ĐẠI HỌC HUẾ
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---ꕥ 🕮 ꕥ---

Đề tài:

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA HÀM PHÂN TÁN VÀ ỨNG DỤNG

Người thực hiện:
NGUYỄN VĂN SƠN

Huế - 2005

æ

I. Lời giới thiệu

Giả sử X là một biến biến ngẫu nhiên xác định trên $\mathcal{R} = (-\infty; +\infty)$. Chúng ta nói $X \in \mathcal{L}^1$, nếu giá trị trung bình $\mu := E(X) < +\infty$. Với mỗi $X \in \mathcal{L}^1$, hàm phân tán của X, ký hiệu $D_X(u)$, xác định bởi

$$D_X(u) := E|X - u|, \quad \text{với mọi} \quad u \in \mathcal{R},$$

được coi như một thước đo độ phân tán các giá trị của biến ngẫu nhiên X trong chuẩn $\mathcal{L}^1$. Hàm phân tán $D_X(u)$ thực chất là một sự tổng quát của các độ lệch tuyệt đối trung bình $\delta_1 := E|X-\mu|$ và độ lệch tuyệt đối trung vị $\delta_1 := E|X - Med(X)|$, (xem [3], [4], [5], [6], [7] và [8]).

J. Munoz - Perez và A. Sanchez-Gomez là những người đầu tiên đã sử dụng một số tính chất của hàm phân tán để xác định thứ tự phân tán của các biến ngẫu nhiên, (xem [1] và [2]). Pham-Gia Thu và các đồng sự đã nhận được các kết quả liên quan tới hàm phân tán như là một sự tổng quát của các thước đo δ_1 và δ_2. (xem [3], [4], [6] và [7]). Trần Lộc Hùng đã đánh giá khoảng cách L^1 giữa các hàm phân tán, (xem [5]). Gần đây, Trần Lộc Hùng và Nguyễn văn Sơn cũng đã thiết lập mối liên quan giữa sự hội tụ của dãy hàm phân tán và sự hội tụ yếu của dãy các biến ngẫu nhiên tương ứng (xem chi tiết trong [8]).

Trên cơ sở đó, tôi đã tiếp tục nghiên cứu về hàm phân tán và các ứng dụng của nó trong một số lĩnh vực của lý thuyết xác suất.

Mục đích của đề tài này là nghiên cứu về hàm phân tán của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập, qua đó tìm cách ứng dụng nó trong lý thuyết giới hạn.

Trong đề tài này, tôi đã sử dụng phương pháp phân tích và tổng hợp các kiến thức liên quan, đồng thời cũng dùng phương pháp tương tự hóa để nhận được một số kết quả.

Nội dung của đề tài này là trình bày một số tính chất của hàm phân tán của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập,sau đó nêu một ứng dụng của nó trong việc chứng minh một định lý dạng luật số lớn. Những kết quả nhận được cho thấy một cách tiếp cận mới đối với việc nghiên cứu các định lý giới hạn của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập có trung bình hữu hạn qua các tính chất của hàm phân tán của các biến ngẫu nhiên. Một số kết quả trong đề tài này đã được đăng ở Proceedings của MC0'-04 (Fifth International Conference on Computer Sciences, Metz, France).

II. Một số tính chất của hàm phân tán

Trong các chứng minh của mình, tôi sẽ sử dụng một số tính chất sau của hàm phân tán, các tính chất này đã được nêu ra bởi J.Munoz-Perez và A. Sanchez-Gomez ([1] và [2]), Thu P.G. và Hung T.L. ([3]), Hung T.L. ([4], Hung T.L. và Son N.V. ([5]).

Định lý 2.1.

i. Hàm $D_X(u)$ là hàm lồi trên R.

ii. $\lim\limits_{u\to+\infty} D'_X(u) = 1$ và $\lim\limits_{u\to-\infty} D'_X(u) = -1$.

iii. $\lim\limits_{u\to+\infty}(D_X(u) - u) = -EX$ và $\lim\limits_{u\to-\infty}(D_X(u) + u) = EX$.

iv. $F_X(u) = \frac{1}{2}(D'_X(u) + 1)$ $\forall u \in C_F$, trong đó C_F là tập các điểm liên tục của F_X.

