

MẬT ĐỘ MỨC HẠT NHÂN

Biên dịch: Phạm Đình Khang.

Phản biện: PGs.Ts. Đặng Huy Uyên Ts. Vương Hữu Tấn,

Ts. Nguyễn Mậu Chung

Nhóm biên dịch rất mong có sự góp ý của đông đảo bạn đọc và chân thành cảm ơn các cán bộ, sinh viên đã giúp đỡ sửa chữa bản dịch của quyển sách này.

Người dịch

Ts. Phạm Đình Khang

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU.....

CHƯƠNG 1. MẬT ĐỘ TRẠNG THÁI VÀ CÁC MẪU HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ.

- 1.1. Mật độ trạng thái của hệ kín.
- 1.2. Phương pháp đường yên ngựa.
- 1.3. Các mẫu trong lý thuyết hạt nhân.
- 1.4. Các đặc trưng thống kê của hạt nhân nguyên tử.

CHƯƠNG 2. CÁC ĐẶC TRƯNG THỐNG KÊ CỦA HẠT NHÂN TRONG MẪU CÁC HẠT ĐỘC LẬP.

- 2.1. Các hệ thức cơ bản.
- 2.2. Mẫu khí Fermi.
- 2.3. Sự phụ thuộc spin của mật độ trạng thái hạt nhân.
- 2.4. Ảnh hưởng cấu trúc lớp của phổ một hạt tới các đặc trng thống kê của hạt nhân.

CHƯƠNG 3. MẬT ĐỘ TRẠNG THÁI TRONG MẪU HẠT NHÂN SIÊU CHẢY.

- 3.1. Các hệ thức cơ bản.
- 3.2. Các hiệu ứng cặp gần trạng thái cơ bản.
- 3.3. Các đặc trưng thống kê của hệ trong mẫu các giả hạt độc lập.
- 3.5. Giải pháp để mô tả các đặc trưng thống kê trong mẫu siêu chảy.

CHƯƠNG 4. HIỆN TƯỢNG LUẬN MẬT ĐỘ MỨC HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ

- 4.1. Hiện tượng luận sự ảnh hưởng của chuyển động tập thể tới mật độ mức.
- 4.2. Công thức tổ hợp Djinber — Kameron đối với mật độ mức hạt nhân nguyên tử.
- 4.3. Hệ thống hoá các thông số mật độ mức theo Malsev.
- 4.4. Mẫu khí Fermi có dịch chuyển ngược.

CHƯƠNG 5. MẬT ĐỘ TRẠNG THÁI KHÍ SỐ GIẢ HẠT KÍCH THÍCH CỔ ĐÌNH

- 5.1. Khí các hạt Bolzman.
- 5.2. Các đặc trưng hạt-lỗ trống của hạt nhân trong mẫu các hạt độc lập.
- 5.3. Ảnh hưởng của các hiệu ứng tương quan tới các đặc trưng thống kê ở số giả hạt kích thích đã cho.
- 5.4. Mô tả hạt-lỗ trống các đặc trưng trung bình của hạt nhân.

PHỤ LỤC

TÀI LIỆU THAM KHẢO

LỜI NÓI ĐẦU

Mật độ mức hạt nhân nguyên tử là đại lượng vật lý có liên hệ trực tiếp với các giá trị đo được. Thực vậy, nếu trong thí nghiệm phát hiện được các mức của hạt nhân trong một khoảng năng lượng nào đó thì khi chia số mức cho khoảng năng lượng này ta sẽ thu được giá trị mật độ mức thực nghiệm. Trong khi đó mật độ mức có thể được xác định bằng lý thuyết. So sánh số liệu thực nghiệm với các giá trị lý thuyết, chúng ta có thể đánh giá mức độ tin cậy của các giả thuyết lý thuyết về cấu trúc hạt nhân nguyên tử. Mặt khác, mật độ mức cho biết dạng phụ thuộc năng lượng của tiết diện các phản ứng hạt nhân khác nhau ở vùng năng lượng thấp và trung bình.

Trong quyển sách này đã đưa ra các vấn đề cơ bản của lý thuyết mật độ mức hạt nhân nguyên tử. Mặc dù đây là quyển sách lý thuyết, nó vẫn được sử dụng rộng rãi. Trong nội dung của cuốn sách tác giả đã đưa vào những kết quả mới nhất có độ tin cậy cao.

Các tư liệu đã được lựa chọn và phân tách để người đọc không phải mất thời gian tra cứu sách hay tuyển tập. Vì thế, trong chương 1 đã trình bày một số mẫu hạt nhân và phương pháp thống kê để tính mật độ mức hạt nhân. Sự thay đổi của các đặc trưng thống kê trong mẫu lớp và mẫu siêu chảy được đưa ra trong chương 2 và chương 3. Bên cạnh các mô tả vi mô còn có các phương pháp hiện tượng luận để tính mật độ mức hạt nhân. Vấn đề này được đưa ra trong chương 4. Trong chương 5 là lý thuyết mật độ mức hạt nhân khi số kích thích cố định. Những đoán nhân về số kích thích cố định liên quan tới sự phát triển những giả thiết về quá trình bay hơi tiền cân bằng của các hạt. Giải pháp thống kê với số kích thích cố định cho phép mở rộng khả năng mô tả thống kê các tính chất của hạt nhân bị kích thích.

Kết thúc quyển sách này là phần phụ lục trong đó đưa vào một vài bảng số liệu. Đó là các số liệu thực nghiệm về mật độ cộng hưởng neutron, và cả bảng các giá trị các thông số mà chúng được sử dụng rộng rãi trong phương pháp hình thức luận mật độ mức hạt nhân nguyên tử.

Danh mục tài liệu bao gồm chỉ những công trình mà các kết quả của chúng được sử dụng trực tiếp trong quyển sách này.

CHƯƠNG 1

MẬT ĐỘ TRẠNG THÁI VÀ CÁC MẪU HẠT NHÂN NGUYÊN TỬ

1.1. Mật độ trạng thái của một hệ kín.

Chúng ta xem xét khái niệm mật độ trạng thái của một hệ bao gồm số lớn các hạt và có số bậc tự do lớn [1 — 3]. Nói chung trong thực nghiệm chỉ đo được một vài đại lượng vĩ mô như thể tích, áp suất, nhiệt độ để xác định trạng thái của hệ này. Trạng thái được xác định bằng các thông số nói trên được gọi là trạng thái vĩ mô. Song theo quan điểm cơ học lượng tử, một trạng thái bất kỳ về nguyên tắc có thể được xác định với mức độ chính xác tùy ý khi biết tất cả các biến số. Trạng thái được xác định như vậy được gọi là trạng thái vi mô.

Hạt nhân nguyên tử là đối tượng mô tả thống kê thuộc loại hệ lượng tử kín. Trong cơ học lượng tử, trạng thái vi mô của hệ được coi như một trạng thái theo ý nghĩa lượng tử. Cụ thể hơn, trạng thái chuẩn bắt buộc phải là một trong các trạng thái của hệ lượng tử được xác định bằng phương trình Schrodinger:

$$\hat{H}|i\rangle = E_i|i\rangle \quad (1.1)$$

Ở đây \hat{H} là Hamilton của hệ; E_i và $|i\rangle$ là năng lượng và hàm sóng của trạng thái lượng tử thứ i . Trạng thái vĩ mô của hệ kín được mô tả bằng các tích phân chuyển động. Tích phân chuyển động - đó là đại lượng vật lý không đổi theo thời gian. Trong cơ học lượng tử [4], các toán tử tích phân chuyển động không phụ thuộc tường minh vào thời gian và giao hoán với Hamilton \hat{H} . Những toán tử như vậy có hàm sóng riêng của nó chung với Hamilton \hat{H} . Mỗi một hàm riêng $|i\rangle$ xác định một trạng thái vi mô. Chúng ta sẽ coi năng lượng toàn phần E , số proton Z , số neutron N , mômen góc toàn phần J và hình chiếu của nó lên một trục cố định là bộ các tích phân chuyển động đặc trưng cho một trạng thái vĩ mô của hạt nhân nguyên tử. Một bộ các giá trị tích phân chuyển động xác định một trạng thái vĩ mô tương ứng vài trạng thái vi mô của hệ.

Mật độ trạng thái ω của hệ là số trạng thái vi mô trong một đơn vị năng lượng tương ứng các giá trị tích phân chuyển động đã cho. Cụ thể, $\omega(E)$ ở năng lượng E đã cho của hệ được xác định như sau:

$$\omega(E) = \sum_i \delta(E - E_i) \quad (1.2)$$

Ở đây E_i là năng lượng của trạng thái lượng tử thứ i mà nó được tính từ phương trình Schrodinger (1.1); $\delta(E - E_i)$ là hàm delta Dirac mà nó có những tính chất sau: Hàm $\delta(x-x_0)$ luôn bằng 0 với mọi $x \neq x_0$ và:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-x_0)dx = \begin{cases} f(x_0) & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases} \quad (1.3)$$

Chúng ta lưu ý rằng khoảng lấy trung bình không được đưa vào (1.2).

Việc xác định mật độ trạng thái (1.2) liên quan trực tiếp tới giá trị mật độ trạng thái đo được bằng thực nghiệm. Nếu từ thực nghiệm suy ra rằng trong khoảng năng lượng từ E_1 tới E_2 phát hiện được n mức và đã biết độ suy biến g_k của mỗi một mức thì để so sánh mật độ trạng thái thực nghiệm $\omega = \left(\sum_1^n g_k\right)/(E_2 - E_1)$ với tính toán lý thuyết, cần tính đại lượng:

$$\omega = \left[\sum_i \int_{E_1}^{E_2} \delta(E - E_i) dE \right] / (E_2 - E_1) \quad (1.4)$$

Điều này có nghĩa là từ tất cả tập hợp các trạng thái vi mô $|i\rangle$ cần thiết chọn và tính chỉ những trạng thái mà giá trị riêng E_i của nó nằm trong khoảng (E_1, E_2) . Khi chia số thu được cho hiệu số $E_2 - E_1$ ta sẽ thu được số trạng thái trên một đơn vị năng lượng tức là mật độ trạng thái.

Giải pháp tính $\omega(E)$ như vậy về nguyên tắc là có thể thực hiện được và nó được sử dụng trong các tính toán tổ hợp. Tuy nhiên các tính toán này quá phức tạp và chỉ thu được các hệ thức truy hồi được sử dụng trong trường hợp đối với những hệ có phổ giá trị riêng rất đơn giản.

Để tính $\omega(E)$ chúng ta sẽ sử dụng phương pháp thống kê gần đúng vận năng [1]. Phương pháp này gồm hai bước: phép biến đổi Laplace và phương pháp đường yên ngựa.

Các tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace được đưa ra trong [5, 6]. Đối với hàm tác động $f(t)$ của biến số t , hàm $F(p)$ được xác định bằng tích phân sau:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1.5)$$

được gọi là ảnh Laplace, ở đây p là biến phức. Tích phân trong (1.5) được lấy trong nửa mặt phẳng p thỏa mãn điều kiện $\text{Re } p > p_0$ ($\text{Re } p$ - phần thực của biến phức p ; p_0 - số thực). Giá trị giới hạn của p_0 mô tả sự hội tụ, được gọi là chỉ số hội tụ của phép biến đổi Laplace. Đối với $\text{Re } p > p_0$, hàm $F(p)$ là hàm tương tự của biến số p .

Sự biến đổi Laplace ngược được xác định bằng công thức sau:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p'-i\infty}^{p'+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (1.6)$$

ở đây đường lấy tích phân là đường thẳng song song với trục ảo đi qua điểm phức p' mà ở đó thỏa mãn điều kiện $\text{Re } p' > p_0$. Dễ dàng chứng minh được rằng [5, 6]:

$$\int_{p'-i\infty}^{p'+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \int_{p''-i\infty}^{p''+i\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (1.7)$$

Đối với p' , p'' bất kỳ mà với chúng $\text{Re } p' > p_0$ và $\text{Re } p'' > p_0$. Áp dụng phép biến đổi Laplace với hai vế của hệ thức (1.2):

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta E} \omega(E) dE = \sum_i \int_0^{\infty} e^{-\beta E} \delta(E - E_i) dE = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (1.8)$$

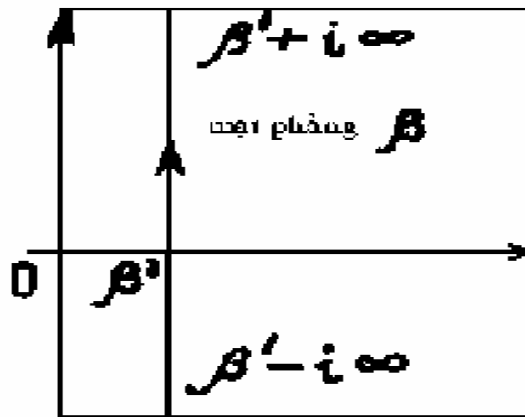
Như vậy sự biến đổi Laplace từ mật độ trạng thái có tổng thống kê:

$$Q(\beta) = \sum_i \exp(-\beta E_i) \equiv \sum_i \langle i | \exp(-\beta \hat{H}) | i \rangle \equiv \text{Sp}(\exp(-\beta \hat{H})) \quad (1.9)$$

Ở đây kí hiệu Sp (được đọc là vết) là tổng tất cả các yếu tố trên đường chéo của ma trận từ toán tử đứng trong ngoặc. Vì đối với hệ chuẩn [1] , mật độ trạng thái phải thỏa mãn điều kiện :

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \omega(E) \exp(-\alpha E) = 0$$

cho α bất kỳ lớn hơn 0 nên chỉ số hội tụ của tổng thống kê $Q(\beta)$ là $\beta = 0$ và tổng thống kê như một hàm biến phức sẽ hội tụ và có giá trị hữu hạn ở mặt phẳng $\text{Re } \beta > 0$.



Hình 1.1: Đường lấy tích phân.

Sử dụng phép biến đổi Laplace ngược với $Q(\beta)$ ta thu được giá trị mật độ trạng thái:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} Q(\beta) e^{\beta E} d\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} e^{S(\beta)} d\beta \quad (1.10)$$

ở đây
$$S(\beta) = \beta E + \ln Q(\beta) \quad (1.11)$$

Tích phân trong (1.10) được lấy theo chu tuyến trong mặt phẳng phức β như trên hình 1.1. Hệ thức (1.10) là chính xác và có thể được sử dụng để chính xác mật độ trạng thái. Nó có thể được tính rất nhanh nếu sử dụng biểu diễn tích phân của hàm delta δ [7]. Như vậy để xác định mật độ trạng thái, cần tính tích

phân trong công thức (1.10). Khi đó phương pháp đường yên ngựa sẽ được sử dụng.

1.2 Phương pháp đường yên ngựa.

Phương pháp đường yên ngựa được sử dụng để tính tích phân $F(\lambda)$ theo hàm biến phức dạng:

$$F(\lambda) = \int_C f(z) e^{\lambda S(z)} dz \quad (1.12)$$

ở đây $f(z)$ và $S(z)$ là các hàm biến z phức mà chúng khả tích trong vùng G bao quanh đường cong C có thể là vô hạn; λ - số dương có giá trị lớn. Với giả thiết rằng tích phân (1.12) tồn tại, chúng ta cần tính hàm $F(\lambda)$ khi λ lớn.

Để giải thích bản chất phương pháp đường yên ngựa, chúng ta cần nghiên cứu phương pháp Laplace [5, 6] để thu được giới hạn của tích phân của hàm biến thực x trong khoảng $[a, b]$:

$$\Phi(\lambda) = \int_a^b \varphi(x) e^{\lambda h(x)} dx \quad (1.13)$$

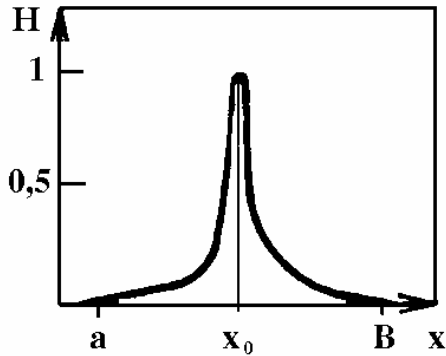
ở đây λ là số dương lớn, các hàm $\varphi(x)$ và $h(x)$ là thực và liên tục trong khoảng $[a, b]$.

Chúng ta quan tâm đến dạng của $\Phi(\lambda)$ khi $\lambda \rightarrow \infty$. Chúng ta giả thiết rằng hàm $h(x)$ đạt đến cực đại chỉ ở điểm x_0 trong đoạn $[a, b]$, hơn nữa đạo hàm bậc hai $h''(x)$ sẽ âm ở điểm này. Rõ ràng là tọa độ của điểm x_0 được xác định bằng phương trình:

$$dh/dx = 0 \quad (1.14)$$

ở các giá trị $\lambda > 0$ và rất lớn, giá trị tích phân (1.13) được xác định bằng hàm $\exp[\lambda h(x)]$. Chúng ta khảo sát hàm :

$$H(\lambda, x) = \exp\{\lambda[h(x) - h(x_0)]\} \quad (1.15)$$



Hình 1.2: Biểu diễn hàm $h(x)$ trong khoảng $[a, b]$.

Rõ ràng là $H(\lambda, x = x_0) = 1$ và khi $x \neq x_0$ giá trị hàm $H(\lambda, x) < 1$, hơn nữa cực đại $H(\lambda, x)$ khi $x = x_0$ càng trở nên nhọn nếu λ càng lớn. Vùng quanh điểm x_0 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ đóng góp chủ yếu vào giá trị tích phân. Trong vùng này, có thể viết hàm dưới dấu tích phân một cách gần đúng:

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) \text{ khi } \varphi(x_0) \neq 0 \quad (1.16a)$$

$$h(x) = h(x_0) + 1/2 h''(x_0)(x - x_0)^2 \quad (1.16b)$$

Thay thế (1.16) vào (1.13) ta thu được:

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &\approx \varphi(x_0) \cdot e^{\lambda h(x_0)} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{\lambda h''(x_0)(x - x_0)^2 / 2} dx \\ &= \frac{\varphi(x_0) \exp[\lambda h(x_0)]}{\sqrt{-\lambda h''(x_0)}} \int_{-\delta\sqrt{-\lambda h''(x_0)}}^{\delta\sqrt{-\lambda h''(x_0)}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \end{aligned} \quad (1.17)$$

Khi $\lambda \rightarrow \infty$ thì tích phân (1.17) tiến đến tích phân Laplace [9]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \sqrt{2\pi} \quad (1.18)$$

Do vậy tiệm cận của tích phân $\Phi(\lambda)$ khi $\lambda \rightarrow \infty$ sẽ có dạng:

$$\Phi(\lambda) = \frac{\sqrt{\pi} \varphi(x_0) \exp[\lambda h(x_0)]}{\sqrt{-\lambda h''(x_0)}} \quad (1.19)$$

Công thức (1.19) biểu thị giá trị gần đúng của tích phân (1.13) qua giá trị của hàm dưới dấu tích phân ở điểm cực đại và thừa số bổ sung nào đó tương ứng độ dài của khoảng lấy tích phân mà ở đó, giá trị của hàm dưới dấu tích phân gần đạt cực đại. Những biểu thức trên là cơ sở của phương pháp đường yên ngựa.

Chúng ta chuyển sang phân tích phương pháp tính tiệm cận tích phân (1.12). Tích phân (1.12) từ hàm giải tích trong vùng G có thể tính được qua giá trị cực đại của hàm dưới dấu tích phân với bổ chính vào tốc độ giảm của nó ở đường bao tích phân. Theo định lý Côsi, tích phân (1.12) từ hàm giải tích không phụ thuộc vào đường lấy tích phân mà được xác định chỉ bằng các giá trị điểm đầu z_1 và điểm cuối z_2 của đường cong C . Điều đó cho phép đổi dạng đường bao tích phân trong vùng G mà không làm thay đổi giá trị tích phân. Điều kiện này sẽ được sử dụng để lựa chọn đường bao tích phân mà trong đó phần thực của hàm $S(z)$ giảm nhanh trong khi phần ảo là hằng số. Trước hết chúng ta cần nêu lại tính chất cơ bản của hàm giải tích. Hàm giải tích $S(z)$ được xác định là có đạo hàm ở điểm bất kỳ trong vùng G . Nếu z và $S(z)$ biểu diễn dưới dạng :

$$z = x + iy \quad ; \quad S(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.20)$$

thì phần thực $u(x, y)$ và phần ảo $v(x, y)$ của hàm giải tích $S(z)$ thoả mãn điều kiện Côsi — Rimann :

$$\partial u / \partial x = \partial v / \partial y \quad ; \quad \partial u / \partial y = -\partial v / \partial x \quad (1.21)$$

Dễ dàng chứng minh biểu thức (1.21). Để thực hiện điều đó cần lấy đạo hàm ở một điểm z_0 nào đó. Chúng ta lấy hai gia số Δz khác nhau : $\Delta z = \Delta x$ và $\Delta z = i\Delta y$. Nếu hàm khả vi tại điểm $z = z_0$ thì các giá trị đạo hàm của nó không phụ thuộc cách lựa chọn Δz và vì vậy chúng phải bằng nhau. Cân bằng các phần thực và ảo của đạo hàm chúng ta thu được (1.21). Đạo hàm biểu thức thứ nhất trong (1.21) theo x , biểu thức thứ hai theo y rồi cộng lại chúng ta thu được :

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0 \quad (1.22)$$

Tương tự chúng ta thu được :

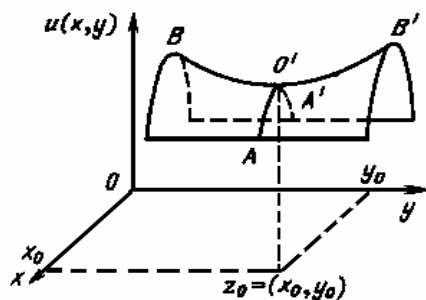
$$\partial^2 v / \partial x^2 + \partial^2 v / \partial y^2 = 0 \quad (1.23)$$

Chúng ta giả thiết rằng trong miền G có duy nhất một điểm z_0 mà ở đó hàm $S(z)$ có đạo hàm bằng 0:

$$S'(z_0) = 0 \quad (1.24)$$

Điểm $z = z_0$ được gọi là điểm uốn. Gọi như vậy là vì: nếu $S''(z_0) = S'''(z_0) = \dots = S^{(m)}(z_0) = 0$ mà $S^{(m+1)}(z_0) \neq 0$ thì điểm z_0 được gọi là điểm uốn bậc m . Ở đây chúng ta chỉ giới hạn ở trường hợp điểm uốn đơn giản nhất là $S''(z_0) \neq 0$.

Chúng ta xem xét tính chất của các hàm thực $u(x,y)$ và $v(x,y)$ ở lân cận điểm uốn $z = z_0$. Từ phương trình (1.22) suy ra rằng ở điểm này, hàm $u(x,y)$ không có cả cực đại lẫn cực tiểu vì nếu $\partial^2 u / \partial x^2 < 0$ thì $\partial^2 u / \partial y^2 > 0$ và ngược lại. Với hàm $v(x,y)$ cũng như vậy. Ở những điểm lân cận này, hàm $u(x,y)$ không thể đạt tới tiệm cận tuyệt đối tức là trong G không có các điểm mà ở đó $u(x,y)$ hoặc tăng hoặc giảm theo mọi phương. Bề mặt hàm $u(x,y)$ ở lân cận z_0 sẽ có dạng parabol — hipebon (hình 1.3) mà mặt ngoài rất cong. Do vậy z_0 mới có tên là điểm yên ngựa và cách xem xét này được gọi là phương pháp điểm yên ngựa. Trên hình 1.3 thấy rằng đường yên ngựa có dạng như vậy và phương pháp này được gọi là phương pháp đường yên ngựa.



Hình 1.3: Dạng hàm $u(x,y)$ ở vùng lân cận điểm yên ngựa $z_0 = x_0 + iy_0$.

Với trường hợp điểm yên ngựa đơn giản [$S''(z_0) \neq 0$] ta biểu diễn hàm $S(z)$ ở lân cận $z = z_0$ dưới dạng :

$$S(z) \approx S(z_0) + (1/2)S''(z_0)(z - z_0)^2 \quad (1.25)$$

Chúng ta đặt $(1/2)S''(z_0) = r \exp(i\theta)$; $z - z_0 = \rho \exp(i\varphi)$ khi đó

$$S(z) \approx S(z_0) + r\rho^2 [\cos(\theta + 2\varphi) + i \sin(\theta + 2\varphi)] \quad (1.26)$$

và với hàm $u(x,y)$ và $v(x,y)$ chúng ta có :

$$u(x,y) = u(x_0, y_0) + r\rho^2 \cos(\theta + 2\varphi) \quad (1.27)$$

$$v(x,y) = v(x_0, y_0) + r\rho^2 \sin(\theta + 2\varphi) \quad (1.28)$$

Trước hết chúng ta xem xét phần thực của hàm $S(z)$ - tức là hàm $u(x,y)$ ở gần $z = z_0$. Bởi vì góc φ thay đổi từ 0 đến 2π nên từ (1.27) suy ra rằng hàm $r\rho^2 \times \cos(\theta + 2\varphi)$ sẽ đổi dấu 4 lần khi φ thay đổi từ 0 ÷ 2π . Vì vậy lân cận điểm $z = z_0$ bị tách ra thành bốn vùng cong mà ở các vùng này hiệu số $u(x,y) - u(x_0, y_0)$ bảo toàn dấu. Biên của các vùng này thu được từ phương trình (1.27). Các vùng mà $u(x,y) > u(x_0, y_0)$ gọi là vùng dương, còn các vùng có $u(x,y) < u(x_0, y_0)$ được gọi là vùng âm. Trên hình 1.3 các điểm A và A' nằm ở các vùng âm khác nhau, các điểm B và B' nằm ở các vùng dương khác nhau. Phương pháp đường yên ngựa được sử dụng khi các điểm giới hạn của đường cong tích phân nằm ở các vùng âm khác nhau.

