NGHIÊN CỨU QUÁ TRÌNH TRUYỀN NHIỆT TRONG ỐNG TRỤ TRÒN CHIỀU CAO VÔ HẠN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÁCH BIẾN FOURIER

Phạm Hữu Kiên - Nguyễn Thị Thu Hằng *(Trường ĐH Sư phạm – ĐH Thái Nguyên)*

1. Mở đầu

Quá trình truyền nhiệt trong các môi trường đã được nghiên cứu từ rất lâu. Có nhiều tài liệu trình bày về vấn đề này [1, 2, 3, 4, 5, 6], nhưng chưa có tài liệu nào trình bày cách giải cụ thể một bài toán truyền nhiệt trong vật có hình dạng xác định, đặc biệt. Với mong muốn tìm lời giải cho bài toán truyền nhiệt trong vật có hình dạng xác định và đặc biệt, chúng tôi đã giải và nghiên cứu sự phân bố nhiệt trong một ống trụ tròn, chiều cao vô hạn. Kết quả này có thể được áp dụng để giải các bài toán truyền nhiệt trong những vật có hình dạng xác định, đặc biệt khác.

Bài toán truyền nhiệt thường dẫn đến việc giải phương trình vi phân đạo hàm riêng (phương trình Vật lý toán), một trong những phương pháp có hiệu quả và phù hợp nhất để giải phương trình này là ứng dụng phương pháp tách biến Fourier [3], [5], [6]. Do đó, chúng tôi chọn phương pháp tách biến Fourier để giải bài toán trên.

Phương pháp tách biến Fourier là phương pháp tìm nghiệm phương trình:

$$u_{tt}^{"} - a^2\Delta u = G(x, y, z, ...t), \qquad (1.1)$$

trong đó, u = $u(x, y, z, ...t)$, nghiệm thỏa mãn phương trình vi phân (1.1) được tìm bằng cách phân tích hàm $u(x, y, z, ...t)$ thành tích các hàm chứa các biến độc lập với nhau, cụ thể là chúng ta đặt:

$$u(x, y, z, ...t) = T(t)X(x)Y(y)Z(z)...., \qquad (1.2)$$

sau đó thay phương trình (1.2) vào phương trình (1.1), kết hợp với điều kiện biên và điều kiện ban đầu sẽ tìm được nghiệm của bài toán.

2. Phương pháp tách biến Fourier đối với quá trình truyền nhiệt trong một ống hình trụ chiều cao vô hạn

Bài toán: Tìm sự phân bố nhiệt độ trong một ống hình trụ tròn chiều cao vô hạn có bán kính r_0, $0 < r < r_0; 0 < \varphi < 2\pi$, biết nhiệt độ ban đầu trong ống có dạng:

$$u\Big|_{t=0} = f(r, \varphi), \qquad (2.1)$$

và trên bề mặt trụ được duy trì nhiệt độ bằng không (không có sự trao đổi nhiệt với môi trường bên ngoài) [3].

Bài toán trở thành tìm nghiệm của phương trình vi phân:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right], 0 < r < r_0, 0 < \varphi < 2\pi. \qquad (2.2)$$

Thỏa mãn điều kiện biên:

$$u(r, \varphi, t)\Big|_{r=r_0} = 0, \qquad (2.3)$$

và điều kiện ban đầu:

$$u(r, \varphi, t)\Big|_{t=0} = f(r, \varphi). \qquad (2.4)$$

Hàm phân bố nhiệt độ tại miền được xét phải hữu hạn, tức là:

$$\left|u(r, \varphi, t)\right| < \infty.$$

Theo biến φ hàm nhiệt độ có tính tuần hoàn:

$u(r,\varphi,t) = u(r,\varphi + 2\pi, t).$

Sử dụng phương pháp tách biến Fourier, chúng ta đặt:

$u(r,\varphi,t) = R(r)\phi(\varphi)T(t),$

thay vào phương trình (2.2), chúng ta có:

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{1}{R(r)}\frac{r.R'(r)\ '}{r} + \frac{1}{r^2}\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = -\lambda^2. \qquad (2.5)$$

Chọn hàm $\phi(\varphi)$:

$$\frac{\phi''(\varphi)}{\phi(\varphi)} = -n^2, \Rightarrow \phi''(\varphi) + n^2\phi(\varphi) = 0. \qquad (2.6)$$

Nghiệm của phương trình (2.6) có dạng:

$\phi(\varphi) = A\cos n\varphi + B\sin n\varphi,$

do tính chất tuần hoàn của hàm $\phi(\varphi)$:

$$\phi(\varphi + 2\pi) = \phi(\varphi),$$

suy ra, n phải nguyên dương hoặc bằng 0, tức là $n = 0,1,2,3...$ Từ phương trình (2.5), ta có:

$$T'(t) + a^2\lambda^2T(t) = 0. \qquad (2.7)$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (\lambda^2r^2 - n^2)R(r) = 0. \qquad (2.8)$$

Phương trình (2.8) có nghiệm là hàm Bessel [2], [3], [4]. Chúng ta đặt $x = \lambda r$:

$$x^2R''(x) + xR'(x) + (x^2 - n^2)R(x) = 0, \quad \Rightarrow R(x) = \alpha_n J_n(x) + \beta_n Y_n(x).$$

Điều kiện $|R| < \infty \Rightarrow \beta_n = 0$, vì hàm $Y_n \;\; 0 \;\; \to -\infty$.

Từ điều kiện ban đầu, chúng ta có: $R(r_0) = \alpha_n J_n \;\; \lambda r_n \;\; = 0$, đánh số các không điểm của hàm Bessel là: $\mu_1, \mu_2, ...\mu_k, k = 0,1,2,3...\infty \Rightarrow \lambda = \lambda_k = \frac{\mu_k}{r_0}$ chính xác đến một hệ số hằng số, hàm theo biến r có dạng:

$$R(r) = R_{nk}(r) = J_n\left(\frac{\mu_k}{r_0}r\right).$$

Nghiệm của phương trình (2.7) là:

$$T(t) = T_{nk}(t) = e^{-\left(\frac{\mu_k a}{r_0}\right)^2 t}.$$

Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (2.2) có dạng:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n.k=0}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_n}{r_0}r\right) \;\; A_{nk}\cos n\varphi + B_{nk}\sin n\varphi \;\; .e^{-\left(\frac{\mu_k a}{r_0}\right)^2 t}.$$

Do tính chất trực giao của hàm Bessel và tính trực giao của các hàm $\;1, \cos n\varphi, \sin n\varphi\;$, tức là:

$$\int_0^{r_0} r J_\nu^2\left(\frac{\mu}{r_0}r\right)dr = \frac{r_0^2}{2}J_0'^2(\mu) = \frac{r_0^2}{2}J_{\nu+1}^2\ \ \mu\ \ ;$$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\varphi\cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & khi\ \ n = m \\ 2\pi & khi\ \ n = m = 0 \\ \pi & khi\ \ n = m \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\sin m\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & khi\ \ n \neq m, n = m = 0 \\ \pi & khi\ \ n = m \neq 0. \end{cases}$$

Suy ra các hệ số A_{nk} và B_{nk}:

$$A_{nk} = \frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2\left[J_n\ \ \mu_k\ \ \right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r f(r,\varphi)\cos n\varphi J_n dr d\varphi;$$

$$B_{nk} = \frac{\varepsilon_n}{\pi r_0^2\left[J_n\ \ \mu_k\ \ \right]^2}\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r f(r,\varphi)\sin n\varphi J_n dr d\varphi,$$

trong đó:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n \neq 0. \end{cases}$$

3. Áp dụng cho trường hợp cụ thể

Bài toán: Tìm nhiệt độ trong một hình trụ tròn bán kính R, chiều cao vô hạn, biết rằng nhiệt độ ban đầu trong hình trụ được cho bởi:

$$u\ \ r,t\ \ \Big|_{t=0} = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

trong đó u_0 là hằng số, và nhiệt độ trên bề mặt xung quanh bằng không [4].

Bài giải:

Vì hàm $u\ \ r,t$ chỉ phụ thuộc vào biến r, không phụ thuộc vào biến φ, bài toán trở thành tìm nghiệm của phương trình vi phân:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0. \qquad (3.1)$$

Với điều kiện biên:

$$u\ \ r,t\ \ \Big|_{r=R} = 0, \qquad (3.2)$$

và điều kiện ban đầu:

$$u\ \ r,t\ \ \Big|_{t=0} = f(r) = u_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (3.3)$$

Áp dụng kết quả ở mục 2, chúng ta có sự phân bố nhiệt độ trong ống trụ có dạng:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-a^2\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 t}J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right).$$

Theo điều kiện ban đầu của bài toán:

$$u(r,0)=f(r)\Rightarrow f(r)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right).$$

Áp dụng kết quả ở mục 2, chúng ta có:

$$A_n=\frac{2}{R^2\left[J_1(\mu_n)\right]^2}\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)dr,\ f(r)=u_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right).$$

