nghiên cứu bằng quy nạp số cách biểu diễn, nhưng ông đã không khám phá ra một định luật nổi tiếng chi phối $R_4(n)$ mà xét cho cùng, không đến nỗi khó khám phá ra bằng quy nạp như vậy (các thí dụ 4.10 - 4.15). Điều đó xảy ra như thế nào?

Khi nghiên cứu phương trình:

$$n = x^2 + y^2 + x^2 + w^2$$

ta có thể chọn những quan điểm khác nhau, đặc biệt là những quan điểm sau đây:

1) Ta có thể giả định x, y, z, w chỉ có giá trị nguyên không âm.

2) Ta có thể giả định x, y, z, w có tất cả những giá trị dương, âm và 0.

Quan điểm thứ hai có thể ít hiển nhiên hơn nhưng dẫn tới $R_4(n)$ và tới mối liên hệ đáng chú ý giữa $R_4(n)$ và các ước số của n. Quan điểm thứ nhất hiển nhiên hơn, nhưng số nghiệm hình như không có một tính chất đơn giản đặc sắc nào. Euler đã chọn quan điểm thứ nhất chứ không chọn quan điểm thứ hai; ông áp dụng phương pháp của mình đã được giải thích ở thí dụ 22 vào biểu thức:

$$(1 + x + x^4 + x^9 + \ldots)^4$$

mà không áp dụng vào biểu thức:

$$(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \ldots)^4$$

và như vậy đã bỏ qua một phát minh vĩ đại. So sánh hai phương hướng nghiên cứu mà ban đầu tưởng chừng như giống nhau ấy cũng rất có ích. Nhưng một trong hai phương hướng đã đem lại kết quả kì diệu, còn phương hướng kia thì hầu như vô hiệu.

Các tính chất của $R_4(n)$, $S_4(n)$, $R_8(n)$ và $S_8(n)$ đã được nghiên cứu trong chương IV (các thí dụ 4.10 - 4.15, §4.3 - §4.6, các thí dụ 4.18 - 4.23) và được Jacobi khám phá ra không phải bằng quy nạp mà như là những hệ quả ngẫu nhiên của công trình nghiên cứu của ông về các hàm eliptic. Từ đó, người ta đã tìm ra được nhiều cách chứng minh các định lí này nhưng không một chứng minh đã biết nào là hoàn toàn sơ cấp và trực tiếp.

25. Khái quát hoá định lí của Euler về $\sigma(n)$

Đối với số k đã cho, hãy đặt:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^k = 1-\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

và chứng tỏ rằng, đối với n = 1, 2, 3,...

$$\sigma(n) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sigma(n-m) + \frac{na_n}{k}$$

Trường hợp riêng nào là định lí Euler ở §2?