Bây giờ có thể lựa chọn đường lấy tích phân mà ở đó hàm $u(x,y)$ giảm nhanh nhất. Từ hệ thức (1.27) suy ra rằng đường lấy tích phân nằm ở những phần âm và góc φ mà

$$\cos(\theta + 2\varphi) = -1 \quad (1.29)$$

tương ứng với sự giảm nhanh nhất của hàm $u(x,y)$. Hai góc φ_1 và $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ phù hợp điều kiện trên:

$$\varphi_1 = (-\theta + \pi)/2 \quad ; \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \pi \quad (1.30)$$

Các góc φ_1 và φ_2 xác định hướng của đường giảm nhanh nhất từ đường cong qua điểm yên ngựa. Nếu thay giá trị các góc φ_1 và φ_2 từ công thức (1.30) vào phương trình (1.28) thì ta thu được $v(x,y) \equiv v(x_0, y_0)$. Do, phần ảo của hàm $S(z)$ trên các đường giảm nhanh này là hằng số. Đây là một điểm quan trọng bởi vì

nó lý giải tại sao hàm dưới dấu tích phân không dao động. Như vậy nếu lựa chọn đường lấy tích phân đi qua điểm yên ngựa dọc theo đường giảm nhanh nhất thì phương pháp Laplace có tác dụng để đánh giá tiệm cận của tích phân (1.12). Chúng ta dẫn đến định lý sau [6] mà không cần chứng minh. Giả thiết rằng:

a) Hàm $S(z)$ có điểm yên ngựa đơn giản duy nhất ($S'(z_0)=0$ và $S''(z_0)\neq 0$).

b) Đường cong tích phân C nằm trong miền khả tích G điểm đầu z_1 và điểm cuối z_2 nằm ở các vùng âm khác nhau: Khi đó công thức giới hạn như sau:

$$F(\lambda) = \int_C f(z) e^{\lambda S(z)} dz \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |S''(z_0)|}} e^{\lambda S(z_0)} e^{i\varphi_m} f(z_0) \quad (1.31)$$

ở đây $\varphi_m = (\pi - \theta)/2 + m\pi$; $\theta = \arg S''(z_0)$. Việc lựa chọn giá trị φ_m sẽ xác định dấu trong công thức (1.31) và tất nhiên việc lựa chọn này phụ thuộc vào hướng tích phân dọc đường C .

Chúng ta sử dụng phương pháp đường yên ngựa để tính tích phân (1.10). Chúng ta tìm được tọa độ điểm yên ngựa β_0 từ phương trình:

$$dS/d\beta = 0 \quad (1.32)$$

Sử dụng (1.9) và (1.11) để xác định β_0 ta có:

$$E = -\frac{d \ln Q}{d\beta} = \frac{\sum_i E_i e^{-\beta_0 E_i}}{\sum_i e^{-\beta_0 E_i}} \quad (1.33)$$

Rõ ràng là β_0 là số thực dương. Chúng ta tính đạo hàm bậc hai:

$$\frac{d^2 S}{d\beta^2} = \frac{\sum_i E_i^2 e^{-\beta_0 E_i}}{\sum_i e^{-\beta_0 E_i}} - \left(\frac{\sum_i E_i e^{-\beta_0 E_i}}{\sum_i e^{-\beta_0 E_i}} \right)^2 \quad (1.34)$$

Các hệ thức (1.33) và (1.34) được viết lại bằng cách khác với dạng thuận tiện hơn khi xác định giá trị trung bình của các toán tử theo tổng thống kê. Đối với toán tử \hat{A} giá trị trung bình thống kê có dạng [10]:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Sp} \left[\hat{A} \exp(-\beta \hat{H}) \right] / \text{Sp} \left[\exp(-\beta \hat{H}) \right] \quad (1.35)$$

Khi đó toạ độ của điểm yên ngựa được xác định bằng phương trình:

$$E = -\frac{d \ln Q}{d\beta} = -\frac{1}{Q} \frac{dQ}{d\beta} = \frac{\text{Sp} \left[\hat{H} \exp(-\beta \hat{H}) \right]}{\text{Sp} \left[\exp(-\beta \hat{H}) \right]} = \langle \hat{H} \rangle \quad (1.36)$$

và hệ thức (1.34) có dạng:

$$\frac{d^2 S}{d\beta^2} = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 = \langle (\hat{H} - \langle \hat{H} \rangle)^2 \rangle > 0 \quad (1.37)$$

Từ (1.37) suy ra rằng $S''(\beta_0) > 0$ và điểm yên ngựa β_0 là điểm uốn mà $\theta = \arg[(S''(\beta_0) = 0)]$. Tương ứng với (1.30), phương của đường giảm nhanh được xác định bằng góc $\varphi_1 = \pi/2$ và trùng với đường thẳng song song trục ảo $\text{Im}\beta$ tức là trong trường hợp của chúng ta, nó trùng với đường lấy tích phân.

Ta có thể sử dụng (1.31) để viết biểu thức kết quả của tích phân (1.10). Tuy nhiên chúng ta vẫn tiếp tục lấy tích phân. Dựa trên tính chất (1.7) của sự biến đổi Laplace ngược đối với mật độ trạng thái chúng ta có:

$$\omega(E) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta_0 - i\infty}^{\beta_0 + i\infty} e^{S(\beta)} d\beta \quad (1.38)$$

Chúng ta phân tích hàm $S(\beta)$ thành chuỗi ở lân cận điểm yên ngựa β_0 và chỉ lấy hai số hạng ban đầu:

$$S(\beta) \approx S(\beta_0) + S''(\beta_0)(\beta - \beta_0)^2 / 2 \quad (1.39)$$

và thực hiện sự thay biến tích phân:

$$\beta = \beta_0 + iy \quad (1.40)$$

Khi đó đối với $\omega(E)$ ta thu được:

$$\begin{aligned}\omega(E) &= \frac{1}{2\pi} \exp[S(\beta_0)] \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} S''(\beta_0) y^2\right] dy \\ &= \exp[S(\beta_0)] / \sqrt{2\pi S''(\beta_0)}\end{aligned}\quad (1.41)$$

ở đây

$$S(\beta_0) = \beta_0 E + \ln Q(\beta_0) \quad (1.42)$$

Hàm số được xác định bằng biểu thức (1.42) được gọi là entropy của hệ. Thực tế trong vật lý thống kê, entropy được tính bằng logarit của tổng thống kê [1, 10]. Theo định nghĩa, tổng thống kê $W(E, \delta E)$ là số trạng thái vi mô của hệ ở năng lượng E trong khoảng năng lượng vi phân $\delta E \ll E$. Như vậy đối với $W(E, \delta E)$ ta có thể viết:

$$W(E, \delta E) = \omega(E) \delta E.$$

Kết hợp với (1.41) và sau khi lấy logarit ta thu được:

$$\ln W(E, \delta E) = S(\beta_0)$$

với độ chính xác đến bỏ chính nhỏ tùy ý. Khi đó có thể tìm được entropy của hệ dựa trên hệ thức đã biết đối với năng lượng tự do [10]

$$F = -t \ln Q = E - tS$$

ở đây nhiệt độ t được xác định bằng $t = \beta_0^{-1}$. Từ đó suy ra công thức (1.42) xác định entropy của hệ.

$$S = (E + t \ln Q) / t = E\beta_0 + \ln Q$$

Nói một cách chặt chẽ, phương pháp đường yên ngựa được sử dụng khi trong hàm e mũ có thông số dương λ lớn. Chúng ta dự tính sử dụng phương pháp này trong tất cả các vùng năng lượng. Có hai lý do như sau: Thứ nhất - entropy của hệ tăng đủ nhanh khi năng lượng E tăng. Thứ hai - nếu $\omega(E)$ được tính chính xác nhờ hệ thức (1.2) (điều này được thực hiện dễ dàng đối với hệ fermi có phổ rời rạc) và bằng phương pháp đường yên ngựa thì thấy rằng trong vùng năng

lượng rộng cả hai kết quả tính toán là trùng nhau trừ vùng năng lượng gần trạng thái cơ bản (xem §2.2).

Ở vùng năng lượng kích thích thấp, giá trị $\omega(E)$ được tính bằng phương pháp đường yên ngựa sẽ tiến đến $+\infty$, điều này rõ ràng là phi lý. Vấn đề là ở gần trạng thái cơ bản, nhiệt độ t tiến đến 0 và do vậy điểm yên ngựa $\beta_0 \rightarrow \infty$. Đối với trường hợp khi điểm yên ngựa tiến đến vô hạn, không có cách đánh giá tích phân bằng phương pháp đường yên ngựa [11]. Vì vậy khi sử dụng phương pháp đường yên ngựa để tính mật độ trạng thái phải luôn nhớ rằng chúng ta không sử dụng phương pháp này ở năng lượng gần trạng thái cơ bản.

1.3 Các mẫu lý thuyết cấu trúc hạt nhân.

Để tính mật độ trạng thái, cần phải biết tổng thống kê tức là cần biết hàm toán tử Hamilton của hạt nhân. Trong mục này chúng ta xem xét một cách tóm tắt các mẫu được sử dụng rộng rãi trong lý thuyết hạt nhân hiện đại. Để làm việc này, chúng ta sẽ sử dụng các công trình [3, 12, 13].

Mẫu lớp một hạt.

Trong mẫu lớp một hạt, người ta khảo sát chuyển động của một hạt độc lập không tương tác với các nucleon khác trong trường thế trung bình $V(r)$ tạo nên bởi tất cả các nucleon. Các mức năng lượng đối với các hạt chuyển động trong trường thế nói trên bị nhóm lại tạo nên các lớp cách nhau bởi những khoảng năng lượng lớn. Mẫu như vậy được gọi là mẫu vỏ hay mẫu các hạt độc lập. Thực nghiệm chứng minh rằng trong hạt nhân, ngoài trường thế trung bình còn có tương tác spin- quỹ đạo V_{ls} . Vì thế để tính năng lượng của các mức một hạt, thường phải giải phương trình Schrodinger đối với một nucleon :

$$\hat{h}(r)\psi_v(r) \equiv \left[-\frac{\hbar^2 \Delta}{2\mu} + V(r) + V_{ls}(r) \right] \psi_v(r) = \varepsilon_v \psi_v(r) \quad (1.43)$$

Ở đây $\hat{h}(r)$ — toán tử một hạt Hamilton, $\psi_v(r)$ — hàm sóng trong trạng thái thứ v với năng lượng ε_v ; μ - khối lượng nucleon, $\hbar = h/2\pi$, h — hằng số Plank, Δ - Toán tử Laplac.

Người ta thường sử dụng trường thế Xacxon — Wud hoặc trường thế Nilxon làm trường thế trung bình.

Thế Xacxon — Wud chứa hai thành phần :

Phần xuyên tâm :

$$V(r) = -V_0^{N,Z} / [1 + \exp(a(r - R_0))] \quad (1.44)$$

Phần spin- quỹ đạo :

$$V_{ls}(r) = -\kappa \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} (ls) \quad (1.45)$$

ở đây V_0^N và V_0^Z độ sâu hố thế neutron và proton ; a - thông số nhờ của biên hạt nhân, $R_0 = r_0 A^{1/3}$, κ - hằng số tương tác spin quỹ đạo.

Thế Xacxon — Wud mô tả tốt sự phụ thuộc mật độ chất hạt nhân vào bán kính. Các thông số của hố thế được xác định một cách đủ tin cậy từ phần thực của thế quang học mà các đặc tính của nó thu được từ số liệu thực nghiệm trong nghiên cứu tán xạ của nucleon lên hạt nhân.

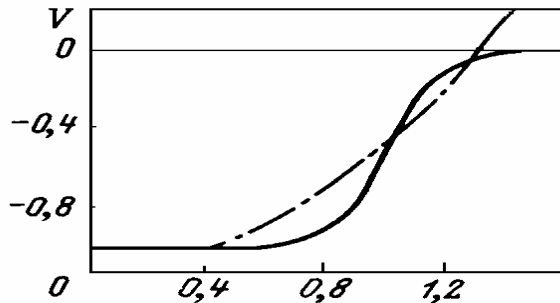
Hố thế Nilxon được tạo từ thế của dao động tử điều hoà, liên kết spin quỹ đạo và số hạng tỷ lệ với bình phương mômen góc mà mômen này được chọn ở trong hố thế vuông góc. Hamilton $h(r)$ trong trường hợp này có thể viết dưới dạng [14] :

$$\hat{h}(r) = \hat{h}_{o.c} + C_N (ls) + D_N l^2 \quad (1.46)$$

ở đây
$$\hat{h}_{o.c} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta' + \frac{\mu}{2} \left(\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2 \right) \quad (1.47)$$

ở đây x' , y' và z' — toạ độ của các hạt đặt trong hệ quy chiếu gắn với hạt nhân. C_N , D_N và các tần số ω'_x , ω'_y và ω'_z (trong giả thiết về sự biến dạng hạt nhân, các tần số này có thể liên quan với tần số dao động cơ bản $\omega_0^0 = 41A^{-1/3}$ MeV) là các thông số của hố thế. Tính chất đặc biệt của trường thế trung bình được biểu

diễn trên hình 1.4. Khi tính mức năng lượng của hệ proton, thế năng của trường trung bình cần phải bổ sung tương tác Coulomb.



Hình 1.4 : Sự phụ thuộc bán kính của phần xuyên tâm của thế Xacxon — Wud với hệ neutron có $a = 1,56 \text{ fm}^{-1}$ (đường liền nét) và thế dao động (đường đứt nét). Bán kính tính trong hệ đơn vị R_0 , thế trong hệ đơn vị V_0 .

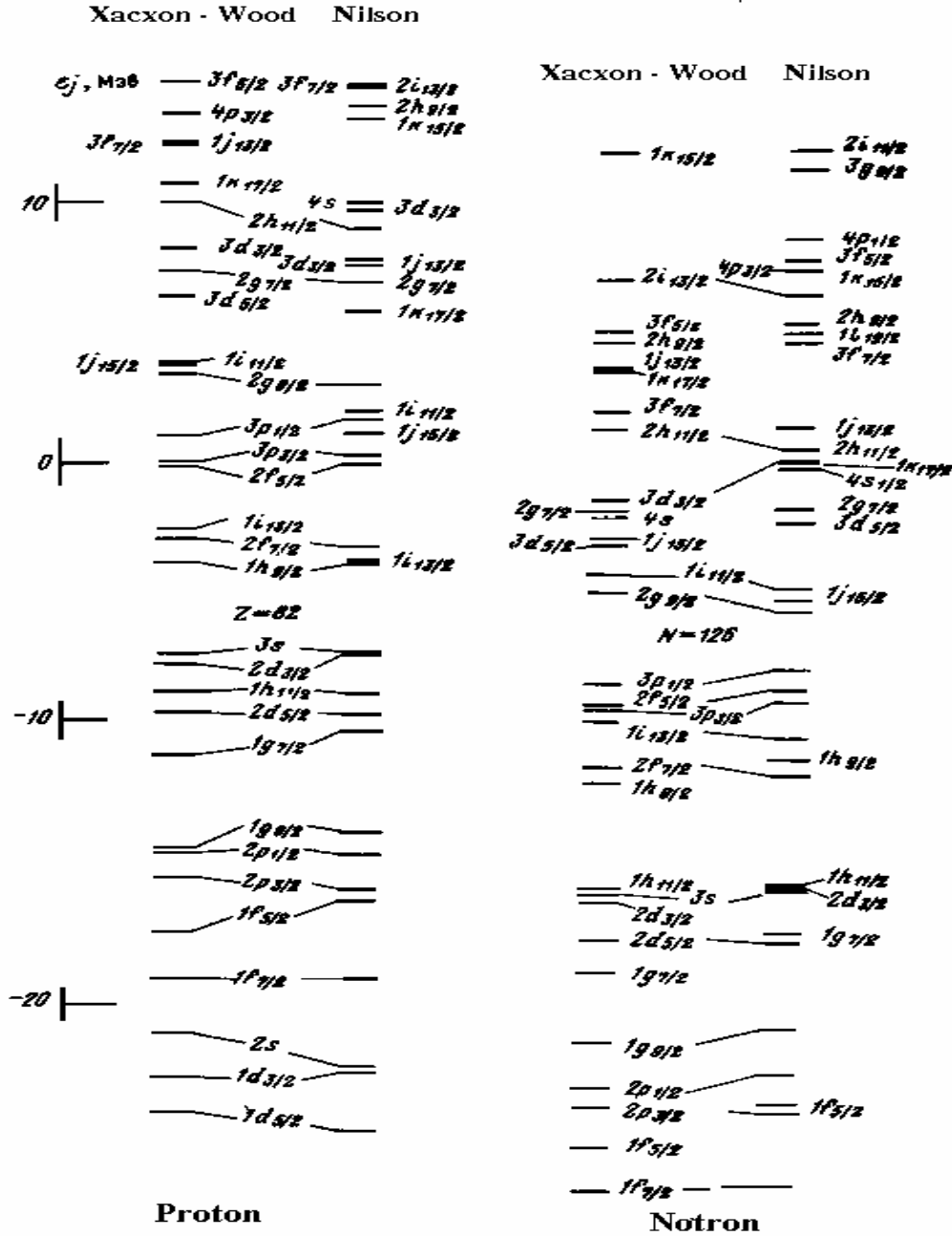
Trong mô tả trạng thái một hạt, sự đối xứng của trường trung bình có ý nghĩa lớn. Trong các hạt nhân cầu, các trạng thái một hạt được mô tả bằng năng lượng E , mômen quỹ đạo l , mômen góc toàn phần j và hình chiếu m , ngoài ra năng lượng của trạng thái bị tách ra thành m giá trị. Trong các hạt nhân biến dạng, dạng cân bằng của chúng tương ứng với chuyển động quay quanh một trục mà ở hệ tọa độ mới này, mômen góc toàn phần j vẫn là một số lượng tử tốt. Trạng thái được mô tả bằng năng lượng, độ chẵn lẻ, hình chiếu K của mômen góc toàn phần lên trục đối xứng của hạt nhân. Trong trường trung bình giả đối xứng này xảy ra sự phân tách lại các mức của mỗi mức con, tức là tách ra thành $2j + 1$ giá trị theo từng giá trị m , theo kiểu trong hố thế đối xứng cầu. Tuy nhiên trong trường hợp đó, mỗi mức một hạt của trường trung bình còn suy biến bậc 2 theo dấu của m .

Đối với hạt nhân cầu, do tương tác spin quỹ đạo, mức một hạt với l đã cho phân tách mạnh thành hai nhóm mức $j = l + 1/2$ và $j = l - 1/2$. Nhóm mức của $j = l + 1/2$ nằm ở dưới nhóm mức $j = l - 1/2$. Năng lượng phân tách bằng :

$$\Delta \varepsilon_{ls} \approx -20(ls)A^{-2/3} \quad (1.48)$$

Khi đó sự phân tách như sau: Các mức gần nhau của nhóm này vẫn tách xa khỏi các mức gần nhau của nhóm khác. Các nhóm các mức gần nhau tạo thành lớp.

Phần cơ bản của sơ đồ mức proton và neutron một hạt [15] được tính với hạt nhân cầu ^{208}Pb với thế Xacxon — Wud [16] và thế Nilxon [14] được biểu diễn trên hình 1-5.



Hình 1.5: Sơ đồ các mức một hạt của hạt nhân chẵn ^{208}Pb [15].

Đối với các mức một hạt của hạt nhân đối xứng cầu, người ta thường sử dụng ký hiệu phổ học vi mô ví dụ như $2d_{3/2}$. Ở đây số đầu tiên chỉ ra số thứ tự n của mức với mômen quỹ đạo l đã cho, còn với các giá trị mômen quỹ đạo $l = 0, 1, 2,$

3 ... khác nhau người ta đưa vào các ký tự la tinh khác nhau : s, p, d, f... chỉ số bên dưới cạnh chữ cái là mômen toàn phần của nucleon, bằng tổng mômen quỹ đạo l và spin (s = 1/2). Ký hiệu mức $2d_{3/2}$ là : mức thứ hai với l = 2 và mômen toàn phần j = 3/2. Ở các mức với n, l và j đã cho, trên mỗi mức có thể nằm $2j + 1$ nucleon. Trong chỉ số trạng thái một hạt v mà chúng ta sử dụng ngoài n, l, j còn đưa thêm vào hình chiếu m của mômen góc j trên trục đối xứng, m nhận các giá trị $-j, -j + 1 \dots j - 1 ; j$.

Ở trạng thái cơ bản, các nucleon lấp đầy các mức dưới, hơn nữa theo nguyên lý Pauli, trong một trạng thái chỉ có một nucleon (proton hoặc neutron). Hạt nhân chứa trong trạng thái cơ bản các lớp lấp đầy bằng proton hoặc neutron được gọi là hạt nhân magic. Hạt nhân là magic theo cả số proton và neutron được gọi là hạt nhân hai lần magic. Hạt nhân với số Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82 và N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 là hạt nhân magic. Trong mẫu lớp, khi hạt nhân bị kích thích, một vài nucleon chuyển sang trạng thái tự do có năng lượng lớn hơn. Năng lượng kích thích khi đó bằng hiệu số năng lượng của các trạng thái một hạt này. Mỗi trạng thái của hệ có một số lấp đầy của các trạng thái một hạt. Chúng ta xem xét hàm sóng của hệ bao gồm N hạt fermi độc lập. Trong trường hợp khi N hạt giữ các trạng thái một hạt $v_1, v_2 \dots v_N$, có thể mô tả hàm sóng biểu diễn trạng thái của hạt nhân dưới dạng định thức Xleter:

$$\Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_{v_1}(x_1) & \Psi_{v_2}(x_1) & \dots & \Psi_{v_N}(x_1) \\ \Psi_{v_1}(x_2) & \Psi_{v_2}(x_2) & \dots & \Psi_{v_N}(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{v_1}(x_N) & \Psi_{v_2}(x_N) & \dots & \Psi_{v_N}(x_N) \end{vmatrix} \quad (1.49)$$

ở đây v - bộ chỉ số đầy đủ đặc trưng cho các trạng thái một hạt, ví dụ như $v = n, l, j, m$; x_i — toạ độ của hạt trong đó có cả biến số spin. Giả thiết rằng tất cả $\Psi_v(x)$ đều chuẩn hoá. Không khó khăn để chứng minh rằng biểu thức (1.49) có tính chất của hàm sóng của hệ hạt độc lập: Nó thoả mãn nguyên lý Pauli và sự thay đổi bất đối xứng của hai hạt. Nếu giữa các chỉ số $v_1, v_2 \dots v_N$ có hai giá trị nào đó giống nhau thì cả hai cột của định thức giống nhau và định thức có giá

trị bằng 0. Như vậy trong hệ Fermion ở một trạng thái không thể có quá một hạt và hàm sóng (1.49) thoả mãn nguyên lý Pauli, sự đổi chỗ hai hạt tương ứng với đổi chỗ hai dòng của định thức (1.49) và do vậy dấu của nó sẽ thay đổi. Hàm sóng bất đối xứng (1.49) hoàn toàn được xác định bằng số các trạng thái một hạt lấp đầy v_1, v_2, \dots, v_N một cách độc lập với các hạt lấp đầy trong nó. Vì thế bộ trạng thái $\psi(v_1 \dots v_N)$ có thể gọi là biểu diễn của số trạng thái bị lấp đầy.

Chúng ta đưa vào toán tử a^+_v , nó sẽ sinh hạt ở trạng thái ψ_v và a^+_v được xác định bằng hệ thức :

$$a^+_v \psi(0) = \psi(v) \quad (1.50)$$

ở đây $\psi(0)$ — trạng thái chân không tức là trạng thái không chứa hạt nào. Khi tác dụng lên hàm sóng $\psi(v_1, v_2, \dots, v_N)$ toán tử a^+_v tạo nên trạng thái gồm N+1 hạt trong đó trạng thái thứ v là lấp đầy:

$$a^+_v \psi(v_1, v_2, \dots, v_N) = \begin{cases} \varphi(v_1, v_2, \dots, v_N, v), & \text{khi } v \neq v_1, v_2, \dots, v_N \\ 0, & \text{khi } v = v_i, v_i = v_1, v_2, \dots, v_N \end{cases} \quad (1.51)$$

Nhờ toán tử a^+ từ chân không có thể tạo nên trạng thái N hạt:

$$\psi(v_1, v_2 \dots v_N) = a^+_{v_N} \dots a^+_{v_2} a^+_{v_1} \psi(0) \quad (1.52a)$$

Từ tích phân đối xứng của $\psi(v_1 \dots v_N)$ suy ra rằng:

$$a^+_{v_i} a^+_{v_j} = - a^+_{v_j} a^+_{v_i} \quad (1.52b)$$

Tương tự có thể đưa vào toán tử a_v mà nó huỷ hạt trạng thái thứ v và tạo nên trạng thái gồm N-1 hạt mà trạng thái thứ v là trống:

$$a_v \psi(v_1, v_2, \dots, v_N) = \begin{cases} 0, & \text{khi } v \neq v_1 \dots v_N \\ \psi(v_1, v_2, \dots, v_N) & \text{khi } v \equiv v_i \end{cases} \quad (1.53)$$

rõ ràng là:
$$a_v \psi(0) = 0 \quad (1.54)$$

Toán tử a_v là liên hợp emitic với a^+ và với chúng có đẳng thức:

$$a_{v_i} a_{v_j} = -a_{v_j} a_{v_i} \quad (1.55)$$

Để dàng chứng minh:

$$a_{v_i}^+ a_{v_j} = -a_{v_j}^+ a_{v_i} \quad , \quad \text{khi } v_i \neq v_j \quad (1.56)$$

Chúng ta xem xét tác dụng của tích toán tử $a_v^+ a_v$ và $a_v a_v^+$ lên hàm $\Psi(v_1, v_2, \dots, v_N)$:

$$a_v^+ a_v \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) = \begin{cases} 0, & \text{khi } v \neq v_1, v_2, \dots, v_N \quad ; \\ \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) & \text{khi } v \equiv v_i \end{cases} \quad (1.57)$$

$$a_v a_v^+ \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) = \begin{cases} 0 & \text{khi } v \equiv v_i \\ \Psi(v_1, v_2, \dots, v_N) & \text{khi } v \neq v_1, v_2, \dots, v_N. \end{cases} \quad (1.58)$$

$$\text{Từ (1.57) và (1.58) suy ra rằng: } a_v^+ a_v + a_v a_v^+ = 1 \quad (1.59)$$

Các biểu thức từ (1.50) — (1.59) đủ để tạo nên các tính chất đại số của các toán tử a_v và a_v^+ . Các tính chất này trước tiên có thể viết dưới dạng các hệ thức giao hoán đã biết như sau:

$$\left. \begin{aligned} \{a_{v'}, a_v^+\} &= a_{v'} a_v^+ + a_v^+ a_{v'} = \delta_{v'v'} \quad ; \\ \{a_{v'}, a_v\} &= \{a_v^+, a_v^+\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.60)$$

Từ (1.57) suy ra rằng xác suất để trạng thái một hạt thứ v bị lấp đầy được xác định bằng giá trị trung bình của toán tử $a_v^+ a_v$. Vì thế toán tử:

$$\hat{n} = a_v^+ a_v \quad (1.61)$$

được gọi là toán tử lấp đầy trạng thái v . Toán tử số hạt toàn phần là :

$$\hat{N} = \sum_v \hat{n}_v = \sum_v a_v^+ a_v \quad (1.62)$$

có giá trị riêng bằng số hạt trong hệ.