Chúng ta đặt:

$$I=\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr=\left(I_1+I_2\right)u_0,$$

trong đó:

$$I_1=\int_0^R rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr,\ I_2=-\frac{1}{R^2}\int_0^R r^3J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr.$$

Chúng ta dễ dàng chứng minh được:

$$\int_0^x xJ_0(x)\,dx=xJ_1(x);$$

$$\int_0^x x^3J_0(x)\,dx=2x^2J_0(x)+(x^3-4x)J_1(x).$$

Từ đó suy ra:

$$I_1=\frac{R^2}{\mu_n}J_1(\mu_n);\ I_2=-\frac{2R^2J_0(\mu_n)}{\mu_n^2}-\frac{R^2J_1(\mu_n)}{\mu_n}+\frac{4R^2}{\mu_n^3}J_1(\mu_n).$$

Suy ra:

$$I=\left(\frac{4R^2J_1(\mu_n)}{\mu_n^3}-\frac{2R^2J_0(\mu_n)}{\mu_n^2}\right)u_0.$$

Mặt khác, chúng ta lại có:

$$J_0(\mu_n)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!k!}\left(\frac{\mu_n}{2}\right)^{2k};$$

$$J_1(\mu_n)=J_0(\mu_n)\frac{\mu_n}{2(k+1)}.$$

Suy ra:

$$I=\frac{4R^2J_1(\mu_n)}{\mu_n^3}u_0;$$

$$A_n=\frac{2I}{R^2\left[J_1(\mu_n)\right]^2}=\frac{8u_0}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}.$$

Cuối cùng, tìm được sự phân bố nhiệt độ trong ống trụ chiều cao vô hạn là:

$$u(r,t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1 \quad \mu_n} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) e^{-a^2\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 t}. \qquad (3.4)$$

4. Kết luận

- Chúng tôi đã tìm được sự phân bố nhiệt trong ống trụ tròn, chiều cao vô hạn là phương trình (3.4), khả vi một lần theo thời gian t và khả vi hai lần theo tọa độ r.

- Kết quả cho thấy, sự phân bố nhiệt độ trong ống giảm dần theo hàm e mũ, theo thời gian và tốc độ giảm nhanh hay chậm phụ thuộc vào bình phương tốc độ truyền nhiệt, nhiệt độ càng giảm nhanh khi tốc độ truyền nhiệt càng lớn và ngược lại.

- Nhiệt độ phụ thuộc tuyến tính vào tỉ số giữa hàm Bessel nguyên bậc không và hàm Bessel nguyên bậc một.

- Kết quả này có thể được áp dụng để giải các bài toán truyền nhiệt trong những vật có hình dạng xác định và đặc biệt khác 🕮

Tóm tắt

Quá trình truyền nhiệt trong các vật diễn ra rất phức tạp, để tìm được dạng phân bố nhiệt trong các vật có hình dạng bất kì là rất khó. Tuy nhiên, chúng ta có thể tìm được sự phân bố nhiệt trong các vật có hình dạng đặc biệt, từ đó suy ra gần đúng sự phân bố nhiệt trong các vật có hình dạng bất kì. Trong bài báo này, chúng tôi đã nghiên cứu và tìm được sự phân bố nhiệt trong ống trụ tròn, chiều cao vô hạn. Kết quả cho thấy sự phân bố nhiệt độ trong ống trụ giảm dần theo thời gian theo hàm e mũ và tốc độ giảm nhanh hay chậm phụ thuộc vào bình phương tốc độ truyền nhiệt.

Summary

Investigation of the heat transfer process in a tube of cirle cylinder with unlimited height by means of Fourier variable separation method

In this paper, we have found thermal distribution in a tube of cirle cylinder with unlimited height. The result shows the thermal distribution in a tube deducts with times by exponel function and the speed decline depends on square of thermal velocity in the tube.

Tài liệu tham khảo

[1]. Đặng Đức Dũng, Lê Đức Thông. *Phương pháp toán dùng cho Vật lí, 3 tập*. NXB ĐHQG TPHCM.

[2]. Nguyễn Văn Hùng, Lê Văn Trực (2004). *Phương pháp toán cho Vật lí*. NXB ĐHQGHN.

[3]. Đỗ Thị Liên (2007). *Khóa luận tốt nghiệp Đại học*, Thái Nguyên.

[4]. Đỗ Đình Thanh (2002). *Phương pháp toán lí*. NXB GD.

[5]. Phan Huy Thiện (2007). *Phương trình toán lí*, NXB GD.

[6]. Nguyễn Đình Trí, Nguyễn Trọng Thái (1971). *Phương trình Vật lí cho toán.* NXB Đại học và THCN, Hà Nội.