Chúng ta đưa vào biểu thức đối với các toán tử một hạt và hai hạt của hệ hạt được quan tâm. Toán tử tác dụng lên những hạt được lựa chọn là toán tử một hạt. Toán tử này có dạng :

$$\hat{F} = \sum_{k=1}^N \hat{F}(x_k) \quad (1.63)$$

Bởi vì toán tử $\hat{F}(x_k)$ chỉ thay đổi trạng thái của hạt thứ k mà không thay đổi số hạt toàn phần nên toán tử \hat{F} có thể biểu diễn như tổng các toán tử:

$$\hat{F} = \sum_{v,v'} \langle v | \hat{F} | v' \rangle a_v^+ a_v \quad (1.64)$$

ở đây $\langle v | \hat{F} | v' \rangle = \int \psi_v^*(x) \hat{F}(x) \psi_{v'}(x) dx$ (1.65)

Tích phân trong (1.65) thực chất là lấy tổng theo biến rời rạc. Toán tử hai hạt, ví dụ như toán tử thế tương tác của hai hạt:

$$\hat{V} = \sum_{i < k} \hat{V}(x_i, x_k) \quad (1.66)$$

khi tác dụng lên hệ hạt đang xét có thể làm thay đổi trạng thái của hai hạt nhưng không làm thay đổi số hạt toàn phần của hệ. Toán tử \hat{V} trong biểu diễn số trạng thái lấp đầy có dạng:

$$\hat{V} = \frac{1}{2} \sum_{v_1 v_2 v_3 v_4} \langle v_3 v_4 | \hat{V} | v_1 v_2 \rangle a_{v_4}^+ a_{v_3}^+ a_{v_1} a_{v_2} \quad (1.67a)$$

ở đây :

$$\langle v_3 v_4 | \hat{V} | v_1 v_2 \rangle = \int \psi_{v_3}^*(x_1) \psi_{v_4}^*(x_2) \hat{V}(x_1, x_2) \psi_{v_1}(x_1) \psi_{v_2}(x_2) dx_1 dx_2 \quad (1.67b).$$

Có thể kiểm tra lại (1.64) — (1.67) bằng cách tính trực tiếp các phân tử ma trận theo các trạng thái (1.49). Chúng ta có thể dễ dàng thu được biểu thức đối với Hamilton H_0 của mẫu các hạt độc lập trong biểu diễn số trạng thái lấp đầy :

$$\hat{H}_0 = \sum_{k=1}^Z \hat{h}_Z(r_k) + \sum_{i=1}^N \hat{h}_N(r_i) \quad (1.68)$$

ở đây các toán tử một hạt proton $\hat{h}_z(r_k)$ được xác định bằng phương trình (1.43). Rõ ràng là đối với yếu tố ma trận $\langle v | \hat{h}_\tau | v' \rangle$ ta có đẳng thức :

$$\langle v | \hat{h}_\tau | v' \rangle = \varepsilon_{\tau v} \delta_{vv'} \quad (1.69)$$

với $\tau = Z$ hoặc N . Khi đó, như với (1.64) ta có :

$$\hat{H}_0 = \sum_v \varepsilon_{Zv} a_{Zv}^+ a_{Zv} + \sum_v \varepsilon_{Nv} a_{Nv}^+ a_{Nv} = \sum_v \varepsilon_{Zv} \hat{n}_{Zv} + \sum_v \varepsilon_{Nv} \hat{n}_{Nv} \quad (1.70)$$

Hamilton \hat{H}_0 liên hợp với toán tử số hạt toàn phần của proton \hat{Z} và neutron \hat{N} mà chúng bằng:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Z} &= \sum_v a_{Zv}^+ a_{Zv} = \sum_v \hat{n}_{Zv} \\ \hat{N} &= \sum_v a_{Nv}^+ a_{Nv} = \sum_v \hat{n}_{Nv} \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

và có hàm riêng chung nhau.

Mẫu một hạt giải thích được phần lớn số liệu thực nghiệm [3, 12, 17] và làm cơ sở để nghiên cứu các đặc trưng của hạt nhân với tương tác dư.

Mẫu hạt nhân siêu chảy. Mẫu các hạt độc lập mô tả không tốt một loạt các hiệu ứng thực nghiệm. Ví dụ như các trạng thái kích thích của các hạt nhân chẵn - chẵn có khoảng cách cỡ 1 - 2 MeV trong khi đó ở các hạt nhân lẻ hoặc lẻ - lẻ lại không có khoảng cách như vậy. Hơn nữa mômen quán tính của hạt nhân biến dạng được tìm thấy ở các trạng thái quay thấp lại nhỏ hơn mômen quán tính được tính theo mẫu các hạt độc lập từ hai đến ba lần.

Để giải thích các sai lệch nói trên và một số dữ liệu thực nghiệm khác, người ta đã dựng lên mẫu siêu chảy [18, 19] và phát triển nó [20, 21], mà trong đó giả thiết rằng ngoài trường trung bình, các phần còn lại - gọi chung là tương tác dư - dẫn tới chuyển động tương quan của proton và neutron. Khi đó các cặp neutron và proton với mômen động lượng bằng nhau nhưng ngược chiều tạo nên các trạng thái liên kết trong hạt nhân. Để phá vỡ các mối liên kết này cần năng

lượng 1 — 2 MeV. Ý tưởng mẫu hạt nhân siêu chảy xuất phát từ lý thuyết siêu chảy của kim loại và của heli lỏng.

Để mô tả tương quan cặp của dạng siêu chảy người ta thường dùng Hamilton mà trong biểu diễn số lấp đầy với hạt nhân biến dạng được viết như sau :

$$\hat{H} = \hat{H}_N + \hat{H}_Z, \quad (1.72)$$

$$\text{ở đây} \quad \hat{H}_N = \sum_v \varepsilon_v a_v^+ a_v - G_N \sum_{ss'} a_{s+}^+ a_{s-}^+ a_{s'-} a_{s'+} \quad (1.73a)$$

$$\hat{H}_Z = \sum_\mu \varepsilon_\mu a_\mu^+ a_\mu - G_Z \sum_{rr'} a_{r+}^+ a_{r-}^+ a_{r'-} a_{r'+} \quad (1.73b)$$

với ε_v và ε_μ là năng lượng của trạng thái một hạt đối với hệ neutron và proton tương ứng. Các trạng thái một hạt đặc trưng bằng các số lượng tử $v = s\delta$, $\mu = r\delta$ ở đây $\delta = \pm 1$. Các đại lượng G_N và G_Z là các hằng số tương tác cặp đối với hệ neutron và proton mà chúng được xác định từ năng lượng liên kết của hạt nhân.

Hamilton \hat{H} ở dạng (1.72) được sử dụng trước hết để mô tả tính chất của hạt nhân nặng mà trong đó không có tương quan neutron — proton dạng siêu chảy [20]. Ngoài ra, vì thế năng của trường trung bình đối với neutron và proton được tạo nên một cách riêng biệt nên người ta giải phương trình Schrodinger riêng rẽ để xác định đặc trưng của các trạng thái một hạt tạo nên hệ proton và neutron mà chúng được khảo sát riêng rẽ. Đối với hạt nhân cầu, Hamilton của mẫu siêu chảy hơi khác biểu thức (1.73). Dạng Hamilton và sự khảo sát các hiệu ứng siêu chảy của hạt nhân cầu được đưa ra trong các công trình như [12,21]. Việc nghiên cứu các đặc trưng thống kê của mẫu siêu chảy được thực hiện với Hamilton (1.73).

Dựa trên sự biến đổi Khacti - Phôc - Bôgôliubôv có thể chuyển từ Hamilton (1.73a) sang Hamilton của các giả hạt độc lập. Sự chuyển này sẽ được trình bày trong chương 3 khi xem xét tính chất thống kê của mẫu hạt nhân siêu chảy.

Mẫu hạt nhân suy rộng :

Mẫu hạt nhân suy rộng [12, 13] được hình thành từ mẫu giọt và mẫu lớp.

Theo mẫu giọt, mật độ nucleon trong hạt nhân rất lớn và do có tương tác mạnh giữa chúng, va chạm giữa các nucleon thường xuyên xảy ra vì thế chuyển động độc lập của từng nucleon riêng lẻ là không khả dĩ. Theo mẫu này, hạt nhân là giọt chất lỏng tích điện, bề mặt của nó có thể dao động. Nếu biên độ dao động quá lớn thì giọt chất lỏng vỡ ra tức là xảy ra sự phân chia hạt nhân. Mặc dù mẫu giọt có thể dùng để giải thích nguyên nhân phân chia và cơ chế của nó và cả sự tồn tại của chuyển động tập thể của hạt nhân nguyên tử, hoàn toàn không quan sát được những tiên đoán của nó trong thí nghiệm.

Trong mẫu suy rộng người ta giả thiết rằng hạt nhân bao gồm phần lõi bền vững bên trong (lõi này được tạo nên từ các nucleon của lớp lấp đầy) và các nucleon ở bên ngoài chuyển động trong trường của lõi. Chuyển động của lõi được mô tả trong mẫu giọt. Dưới ảnh hưởng của các nucleon ngoài, lõi thay đổi dạng của mình và có thể dao động. Các nucleon ngoài chuyển động trong trường của lõi và đến lượt mình - khác với mẫu lớp - lõi bị thay đổi do tương tác với các nucleon ngoài. Dựa trên mẫu suy rộng có hai giả thiết: Thứ nhất là dạng cân bằng của hạt nhân khác xa số magic là dạng elipxoit hoặc dạng vật quay phức tạp hơn. Điều này cho phép nói về định hướng của hệ một cách tổng quát. Thứ hai là điều kiện gián đoạn mà nhờ nó sự quay không phá vỡ dạng trường thế - tức là quay chậm đến mức mà các nucleon tuân theo chuyển động gián đoạn.

Điều kiện gián đoạn có thể viết như sau :

$$E_{in} \gg E_{vib} \gg E_{rot} \quad (1.74)$$

ở đây , E_{in} , E_{vib} và E_{rot} — là năng lượng của các lượng tử trong chuyển động nội tại, dao động và chuyển động quay. Từ hệ thức (1.74) suy ra rằng dao động bề mặt phân tách các mức liên quan tới chuyển động nội tại của các nucleon thành các mức gần nhau và tới lượt mình, các mức gần nhau này lại tách nhỏ nữa dưới ảnh hưởng của chuyển động quay của hạt nhân. Trong trường hợp này, chuyển động của hạt nhân có thể tách làm 3 dạng độc lập : chuyển động nội tại, dao động và quay. Hamilton có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\hat{H} = \hat{H}_{in} + \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{rot} \quad (1.75)$$

và hàm sóng ψ được xác định là tích của ba hàm sóng:

$$\Psi = \Psi_{in*} \Psi_{vib*} \Psi_{rot} \quad (1.76)$$

trong đó ψ_{in} , ψ_{vib} , ψ_{rot} tương ứng là các hàm riêng của toán tử Hamilton nội tại, dao động và quay \hat{H}_{in} , \hat{H}_{vib} , \hat{H}_{rot} .

Mẫu suy rộng trước hết giải thích được các tính chất của hạt nhân biến dạng mà trong số đó các hạt nhân với $150 < A < 190$ và $A > 226$ được nghiên cứu khá đầy đủ. Mẫu này giải thích mômen tứ cực của một số hạt nhân lớn là vì các nucleon bên ngoài của các hạt nhân này làm biến dạng lõi của chúng rất mạnh và hạt nhân trở thành có dạng không cầu - là elipxoit - bị kéo dãn hoặc nén lại theo trục đối xứng. Hạt nhân bị biến dạng có thể quay quanh trục vuông góc với trục đối xứng và điều này giải thích các mức quay được tìm thấy trong thí nghiệm. Các mức tương ứng với sự dao động cũng được tìm thấy trong thí nghiệm. Mẫu suy rộng cho phép bổ sung vào phân loại mức hạt nhân - đưa vào khái niệm mức một hạt liên quan tới các nucleon ở ngoài bị kích thích, mức tập thể (quay và dao động) tương ứng với sự kích thích lõi hạt nhân.

1.4 Những đặc trưng thống kê của hạt nhân nguyên tử.

Chúng ta chuyển sang nghiên cứu mật độ trạng thái và các đặc trưng thống kê khác của hạt nhân nguyên tử. Dường như là việc xác định mật độ trạng thái từ hệ thức (1.2) là không thể vì không thể dùng chúng để tính mật độ trạng thái ở mẫu cơ bản nhất là mẫu các hạt độc lập. Vấn đề là các giá trị riêng E_i của phương trình Schrodinger đối với mẫu này :

$$\hat{H}_0 |i\rangle = \left(\sum_v \varepsilon_{Z_v} \hat{n}_{Z_v} + \sum_v \varepsilon_{N_v} \hat{n}_{N_v} \right) |i\rangle = E |i\rangle \quad (1.77)$$

có thể là như nhau với các hệ có số hạt khác nhau. Nói một cách khác, giải phương trình (1.77) là tìm giá trị riêng trùng với giải các phương trình :

$$\hat{Z} |i\rangle = \left(\sum_v \hat{n}_{Z_v} \right) |i\rangle = Z_i |i\rangle$$

$$\hat{N} |i\rangle = \left(\sum_v \hat{n}_{Nv} \right) |i\rangle = N_i |i\rangle$$

ở đó hạt đang xét là proton Z_i và neutron N_i . Để nghiên cứu đặc trưng thống kê cân thay đổi định nghĩa (1.2). Mật độ trạng thái hạt nhân nguyên tử với số proton Z và số neutron N ở năng lượng E đã cho được xác định bằng biểu thức

$$\omega(Z, N, E) = \sum_i \delta(Z - Z_i) \delta(N - N_i) \delta(E - E_i) \quad (1.78)$$

Trong biểu thức này, hai hàm δ đầu tiên tách ra từ tập hợp các trạng thái vi mô $|i\rangle$ chỉ những giá trị riêng Z_i và N_i trùng với số proton Z và số neutron N trong hạt nhân.

Để đơn giản chúng ta khảo sát hệ gồm N hạt một loại. Trong trường hợp này, từ (1.78) với mật độ trạng thái $\omega(N, E)$ ta sẽ có :

$$\omega(N, E) = \sum_i \delta(N - N_i) \delta(E - E_i) \quad (1.79)$$

Các giá trị riêng N_i và E_i được xác định từ hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}|i\rangle &= N_i |i\rangle \\ \hat{H}|i\rangle &= E_i |i\rangle \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

Để sử dụng biểu thức (1.79) xác định mật độ trạng thái với N và E đã biết, cần phải tính đại lượng :

$$\frac{1}{\Delta N \Delta E} \sum_i \int_{N-\Delta N/2}^{N+\Delta N/2} dN \int_{E-\Delta E/2}^{E+\Delta E/2} dE \delta(N - N_i) \delta(E - E_i) \quad (1.81)$$

Điều này có nghĩa là từ tập hợp các trạng thái vi mô, cần lựa chọn và tính chỉ những trạng thái mà giá trị riêng N_i và E_i nằm gần N và E trong khoảng $(N-\Delta N/2, N + \Delta N/2)$ và $(E - \Delta E/2, E + \Delta E/2)$. Chia số thu được cho tích số $\Delta N * \Delta E$, chúng ta sẽ thu được số trạng thái trong một đơn vị năng lượng tức là mật độ trạng thái.

Cũng sử dụng (1.81), chúng ta khảo sát ví dụ đơn giản là một hệ gồm N hạt fermi độc lập cùng loại, với phổ mật độ gián đoạn không suy biến g . Tức là

khoảng cách giữa chúng là hằng số và bằng $d = g^{-1}$. Trường hợp khi tất cả các trạng thái một hạt thấp nhất bị chiếm tương ứng với trạng thái cơ bản của hệ. Nếu năng lượng tính từ đáy hố thế thì trạng thái cơ bản E_0 của hệ có năng lượng như sau :

$$E_0 = d \sum_{n=1}^N n = dN(N+1)/2 \quad (1.82)$$

Năng lượng bằng nửa tổng năng lượng của trạng thái lấp đầy sau cùng và của mức không lấp đầy thấp nhất trong trạng thái cơ bản gọi là năng lượng Fermi:

$$\varepsilon_F = (\varepsilon_N + \varepsilon_{N+1}) / 2 \quad (1.83)$$

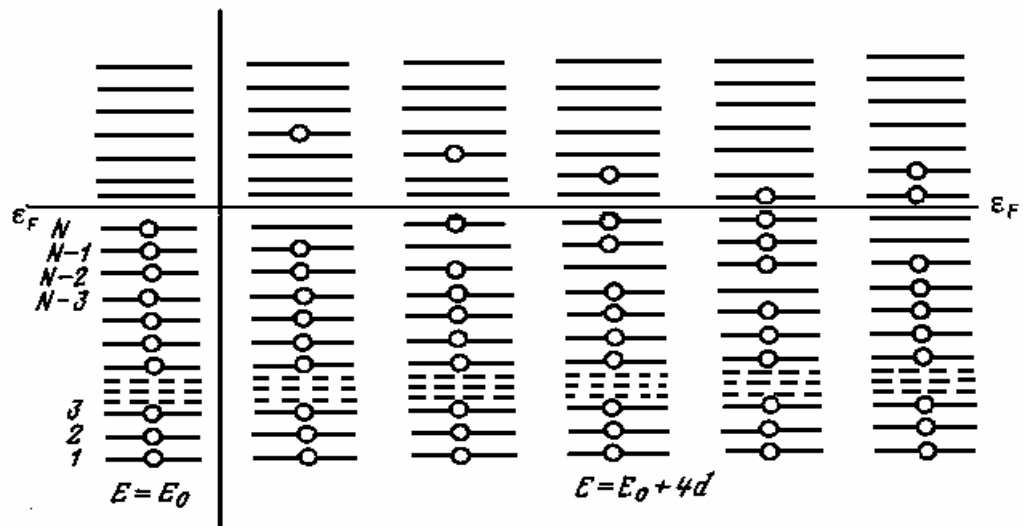
Đối với hệ N hạt với phổ phân bố đều:

$$\varepsilon_F = (N + 1/2)d \quad (1.83a)$$

Từ ε_F suy ra rằng trong trạng thái cơ bản, tất cả các trạng thái một hạt thứ v với $\varepsilon_v < \varepsilon_F$ đều bị chiếm giữ, còn các trạng thái một hạt thứ v với $\varepsilon_v > \varepsilon_F$ là tự do. Rõ ràng là hệ được khảo sát có thể ở trạng thái kích thích chỉ với năng lượng:

$$E_i = E_0 + id \quad (1.84)$$

ở đây i — số nguyên dương.



Hình 1.6. Các trạng thái vi mô của hệ với phổ trạng thái một hạt biểu kiến từ N hạt Fermi và có năng lượng toàn phần bằng $E = E_0 + 4d$. Ở bên trái là trạng thái vi mô của hệ ở trạng thái cơ bản.

Chúng ta tính mật độ trạng thái của hệ này. Ta đưa vào (1.81) khoảng lấy trung bình theo số hạt ΔN và theo năng lượng ΔE . Với hệ được khảo sát, tất nhiên ta đặt $\Delta N = 1$ và $\Delta E = d$ - khoảng cách năng lượng giữa các mức kích thích cạnh nhau. Trạng thái vĩ mô của hệ được xác định bằng số hạt N và năng lượng toàn phần E mà ta đã cố định và chọn là $E_i = E_0 + 4d$. Trạng thái vi mô của hệ hoàn toàn được xác định bằng số trạng thái một hạt bị lấp đầy. Không chỉ một mà một vài trạng thái vi mô tương ứng với hệ có năng lượng kích thích $U = E - E_0 > d$. Trên hình 1.6 là sơ đồ tất cả các trạng thái vi mô xuất hiện trong hệ khi $U = 4d$. Rõ ràng là ở năng lượng này số trạng thái vi mô là 5. Như vậy có 5 trạng thái vi mô mà tất cả đều có giá trị năng lượng $E_i = E_0 + 4d$ và chúng khác nhau bởi hàm riêng lấp đầy các trạng thái một hạt khác nhau tương ứng với trạng thái vĩ mô có N và $E = E_0 + 4d$. Rõ ràng là không có các trạng thái vi mô trong khoảng năng lượng $[(E_0 + 4d) - d/2, (E_0 + 4d) + d/2]$. Để thu được mật độ trạng thái tương ứng với biểu thức (1.81) cần chia số này cho khoảng năng lượng trung bình $\Delta E = d$, ta có:

$$\omega(N, E = E_0 + 4d) = 5/d = 5g$$

Ví dụ được khảo sát thuộc về hệ đơn giản nhất. Đối với hệ như vậy, ở năng lượng kích thích không lớn, dễ dàng tính được số trạng thái vi mô trong khoảng d bằng cách bỏ qua các cấu hình khả dĩ, khi ở năng lượng cao với mục đích này có thể sử dụng các hệ thức truy hồi [22]. Tuy nhiên bài toán trở nên phức tạp hơn nhiều nếu đặt vấn đề tính mật độ trạng thái của hệ có Hamilton của mẫu lớp một hạt.

Để làm việc này chúng ta sử dụng phương pháp thống kê được mô tả trong §1.1 và §1.2. Trước hết ta biến đổi Laplace ở phần bên trái và bên phải biểu thức (1.79):

$$\int_0^{\infty} dE \int_0^{\infty} dN e^{-\beta E + \alpha N} \omega(N, E) = \sum_i \int_0^{\infty} dE \int_0^{\infty} dN e^{-\beta E + \alpha N} \delta(E - E_i) \delta(N - N_i) = \sum_i e^{-\beta E_i + \alpha N_i} \quad (1.85)$$

Trong cơ chế thống kê, đại lượng đứng bên phải của (1.85) được gọi là tổng thống kê đầy đủ $Q(\beta, \alpha)$ [1.10] mà nó có thể được viết dưới dạng :

$$Q(\beta, \alpha) = \sum_i e^{-\beta E_i + \alpha N_i} \equiv \sum \langle i | e^{-\beta \hat{H} + \alpha \hat{N}} | i \rangle \equiv \text{Sp} \left(e^{-\beta \hat{H} + \alpha \hat{N}} \right) \quad (1.86)$$

Như vậy phép biến đổi Laplace đã biến mật độ trạng thái (1.79) sang tổng thống kê đầy đủ.

Tất nhiên rằng phép biến đổi Laplace ngược từ $Q(\beta, \alpha)$ sẽ cho mật độ trạng thái :

$$\omega(N, E) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} d\beta \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\alpha e^{\beta E - \alpha N} Q(\beta, \alpha) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\beta' - i\infty}^{\beta' + i\infty} d\beta \int_{\alpha' - i\infty}^{\alpha' + i\infty} d\alpha e^{S(\beta, \alpha)} \quad (1.87)$$

$$\text{với } S(\beta, \alpha) = \beta E - \alpha N + \ln Q(\beta, \alpha). \quad (1.88)$$

Hệ thức (1.87) được coi là công thức xác định chính xác mật độ trạng thái $\omega(N, E)$ và bài toán tính $\omega(N, E)$ lại quay về tích phân (1.87). Tích phân trong (1.87) có thể tính được bằng phương pháp đường yên ngựa. Khi sử dụng phương pháp đường yên ngựa đối với hàm nhiều biến phức thì xảy ra trường hợp tương tự như trường hợp một chiều [11]. Trong vùng điểm yên ngựa với các tọa độ β_0 và α_0 , ta tách hàm $S(\beta, \alpha)$ thành chuỗi và giới hạn bằng hai số hạng không bị triệt tiêu:

$$S(\beta, \alpha) = S(\beta_0, \alpha_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} (\beta - \beta_0)^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \alpha} (\beta - \beta_0) (\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} (\alpha - \alpha_0)^2 \quad (1.89)$$

Ở đây đạo hàm bậc hai của S theo α và β được tính ở điểm yên ngựa β_0 và α_0 mà tọa độ của chúng được xác định từ phương trình:

$$\partial S / \partial \beta = 0 \quad ; \quad \partial S / \partial \alpha = 0 \quad (1.90)$$

hoặc là sử dụng (1.88):

$$E = -\partial \ln Q / \partial \beta \quad ; \quad N = \partial \ln Q / \partial \alpha \quad (1.91)$$

Thay (1.89) vào (1.87) và sử dụng phép đổi biến $\beta = \beta_0 + iy$; $\alpha = \alpha_0 + ix$, ta thu được:

$$\omega(N, E) = e^{S(\beta_0, \alpha_0)} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[- \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \beta^2} x^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial \beta} xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} y^2 \right) \right] \quad (1.92)$$

Tích phân trong (1.92) ở dạng chung có thể viết như sau:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(- \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \right) dx_1, \dots, dx_n = (2\pi)^{n/2} |D|^{-1/2} \quad (1.93)$$

ở đây D - định thức của ma trận (a_{ij}) . Điều này thường được chứng minh nhờ sự biến đổi trực giao ma trận (a_{ij}) của các tích phân chuyển động sang dạng chéo sau khi thu được tích phân bằng tích các tích phân Laplace một lớp (1.18).

Sử dụng (1.93) với mật độ trạng thái $\omega(N, E)$ cuối cùng ta thu được:

$$\omega(N, E) = \frac{\exp[S(\beta_0, \alpha_0)]}{2\pi |D|^{1/2}} \quad (1.94)$$

ở đây

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix}_{\substack{\alpha=\alpha_0 \\ \beta=\beta_0}} \quad (1.95)$$

và S là entropi của hệ:

$$S(\beta_0, \alpha_0) = \beta_0 E - \alpha_0 N + \ln Q(\beta_0, \alpha_0). \quad (1.96)$$

Hệ thức (1.91) có thể viết lại ở dạng khác thuận tiện hơn khi đưa vào toán tử trung bình theo tổng thống kê đầy đủ. Theo đó, trung bình toán tử thống kê \hat{A} có dạng [10]:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Sp}(\hat{A} e^{-\beta(\hat{H} - \lambda \hat{N})}) / \text{Sp}(e^{-\beta(\hat{H} - \lambda \hat{N})}) \quad (1.97)$$

ở đây $\lambda = \alpha/\beta$. Khi đó với tọa độ của điểm yên ngựa ta thu được phương trình:

$$E = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = -\frac{1}{Q} \frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{\text{Sp}\{\hat{H} \exp[-\beta(\hat{H} - \lambda \hat{N})]\}}{\text{Sp}\{\exp[-\beta(\hat{H} - \lambda \hat{N})]\}} = \langle \hat{H} \rangle \quad (1.98a)$$

$$N = \langle \hat{N} \rangle \quad (1.98b)$$

Dựa vào việc xác định các giá trị trung bình thống kê (1.97) cho đạo hàm bậc hai trong (1.95) ta sẽ có:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} &= \frac{1}{Q} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial \beta} \right)^2 = \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 \\ \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha^2} &= \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 \\ \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha} &= \langle \hat{H} \hat{N} \rangle - \langle \hat{H} \rangle \langle \hat{N} \rangle \end{aligned} \right\} \quad (1.99)$$

Trong trường hợp chung, nếu cần tính mật độ trạng thái ở năng lượng E và có các tích phân chuyển động K_1, \dots, K_τ , đối với hệ như vậy có thể viết tổng thống kê dưới dạng như sau:

$$Q(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_\tau) = \text{Sp} \left[\exp \left(-\beta \hat{H} + \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i \hat{K}_i \right) \right] \quad (1.100)$$

Các tọa độ của điểm yên ngựa $\beta_0, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{0\tau}$ được tìm ra bằng cách giải hệ phương trình:

$$E = \langle \hat{H} \rangle; K_i = \langle \hat{K}_i \rangle \quad \text{với } i = 1, 2, \dots, \tau \quad (1.101)$$

Mật độ trạng thái được xác định bằng biểu thức sau :

$$\omega(E, K_1, \dots, K_\tau) = (2\pi)^{-(\tau+1)/2} |D|^{-1/2} \exp[S(\beta_0, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{0\tau})] \quad (1.102)$$

ở đây D - định thức ma trận được tạo nên từ các đạo hàm bậc hai của $\ln Q$ theo $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_\tau$. được tính tại điểm yên ngựa ; S - entropi của hệ.

$$S(\beta_0, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{0\tau}) = \beta_0 E - \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_{0i} K_i + \ln Q(\beta_0, \alpha_{01}, \dots, \alpha_{0\tau}) \quad (1.103)$$

Trong phần kết luận chúng ta sẽ nói về việc lựa chọn tích phân chuyển động. Các đại lượng vật lý bảo toàn theo thời gian được gọi là các tích phân chuyển động. Từ định luật bảo toàn số khối, điện tích, năng lượng, mômen góc và độ chẵn lẻ đối với hệ kín suy ra rằng sự mô tả khả dĩ nhất của hệ được giới hạn bằng bài toán số hạt proton Z và neutron N , năng lượng toàn phần E , mômen góc J và độ chẵn lẻ π . Khi đó bài toán giá trị ba tích phân chuyển động đầu tiên - Z , N và E - là cần thiết để tính mật độ trạng thái $\omega(Z,N,E)$: Các giá trị N và Z cố định đã biết để tách hạt nhân cụ thể ra khỏi tập hợp các hạt nhân, năng lượng E xác định mức độ kích thích của hạt nhân được khảo sát. Thường thì $\omega(Z,N,E)$ được gọi là mật độ trạng thái toàn phần của hạt nhân. Với một hạt nhân cụ thể, các đặc tính Z và N không được nhắc tới, và thay vì năng lượng toàn phần E người ta thường sử dụng năng lượng kích thích U bằng:

$$U = E - E_0 \quad (1.104)$$

ở đây E_0 là năng lượng trạng thái cơ bản.

Trong các phản ứng hạt nhân, sự giới hạn liên quan tới tính bảo toàn của mô men góc đóng vai trò lớn. Vì thế rất quan trọng nếu biết sự phụ thuộc của mật độ trạng thái vào mômen góc toàn phần J mà nó thường được gọi là sự phụ thuộc spin của mật độ trạng thái. Bởi vì mômen góc một hạt là vectơ, còn hình chiếu của nó đại lượng đại số nên thường nghiên cứu sự phụ thuộc $\omega(Z, N, E, M)$ vào hình chiếu mômen góc M trên một trục cố định. Để tính mật độ trạng thái $\omega(Z, N, E, J)$ theo các biểu thức đã biết với $\omega(Z, N, E, M)$ người ta sử dụng hệ thức:

$$\rho(Z, N, E, J) = \omega(Z, N, E, M=J) - \omega(Z, N, E, M=J+1) \approx - \left. \frac{\partial \omega(Z, N, E, M)}{\partial M} \right|_{M=J+1/2} \quad (1.105)$$

xác định mật độ mức $\rho(Z, N, E, J)$. Sự khác nhau ở các thuật ngữ “mật độ trạng thái” và “mật độ mức” liên quan tới việc tách các số lượng tử ví dụ theo mômen động lượng trong trường hợp đã cho. Công thức (1.105) cần được lý giải. Các trạng thái có $J' \geq J$ có đóng góp vào mật độ trạng thái $\omega(Z, N, E, M=J)$, còn các

trạng thái có $J' \geq J+1$ có đóng góp vào mật độ trạng thái $\omega(Z, N, E, M=J+1)$. Khi trừ nhau (theo 1.105) ta thu được mật độ trạng thái với giá trị J cố định. Tuy nhiên vì mỗi trạng thái với J đã cho sẽ tách ra $2J + 1$ lần theo hình chiếu mômen góc, nên đại lượng được xác định theo (1.105) được gọi là mật độ mức và ký hiệu là $\rho(Z, N, E, J)$. Mật độ mức $\rho(Z, N, E, J)$ liên quan với mật độ trạng thái theo hệ thức:

$$\omega(Z, N, E, J) = (2J + 1)\rho(Z, N, E, J) \quad (1.106)$$

còn với mật độ toàn phần $\omega(Z, N, E)$ liên quan với mật độ trạng thái theo hệ thức sau:

$$\omega(Z, N, E) = \sum_J (2J + 1)\rho(Z, N, E, J) \quad (1.107)$$

Trong chương 5 sẽ khảo sát mật độ trạng thái khi số giả hạt kích thích cố định. Từ các định luật bảo toàn không suy ra được tích phân chuyển động như số giả hạt kích thích n . Song trong mẫu lớp và mẫu hạt nhân siêu chảy, có thể đưa vào đại lượng vật lý được xác định bằng số giả hạt kích thích và toán tử của nó liên hợp với hàm toán tử Hamilton. Theo quan điểm như vậy, đại lượng vật lý này là tích phân chuyển động và trong các mẫu đó có thể dẫn ra của các trạng thái theo số giả hạt kích thích.

CHƯƠNG 2

CÁC ĐẶC TRUNG THỐNG KÊ CỦA HẠT NHÂN TRONG MẪU CÁC HẠT ĐỘC LẬP

2.1 Các hệ thức cơ bản :

Chúng ta nghiên cứu mật độ trạng thái và các đặc trưng thống kê khác của hạt nhân nguyên tử trong các mẫu cụ thể. Việc nghiên cứu này được bắt đầu từ việc khảo sát dạng tường minh của $\omega(U)$ trong mẫu các hạt độc lập. Để đơn giản trước hết ta hãy tính cho hệ một thành phần và nó sẽ được mở rộng ra với hạt nhân như hệ hai thành phần gồm proton và neutron.

Chúng ta khảo sát hệ gồm N hạt Fermi cùng loại chuyển động trong một trường thế trung bình. Hamilton H_0 và toán tử số hạt N của hệ này trong biểu diễn số lấp đầy có dạng sau (xem các công thức (1.70) và (1.71)):

$$\hat{H}_0 = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} \hat{n}_{\nu} \quad (2.1a)$$

$$\hat{N} = \sum_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} = \sum_{\nu} \hat{n}_{\nu} \quad (2.1b)$$

ở đây các toán tử a_{ν}^{\dagger} và a_{ν} tuân theo hệ thức giao hoán (1.60), ϵ_{ν} là năng lượng của trạng thái một hạt thứ ν .

Chúng ta tìm thấy tổng thống kê của hệ :

$$Q(\beta, \alpha) = \text{Sp}[\exp(-\beta\hat{H} + \alpha N)] = \sum_i \left\langle i \left| \exp\left(-\beta \sum_{\nu} (\epsilon_{\nu} - \lambda) \hat{n}_{\nu}\right) \right| i \right\rangle \quad (2.2)$$

ở đây $\lambda = \alpha/\beta$. Bởi vì các hàm sóng $|i\rangle$ là các hàm riêng của toán tử $\hat{H} = \sum_{\nu} (\epsilon_{\nu} - \lambda) \hat{n}_{\nu}$ với các giá trị riêng là $\epsilon_i = \sum_{\nu} (\epsilon_{\nu} - \lambda) n_{\nu}(i)$ nên $Q(\alpha, \beta)$ có thể viết lại như sau :

$$Q(\beta, \alpha) = \sum_i \exp\left[-\beta \sum_{\nu} (\epsilon_{\nu} - \lambda) n_{\nu}(i)\right] \quad (2.3)$$

Với $n_{\nu}(i)$ bằng 0 và 1, tổng trong (2.3) được tính cho tất cả các trạng thái khả dĩ của hệ. Điều đó có nghĩa rằng trong tổng phải tính là mỗi trạng thái một hạt thứ ν là bị chiếm khi $n_{\nu}(i)=1$ hay tự do khi $n_{\nu}(i) = 0$. Như vậy ta có:

$$\begin{aligned} Q(\beta, \alpha) &= \{1 + \exp[-\beta(\epsilon_1 - \lambda)]\} \times \{1 + \exp[-\beta(\epsilon_2 - \lambda)]\} \dots \times \{1 + \exp[-\beta(\epsilon_{\nu} - \lambda)]\} = \\ &= \prod_{\nu} \{1 + \exp[-\beta(\epsilon_{\nu} + \alpha)]\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\ln Q(\beta, \alpha) = \sum_v \ln[1 + \exp(-\beta\varepsilon_v + \alpha)] \quad (2.5)$$

Chúng ta đã thu được kết quả rất quan trọng: chuyển từ tổng theo các trạng thái của hệ trong (2.2) sang tổng theo các trạng thái một hạt (2.5).

Chúng ta tính giá trị trung bình của số lấp đầy các trạng thái một hạt thứ v . Nhờ (1.97), dựa trên các hệ thức (2.2) và (2.5) ta thu được:

$$\bar{n}_v = \langle \hat{n}_v \rangle = \frac{\text{Sp}(\hat{n}_v \exp[-\beta(\hat{H} - \lambda\hat{N})])}{\text{Sp}(\exp[-\beta(\hat{H} - \lambda\hat{N})])} = -\frac{\partial \ln Q}{\beta \partial (\varepsilon_v - \lambda)} = \{1 + \exp[\beta(\varepsilon_v - \lambda)]\}^{-1} \quad (2.6)$$

Các phương trình (1.91) để xác định tọa độ điểm yên ngựa β_0, α_0 có dạng:

$$E = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = \sum_v \frac{\varepsilon_v}{1 + \exp[\beta(\varepsilon_v - \lambda)]} = \sum_v \varepsilon_v \bar{n}_v \quad (2.7a)$$

$$N = \frac{\partial \ln Q}{\partial \alpha} = \sum_v \frac{1}{1 + \exp[\beta(\varepsilon_v - \lambda)]} = \sum_v \bar{n}_v \quad (2.7b)$$

và ta cũng dễ dàng thu được biểu thức đối với entropi S và các đạo hàm bậc 2 của $\ln Q$ theo α và β :

$$S = \beta E - \alpha N + \sum_v \ln[1 + \exp(-\beta\varepsilon_v + \alpha)] = \sum_v [\beta(\varepsilon_v - \lambda)\bar{n}_v - \ln(1 - \bar{n}_v)] \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} = \sum_v \varepsilon_v^2 \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) \quad (2.9a)$$

$$\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha \partial \beta} = \sum_v \varepsilon_v \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) \quad (2.9b)$$

$$\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha^2} = \sum_v \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) \quad (2.9c)$$

Các giá trị trên sẽ tính được khi thu được β và α từ nghiệm của hệ phương trình (2.7). Chúng ta đã tìm ra tất cả các hệ thức cần thiết để tính mật độ trạng thái của hệ $\omega(N, E)$. Từ trên suy ra rằng nếu với hệ có phổ các trạng thái một hạt đã biết, cần thiết để xác định $\omega(U)$ thì phải thực hiện các việc sau :

1. Với N và E đã cho, từ (2.7) tìm được các tọa độ điểm yên ngựa β_0 và α_0 .
2. Nhờ β_0 và α_0 , theo các công thức (2.8) và (2.9) tính entropi S của hệ và các đạo hàm bậc hai $\ln Q$ theo β và α .

3. Thay thế S và các đạo hàm bậc 2 vào (1.94), tính $\omega(N,E)$ - mật độ trạng thái của hệ gồm N hạt Fermi độc lập ở năng lượng toàn phần E đã cho.

Ta nhận thấy rằng các tính chất thống kê của hệ mà từ đó biết được sự phụ thuộc năng lượng của các đại lượng β , α , S và ω thực tế phụ thuộc vào phổ các trạng thái một hạt ε_v .

2.2 Mẫu khí Fermi

Ta thu được mật độ trạng thái $\omega(N,E)$ đối với hệ N hạt Fermi độc lập có năng lượng E khi giả thiết rằng phổ mật hạt của nó là không suy biến, phân bố cách đều và có mật độ g. Để tính các đặc trưng thống kê, chúng ta sẽ sử dụng gần đúng liên tiếp bằng cách thay tổng theo các trạng thái một hạt bằng tích phân theo các trạng thái một hạt tức là $\sum_v \rightarrow g \int d\varepsilon$. Tương ứng với (2.5), đối với logarit tổng thống kê $\ln Q(\beta, \alpha)$ ta có:

$$\ln Q(\beta, \alpha) = \sum_v \ln[1 + \exp(-\beta\varepsilon_v + \alpha)] = g \int_0^{\infty} \ln[1 + \exp(-\beta\varepsilon + \alpha)] d\varepsilon \quad (2.10)$$

Trong (2.10) điểm gốc năng lượng ε được chọn sao cho các giá trị năng lượng một hạt luôn dương ($\varepsilon \geq 0$), tức là năng lượng bằng 0 ở đáy hố thế. Biểu thức (2.10) được biến đổi thành:

$$\ln Q(\beta, \alpha) = g \int_0^{\alpha/\beta} (\alpha - \beta\varepsilon) d\varepsilon + g \int_0^{\alpha/\beta} \ln[1 + \exp(\beta\varepsilon - \alpha)] d\varepsilon + g \int_{\alpha/\beta}^{\infty} \ln[1 + \exp(-\beta\varepsilon + \alpha)] d\varepsilon \quad (2.11)$$

Tích phân thứ hai trong (2.11), khi đổi biến $x = \alpha - \beta\varepsilon$ sẽ có dạng:

$$\int_0^{\alpha/\beta} \ln[1 + \exp(\beta\varepsilon - \alpha)] d\varepsilon = \frac{1}{\beta} \int_0^{\alpha} \ln(1 + e^{-x}) dx$$

giá trị tích phân này khi $\alpha \rightarrow \infty$ sẽ tiến đến $\pi^2/12$ [9], còn với tích phân thứ ba

chúng ta thu được:

$$\int_{\alpha/\beta}^{\infty} \ln[1 + \exp(\alpha - \beta\varepsilon)] d\varepsilon = \frac{\pi^2}{12\beta}$$

Như vậy ở gần đúng $a \gg 1$ đối với $\ln Q(\beta, \alpha)$ ta có:

$$\ln Q(\beta, \alpha) = g\alpha^2 / (2\beta) + \pi^2 g / (6\beta_0^2) \quad (2.12)$$

Hệ các phương trình để xác định tọa độ điểm yên ngựa β_0 , α_0 trong trường hợp này có dạng:

$$E_0 = -\partial \ln Q / \partial \beta = g\alpha_0^2 / (2\beta_0^2) + \pi^2 g / (6\beta_0^2) \quad (2.13a)$$

$$N = \partial \ln Q / \partial \alpha = g \alpha_0 / \beta_0 \quad (2.13b)$$

Chúng ta tìm mối liên hệ giữa β_0 , α_0 và năng lượng Fermi ε_F . Để làm điều đó ta

sử dụng công thức tính số hạt N và năng lượng E_0 ở trạng thái cơ bản của hệ:

$$E_0 = \sum_v^{\varepsilon_F} \varepsilon_v = g \int_v^{\varepsilon_F} \varepsilon \, d\varepsilon = \frac{g \varepsilon_F^2}{2} \quad (2.14a)$$

$$N = \sum_v^{\varepsilon_F} 1 = g \int_0^{\varepsilon_F} d\varepsilon = g \varepsilon_F \quad (2.14b)$$

Từ (2.13b) và (2.14b) ta thấy rằng $\alpha_0 = \beta_0 \varepsilon_F$ và phương trình (2.13a) có dạng:

$$U = (E - E_0) = a / \beta_0^2 = at^2 \quad (2.15)$$

Ở đây $a = (\pi^2/6)g$ - thông số mật độ mức ; $t = \beta_0^{-1}$ - nhiệt độ của hệ. Ta thu được phương trình trạng thái nổi tiếng của mẫu khí Fermi [10].

Ta tính Entropi S của hệ:

$$S = \beta E - \alpha N + \ln Q(\beta, \alpha) = \beta E - \alpha N + g \alpha^2 / (2\beta) + a / \beta$$

Sử dụng hệ thức (2.13) và (2.15) ta thu được:

$$S = 2\beta_0 U = 2\sqrt{aU} \quad (2.16)$$

Các đạo hàm bậc hai của $\ln Q$ có dạng:

$$\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} = \frac{g \alpha^2}{\beta^3} + \frac{\pi^2 g}{3\beta^3} ; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha^2} = \frac{g}{\beta} ; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha} = -\frac{g \alpha}{\beta^2}$$

và định thức D bằng:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix}_{\substack{\beta=\beta_0 \\ \alpha=\alpha_0}} = \frac{\pi^2 g^2}{3\beta_0^4} = \frac{12 U^2}{\pi^2} \quad (2.17)$$

Thay các giá trị (2.16) và (2.17) vào (1.94) đối với mật độ trạng thái $\omega(N, E) = \omega(U)$ ta sẽ có:

$$\omega(U) = \exp(2\sqrt{aU}) / (\sqrt{48} \times U) \quad (2.18)$$

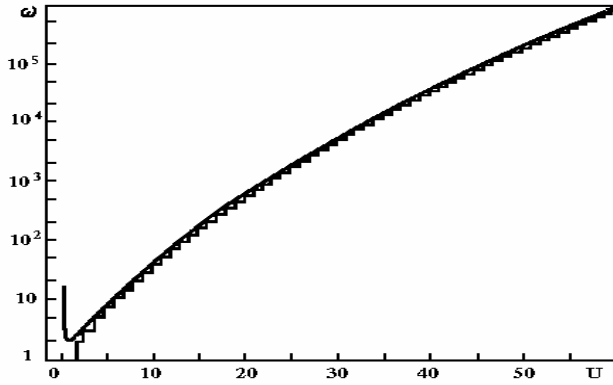
Công thức (2.18) được viết dưới dạng khác:

$$\omega(U) = \frac{\exp\left(2\sqrt{\frac{\pi^2}{6}}gU\right)}{\sqrt{48}(gU)} g = g p(n)$$

Ở đây đã đưa vào các số $n = gU$, $p(n) = \exp\left[2\sqrt{(\pi^2/6)n}\right]/(\sqrt{48n})$. Cách viết như vậy cho phép đưa về dạng (2.18). Thừa số g đầu tiên chính là mật độ mức của hệ. Trong trường hợp đang khảo sát, nó trùng với mật độ các trạng thái một hạt. Điều tất yếu đó được khảo sát khá kỹ ở trong mục §1.4 (công thức 1.84). Thừa số thứ hai là sự suy biến mức của hệ ở năng lượng kích thích bằng U . Ta nhận được biểu thức đối với suy biến $p(n)$ đầu tiên ở [23] khi giải quyết vấn đề thuần túy toán học để xác định giá trị tiệm cận của tổ hợp $P(n)$ của số nguyên n thành các số hạng nguyên độc lập với bậc của chúng. Bài toán này tỏ ra liên quan chặt chẽ tới sự xác định số trạng thái của hệ Fermi ở năng lượng kích thích đã cho U . Thực vậy, trong ví dụ được nghiên cứu ở mục 1.4 đã thu được rằng số trạng thái với phổ đã biết khi $U = 4d$ là bằng 5. Khi đó dễ dàng coi tổng các số nguyên bằng số tổ hợp sau: $4 = 1+3 = 2+2 = 1+1+2 = 1+1+1+1$ tức là số tổ hợp bằng 5 hay $P(4) = 5$.

Trong các hệ quả của công thức (2.18) đã sử dụng gần đúng $\alpha_0 = \varepsilon_F \beta_0 \gg 1$ mà nó thường được gọi là sự gần đúng nhiệt độ thấp. Từ đó suy ra rằng $t = \beta_0^{-1}$ nhỏ hơn nhiều so với năng lượng Fermi. Bởi vì với hạt nhân, $\varepsilon_F \cong 35\text{MeV}$ nên bất đẳng thức $t \ll \varepsilon_F$ luôn thỏa mãn tốt ở vùng năng lượng kích thích rộng.

Trong công thức (2.18) không có sự phụ thuộc rõ ràng của $\omega(U)$ vào số hạt N của hệ. Đó là vì hai gần đúng sau: Thứ nhất là trong các hệ quả đã sử dụng sự gần đúng nhiệt độ thấp. Thứ 2 - điều quan trọng nhất là chúng ta khảo sát hệ với phổ một hạt phân bố đều. Mật độ trạng thái một hạt g không phụ thuộc năng lượng là thông số duy nhất đặc trưng cho hệ. Như sẽ được chứng minh trong §2.4, trong trường hợp hệ có phổ lớp vỏ không đồng nhất sẽ xuất hiện sự phụ thuộc rất mạnh của các đặc trưng thống kê vào N . Trên hình 2.1 đưa ra sự phụ thuộc năng lượng của mật độ trạng thái của hệ có phổ phân bố đều. Rõ ràng là đối với tất cả các năng lượng kích thích U bắt đầu từ $U = 5/g$, công thức (2.18) đưa lại giá trị chính xác cho mật độ trạng thái. Đồng thời như đã nêu trong §1.2 khi $U \rightarrow 0$ mật độ trạng thái $\omega(U)$ được tính theo phương pháp điểm yên ngựa sẽ tiến tới ∞ tức là trái ngược rõ ràng với tính toán chính xác.



Hình 2.1. Sự phụ thuộc $\omega(U)$ đối với hệ hạt Fermi có phổ một hạt gián đoạn:

Đường liên tục: Tính theo (2.18) ;

Đường bậc thang: Tính theo số tổ hợp;

Năng lượng kích thích U được đo trong đơn vị $d = g^{-1}$.

Tuy nhiên các đặc trưng thống kê khác như entropy S và cả phương trình trạng thái (2.15) thể hiện mối quan hệ năng lượng của trạng thái với mật độ sẽ “tự đúng” khi $U = 0$. “Sự không đúng” tức là dạng mật độ trạng thái trái ngược giữa lý thuyết và tính toán chính xác được lý giải là do có thừa số trước hàm mũ tỷ lệ với U^{-1} và nó sẽ tiến tới ∞ khi $U \rightarrow 0$.

Chúng ta tính số trạng thái trung bình \bar{n} xuất hiện trong hệ ở năng lượng kích thích U bằng tổng số hạt và lỗ trống kích thích :

$$\bar{n} = 2g \int_{\varepsilon_F}^{\infty} \bar{n}(\varepsilon) d\varepsilon = 2g \int_{\varepsilon_F}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{1 + \exp[\beta(\varepsilon - \varepsilon_F)]} = (2\sqrt{6} \ln 2 / \pi) \sqrt{gU} \approx 1.08 \sqrt{gU} \quad (2.19)$$

Trong (2.19), tích phân đưa lại giá trị trung bình của số hạt kích thích với năng lượng $\varepsilon > \varepsilon_F$ và thừa số 2 thể hiện là cứ mỗi lần sinh ra một hạt sẽ tương ứng sinh ra một lỗ trống với $\varepsilon > \varepsilon_F$.

2.3 Sự phụ thuộc spin của mật độ trạng thái hạt nhân.

Chúng ta xem xét mẫu hạt nhân mà các hệ thức của nó hiện nay được sử dụng rộng rãi để mô tả mật độ trạng thái. Trong mẫu này, hạt nhân như một hệ được đặc trưng bằng số proton Z và số neutron N , năng lượng toàn phần E và hình chiếu mô men quỹ đạo M trên trục cố định. Chúng ta cũng giả thiết rằng phổ của trạng thái một hạt là phân bố đều và có mật độ g_Z và g_N đối với các thành phần proton và neutron tương ứng. Ngoài ra còn giả thiết là các phổ một hạt sẽ suy biến bậc hai theo dấu của hình chiếu của mômen một hạt m_Z và m_N , giá trị của chúng không phụ thuộc vào chỉ số v . Có thể thấy rằng phổ một hạt như vậy là quá “nhân tạo” và sẽ “tự nhiên” hơn nếu giả thiết $m_Z = m_N = 1/2$ tức là khảo sát phổ một hạt tách đôi theo spin. Tuy nhiên khi đó xuất hiện các hệ số bổ sung do có $m = 1/2$ và chính sự phụ thuộc đặc trưng thống kê vào hình chiếu mômen góc một hạt m bị triệt tiêu. Chúng ta lưu ý là trong trường hợp được khảo sát, mật độ trạng thái một hạt $g_{Z,N}$ không bằng với mật độ mức một hạt $\tilde{g}_{Z,N}$ mà bằng $\tilde{g}_{Z,N}/2$.

Trong mẫu này, hệ proton và neutron độc lập - theo ý nghĩa là Hamilton của hạt nhân (1.70) là tổng các Hamilton của nhóm proton và neutron. Khi đó lôgarit tổng thống kê của hạt nhân bằng tổng các lôgarit của tổng thống kê của các nhóm nói trên. Bởi vì toán tử hình chiếu mômen góc của hệ M có dạng:

$\hat{M} = \sum_v m_{Zv} \hat{n}_{Zv} + \sum_v m_{Nv} \hat{n}_{Nv}$ và giao hoán với \hat{H}_0 tức là hình chiếu mômen góc là tích phân chuyển động nên tương tự với hệ quả của công thức (2.5) đối với $\ln Q$ của cả hệ thu được:

$$\begin{aligned} \ln Q(\beta, \alpha_Z, \alpha_N, \kappa) &= \sum_v \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon_{Zv} + \alpha_Z + \kappa m_{Zv})] + \\ &\quad + \sum_v \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon_{Nv} + \alpha_N + \kappa m_{Nv})] = \\ &= \frac{g_Z}{2} \int_0^\infty \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon + \alpha_Z + \kappa m_Z)] d\varepsilon + \frac{g_Z}{2} \int_0^\infty \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon + \alpha_Z - \kappa m_Z)] d\varepsilon + \\ &\quad + \frac{g_N}{2} \int_0^\infty \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon + \alpha_N + \kappa m_N)] d\varepsilon + \frac{g_N}{2} \int_0^\infty \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon + \alpha_N - \kappa m_N)] d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.20)$$

ở đây đã sử dụng phép gần đúng liên tiếp, khi cộng theo v đã tách các tổng có hình chiếu mômen một hạt m_Z và m_N có giá trị dương và âm ra.

Trong số các tích phân trong (2.20) chúng ta hãy xét một ví dụ như tích phân đầu tiên có thể biến đổi ở dạng:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon + \alpha_Z + \kappa m_Z)] d\varepsilon = \int_0^{(\alpha_Z + \kappa m_Z)/\beta} (\alpha_Z + \kappa m_Z - \beta \varepsilon) d\varepsilon + \\ &\quad + \int_0^{(\alpha_Z + \kappa m_Z)/\beta} \ln[1 + \exp(\beta \varepsilon - \alpha_Z - \kappa m_Z)] d\varepsilon + \\ &\quad + \int_{(\alpha_Z + \kappa m_Z)/\beta}^\infty \ln[1 + \exp(-\beta \varepsilon + \alpha_Z + \kappa m_Z)] d\varepsilon \end{aligned} \quad (2.21)$$

Khi tính tích phân trong (2.21), ta giả thiết rằng $(\alpha + \kappa m_Z) \gg 1$ tức là ta lại sử dụng gần đúng nhiệt độ thấp. Khi đó dễ dàng chứng tỏ rằng khi thay thế biến $x = \alpha_Z + \kappa m_Z - \beta \varepsilon$ và $x = \beta \varepsilon - \alpha_Z - \kappa m_Z$, các tích phân thứ 2 và thứ 3 trong (2.21) đều bằng $\pi^2/(12\beta)$. Như vậy ta thu được:

$$I = (\alpha_Z + \kappa m_Z)^2/(2\beta) + \pi^2/(6\beta) \quad (2.22)$$

Các giá trị của các tích phân còn lại trong (2.20) với độ chính xác đến dấu của κm trùng với (2.22). Với $\ln Q$ chúng ta có:

$$\begin{aligned} \ln Q = & \frac{g_Z(\alpha_Z + \kappa m_Z)^2}{4\beta} + \frac{g_Z(\alpha_Z - \kappa m_Z)^2}{4\beta} + \frac{\pi^2 g_Z}{6\beta} + \frac{g_N(\alpha_N + \kappa m_N)^2}{4\beta} + \\ & + \frac{g_N(\alpha_N - \kappa m_N)^2}{4\beta} + \frac{\pi^2 g_N}{6\beta} = \frac{g_Z \alpha_Z^2}{2\beta} + \frac{g_N \alpha_N^2}{2\beta} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\kappa^2 \overline{gm^2}}{2\beta} \end{aligned} \quad (2.23)$$

ở đây đưa vào các biểu diễn:

$$g = g_Z + g_N \quad ; \quad a = \frac{\pi^2}{6} g \quad ; \quad \overline{m^2} = \frac{1}{g} (m_Z^2 g_Z + m_N^2 g_N) \quad (2.24)$$

Hệ phương trình để xác định tọa độ điểm yên ngựa có dạng:

$$E = -\frac{\ln Q}{\partial \beta} = \frac{g_Z \alpha_Z^2}{2\beta^2} + \frac{g_N \alpha_N^2}{2\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\kappa^2 \overline{gm^2}}{2\beta^2} \quad (2.25a)$$

$$Z = \partial \ln Q / \partial \alpha_Z = g_Z \alpha_Z / \beta; \quad (2.25b)$$

$$N = \partial \ln Q / \partial \alpha_N = g_N \alpha_N / \beta \quad (2.25c)$$

$$M = \partial \ln Q / \partial \kappa = \kappa \overline{gm^2} / \beta; \quad (2.25d)$$

Khi sử dụng các hệ thức đối với trạng thái cơ bản của hệ:

$$Z = g_Z \varepsilon_{FZ} \quad ; \quad N = g_N \varepsilon_{FN} \quad ; \quad E_0 = \frac{g_Z \varepsilon_{FZ}^2}{2} + \frac{g_N \varepsilon_{FN}^2}{2}$$

và hệ thức $K = M\beta / (\overline{gm^2})$ mà nó được suy ra từ (2.25g), không khó khăn gì chúng ta có thể thu được phương trình trạng thái:

$$U - M^2 / (2\overline{gm^2}) = a / \beta^2 = a t^2 \quad (2.26)$$

ở đây $t = \beta^{-1}$, $U = E - E_0$ — năng lượng kích thích. Entropy của hệ có dạng:

$$S = \beta E - \alpha_Z Z - \alpha_N N - \kappa M + \ln Q = 2at = 2\sqrt{a \left[U - M^2 / (2\overline{gm^2}) \right]} \quad (2.27)$$

chúng ta đưa vào biểu thức đối với đạo hàm bậc 2 của $\ln Q$ theo β , α_Z , α_N và K :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} &= \frac{g_Z \alpha_Z^2}{\beta^3} + \frac{g_N \alpha_N^2}{\beta^3} + \frac{\kappa^2 \overline{gm^2}}{\beta^3} + \frac{2a}{\beta^3}; \\
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha^2} &= \frac{g_Z}{\beta} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} = \frac{g_N}{\beta} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \kappa^2} = \frac{\overline{gm^2}}{\beta} \quad ; \\
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha_Z} &= -\frac{g_Z \alpha_Z}{\beta^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \alpha_N} = -\frac{g_N \alpha_N}{\beta^2} \quad ; \\
\frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta \partial \kappa} &= -\frac{\kappa^2 \overline{gm^2}}{\beta^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_Z \partial \alpha_N} = \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_Z \partial \kappa} = \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \alpha_N \partial \kappa} = 0.
\end{aligned}$$

Định thức ma trận của các đạo hàm bậc 2 tính tại điểm yên ngựa là:

$$D = 2 g g_Z g_N a \overline{m^2} / \beta^6.$$

thường sử dụng gần đúng $g_Z = g_N = g/2$. Khi đó:

$$D = (6/\pi^2)^3 a^4 \overline{m^2} / (2\beta^6) = (6/\pi^2)^3 \overline{m^2} a [U - M^2 / (2\overline{gm^2})]^3 / 2 \quad (2.28)$$

Thay (2.27) và (2.28) vào (1.102) đối với mật độ trạng thái $\omega(Z, N, E, M) = \omega(U, M)$ ta thu được :

$$\omega(U, M) = \frac{\exp\left\{2\sqrt{a}\left[U - M^2 / (2\overline{gm^2})\right]\right\}}{12\sqrt{2\overline{gm^2}}\left[U - M^2 / (2\overline{gm^2})\right]^{3/2}} \quad (2.29)$$

Biểu thức đối với mật độ trạng thái ở dạng (2.29) không phụ thuộc vào Z và N, và mọi đặc trưng của hệ trong ω chỉ thể hiện qua mật độ trạng thái một hạt tổng cộng $g = g_Z + g_N$ và trung bình bình phương hình chiếu của mô men một hạt $\overline{m^2} = (gZ\overline{m_Z^2} + gN\overline{m_N^2})/g$. Kết quả này là do giả thiết về phổ một hạt phân bố đều và gần đúng nhiệt độ thấp $t = \beta^{-1} \ll \varepsilon_{FZ}, t \ll \varepsilon_{FN}$.

Trong hạt nhân nguyên tử, phổ các trạng thái một hạt không phải là phân bố đều. Trong gần đúng liên tiếp, mật độ trạng thái của hạt phụ thuộc vào năng lượng và hình chiếu mô men một hạt $g(\varepsilon, m)$, đối với $\omega(Z, N, E, M)$ có thể thu được biểu thức (2.29) [3]. Khi đó các thông số của hệ g và $\overline{m^2}$ được xác định như sau:

$$g = g_Z + g_N \quad (2.30a)$$

$$\overline{m^2} = (g_Z \overline{m_Z^2} + g_N \overline{m_N^2}) / g \quad (2.30b)$$

ở đây:

$$g_{\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} g_{\tau}(\varepsilon_{F\tau}, m_{\tau}) dm_{\tau} \quad (2.31a)$$

$$\overline{m_{\tau}^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} m_{\tau}^2 g(\varepsilon_{F\tau}, m_{\tau}) dm_{\tau} / g_{\tau} \quad (2.31b)$$

với $\tau = Z$ hoặc N .

Như vậy mật độ trạng thái hạt nhân trong mẫu khí Fermi được xác định bằng hai thông số : mật độ trạng thái một hạt g hoặc mật độ mức $a = (\pi^2/6)/g$ và trung bình của bình phương hình chiếu mô men một hạt $\overline{m^2}$. Chúng ta sẽ tìm ra mối liên hệ của các đại lượng này với số nucleon [24, 25]. Điều này không khó thực hiện trong gần đúng giả hạt khi giả thiết rằng hạt nhân bao gồm các nucleon có khối lượng μ chuyển động trong hố thế hình cầu có độ sâu vô hạn bán kính $R = r^0 A^{1/3}$. Điều kiện lượng tử hoá đối với hạt không có spin liên quan tới số lượng tử chính n tức là số thứ tự của mức một hạt với mô men quỹ đạo l và năng lượng một hạt ε có dạng là [4]:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = \frac{1}{\hbar} \int_{r_{\min}}^R p dr = \int_{r_{\min}}^R \sqrt{\frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}} dr \quad (2.32)$$

ở đây r_{\min} - giá trị bán kính trong đó xung lượng p tiến tới 0. Lấy tích phân trong (2.32) ta thu được:

$$n + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{\frac{2\mu\varepsilon R^2}{\hbar^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \arccos\left(\frac{(1+1/2)\hbar}{\sqrt{2\mu\varepsilon R}}\right) \right] \quad (2.33)$$

Mật độ trạng thái một hạt sẽ là:

$$g(\varepsilon, l) = g_s (2l+1) dn / d\varepsilon \quad (2.34)$$

Thừa số đầu tiên trong (2.34) được xác định bằng biểu diễn của spin và spin đồng vị. Để đơn giản ta giả thiết rằng hạt nhân bao gồm số hạt proton và neutron bằng nhau : $Z = N = A/2$. Vì thế $g_s = 4$. Thừa số thứ hai $dn/d\varepsilon$ là mật độ mức một hạt, thừa số $(2l+1)$ tính đến sự suy biến theo mô men quỹ đạo của mỗi mức một hạt. Khi đạo hàm (2.33) theo ε và thay vào (2.34) đối với $g(\varepsilon, l)$ ta thu được:

$$g(\varepsilon, l) = \frac{4}{\pi\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{2}\right) R \sqrt{\frac{2\mu\varepsilon}{\hbar^2} - \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2}{R^2}} \quad (2.35)$$

Chúng ta sẽ tìm ra được mật độ trạng thái một hạt:

$$g(\varepsilon) = \int_0^{l_{\max}} g(\varepsilon, l) dl = \frac{4\sqrt{\varepsilon}}{3\pi} \left(\frac{2\mu R^2}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (2.36)$$

Giới hạn trên l_{\max} trong (2.36) được chọn từ điều kiện là khi $l = l_{\max}$ thì xung lượng [căn thức trong (2.35)] bằng 0. Số nucleon tổng cộng của hạt nhân trong trạng thái cơ bản bằng:

$$A = \int_0^{\varepsilon_F} g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{8}{9\pi} \left(\frac{2\mu\varepsilon_F R^2}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (2.37)$$

Từ đó, với năng lượng Fermi ε_F ta có:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \left(\frac{9\pi A}{8} \right)^{2/3} \quad (2.38)$$

Thay (2.38) vào (2.36), đối với mật độ trạng thái một hạt ở năng lượng Fermi (ε_F) ta thu được:

$$g(\varepsilon_F) = \frac{4\mu r_0^2}{(3\pi^2)^{1/2} \hbar^2} A \quad (2.39)$$

và thông số a sẽ là:
$$a = \frac{\pi^2}{6} g(\varepsilon_F) = \left(\frac{\pi}{3} \right)^{4/3} \frac{2\mu r_0^2}{\hbar^2} A = \frac{A}{135} \quad (2.40)$$

ở đây a được biểu thị trong đơn vị MeV^{-1} . Ta thu được đánh giá mới nhất trong (2.40) ở $r_0 = 1,2\phi\text{m}$.

Chúng ta đánh giá trung bình của bình phương hình chiếu của mô men một hạt $\overline{m^2}$ ở năng lượng Fermi. Do tính đối xứng cầu của hố thế :

$$\overline{m^2} = \frac{1}{3} \overline{l^2} = \frac{1}{3 g(\varepsilon_F)} \int_0^{l_{\max}} l^2 g(\varepsilon_F, l) dl \quad (2.41)$$

Thay (2.35) vào (2.41) và tích phân theo l ta thu được

$$\overline{m^2} g(\varepsilon_F) = \frac{2}{5} \frac{\mu l_0^2}{\hbar^2} A^{5/3} = \frac{\mathfrak{J}_{\text{TB}}}{\hbar^2} \quad (2.42)$$

ở đây $\mathfrak{J}_{\text{TB}} = (2/5)\mu r_0^2 A^{5/3}$ - mô men quán tính của vật rắn hình cầu có khối lượng $m = \mu A$ và bán kính $R = r_0 A^{1/3}$. Do vậy có thể coi đại lượng $M^2/2g\overline{m^2}$ trong công thức (2.26) như năng lượng quay, và $\overline{m^2} g$ theo đánh giá bán cổ điển (2.42) trùng với mômen quán tính của vật rắn hình cầu. Từ (2.42) hoàn toàn có thể thu được :

$$\overline{m^2} = \frac{(9\pi)^{2/3}}{30} A^{2/3} \approx 0,31A^{2/3} \quad (2.43)$$

Khi mô tả mật độ trạng thái của hạt nhân thường dùng các gân đúng của mômen nhỏ vào cỡ năng lượng quay $M^2/(2J)$ — nhỏ hơn nhiều năng lượng kích thích $U[U \ll M^2/(2J)]$. Trong gân đúng đó công thức (2.29) đối với $\omega(U, M)$ có dạng:

$$\omega(U, M) = \frac{\exp(2\sqrt{aU})}{12\sqrt{2}\sigma a^{1/4}U^{5/4}} \exp\left(-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.44)$$

ở đây σ^2 — thông số phụ thuộc spin bằng:

$$\sigma^2 = \overline{m^2} gt = \overline{m^2} g\sqrt{U/a} \quad (2.45)$$

Vì các hệ thức của mẫu này được sử dụng rộng rãi nên ta đưa vào biểu thức đối với mật độ trạng thái toàn phần và cả mật độ mức $\rho(U, j)$ và $\rho(U)$. Mật độ trạng thái toàn phần $\omega(U)$ bằng:

$$\omega(U) = \sum_M \omega(U, M) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(U, M) dM = \frac{\sqrt{\pi} \exp(2\sqrt{aU})}{12a^{1/4}U^{5/2}} \quad (2.46)$$

Công thức (2.44) có thể đổi sang dạng:

$$\omega(U, M) = \omega(U) \frac{\exp\left[-M^2/(2\sigma^2)\right]}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (2.44a)$$

Sử dụng (1.105) và (2.44a) có thể tìm được mật độ mức:

$$\begin{aligned} \rho(U, J) &\approx \left. \frac{\partial \omega(U, M)}{\partial M} \right|_{M=J+1/2} = \frac{(2J+1) \exp\left[-(J+1/2)^2/(2\sigma^2)\right]}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3} \omega(U) = \\ &= \frac{(2J+1) \exp\left[2\sqrt{aU} - (J+1/2)^2/(2\sigma^2)\right]}{24\sqrt{2}\sigma^3 a^{1/4}U^{5/4}} \omega(U) \end{aligned} \quad (2.47)$$

Mật độ mức toàn phần $\rho(U)$ bằng:

$$\rho(U) = \sum_J \rho(U, J) \approx \int_0^\infty \rho(U, J) dJ = \frac{\exp(2\sqrt{aU})}{12\sqrt{2}\sigma a^{1/4}U^{5/4}} \quad (2.48)$$

Thường các công thức (2.44) — (2.47) được gọi là các hệ thức của mẫu khí Fermi. Lần đầu tiên chúng thu được từ Bete [24] các hệ quả của những công thức này sẽ được lặp lại trong một loạt công trình [2,3,26].

2.4 Ảnh hưởng của cấu trúc lớp của phổ một hạt tới các đặc trưng thống kê của hạt nhân.

Việc nghiên cứu các cộng hưởng trong tương tác của neutron năng lượng E_n nhỏ với hạt nhân ($E_n \leq$ vài KeV) là nguồn thông tin chính về mật độ trạng thái hạt nhân ở năng lượng kích thích lớn. Khi ở năng lượng nhỏ do hàng rào thế xuyên tâm, các cộng hưởng có $l = 0$ (cộng hưởng s) xuất hiện mạnh hơn rất nhiều so với cộng hưởng có $l > 0$. Từ điều kiện $l = 0$ suy ra rằng mô men góc I_r và độ chẵn lẻ π_r của các trạng thái cộng hưởng được tính bằng công thức lọc lựa:

$$I_r = I_0 \pm 1/2 ; \pi_r = \pi_0 \quad (2.49)$$

ở đây I_0 và π_0 — mômen góc và độ chẵn lẻ của trạng thái cơ bản của hạt nhân bia.

Khoảng cách trung bình quan sát được \bar{D} giữa các cộng hưởng neutron sóng s liên quan với mật độ mức hạt nhân $\rho(U, J)$ bằng hệ thức:

$$\bar{D}^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\rho \left(U = S_n + \frac{\Delta E}{2}, I_0 + \frac{1}{2} \right) + \rho \left(U = S_n + \frac{\Delta E}{2}, I_0 - \frac{1}{2} \right) \right] & \text{khi } I_0 \neq 0 \\ \frac{1}{2} \rho \left(U = S_n + \frac{\Delta E}{2}, \frac{1}{2} \right) & \text{khi } I_0 = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

ở đây S_n — năng lượng liên kết của neutron (với hạt nhân), ΔE — giới hạn khoảng năng lượng của neutron mà \bar{D} ($\Delta E \ll S_n$) được xác định ở trong đó. Thừa số $1/2$ tương ứng với (2.49), các neutron sóng s được tách ra từ tập hợp chỉ những trạng thái có độ chẵn lẻ xác định (π_0) mà khi đó cần bổ xung thêm là các trạng thái của hai loại chẵn lẻ có xác suất như nhau khi trạng thái kích thích của hạt nhân gần vùng năng lượng liên kết neutron.

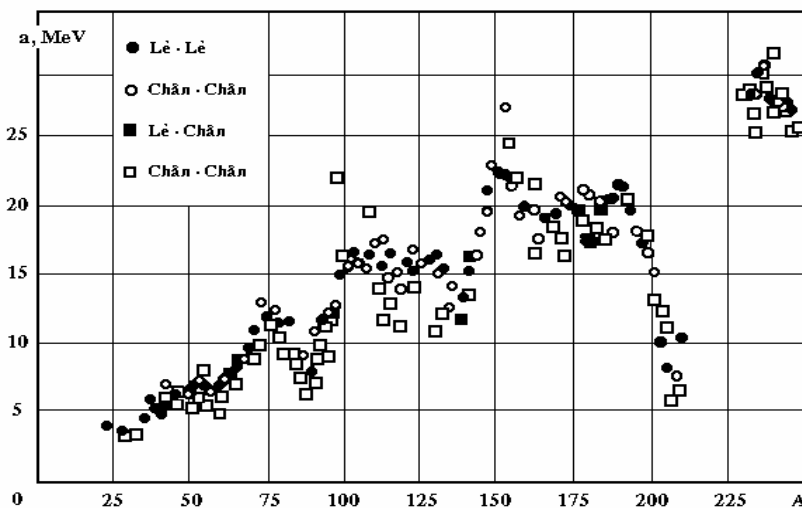
Nếu trong (2.50) đối với mật độ mức ta sử dụng công thức (2.47) và theo giá trị \bar{D} thực nghiệm ta tìm thông số a thì ta sẽ có sự khác biệt có hệ thống của các giá trị a đối với những hạt nhân lẻ — lẻ, lẻ và chẵn chẵn cạnh nhau. Điều này được chỉ ra lần đầu tiên trong [27]. Hiệu ứng này được quy cho là có sự tạo cặp trong hạt nhân [28], để kể đến chúng khi tính mật độ mức, trong các công thức (2.47) ; (2.48) người ta sử dụng năng lượng hiệu dụng U^* :

$$U^* = U - \begin{cases} \delta_p + \delta_n & \text{với hạt nhân chẵn chẵn} \\ \delta_p & \text{với hạt nhân chẵn lẻ} \\ \delta_n & \text{với hạt nhân lẻ chẵn} \\ 0 & \text{với hạt nhân lẻ lẻ} \end{cases} \quad (2.51)$$

ở đây $\delta_{p,n}$ là các bổ chính do chẵn lẻ khác nhau tới năng lượng liên kết của hạt nhân.

Các hiệu ứng chẵn lẻ này được tìm thấy trong khối lượng hạt nhân và năng lượng liên kết của các nucleon và vì vậy sử dụng năng lượng tạo cặp trong công thức khối lượng bán thực nghiệm là điều tất yếu [29].

Đối với phần lớn các hạt nhân, đã có thông tin hệ thống rộng rãi về các giá trị thực nghiệm đối với khoảng cách trung bình \bar{D} giữa các cộng hưởng neutron sóng s. Các số liệu thực nghiệm đối với \bar{D} và năng lượng liên kết neutron S_n và spin của hạt nhân bia đối với 6 hệ thống quen thuộc [26, 30 — 35] được đưa ra trong phụ lục. Các số liệu này cho cách nhìn cơ bản về các thông số mật độ mức của hạt nhân. Nếu lựa chọn hàm của trung bình bình phương hình chiếu của mômen một hạt $\overline{m^2}$ phụ thuộc vào số khối A thì dựa trên số liệu thực nghiệm của khoảng cách trung bình giữa các cộng hưởng neutron sóng s và nhờ hệ thức (2.47) và (2.50) có thể tính thông số mật độ mức a_{exp} . Người ta thường sử dụng biểu thức $\overline{m^2} = \alpha A^{2/3}$ để mô tả sự phụ thuộc $\overline{m^2} = f(A)$, khi đó trong một số công trình khác [26, 31] người ta lựa chọn $\alpha = 0,146$, còn trong các công trình khác nữa [33, 36, 37] người ta lựa chọn $\alpha=0,24$ sử dụng mô men quán tính của một vật rắn. Các lựa chọn hệ số α khác nhau có liên quan tới giá trị tuyệt đối của thông số mật độ mức a_{exp} , nhưng sự phụ thuộc của thông số a vào số khối A luôn tuân theo hiệu ứng : giá trị thông số A ở hạt nhân magic, đặc biệt là loại hạt nhân hai lần magic nhỏ hơn rất nhiều ở các hạt nhân trung gian, không magic. Hiện tượng này thể hiện rõ ở hình 2.2. Sự thay đổi như vậy của thông số a tất nhiên liên quan tới cấu trúc lớp của phổ một hạt. Phổ một hạt của hạt nhân nguyên tử tất nhiên là không đồng nhất theo năng lượng suy biến của sinh mức cụ thể trên hình 1.5. Vì vậy rất cần thiết nghiên cứu sự ảnh hưởng của cấu trúc lớp của phổ một hạt tới các đặc trưng thống kê của hạt nhân. Các vấn đề này được nghiên cứu tỉ mỉ trong [15, 38 — 42] ở đó đưa ra sự khác biệt rất lớn các đặc trưng thống kê của hạt nhân so với mẫu khí Fermi.



Hình 2.2. Sự phụ thuộc thông số mật độ mức a vào số khối A [31].

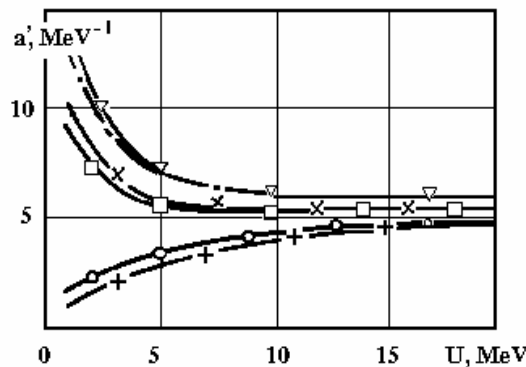
Chúng ta hãy xét trường hợp đơn giản là hệ một thành phần. Để nhận được $\omega(N,E)$ theo các công thức (1.94)-(1.96) cân bằng cách giải hệ phương trình (2.7) tìm được tọa độ điểm yên ngựa β_0 và α_0 mà nhờ chúng, ta tính được entropi S theo công thức (2.8) và định thức của ma trận các yếu tố đạo hàm bậc

hai theo công thức (2.9). Bài toán này được giải ở [38] mà cụ thể đã nghiên cứu sự phụ thuộc năng lượng của nhiệt độ t , entropy S và thông số mật độ mức a đối với hệ proton có $Z = 40 - 50$ với phổ một hạt của thế Nilxon [14]. Nghiên cứu hệ như vậy sẽ đưa lại khả năng tìm hiểu khá kỹ ảnh hưởng của mức độ lấp đầy của mức một hạt, trong trường đã cho là của mức $1g_{9/2}$ tới dạng đặc trưng thống kê của hệ.

Nếu với hệ có phổ dẫn cách đều, ý nghĩa vật lý của thông số $g(a = (\pi^2/6)g)$ là đã biết (đây là số trạng thái một hạt trong một khoảng năng lượng) thì đối với hệ có phổ cấu trúc lớp không đồng nhất, nói một cách chặt chẽ không thể chỉ ra đặc trưng như vậy. Tuy nhiên có thể đưa một số đại lượng mà trong mẫu khí Fermi chúng trùng với thông số a vào ví dụ khảo sát. Ví dụ sau khi tính S và t phụ thuộc vào U có thể xác định a bằng một số cách :

$$a' = S^2/(4U) ; a'' = U/t^2 ; a''' = S/(2t) \quad (2.52)$$

Nếu phổ một hạt của hệ là dẫn cách đều thì $a' = a'' = a'''$ và các giá trị này không phụ thuộc U .



Hình 2.3. Thông số $a'(U)$ đối với hệ proton với độ lấp đầy mức $1g_{9/2}$ khác nhau [38].

Trên hình 2.3 chỉ ra sự phụ thuộc năng lượng của thông số a' tính theo công thức (2.52) đối với hệ proton có $Z = 40 - 50$ với phổ một hạt của thế Nilxon. Rất đáng lưu ý sự thay đổi của a' ở vùng năng lượng kích thích thấp. Với sự giảm U khi Z bằng 42, 44, 46, 48, thông số a' tăng còn Z bằng 40, 50 thì a' lại giảm. Đặc tính như vậy được giải thích rất đơn giản : Thông số a thực tế là xác định mức độ kích thích của hệ, khi cùng một giá trị năng lượng kích thích U , số trạng thái kích thích lớn sẽ tương ứng với hệ có giá trị a lớn. Các hệ với Z bằng 40 và 50 tương ứng với sự lấp đầy của các mức một hạt ở trạng thái cơ bản, khi mức $1g_{9/2}$ hoặc hoàn toàn trống ($Z = 40$), hoặc hoàn toàn bị lấp đầy ($Z=50$). Ở vùng năng lượng kích thích nhỏ của hệ, ví dụ với $Z = 50$, các hạt cần phải có năng lượng khá lớn khoảng 3 MeV - để chiếm mức tự do $1g_{7/2}$ nằm gần mức $1g_{9/2}$ nhất. Trong trường hợp này hệ không dễ bị kích thích và như vậy thông số a bị giảm ở vùng năng lượng kích thích thấp. Đối với hệ có $Z = 42 - 48$, lớp vỏ không bị chiếm hoàn toàn và ở vùng năng lượng kích thích “vấn đề” nói trên không tồn tại : Hệ thống bị kích thích do các hạt từ mức một hạt $2p_{1/2}$ và $2p_{3/2}$

chuyển tới mức $1g_{9/2}$ gần nhất. Khi năng lượng kích thích lớn $U \gg 3 \text{ MeV}$ lúc bấy giờ có các mức một hạt khác tham dự vào, a' của hệ với Z khác nhau phụ thuộc yếu vào U .

Khi nghiên cứu đặc trưng thống kê của hạt nhân như một hệ hai thành phần proton và neutron người ta thường sử dụng gần đúng mômen nhỏ mà trong gần đúng đó, các hệ thức cần thiết để tính mật độ trạng thái trong mẫu các hạt độc lập có dạng:

$$\omega(Z, N, U, M) = \frac{\omega(Z, N, U)}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.53)$$

ở đây mật độ toàn phần

$$\omega(Z, N, U) = \frac{\exp S}{(2\pi)^{3/2} |D|^{1/2}} \quad (2.54)$$

Entropi S của hệ:

$$S = \sum_{\tau=Z,N} \left\{ \sum_{\nu} [\beta(\epsilon_{\tau\nu} - \lambda_{\tau}) \bar{n}_{\tau\nu} - \ln(1 - \bar{n}_{\tau\nu})] \right\} \quad (2.55)$$

σ^2 — thông số phụ thuộc spin.

$$\sigma^2 = \sum_{\tau=Z,N} \left[\sum_{\nu} m_{\tau\nu}^2 \bar{n}_{\tau\nu} (1 - \bar{n}_{\tau\nu}) \right] \quad (2.56)$$

Định thức D có dạng :

$$D = \begin{vmatrix} D_{\beta\beta} & D_{\beta\alpha_Z} & D_{\beta\alpha_N} \\ D_{\beta\alpha_Z} & D_{\alpha_Z\alpha_Z} & D_{\alpha_N\alpha_Z} \\ D_{\beta\alpha_N} & D_{\alpha_N\alpha_Z} & D_{\alpha_N\alpha_N} \end{vmatrix} \quad (2.57)$$

ở đây

$$D_{\beta\beta} = \sum_{\tau=Z,N} \left[\sum_{\nu} \epsilon_{\tau\nu}^2 \bar{n}_{\tau\nu} (1 - \bar{n}_{\tau\nu}) \right] \quad (2.58a)$$

$$D_{\beta\alpha_Z} = \sum_{\nu} \epsilon_{Z\nu} \bar{n}_{Z\nu} (1 - \bar{n}_{Z\nu}) \quad (2.58b)$$

$$D_{\alpha_Z\alpha_Z} = \sum_{\nu} \bar{n}_{Z\nu} (1 - \bar{n}_{Z\nu}) \quad (2.58c)$$

$$D_{\alpha_Z \alpha_N} = 0 \quad (2.58d)$$

Các đại lượng $D_{\beta \alpha_N}$ và $D_{\alpha_N \alpha_N}$ thu được từ (2.58b) và (2.58c) bằng cách thay đổi chỉ số Z_v sang N_v . Trong các công thức (2.55) - (2.58) $\bar{n}_{\tau v}$ là trung bình của số trạng thái một hạt bị lấp đầy.

$$\bar{n}_{\tau v} = \{1 + \exp [\beta (\varepsilon_{\tau v} - \lambda_{\tau})]\}^{-1} \quad (2.59)$$

đối với thành phần proton ($\tau = Z$) và neutron ($\tau = N$), $\lambda_{\tau} = \alpha_{\tau/\beta}$.

Entropy S và định thức D cần được tính ở điểm yên ngựa β_0 , α_{Z0} và α_{N0} mà điểm này được xác định từ hệ phương trình:

$$\left. \begin{aligned} U &= \sum_{\tau=Z,N} \left(\sum_v \varepsilon_{\tau v} \bar{n}_{\tau v} - \sum_{\varepsilon_{\tau v} < \varepsilon_{\tau F}} \varepsilon_{\tau v} \right) \\ Z &= \sum_v \bar{n}_{Zv}; \quad N = \sum_v \bar{n}_{Nv} \end{aligned} \right\} \quad (2.60)$$

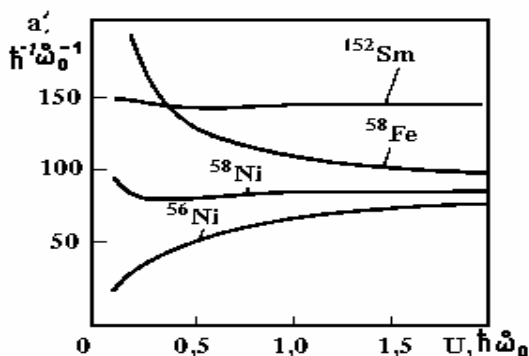
Trong tính toán mômen quán tính J , trung bình bình phương hình chiếu của mômen một hạt \bar{m}^2 và thông số \bar{a} người ta thường sử dụng các hệ thức [15]:

$$J = \sigma^2 \beta = \sigma^2 t \quad (2.61)$$

$$\bar{m}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_{\tau=Z,N} \left[\sum_v \bar{n}_{\tau v} (1 - \bar{n}_{\tau v}) \right]} \quad (2.62)$$

$$\bar{a} = \frac{\pi^2}{6} \beta \sum_{\tau=Z,N} \left[\sum_v \bar{n}_{\tau v} (1 - \bar{n}_{\tau v}) \right] \quad (2.63)$$

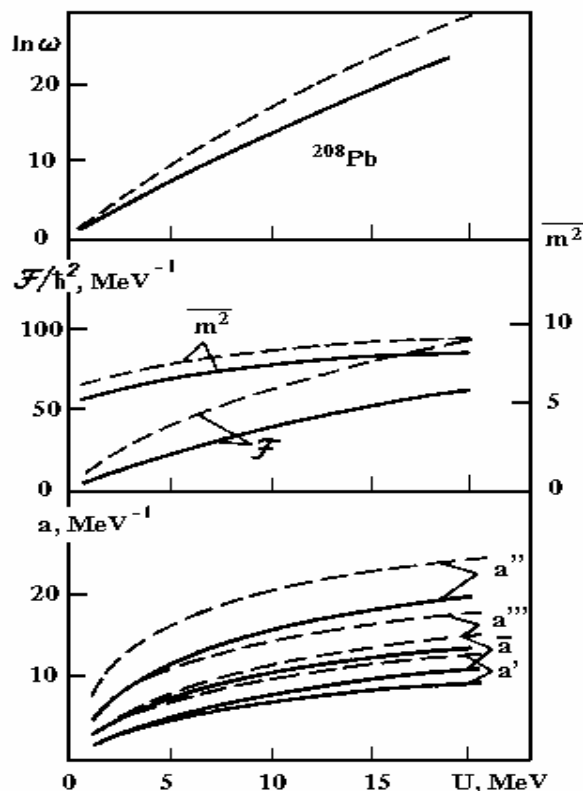
Dạng phụ thuộc năng lượng của thông số a đối với hạt nhân như hệ hai thành phần không phải luôn rõ ràng và không đơn giản như trong ví dụ được khảo sát ở trên. Tuy nhiên với hạt nhân hai lần magic hầu như rõ ràng là a giảm khi năng lượng kích thích giảm, đối với hạt nhân không magic thì a tăng khi U giảm. Đối với hạt nhân biến dạng phổ một hạt của chúng gần với dạng phân bố đều, giá trị a hầu như là hằng số với U . Đặc tính như vậy của $a'(U)$ được tính theo (2.55) — (2.60) có thể thấy trên hình 2.4.



Hình 2.4: Sự phụ thuộc năng lượng của thông số a' đối với các hạt nhân khác nhau được tính đối với phổ một hạt của thể Nilson.

Hình 2.5: Sự phụ thuộc năng lượng của các đặc trưng thống kê của hạt nhân ^{208}Pb [15].

Đường liền nét: Tính cho sơ đồ mức một hạt của thể Xacxon - Wood
 Đường đứt nét: Tính cho thể Nilson



Trong mẫu khí Fermi trừ thông số a các đại lượng trung bình bình phương hình chiếu của mômen một hạt $\overline{m^2}$ và mô men quán tính J là hằng số không phụ thuộc vào năng lượng kích thích. Cấu trúc lớp của phổ một hạt thể hiện sự phụ thuộc năng lượng của các đại lượng nói trên trong đó sự phụ thuộc năng lượng thể hiện khá mạnh trong các đặc trưng của các hạt nhân hai lần magic. Trên hình 2.5 cho thấy các đặc trưng thống kê được tính cho hạt nhân Pb^{208} . Mặc dù giá trị tuyệt đối của các đại lượng đối với hai phổ một hạt khác nhau nhưng trên hình vẽ cho thấy khá rõ dạng phụ thuộc năng lượng của a , $\overline{m^2}$ và J . Khi nghiên cứu các đặc trưng thống kê của hạt nhân trong mẫu các hạt độc lập thường sử dụng sự gần đúng của mô men nhỏ. Các kết quả của tính toán chính xác [43] các đặc trưng thống kê của hạt nhân Pb^{208} chứng tỏ rằng có sự lệch khỏi gần đúng mômen nhỏ xuất hiện chỉ ở các giá trị mô men góc đủ lớn. Cũng nên lưu ý rằng sự phụ thuộc năng lượng của các thông số hiệu dụng a' và f trong mẫu lớp tồn tại chỉ khi năng lượng kích thích U không lớn. Khi năng lượng kích thích cao khoảng 100 MeV, sự phụ thuộc này bị triệt tiêu và các thông số a và J nhận giá trị tiệm cận của mình với dạng phụ thuộc trơn vào số khối A (hình 2.6, 2.7). Từ các hình vẽ thấy rõ ràng là khi $U = 7$ MeV, trong dạng phụ thuộc của \overline{a} và J vào A có cấu trúc lớp cụ thể là xuất hiện sự thay đổi lớn của thông số \overline{a} trong vùng hạt nhân hai lần magic. Trong khi đó ở $U = 100$ MeV thì các đại lượng trên lại đơn điệu thay đổi theo A . Tuy nhiên chúng ta nhận thấy rằng giá trị tiệm cận của các thông số hiệu dụng phụ thuộc vào phổ

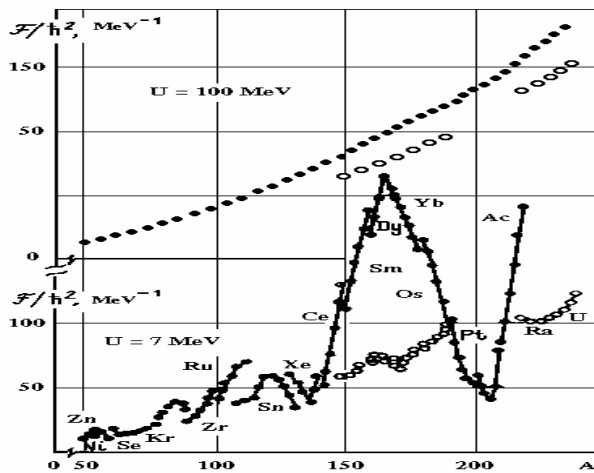
các trạng thái một hạt. Các tính toán [15] chứng tỏ rằng đối với phổ của thế Nilxon [14]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= (0.105 \pm 0.005) A \\ \overline{m^2} &= (0.290 \pm 0.005) (1 - 2/3\varepsilon) A^{2/3} \\ J &= (0.0185 \pm 0.0005) (1 - 2/3\varepsilon) A^{5/3} \hbar^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

và đối với phổ của thế Xacxon — Wud:

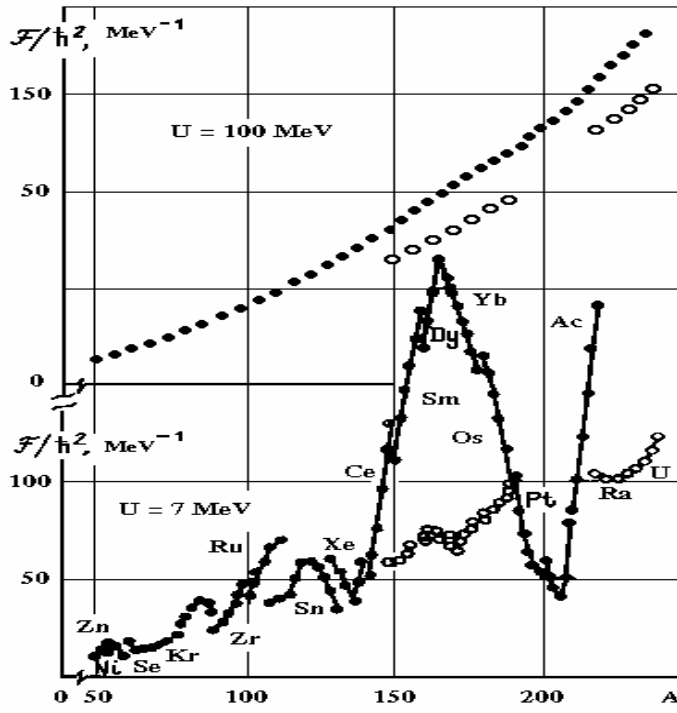
$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= (0.090 \pm 0.005) A \\ \overline{m^2} &= (0.263 \pm 0.005) (1 - 2/3\varepsilon) A^{2/3} \\ J &= (0.0144 \pm 0.0005) (1 - 2/3\varepsilon) A^{5/3} \hbar^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.65)$$

ở đây ε - thông số biến dạng tứ cực [14], các đại lượng \bar{a} và J có đơn vị MeV^{-1} .



Hình 2.6. Sự phụ thuộc \bar{a} vào số khối A tính trong mẫu các hạt độc lập.

- Tính cho phổ một hạt của hạt nhân.
- o Tính cho hạt nhân biến dạng.



Hình 2.7. Sự phụ thuộc J vào A , ký hiệu • và o giống như ở hình 2.6.

Chương 3

MẬT ĐỘ TRẠNG THÁI TRONG MẪU SIÊU CHẢY

3.1 Các hệ thức cơ bản:

Chúng ta nghiên cứu ảnh hưởng của tương tác cặp dư lên các đặc trưng thống kê của hạt nhân nguyên tử đối với hệ hạt Fermi độc lập cùng loại với Hamilton của mẫu siêu chảy dạng:

$$\hat{H} = \sum_{\nu\sigma} \varepsilon_{\nu} a_{\nu\sigma}^+ a_{\nu\sigma} - G \sum_{\nu\nu'} a_{\nu+}^+ a_{\nu-}^+ a_{\nu'-} a_{\nu'+} \quad (3.1)$$

ở đây ε_{ν} - năng lượng của các trạng thái một hạt mà chúng suy biến bậc hai theo dấu của hình chiếu của mômen góc tức là $\sigma = \pm$; $a_{\nu\sigma}^+$ và $a_{\nu\sigma}$ là các toán tử sinh và huỷ hạt ở các trạng thái ν, σ ; G - yếu tố ma trận của tương tác cặp dư giữa các nucleon. Đối với toán tử số hạt toàn phần ta có:

$$\hat{N} = \sum_{\nu\sigma} a_{\nu\sigma}^+ a_{\nu\sigma} \quad (3.2)$$

Có thể tính toán các đặc trưng thống kê của hệ như vậy nhờ công cụ toán học của lý thuyết siêu chảy [44, 45]. Để làm việc đó, cần chuyển từ Hamilton với tương tác cặp (3.1) sang Hamilton của các giả hạt độc lập mà dạng tường minh của chúng có thể tìm được nhờ phép biến phân Khatri - Phốc - Bôgôliubôv [45]. Giải pháp như vậy được sử dụng trong [38-42, 46-52] khi tính mật độ trạng thái. Chúng ta nhận thấy rằng trong bài toán về mật độ trạng thái có một loạt tính đặc biệt liên quan tới một loạt các bước thực hiện của phương pháp biến phân và sự tính toán các tích phân tương ứng trong (1.87). Vấn đề này được khảo sát trong [52], mà công trình này đã chứng minh rằng để thu được dạng chính xác của các đặc trưng thống kê của hệ cần tính các tích phân và sau đó mới chuyển hoàn toàn sang Hamilton chuẩn.

Sử dụng đánh giá như vậy đối với bài toán của chúng ta, nhờ các hệ thức (1.94) — (1.99) đối với mật độ trạng thái ta có thể viết:

$$\omega(N, E) = (2\pi)^{-1} |D|^{-1/2} \exp S \quad (3.3)$$

ở đây
$$S = \beta E - \alpha N + \ln \text{Sp} \left\{ \exp \left[-\beta (\hat{H} - \lambda \hat{N}) \right] \right\} \quad (3.4)$$

$$D = \begin{vmatrix} \langle \hat{H}^2 \rangle - \langle \hat{H} \rangle^2 & \langle \hat{H} \hat{N} \rangle - \langle \hat{H} \rangle \langle \hat{N} \rangle \\ \langle \hat{H} \hat{N} \rangle - \langle \hat{H} \rangle \langle \hat{N} \rangle & \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 \end{vmatrix} \quad (3.5)$$

Các giá trị S và D cần được tính theo β và $\alpha = \lambda\beta$ mà ta thu được chúng từ nghiệm của các phương trình đối với điểm yên ngựa:

$$E = \langle \hat{H} \rangle, \quad N = \langle \hat{N} \rangle \quad (3.6)$$

Ở đây trung bình của các toán tử được xác định theo tổng thống kê đầy đủ bằng hệ thức (1.97).

Chúng ta chuyển tới biểu diễn các giả hạt [45] nhờ phép biến đổi chính tắc:

$$\left. \begin{aligned} a_{v\sigma} &= u_v \alpha_{v-\sigma} + \sigma v_v \alpha_{v\sigma}^+ \\ a_{v\sigma}^+ &= u_v \alpha_{v-\sigma}^+ + \sigma v_v \alpha_{v\sigma} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

tức là chuyển từ toán tử hạt sang toán tử giả hạt. Các toán tử sinh và huỷ giả hạt $\alpha_{v\sigma}^+$ và $\alpha_{v\sigma}$ thoả mãn các hệ thức giao hoán như là các toán tử $a_{v\sigma}^+$ và $a_{v\sigma}$:

$$\left. \begin{aligned} \{\alpha_{v\sigma}, \alpha_{v'\sigma'}^+\} &= \alpha_{v\sigma} \alpha_{v'\sigma'}^+ + \alpha_{v'\sigma'}^+ \alpha_{v\sigma} = \delta_{vv'} \delta_{\sigma\sigma'} \\ \{\alpha_{v\sigma}, \alpha_{v'\sigma'}\} &= \{\alpha_{v\sigma}^+, \alpha_{v'\sigma'}^+\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Từ hệ thức giao hoán (3.8) và (1.60) suy ra rằng:

$$u_v^2 + v_v^2 = 1 \quad (3.9)$$

trong đó u_v và v_v là số thực với số lớp đầy giả hạt hữu hạn. Nhờ (3.7) đối với toán tử Hamilton suy rộng ($\hat{H}-\lambda\hat{N}$) có thể thu được:

$$\hat{H}-\lambda\hat{N} = \sum_v (\varepsilon_v - \lambda) \left[(u_v^2 - v_v^2) (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) + 2v_v^2 + 2v_v u_v (\alpha_{v+} \alpha_{v-} + \alpha_{v-}^+ \alpha_{v+}^+) \right] - G \sum_{v\sigma} \hat{B}_v^+ \hat{B}_v \quad (3.10)$$

$$\text{ở đây} \quad \hat{n}_{v\sigma} = \alpha_{v\sigma}^+ \alpha_{v\sigma} \quad (3.11)$$

là các toán tử giả hạt và:

$$\hat{B}_v = u_v^2 \alpha_{v-}^+ \alpha_{v+}^+ - v_v^2 \alpha_{v+} \alpha_{v-} + u_v v_v (1 - \hat{n}_{v+} - \hat{n}_{v-}) \quad (3.12)$$

Các toán tử $\hat{n}_{v\sigma}$ thoả mãn phương trình $\hat{n}_{v\sigma}^2 = \hat{n}_{v\sigma}$ và do vậy các giá trị riêng của toán tử $\hat{n}_{v\sigma}$ bằng 0 hoặc bằng 1.

Chúng ta xác định Hamilton chuẩn \hat{H}_0 bằng biểu thức:

$$\hat{H}_0 = U_0 + \sum_{v\sigma} E_v \alpha_{v\sigma}^+ \alpha_{v\sigma} \quad (3.13)$$

và sẽ khảo sát trung bình thống kê theo Hamilton của mẫu:

$$\langle \hat{A} \rangle_0 = \text{Sp} [\hat{A} \exp(-\beta \hat{H}_0)] / \text{Sp} [\exp(-\beta \hat{H}_0)] \quad (3.14)$$

Các giá trị U_0 và E_v và cả u_v và v_v đều được tìm thấy từ điều kiện mô tả tốt nhất $\langle \hat{H}-\lambda\hat{N} \rangle_0$. Hamilton \hat{H}_0 với độ chính xác đến phân không đổi U_0 trùng với Hamilton của mẫu các hạt độc lập (2.1a). Vì thế đối với $\ln Q$ có thể viết:

$$\ln Q = \ln \text{Sp} \left\{ \exp \left[-\beta \left(U_0 + \sum_{v\sigma} E_v \alpha_{v\sigma}^+ \alpha_{v\sigma} \right) \right] \right\} = -\beta U_0 + 2 \sum_v \ln [1 + \exp(-\beta E_v)] \quad (3.15)$$

Chúng ta biến đổi Hamilton suy rộng (3.10) sau khi đưa vào nó chỉ những thành phần có số toán tử sinh $\alpha_{v\sigma}^+$ và huỷ $\alpha_{v\sigma}$ bằng nhau bởi vì chỉ chúng mới có đóng góp khác không vào giá trị trung bình của $\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0$:

$$\begin{aligned} \hat{H} - \lambda \hat{N} = & \sum_v (\varepsilon_v - \lambda) [u_v^2 (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) + v_v^2 (2 - \hat{n}_{v+} - \hat{n}_{v-})] - G \sum_v [(u_v^4 + v_v^4) \hat{n}_{v-} \hat{n}_{v+} + v_v^4 (1 - \hat{n}_{v-} - \hat{n}_{v+})] - \\ & - G \sum_{vv'} u_v v_v' u_{v'} v_{v'} [1 - (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) - (\hat{n}_{v'+} + \hat{n}_{v'-}) + (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) (\hat{n}_{v'+} + \hat{n}_{v'-})] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Từ (3.16) thấy rằng để thu được $\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0$ cần thiết tính trung bình của các giá trị $\langle \hat{n}_{v\sigma} \rangle_0$, $\langle \hat{n}_{v-} \hat{n}_{v+} \rangle_0$ và $\langle (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) (\hat{n}_{v'+} + \hat{n}_{v'-}) \rangle_0$.

Sử dụng (3.15) ta sẽ có:

$$\langle \hat{n}_{v\sigma} \rangle_0 = \frac{\text{Sp}[\hat{n}_{v\sigma} \exp(-\beta \hat{H}_0)]}{\text{Sp} \exp(-\beta \hat{H}_0)} = -\frac{1}{2\beta} \frac{\partial \ln \text{Sp}[\exp(-\beta \hat{H}_0)]}{\partial E_v} = [1 + \exp(\beta E_v)]^{-1} = \bar{n}_v \quad (3.17)$$

là trung bình số giả hạt lấp đầy.

Chúng ta dễ dàng tính giá trị trung bình của $\langle \hat{n}_{v-} \hat{n}_{v+} \rangle_0$ khi Hamilton \hat{H}_0 được biểu diễn dưới dạng:

$$\hat{H}_0 = U_0 + \sum_v (E_v + \hat{n}_v + E_v - \hat{n}_{v-})$$

và sau khi thu được giá trị trung bình ta làm phép cân bằng $E_{v+} = E_{v-} = E_v$. Khi đó đối với $\ln Q$ ta sẽ có:

$$\ln Q = -\beta U_0 + \sum_v \ln[1 + \exp(-\beta E_{v+})] + \sum_v \ln[1 + \exp(-\beta E_v)]$$

Khi tính các đạo hàm:

$$\frac{\partial^2 \ln Q}{\beta^2 \partial E_{v+} \partial E_{v-}} = -\frac{\text{Sp}[\hat{n}_{v+} \exp(-\beta \hat{H}_0)] \text{Sp}[\hat{n}_{v-} \exp(-\beta \hat{H}_0)]}{\{\text{Sp}[\exp(-\beta \hat{H}_0)]\}^2} + \frac{\text{Sp}[\hat{n}_{v+} \hat{n}_{v-} \exp(-\beta \hat{H}_0)]}{\text{Sp}[\exp(-\beta \hat{H}_0)]} = 0$$

ta thu được:

$$\langle \hat{n}_{v+} \hat{n}_{v-} \rangle = \bar{n}_{v\sigma}^2 \quad (3.18)$$

Tương tự đối với $\langle (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) (\hat{n}_{v'+} + \hat{n}_{v'-}) \rangle_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln Q}{\beta^2 \partial E_v \partial E_{v'}} &= -\langle \hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-} \rangle_0 \langle \hat{n}_{v'+} + \hat{n}_{v'-} \rangle_0 + \langle (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) (\hat{n}_{v'+} + \hat{n}_{v'-}) \rangle_0 = \\ &= \frac{2 \delta_{vv'} \exp(\beta E_v)}{[1 + \exp(\beta E_v)]^2} = 2 \delta_{vv'} \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó} \quad \left\langle (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) (\hat{n}_{v+} + \hat{n}_{v-}) \right\rangle_0 = 4\bar{n}_v \bar{n}_v + 2\delta_{vv} \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) \quad (3.19)$$

và đối với $\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0$ ta dễ dàng thu được:

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 &= 2 \sum_v \left[(\varepsilon_v - \lambda) \left(u_v^2 \bar{n}_v + v_v^2 (1 - \bar{n}_v) \right) \right] - G \sum_v \left[u_v^4 \bar{n}_v + 2u_v^2 v_v^2 \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) + v_v^4 (1 - \bar{n}_v)^2 \right] - \\ &- G \sum_{vv'} u_v v_v u_{v'} v_{v'} (1 - 2\bar{n}_v) \times (1 - 2\bar{n}_{v'}) = 2 \sum_v \left[(\varepsilon'_v - \lambda) \times \left(u_v^2 \bar{n}_v + v_v^2 (1 - \bar{n}_v) \right) \right] - \Delta^2 / G \end{aligned} \quad (3.20)$$

Các mức năng lượng một hạt tái chuẩn hoá đã được đưa vào đẳng thức cuối cùng của (3.20):

$$\varepsilon'_v = \varepsilon_v - (G/2) [u_v^2 \bar{n}_v + v_v^2 (1 - \bar{n}_v)]$$

$$\text{và hàm tương quan:} \quad \Delta = G \sum_v u_v v_v (1 - 2\bar{n}_v) \quad (3.21)$$

Trong phép tái chuẩn hoá tiếp theo, chúng ta sẽ bỏ qua các mức một hạt bởi vì khi xác định ε_v các hiệu ứng tương quan cần phải bị loại trừ và vì thế thay cho ε'_v chúng ta lại sử dụng ký hiệu ε_v . Chúng ta xác định giá trị các hệ số u_v và v_v mà khi đó trung bình của $\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0$ cực tiểu. Để làm vậy, ta cho đạo hàm biến phân toàn phần bằng 0:

$$\delta \left(\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 - \sum_v u_v v_v \right) = 0 \quad (3.22)$$

ở đây $n_v = u_v^2 + v_v^2 - 1$: điều kiện liên kết (3.9) tác động lên các hệ số u_v và v_v ; μ_v - các thừa số bất định Lagrăng. Khi tính đạo hàm biến phân theo u_v và v_v ta thu được:

$$2(\varepsilon_v - \lambda) u_v \bar{n}_v - v_v (1 - 2\bar{n}_v) \Delta - \mu u_v = 0$$

$$2(\varepsilon_v - \lambda) v_v (1 - \bar{n}_v) - u_v (1 - 2\bar{n}_v) \Delta - \mu v_v = 0$$

Từ đó suy ra phương trình thứ hai để xác định hệ số u_v và v_v :

$$2(\varepsilon_v - \lambda) u_v v_v = (u_v^2 - v_v^2) \Delta \quad (3.23)$$

Hệ phương trình (3.9) và (3.23) có hai nghiệm. Nghiệm thứ nhất là $u_v v_v = 0$ và $\Delta = 0$ tương ứng với mẫu các hạt độc lập. Khi đó:

$$u_v = 1 - \Theta(\varepsilon_v - \lambda) ; \quad v_v = \Theta(\varepsilon_v - \lambda) \quad (3.24)$$

$$\text{ở đây} \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.24a)$$

Trong trường hợp nghiệm không tầm thường khi $u_v, v_v \neq 0$, với các hệ số u_v và v_v ta sẽ có:

$$u_v^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon_v - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.25a)$$

$$v_v^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (3.25b)$$

Thay thế (3.25) vào (3.21) ta thu được phương trình đối với hàm tương quan:

$$\frac{2}{G} = \sum_v \frac{1 - 2\bar{n}_v}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2}} \quad (3.26)$$

Năng lượng của các trạng thái giả hạt E_v được tìm ra từ điều kiện $\frac{\delta}{\delta \bar{n}_v} \langle \hat{H} - \lambda \hat{N} - \hat{H}_0 \rangle_0 = 0$. Trong biến phân, các hệ số u_v và v_v được coi là hằng số.

Từ (3.13) và (3.20) suy ra:

$$\frac{\delta \langle \hat{H} - \lambda \hat{N} - \hat{H}_0 \rangle}{\delta \bar{n}_v} = 2(\varepsilon_v - \lambda)(u_v^2 - v_v^2) + 4u_v v_v \Delta - 2E_v = 0$$

Từ đó nhờ (3.25) ta có:

$$E_v = \sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (3.28)$$

Dựa trên đẳng thức $\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 = \langle \hat{H}_0 \rangle_0$ ta có:

$$U_0 = \sum_v [(\varepsilon_v - \lambda) - E_v] + \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.29)$$

và kết quả là chúng ta thu được:

$$\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 = \sum_v [(\varepsilon_v - \lambda) - E_v(1 - 2\bar{n}_v)] + \frac{\Delta^2}{G} = \sum_v (\varepsilon_v - \lambda) \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v} (1 - 2\bar{n}_v) \right] - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.30)$$

Giá trị trung bình của toán tử số hạt $\langle \hat{N} \rangle_0$ có dạng:

$$\langle \hat{N} \rangle_0 = \left\langle \sum_{v\sigma} a_{v\sigma}^+ a_{v\sigma} \right\rangle_0 = \left\langle 2 \sum_v [u_v^2 \hat{n}_v + v_v^2 (1 + 2\bar{n}_v)] \right\rangle_0 = \sum_v \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v} (1 - 2\bar{n}_v) \right] \quad (3.31)$$

Như vậy khi thực hiện đánh giá nói trên, chúng ta đã chuyển từ việc khảo sát hệ hạt Fermi tương tác sang nghiên cứu hệ các giả hạt độc lập. Hamilton \hat{H}_0 (3.13) về dạng trùng với Hamilton (2.1a) của mẫu các hạt độc lập đến độ chính xác tới

thành phần U_0 . Vì thế tương ứng với trong mục §2.1, đối với entropy S của hệ có thể thu được:
$$S = 2 \sum_v [\beta E_v \bar{n}_v - \ln(1 - \bar{n}_v)] \quad (3.32)$$

Các phương trình để xác định tọa độ điểm yên ngựa β_0 và $\alpha_0 = \beta_0 \lambda$ có dạng:

$$E = \langle \hat{H} \rangle_0 = \sum_v \varepsilon_v \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v} (1 - 2\bar{n}_v) \right] - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.33a)$$

$$N = \langle \hat{N}_0 \rangle = \sum_v \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v} (1 - 2\bar{n}_v) \right] \quad (3.33b)$$

ở đây
$$\bar{n}_v = [1 + \exp(\beta E_v)]^{-1} = \left\{ 1 + \exp \left[\beta \sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta^2} \right] \right\}^{-1} \quad (3.34)$$

là trung bình số lấp đầy các giả hạt. Bằng cách tương tự ta tính được các trung bình theo Hamilton chuẩn mà các giá trị trung bình này cần thiết cho việc tính định thức D (3.5):

$$D = 4 \left[\sum_v E_v^2 \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) \right] \times \left\{ \sum_v \left[\bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) + \frac{\Delta^2}{2E_v^2} (1 - 2\bar{n}_v)^2 \right] \right\} \quad (3.35)$$

Các hệ thức thu được đủ để tính mật độ trạng thái $\omega(N, E)$. Để làm vậy cần tìm β , λ và Δ ở N và E đã biết khi giải các phương trình (3.33) cùng với (3.26), sau đó theo các công thức (3.32) và (3.35) tính S và D rồi thay chúng vào (3.3) để thu được mật độ trạng thái của hệ từ N hạt ở năng lượng E đã cho trước.

Trong mẫu này ở gần đúng mô men nhỏ, biểu thức xác định mật độ trạng thái $\omega(N, E, M)$ có dạng giống như (2.44a) ở mẫu các hạt độc lập:

$$\omega(N, E, M) = \frac{\omega(N, E)}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{M^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.36)$$

Thông số phụ thuộc spin σ^2 và mômen quán tính được xác định như sau:

$$\sigma^2 = \beta^{-1} \quad ; \quad \mathfrak{I} = 2 \sum_v m_v^2 \bar{n}_v (1 - \bar{n}_v) \quad (3.37)$$

Sự khác biệt với mẫu các hạt độc lập xuất hiện chỉ trong số trung bình các lấp đầy mà với chúng phải sử dụng công thức (3.34).

3.2 Hiệu ứng cặp gần trạng thái cơ bản:

Chúng ta xem xét đặc trưng của hệ có sự tương tác tương quan gần trạng thái cơ bản. Để làm điều đó, ta cho nhiệt độ hạt nhân $t = \beta^{-1}$ hướng tới không tương ứng $\beta \rightarrow \infty$. Khi đó từ (3.34) suy ra rằng tất cả $n_v = 0$ và các phương trình (3.33) và (3.26) có dạng :

$$E_0 = \sum_v \varepsilon_v \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda_0}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} \right] - \frac{\Delta_0^2}{G} \quad (3.38a)$$

$$N = \sum_v \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda_0}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} \right] \quad (3.38b)$$

$$\frac{2}{G} = \sum_v \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} \quad (3.38c)$$

Nghiệm các phương trình này cho phép xác định thế hoá học λ , hàm tương quan Δ_0 và năng lượng E_0 của trạng thái cơ bản của hệ. Không cần thiết gán cho năng lượng E_0 giá trị đặc biệt vì ở nó được dùng chủ yếu để xác định năng lượng kích thích:

$$U = E - E_0 = \sum \left[\frac{\varepsilon_v (\varepsilon_v - \lambda)}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta_0^2}} - \frac{\varepsilon_v (\varepsilon_v - \lambda) (1 - 2\bar{n}_v)}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta_0^2}} \right] + \frac{\Delta_0^2 - \Delta^2}{G} \quad (3.39)$$

Bởi vì lực tương tác cặp là lực kéo, trạng thái siêu chảy của hệ có $\Delta_0 \neq 0$ là trạng thái cơ bản của hệ. Điều này có nghĩa là ở trạng thái cơ bản, năng lượng của hệ có $\Delta_0 \neq 0$ nhỏ hơn năng lượng của hệ hạt độc lập với $\Delta = 0$. Chúng ta chứng minh điều này: Chúng ta tính năng lượng tích tụ E_{tt} bằng hiệu số năng lượng ở trạng thái cơ bản của hệ hạt độc lập với $\Delta = 0$ và hệ hạt tương tác có $\Delta_0 \neq 0$ [47]:

$$\begin{aligned} E_{tt} &= \langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_{\Delta_0=0} - \langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_{\Delta_0 \neq 0} = \\ &= \sum_v (\varepsilon_v - \lambda_0) \left(1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda_0}{|\varepsilon_v - \lambda_0|} \right) - \sum_v (\varepsilon_v - \lambda_0) \left(1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda_0}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta_0^2}} \right) + \frac{\Delta_0^2}{G} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Để đánh giá E_{tt} chúng ta giả định rằng phổ các trạng thái một hạt của hệ là rời rạc và có mật độ g . Trong gần đúng liên tiếp với E_{tt} ta có:

$$E_{tt} = \frac{g}{2} \int_0^\infty \left[\frac{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} + \frac{\Delta_0^2}{2\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} - |\varepsilon_v - \lambda_0| \right] d\varepsilon \quad (3.41)$$

Hàm dưới dấu tích phân đối xứng đối với λ_0 và đóng góp cơ bản vào tích phân (3.41) là do vùng năng lượng $|\varepsilon - \lambda_0| < \gamma$. Đối với năng lượng tích tụ trong gần đúng $\gamma \gg \Delta_0$ ta dễ dàng thu được:

$$E_{tt} = \frac{g}{2} \int_{-\gamma}^{\gamma} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + \Delta_0^2}} + \frac{\Delta_0^2}{2\sqrt{x^2 + \Delta_0^2}} - |x| \right) dx = g\Delta_0^2 / 4 \quad (3.42)$$

Như vậy năng lượng trạng thái cơ bản của hệ có tương tác cặp nhỏ hơn năng lượng trạng thái cơ bản của hệ hạt độc lập là $E_{tt} = g\Delta_0^2/4$. Chúng ta khảo sát trạng thái cơ bản kích thích đầu tiên của hệ chẵn. Chân không giả hạt là trạng thái cơ bản đầu tiên. Để kích thích hệ như vậy cần sinh ra một cặp giả hạt. Vì vậy năng lượng E_{1h} của trạng thái kích thích đầu tiên sẽ gồm cả năng lượng của hai giả hạt (3.28).

$$E_1 = \sqrt{(\varepsilon_1 - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2} + \sqrt{(\varepsilon_2 - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2} \geq 2\Delta_0 \quad (3.43)$$

Do vậy trong phổ của hệ chẵn sẽ có suy biến năng lượng bậc $2\Delta_0$ khi đó là năng lượng liên kết cặp. Thường thì hệ thức (3.43) được nêu ra như một kết quả của việc tạo nên một trạng thái liên kết bởi các cặp hạt hút nhau. Vì vậy người ta thường gọi năng lượng $2\Delta_0$ là năng lượng cặp là năng lượng cần thiết để phá vỡ chúng. Tuy nhiên ý nghĩa về các cặp liên kết không chỉ là câu chữ [10].

Phổ kích thích của hệ lẻ không có những tính chất trên vì trạng thái khi mà một hạt không liên kết nằm ở mức một hạt không lấp đầy thấp nhất là trạng thái cơ bản của hệ. Các trạng thái kích thích đầu tiên xuất hiện do dịch chuyển của hạt không liên kết mà hạt này có thể chiếm một trạng thái tự do bất kỳ. Vì vậy để kích thích hệ lẻ không cần "phá vỡ cặp" và sự suy biến trong các phổ của hệ lẻ không tồn tại. Đối với hệ lẻ, phương trình (3.38) có dạng [2]:

$$E_{ol} = \varepsilon_{s_F} + \sum_{v \neq s_F} \varepsilon_v \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda_0}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} - \frac{\Delta_0^2}{G} \right] \quad (3.44a)$$

$$N = 1 + \sum_{v \neq s_F} \varepsilon_v \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda_0}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} \right] \quad (3.44b)$$

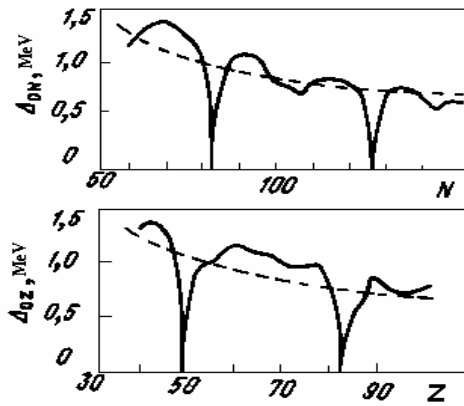
$$\frac{2}{G} = \sum_{v \neq s_F} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} \quad (3.44c)$$

ở đây ε_F - năng lượng Fermi.

Để tính đặc trưng của các trạng thái cơ bản và kích thích của hạt nhân trong những mẫu này, ngoài phổ trạng thái một hạt còn cần biết các hằng số tương tác tương quan G_N và G_Z đối với hệ neutron và proton tương ứng. Người ta thường thu được hằng số G_N từ sự so sánh năng lượng tạo cặp mà các giá trị này được tính theo công thức [12]:

$$P_N(Z, N) = [3E_c(Z, N-1) + E_0(Z, N+1) - 3E_0(Z, N) - E_0(Z, N-2)]/4 \quad (3.45)$$

với các giá trị $P_N(Z, N)$ tìm được từ số liệu thực nghiệm qua sự khác nhau của khối lượng các hạt nhân [29].



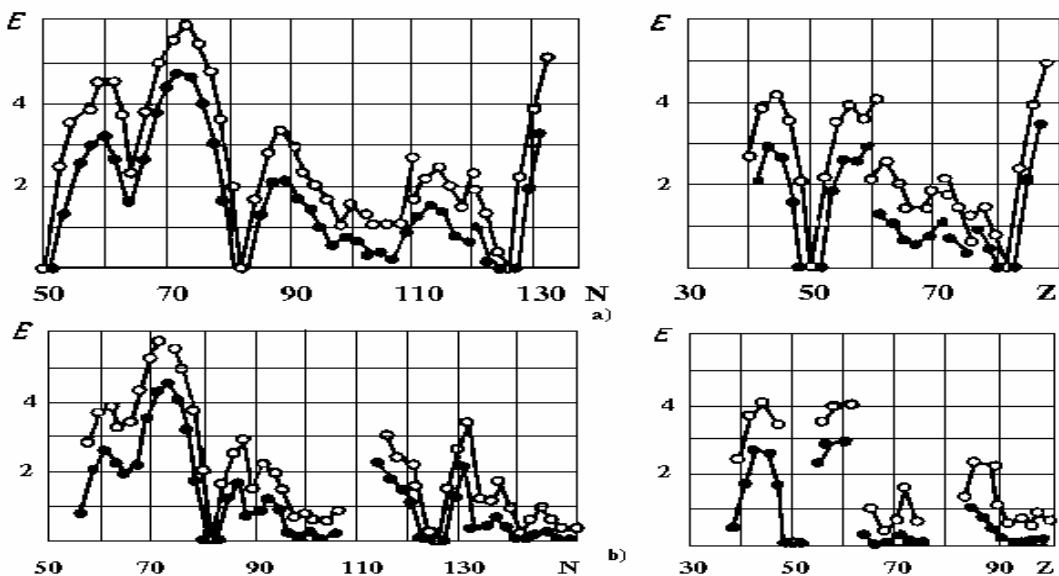
Hình 3.1. Các hàm tương quan Δ_{0N} và Δ_{0Z} phụ thuộc số nơtron N và số proton Z.

Đường liên nét : các kết quả của [12].

Đường đứt nét : theo công thức $\Delta_0 = 12A^{-1/2}$.

Tương tự có thể tìm được G_Z . Trong công thức (3.45) đại lượng E_0 - năng lượng của trạng thái cơ bản của hạt nhân. Khi đó với hệ chẵn thì cần tính E_0 theo công thức (3.38a), còn hệ lẻ - theo (3.44a). Các tính toán G_N và G_Z như vậy được tiến hành với cỡ lớn hạt nhân có $50 \leq A \leq 260$ với phổ một hạt Xacxon - Wood. Các kết quả chính của những tính toán này có thể tìm trong [12, 21].

Giá trị các hằng số G_N và G_Z liên quan đơn trị với các hàm tương quan Δ_{0N} và Δ_{0Z} được biểu thị trên hình 3.1. Từ dạng phụ thuộc Δ_{0N} và Δ_{0Z} vào số hạt trong hệ rõ ràng cho thấy cấu trúc lớp. Khi số nơtron hoặc số proton bằng số magic thì Δ_{0N} và Δ_{0Z} bằng 0, khi Z và N khác số magic một - hai đơn vị thì Δ_{0N} và Δ_{0Z} rất nhỏ. Tuy nhiên ở các giá trị N và Z khác thì các hàm tương quan được mô tả tốt bằng dạng phụ thuộc chẵn $\Delta_0 = 12A^{-1/2}$. Bức tranh tương tự có thể thấy được khi quan sát quy luật của năng lượng tích tụ. Trên hình 3.2 cũng như ở hình 3.1 rõ ràng tồn tại sự phụ thuộc dạng lớp của E_{tt} vào N và Z đối với cả hai hệ phổ một hạt.



Hình 3.2: Năng lượng tích tụ đối với hệ proton và notron chẵn (o) và lẻ (●).

- Kết quả tính toán phổ một hạt của thế Nilxon.
- Kết quả tính toán phổ một hạt với thế Xácxon — Wud.

3.3 Các đặc trưng thống kê của hệ trong mẫu các giả hạt độc lập.

Chúng ta nghiên cứu các tính chất đặc trưng của quy luật thống kê của hệ có tương tác cặp dư của các loại tương quan. Trước hết chúng ta xem xét hệ một thành phần có phổ một hạt rời rạc suy biến bậc 2 theo hình chiếu mô men. Chúng ta sẽ sử dụng phép gần đúng liên tiếp bằng cách thay tổng bằng tích phân:

$$\sum_v \rightarrow \frac{g}{2} \int d\varepsilon; \quad \sum_v m_v^2 \rightarrow \frac{g\overline{m^2}}{2} \int d\varepsilon$$

g - mật độ trạng thái một hạt, $\overline{m^2}$ là trung bình bình phương hình chiếu mô men một hạt. Ngoài ra chúng ta sẽ sử dụng gần đúng nhiệt độ thấp $t \ll \lambda$. Trong các gần đúng này các tính toán đã được đơn giản đi rất nhiều vì các điều kiện bảo toàn số hạt tự động được tuân theo do sự đối xứng của phổ một hạt với λ , còn các đặc trưng của hệ được tính đến trong mật độ trạng thái thông qua các thông số g , $\overline{m^2}$ và Δ_0 .

Chúng ta nghiên cứu dạng phụ thuộc của hàm tương quan Δ vào nhiệt độ $t = \beta^{-1}$. Các hàm tương quan ở trạng thái cơ bản Δ_0 và ở trạng thái kích thích Δ liên quan với nhau bằng hệ thức:

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \int_0^\infty \frac{\bar{n}(\varepsilon) d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} = 2 \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (\beta\Delta)^2} [1 + \exp(\sqrt{x^2 + (\beta\Delta)^2})]} = 2I(\beta\Delta) \quad (3.46)$$

hệ thức nói trên dễ dàng thu được nhờ (3.26) và (3.38b).

Chúng ta khảo sát hai trường hợp tới hạn [10]. Đầu tiên giả thiết rằng nhiệt độ t nhỏ (do đó $\beta = t^{-1} \rightarrow \infty$) khi đó $\Delta \sim \Delta_0$ và $\Delta\beta \gg 1$. Bằng cách phân tích thành chuỗi, biểu thức dưới dấu tích phân (3.46) và giới hạn ở số hạng đầu tiên ta có:

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} \approx 2 \int_0^\infty e^{-\beta\Delta \left(1+x^2/[2(\beta\Delta)^2]\right)} \frac{dx}{\beta\Delta} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2\beta\Delta}} e^{-\beta\Delta}$$

Từ đó:
$$\Delta = \Delta_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2\pi}{\beta\Delta_0}} e^{-\beta\Delta_0} \right) = \Delta_0 \left(1 - \sqrt{\frac{2\pi t}{\Delta_0}} e^{-\Delta_0/t} \right) \quad (3.47)$$

Do vậy khi nhiệt độ tăng, hàm tương quan giảm (giá trị liên kết giảm). Chúng ta tìm giá trị t mà ở đó hàm tương quan Δ tiến tới 0. Để làm vậy ta nghiên cứu vùng β mà $\Delta\beta \ll 1$. Rất thuận tiện biểu diễn tích phân $I(\beta\Delta)$ dưới dạng:

$$I(\beta\Delta) = I_1 + I_2 \quad (3.48)$$

ở đây
$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (\beta\Delta)^2}} - \frac{\text{th}(x/2)}{x} \right) dx \quad (3.48a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{\text{th}(x/2)}{x} - \frac{\text{th}\sqrt{x^2 + (\beta\Delta)^2}/2}{\sqrt{x^2 + (\beta\Delta)^2}} \right) dx \quad (3.48b)$$

Tích phân (3.48a) bằng [9]:
$$2I_1 = \ln [\pi / (\gamma \beta \Delta)] \quad (3.49)$$

ở đây $\ln \gamma = c = 0,577$ - hằng số e.

Bởi vì khi $\Delta\beta = 0$, tích phân $I_2 = 0$ nên phân tích I_2 thành chuỗi theo $(\Delta\beta)^2$ và giới hạn ở số hạng đầu tiên ta thu được:

$$I_2 = -\frac{(\beta\Delta)^2}{4} \int_0^\infty \frac{dx}{x} \left(\frac{1}{x} \text{th} \frac{x}{2} \right)$$

sử dụng khai triển $\text{th} \frac{x}{2} = 4x \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2 + x^2}$ đối với I_2 ta sẽ có:

$$\begin{aligned} 2I_2 &= 4(\beta\Delta)^2 \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \frac{dx}{[\pi^2 + (2n+1)^2 + x^2]^2} \\ &= \frac{(\beta\Delta)^2}{\pi^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{7(\beta\Delta)^2 \zeta(3)}{8\pi^2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

ở đây $\zeta(3)$ là hàm Riman [9]. Như vậy đối với trường hợp $\Delta\beta \ll 1$ ta thu được:

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = \ln \frac{\pi t}{\gamma \Delta} + \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2} \left(\frac{\Delta}{t} \right)^2 \quad (3.51)$$

Từ (3.51) thấy rằng hàm tương quan tiến tới 0 khi:

$$t_{\text{th}} = \frac{\gamma \Delta_0}{\pi} = 0.567 \Delta_0 \quad (3.52)$$

Nhiệt độ t_{th} xác định điểm chuyển pha từ pha siêu chảy $\Delta \neq 0$ sang pha bình thường $\Delta = 0$. Khi $t < t_{th}$, hệ được mô tả bằng các hệ thức của mẫu siêu chảy mà chúng sẽ thu được trong chương này, còn khi $t \geq t_{th}$ thì hệ được mô tả bằng các hệ thức của mẫu các hạt độc lập trong chương 2. Khi lấy gần đúng liên tục, các biểu thức đối với entropi S , mô men quán tính f và năng lượng kích thích U có dạng:

$$S = g \int_0^{\infty} \left[\beta \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \bar{n} - \ln(1 - \bar{n}) \right] d\varepsilon \quad (3.53)$$

$$\mathfrak{S} = \beta g m^2 \int_0^{\infty} \bar{n}(1 - \bar{n}) d\varepsilon \quad (3.54)$$

$$U = g \int_0^{\infty} \left[\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2} - \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2} (1 - 2\bar{n}) \right] d\varepsilon + \frac{\Delta^2 - \Delta_0^2}{G} \quad (3.55)$$

ở đây
$$\bar{n} = \left[1 + \exp\left(\beta \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.56)$$

Nhiệt độ $t = \beta^{-1}$ chúng ta lấy từ phương trình trạng thái (3.55). Khi chú ý rằng ở $t = t_{th}$, hàm tương quan có giá trị 0, từ phương trình (3.55) không khó khăn chúng ta thu được năng lượng chuyển pha

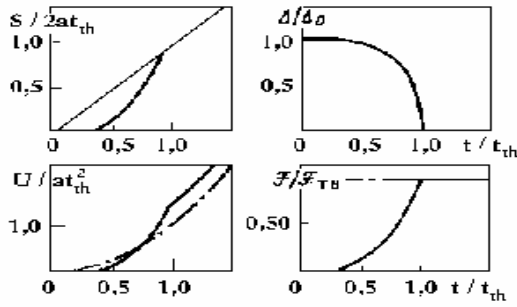
$$U_{th} = at_{th}^2 + \frac{g\Delta_0^2}{4} = 0,778 g\Delta_0^2 \quad (3.57)$$

Khi $U > U_{th}$ các hệ thức của mẫu siêu chảy chuyển thành các hệ thức của mẫu khí Fermi có năng lượng kích thích hiệu dụng:

$$U_{hd} = U - \frac{g\Delta_0^2}{4} = U - E_{tt} \quad (3.58)$$

Như vậy hiệu ứng tương tác dư của loại tương quan xuất hiện trong tất cả các vùng năng lượng kích thích U : Trong pha siêu chảy khi $U < U_{th}$ để mô tả các đặc trưng thống kê cần phải sử dụng các hệ thức của mẫu các giả hạt độc lập, khi $U > U_{th}$ các hệ thức này chuyển thành các phương trình của mẫu các hạt độc lập với năng lượng kích thích hiệu dụng U_{hd} . Khi đó ý nghĩa vật lý của E_{tt} trở nên rõ ràng hơn: ở năng lượng cao $U > U_{th}$ để kích thích hệ cần mất năng lượng bằng năng lượng tích tụ E_{tt} để "bứt các hệ ra" và sau đó kích thích hệ như khi các hạt Fermi độc lập.

Các biểu thức (3.53) — (3.55) đối với S , \mathfrak{S} và U và thậm chí cả (3.46) đối với Δ/Δ_0 trong [53] được phân tách thành chuỗi các hàm Macdonal và phụ thuộc vào t/t_{th} . Các kết quả thu được chỉ ra trên hình 3.3.



Hình 3.3. Sự phụ thuộc nhiệt độ của các đặc trưng thống kê của hệ có phổ một hạt rời rạc ở các biến không thứ nguyên ($t_{th} = 0,567\Delta_0$) [43]. Các đại lượng của mẫu khí Fermi tương ứng với các đường đứt nét.

Từ hình vẽ rõ ràng là có sự không liên tục (gãy khúc) của các đại lượng khi $t = t_{th}$ - xuất hiện sự chuyển pha loại hai. Tại điểm chuyển pha khi $t = t_{th}$ hàm tương quan bằng 0. Khi $t > t_{th}$ entropy S , năng lượng kích thích U và mômen quán tính \mathfrak{I} phụ thuộc vào nhiệt độ như các đại lượng tương ứng ở mẫu khí Fermi: $S = at$; $U = at^2 + g\Delta_0^2/4$, $\mathfrak{I} = \overline{m^2} g$. Từ hình vẽ cũng thấy rằng sự tương tác của loại tương quan sẽ dẫn đến sự giảm mạnh mômen quán tính ở vùng nhiệt độ thấp. Như vậy tương tác dư của loại tương quan tỏ ra có ảnh hưởng đủ mạnh lên quy luật của các đặc trưng thống kê của hệ.

Khi tính mật độ trạng thái hạt nhân như một hệ hai thành phần bao gồm proton và neutron, thường xuất phát từ điều kiện không có tương tác tương quan giữa neutron và proton mà nó có dạng [12, 21].

$$|\lambda_Z - \lambda_N| > 2\Delta_0 \quad (3.59)$$

Tức là sự khác nhau về thế năng hoá học của hệ proton và neutron phải vượt quá $2\Delta_0$. Trong các hạt nhân phức tạp thì điều kiện này luôn được thoả mãn. Vấn đề về tương quan neutron — proton trong các hạt nhân nhẹ chưa được giải quyết. Chúng ta giả thiết rằng điều kiện (2.59) được thoả mãn. Khi đó Hamilton của hạt nhân có tính đến tương tác cặp của loại tương quan có dạng:

$$\hat{H} = \sum_{\tau=Z,N} \left(\sum_{\nu\sigma} \varepsilon_{\tau\nu} a_{\tau\nu\sigma}^+ a_{\tau\nu\sigma} + G_{\tau} \sum_{\nu\nu'} a_{\tau\nu}^+ a_{\tau\nu'}^+ a_{\tau\nu'}^- a_{\tau\nu}^- \right) \quad (3.60)$$

Các hệ thức để tính mật độ trạng thái hạt nhân trong mẫu các giả hạt độc lập ở gần đúng momen nhỏ có dạng giống như ở mẫu các hạt độc lập. Chúng được xác định bằng các hệ thức (2.53) và (2.54). Khi đó Entropy S , thông số phụ thuộc spin σ^2 và các yếu tố của định thức D được xác định như sau:

$$S = 2 \sum_{\tau=Z,N} \left\{ \sum_{\nu} [\beta E_{\tau\nu} \bar{n}_{\tau\nu} - \ln(1 - \bar{n}_{\tau\nu})] \right\} \quad (3.61)$$

$$\sigma^2 = \sum_{\tau=Z,N} \left[\sum_{\nu} m_{\tau\nu}^2 \bar{n}_{\tau\nu} (1 - \bar{n}_{\tau\nu}) \right] \quad (3.62)$$

$$D_{\beta\beta} = 2 \sum_{\tau=Z,N} \left\{ \sum_v \left[\left(E_{\tau v}^2 - \lambda_{\tau}^2 \right) \bar{n}_{\tau v} \left(1 - \bar{n}_{\tau v} \right) + \frac{\Delta_{\tau}^2 \lambda_{\tau}^2}{E_{\tau v}} \left(1 - 2\bar{n}_{\tau v} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.63a)$$

$$D_{\alpha_N \alpha_N} = \sum_v \left[2\bar{n}_{Nv} \left(1 - \bar{n}_{\tau v} \right) + \frac{\Delta_N^2}{E_{Nv}^2} \left(1 - 2\bar{n}_{\tau v} \right) \right] \quad (3.63b)$$

$$D_{\beta\alpha_N} = \lambda_N D_{\alpha_N \alpha_N} \quad (3.63c)$$

Các giá trị $D_{\beta\alpha_Z}$ và $D_{\alpha_Z\alpha_Z}$ thu được từ $D_{\beta\alpha_N}$ và $D_{\alpha_N\alpha_N}$ bằng cách thay Z vào N. Trong các công thức (3.60) - (3.63) các đại lượng $\bar{n}_{\tau v}$ là trung bình số lấp đầy:

$$\bar{n}_{\tau v} = \left[1 + \exp(\beta E_{\tau v}) \right]^{-1} = \left[1 + \exp\left(\beta \sqrt{(\varepsilon_{\tau v} - \lambda_{\tau})^2 + \Delta_{\tau}^2} \right) \right]^{-1} \quad (3.64)$$

Các đặc trưng thống kê S, σ^2 và các yếu tố định thức D phải được tính ở điểm yên ngựa mà các tọa độ β, α_Z và α_N của nó thu được bằng cách giải hệ phương trình:

$$U = \sum_{\tau=Z,N} \left\{ \sum_v \left[E_{\tau v}^0 - E_{\tau v} \left(1 - \bar{n}_{\tau v} \right) \right] + \frac{\Delta_{\tau}^2 - \Delta_{0\tau}}{G_{\tau}} \right\} \quad (3.65a)$$

$$\left. \begin{array}{l} Z \\ N \end{array} \right\} = \sum_v \left[1 - \frac{\varepsilon_{\tau v} - \lambda_{\tau}}{E_{\tau v}} \left(1 - 2\bar{n}_{\tau v} \right) \right] \quad (3.65b)$$

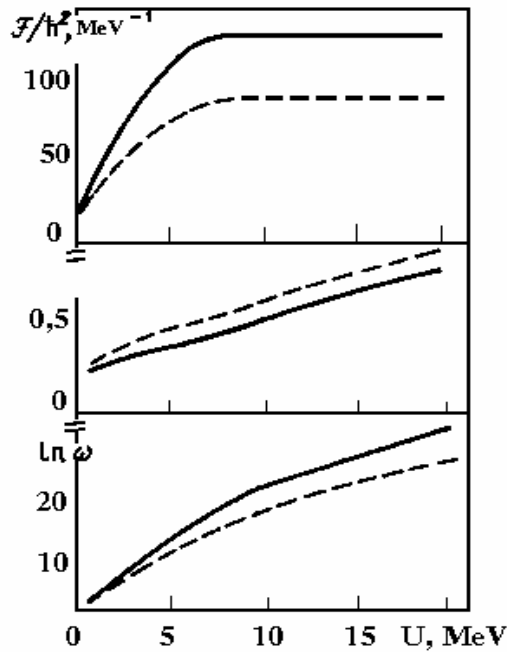
Các phương trình để xác định các hàm tương quan Δ_Z và Δ_N có dạng:

$$\frac{2}{G} = \sum \frac{1 - 2\bar{n}_{\tau v}}{E_{\tau v}} \quad (3.65c)$$

ở đây: $E_{\tau v} = \sqrt{(\varepsilon_{\tau v} - \lambda_{\tau})^2 + \Delta_{\tau}^2}$, $E_{\tau v}^0 = \sqrt{(\varepsilon_{\tau v} - \lambda_{0\tau})^2 + \Delta_{0\tau}^2}$, các hàm tương quan $\Delta_{0\tau}$ và các thế năng hoá học $\lambda_{0\tau}$ ở trạng thái cơ bản được xác định bằng phương trình sau :

$$\left. \begin{array}{l} Z \\ N \end{array} \right\} = \sum_v \left(1 - \frac{\varepsilon_{\tau v} - \lambda_{0\tau}}{E_{\tau v}^0} \right)$$

$$\frac{2}{G} = \sum_v \frac{1}{E_{\tau v}^0} \quad (3.66)$$



Hình 3.4. Sự phụ thuộc năng lượng của các đặc trưng thống kê của hạt nhân U^{236} (đường liền nét) và Hf^{176} (đường đứt nét).

Trong [15] đã tính toán các đặc trưng thống kê của các hạt nhân ^{176}Hf và ^{236}U có kể đến tương quan cặp (xem hình 3.4). ở công trình này đã sử dụng sơ đồ mức một hạt Nilxon cho các hạt nhân biến dạng nặng. Đối với hạt nhân biến dạng, các hiệu ứng không đồng nhất của phổ một hạt là nhỏ, vai trò tương tác cặp thể hiện rất rõ. Trên hình vẽ chúng ta thấy rất rõ vai trò tương tác cặp : các gãy khúc của hàm mật độ trạng thái và sự giảm mạnh của mômen quán tính ở vùng năng lượng kích thích thấp.

3.4 Giải pháp loại trừ mô tả các đặc trưng thống kê trong mẫu siêu chảy.

Việc mô tả mật độ trạng thái hạt nhân trong mẫu siêu chảy truyền thống với các yếu tố ma trận tương tác cặp ổn định có một nhược điểm rất lớn là ngay cả đối với hệ có phổ phân bố đều cũng không thu được các biểu thức đối với các đặc trưng thống kê ở dạng giải tích. Nhược điểm này có thể khắc phục được ở phương pháp khác mô tả ảnh hưởng của tương tác cặp. Phương pháp này đã được đưa ra trong [55] khi nghiên cứu tính chất nhiệt động học của chất siêu dẫn. Giải pháp như vậy thường được gọi là giải pháp loại trừ [56] đã được phát triển trong [57] để khảo sát các đặc trưng thống kê của mẫu hạt nhân siêu chảy.

Trong giải pháp loại trừ, hamilton của hệ một thành phần được mô tả ở dạng:

$$\hat{H} = \sum_{\nu\sigma} \varepsilon_{\nu\sigma} a_{\nu\sigma}^+ a_{\nu\sigma} - \sum_{\nu\nu'} G_{\nu\nu'} a_{\nu+}^+ a_{\nu'-}^+ a_{\nu'-} a_{\nu+} \quad (3.67)$$

Nhờ phương pháp biến phân tương tự như ở §3.1 đối với $\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0$ có thể thu được:

$$\langle \hat{H} - \lambda \hat{N} \rangle_0 = \sum_v \left\{ (\varepsilon_v - \lambda) \left[1 - \frac{\varepsilon_v - \lambda}{E_v} (1 - 2\bar{n}_v) \right] - \frac{\Delta_v^2}{2E_v} (1 - 2\bar{n}_v) \right\} \quad (3.68)$$

Hệ thức (3.68) khác (3.30) ở chỗ hàm tương quan Δ_v hiện giờ phụ thuộc vào chỉ số của trạng thái một hạt và được xác định bằng phương trình:

$$\Delta_v = \sum_{v'} G_{vv'} \frac{1 - 2\bar{n}_{v'}}{E_{v'}} \Delta_{v'} \quad (3.69)$$

ở đây
$$n_v = [1 + \exp(E_v / t)]^{-1}; \quad E_v = \sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta_v^2}$$

là trung bình số lấp đầy và năng lượng của trạng thái giả hạt thứ v tương ứng. Trong [55] đã chỉ ra rằng đối với dạng chung của yếu tố ma trận $G_{vv'}$, có thể giải ngắn gọn bài toán tương tác cặp nếu nghiệm các phương trình (3.69) ở dạng phân tách:

$$\Delta_v(t) = \Delta(\varepsilon_v) f(t) \quad (3.70)$$

Thay thế (3.70) vào (3.69) và chia hai vế cho $f(t)$ thì thu được :

$$(1 - 2\bar{n}_{v'}) / E_{v'} = \text{th}(E_{v'} / 2t) / E_{v'} = K_{v'} \quad (3.71)$$

không phụ thuộc vào nhiệt độ t . So sánh $K_{v'}$ khi $t = 0$, tất cả $\bar{n}_v = 0$ và $E_{v'} = \sqrt{(\varepsilon_{v'} - \lambda)^2 + \Delta_0^2(\varepsilon_{v'})}$ với $K_{v'}$ khi $t = t_{th}$, $\Delta_{v'} = 0$ và $E_{v'} = \varepsilon_{v'} - \lambda$ ta sẽ có:

$$\frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_v - \lambda)^2 + \Delta_0^2(\varepsilon_v)}} = \frac{\text{th}[(\varepsilon_v - \lambda) / (2t_{th})]}{\varepsilon_v - \lambda} \quad (3.72)$$

Khi đó hàm phụ thuộc năng lượng của Δ_{0v} của trạng thái một hạt có dạng:

$$\Delta_0(\varepsilon_v) = (\varepsilon_v - \lambda) / \text{sh}[(\varepsilon_v - \lambda) / (2t_{th})] \quad (3.73)$$

từ đó suy ra hệ thức liên kết $\Delta_0(\varepsilon_F)$ với t_{th} :

$$\Delta_0(\varepsilon_F) = 2 t_{th} \quad (3.74)$$

Chúng ta thu được phương trình đối với $f(t)$ từ (3.71) khi giả thiết $\varepsilon_v = \varepsilon_F$. Để làm điều đó chúng ta so sánh $K_{v'}$ ở $t = 0$ với $K_{v'}$ ở t bất kỳ:

$$\frac{1}{\Delta(\varepsilon_F)} = \frac{\text{th}[\Delta(\varepsilon_F) f(t) / (2t_{th})]}{\Delta(\varepsilon_F) f(t)} \quad (3.75)$$

Thay thế (3.74) vào (3.75) đối với $f(t)$ ta sẽ có phương trình :

$$f(t) = \text{th}[t_{th} f(t) / t] \quad (3.76)$$

ở giải pháp này, entrôpy và các phương trình để xác định tọa độ điểm yên ngựa trùng với các hệ thức tương tự của mẫu siêu chảy chỉ ở hàm tương quan có phụ thuộc chỉ số trạng thái một hạt v hay không.

Chúng ta hãy khảo sát các đặc trưng thống kê của hệ có phổ một hạt rời rạc ở gần đúng nhiệt độ thấp và liên tục. Tính toán năng lượng tích tụ E_{tt} bằng hệ thức (3.41) trong mục 3.3.

$$E_{tt} = \frac{g}{2} \int_0^{\infty} \left[\frac{(\varepsilon - \lambda_0)^2}{\sqrt{(\varepsilon - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} + \frac{\Delta_0^2}{2\sqrt{(\varepsilon - \lambda_0)^2 + \Delta_0^2}} - |\varepsilon - \lambda_0| \right] d\varepsilon \quad (3.77)$$

$$= g \int_0^{\infty} \left[x \operatorname{th} \frac{x}{2t_{th}} + \frac{x}{\operatorname{sh}(x/t_{th})} - x \right] dx = 2g \int_0^{\infty} \frac{dx}{\exp(2x/t_{th}) - 1} = \frac{\pi^2}{12} g t_{th}^2$$

Các đại lượng U , S , σ^2 và D khi $t < t_{tt}$ có dạng :

$$U = E - E_0 = \frac{\pi^2}{4} g t_{th}^2 [1 - f^2(t)] \quad (3.78a)$$

$$S = \frac{\pi^2}{3} g \frac{t_{th}^2}{t} [1 - f^2(t)] \quad (3.78b)$$

$$\sigma^2 = g m^2 t_{th} [1 - f^2(t)] \quad (3.78c)$$

$$D = \frac{\pi^2}{3} g^2 t_{th}^4 [1 + f^2(t)]^2 [1 - f^2(t)] \quad (3.78d)$$

Không khó khăn để thu được các biểu thức này nếu sử dụng (3.71) vào gần đúng liên tục :

$$\frac{\operatorname{th} \left[\sqrt{x^2 + \Delta^2} / (2t_{th}) \right]}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \Delta_0^2}} = \frac{\operatorname{th} [x / (2t_{th})]}{x} \quad (3.79)$$

Các hàm tương quan $D(\varepsilon_F)$ theo giải pháp này và Δ_0 trong mẫu siêu chảy truyền thống xác định độ phân tách năng lượng trong phổ các trạng thái kích thích của hệ chẵn. Rõ ràng rằng khi lượng phân tách như nhau $2\Delta(\varepsilon_F) = 2\Delta_0$ sự phụ thuộc năng lượng của yếu tố ma trận tương tác cặp dẫn đến sự thay đổi năng lượng tích tụ và nhiệt độ tới hạn chuyển pha. Sự khác biệt tương tự cũng được tìm thấy ở các đặc trưng thống kê khác. Tuy nhiên ở phổ một hạt đã cho, các thông số của tương tác tương quan sẽ được lựa chọn sao cho ở cả hai giải pháp, nhiệt độ tới hạn đều trùng nhau thì sự khác biệt về dạng phụ thuộc nhiệt độ và năng lượng của mật độ trạng thái và các đặc trưng thống kê khác của hệ là nhỏ và bỏ qua.

Mối liên hệ sau giữa các thông số tương ứng với các điều kiện đó là:

$$\Delta(\varepsilon_F) = 1,134\Delta_0 \quad (3.80)$$

Sự phụ thuộc năng lượng entropi S , thông số phụ thuộc spin σ^2 và nhiệt độ t đối với hạt nhân ^{56}Fe thu được ở [58] nhờ các hệ thức của hai giải pháp. Từ hình 3.5 thấy rõ ràng là sự khác biệt của các hàm nhiệt động là cực tiểu. Trong khi đó trong các công thức tính toán, giải pháp loại trừ tỏ ra đơn giản và thuận tiện hơn.

Chúng ta hãy xét các công thức mà chúng được sử dụng để mô tả mật độ mức hạt nhân với phổ một hạt rời rạc trong giải pháp loại trừ. Mật độ mức hạt nhân ở năng lượng kích thích U và mô men góc J cố định có dạng [59] :

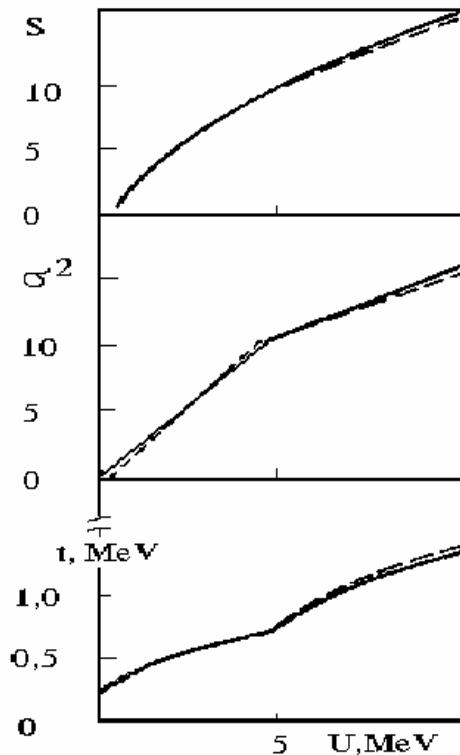
$$\rho(U, J) = \frac{(2J+1)}{2\sqrt{2\pi}\sigma^3|D|^{1/2}} \exp\left(S - \frac{(J+1/2)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (3.81)$$

Đối với mật độ mức toàn phần $\rho(U)$ có thể viết:

$$\rho(U) = \frac{\exp(S)}{\sqrt{2\pi}\sigma|D|^{1/2}} \quad (3.82)$$

Một trong những thông số cơ bản của mẫu này là hàm tương quan Δ_0 mà nhiệt độ chuyển pha t_{th} liên hệ trực tiếp với nó từ trạng thái siêu chảy sang trạng thái bình thường:

$$t_{th} = 0,567 \Delta_0 \quad (3.83)$$



Hình 3.5. Sự phụ thuộc năng lượng của các đặc trưng thống kê của hạt nhân Fe^{56} trong mẫu siêu chảy.

Đường liền nét: Tính theo giải pháp truyền thống ($G = \text{const}$).

Đường đứt nét: Tính theo giải pháp loại trừ.

Dưới điểm chuyển pha $t < t_{th}$, sự phụ thuộc nhiệt độ của U , S , σ^2 và D có dạng như sau :

$$\begin{aligned}
U &= U_{th}(1-f^2); \\
S &= S_{th}t_{th}(1-f^2)/t; \\
\sigma^2 &= (6/\pi^2)\overline{am^2}(1-f^2)t_{th}; \\
D &= D_{th}(1+f^2)^2(1-f^2)^3;
\end{aligned} \tag{3.84}$$

ở đây U_{th} , S_{th} và D_{th} là các đại lượng tương ứng được xác định ở nhiệt độ tới hạn:

$$\begin{aligned}
U_{th} &= at_{th}^2 + E_{tt}; \quad E_{tt} = \frac{g\Delta_0^2}{4} = \frac{3a\Delta_0^2}{2\pi^2} \\
S_{th} &= 2at_{th} \quad ; \quad D_{th} = \frac{144}{\pi}a^3t_{th}^5
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Hàm $f = (1 - U/U_{th})^{1/2}$ liên quan với nhiệt độ bằng phương trình (3.76) mà từ nó có thể thu được dạng phụ thuộc f của t :

$$t = 2ft_{th} / \ln[(1+f)/(1-f)] \tag{3.86}$$

ở nhiệt độ cao hơn nhiệt độ tới hạn ($t > t_{th}$) các phương trình trạng thái của mẫu các giả hạt độc lập khác với các phương trình trạng thái của khí Fermi chỉ ở sự dịch chuyển năng lượng kích thích sang năng lượng tích tụ:

$$\begin{aligned}
U &= at^2 + E_{tt}; \quad S = 2at = 2\sqrt{a(U - E_{tt})} \\
\sigma^2 &= \frac{6}{\pi^2}\overline{am^2}t \quad ; \quad D = \frac{144}{\pi}a^3t^5
\end{aligned} \tag{3.87}$$

Nếu so sánh (3.81) — (3.87) với (2.44) — (2.48), rất dễ dàng thấy rằng các hệ thức của mẫu siêu chảy phức tạp hơn chút ít so với các hệ thức của mẫu khí Fermi. Tuy nhiên mẫu siêu chảy thường được sử dụng để mô tả các sự khác biệt chẵn lẻ trong mật độ mức hơn là mẫu khí Fermi. Sự khác biệt trong mẫu khí Fermi được tính nhờ công thức bán thực nghiệm (2.51) tính δ tương ứng của năng lượng kích thích. Như đã chứng minh trong [54], sự khác biệt chẵn lẻ của các đặc trưng thống kê trong mẫu các giả hạt độc lập được xác định bằng dịch chuyển năng lượng của trạng thái cơ bản của hệ. Có thể tính chúng được nếu như trong các hệ thức (3.81) — (3.87) sử dụng đại lượng sau như năng lượng kích thích :

$$U^* = U + \begin{cases} 0 & - \text{với hạt nhân chẵn chẵn} \\ \Delta_0 & - \text{hạt nhân lẻ} \\ 2\Delta_0 & - \text{hạt nhân lẻ lẻ} \end{cases} \tag{3.88}$$

vấn đề này sẽ được thảo luận kỹ hơn trong chương 5.