Định lý 2.2. Giả sử $X, X_1, X_2, ..., X_n, ... \in L_1$, nếu

i. Tồn tại $p > 1$ thỏa mãn

$$\underset{n\in N}{E} \mid X_n \mid^p < \infty \tag{1}$$

ii. $F_{X_n} \Rightarrow F_X$ khi $n \to \infty$.
thì $D_{X_n}(u) \to D_X(u)$ $\forall u \in R$.

Định lý 2.3. Giả sử $X_1, X_2, ..., X_n, ... \in L_1$, và $D_1, D_2, ..., D_n, ...$ là dãy hàm phân tán tương ứng thỏa mãn $D_n(u) \to D(u)$ $\forall u \in R$, khi đó

i. $D(u)$ là hàm lồi trên R.

ii. Ký hiệu $H = \{u \in R \mid D'(u), D'_n(u)$ tồn tại $\forall n \in N\}$, khi đó H trù mật trong R và

$$\lim_{n\to\infty} D'_n(u) = D'(u), \quad \forall u \in H.$$

iii. Gọi H_0 là tập tất cả các điểm u sao cho $D'(u)$ tồn tại, khi đó trên H_0 ta có

$$\lim_{u\to+\infty} D'(u) = 1, \quad \text{và} \quad \lim_{u\to-\infty} D'(u) = -1.$$

iv. Nếu điều kiện (1) được thỏa mãn hoặc họ $(X_n)_{n\in N}$ khả tích đều thì tồn tại hàm phân phối xác suất F sao cho

$$D(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid x - u \mid dF(x).$$

Định lý 2.4. Giả sử $X, X_1, X_2, ..., X_n, ... \in L_1$, và $D, D_1, D_2, ..., D_n, ...$ là dãy hàm phân tán tương ứng. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D_n(u) = D(u)$ $\forall u \in R$ thì

i. $F_{X_n} \Rightarrow F_X$.

ii. $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{u\in R} \mid D_n(u) - D(u) \mid = 0$.

Định lý 2.5.

i. $D_{\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}}(u) \le \frac{1}{n}(D_{X_1}(u) + D_{X_2}(u) + ... + D_{X_n}(u))$ $\forall u \in R$.

ii. (Bất đẳng thức dạng Chebyshev) : Với mọi $\epsilon > 0$ và $u \in R$ ta có

$$P(\mid X - u \mid \ge \epsilon) \le \frac{1}{\epsilon} D_X(u) \ \forall X \in L_1.$$

iii. $D_X(u) = u - EX + 2\int_{X>u}(X - u)dP = EX - u + 2\int_{X<u}(u - X)dP$ $\forall X \in L_1$.

J.Munoz-Perez và A. Sanchez-Gomez trong [1] đã sử dụng hàm phân tán để đánh giá mức độ phân tán của các biến ngẫu nhiên. Theo J.Munoz-Perez và A. Sanchez-Gomez, biến ngẫu nhiên X được gọi là có độ phân tán không lớn hơn độ phân tán của biến ngẫu nhiên Y, ký hiệu $X \overset{d}{\leq} Y$ nếu

$$D_{X-EX}(u) \leq D_{Y-EY}(u) \forall u \in R \tag{1}$$

hoặc ký hiệu $F_1 \overset{d}{\leq} F_2$ nếu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mid x - \mu_1 - u \mid dF_1(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mid x - \mu_2 - u \mid dF_2(x) \ \forall u \in R \tag{2 .}$$

trong đó $\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_1(x)$ và $\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_2(x)$.

Định lý sau được J.Munoz-Perez và A. Sanchez-Gomez trình bày trong [1].

Định lý 2.6 Giả sử X và Y là các biến ngẫu nhiên độc lập có kỳ vọng hữu hạn, khi đó $X + Y \overset{d}{\geq} Y$ và $X + Y \overset{d}{\geq} X$.

III. Các kết quả chính.

Chúng tôi đã nhận được các kết quả liên quan tới hàm phân tán của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập.

Mệnh đề 3.1. Giả sử X, Y là các biến ngẫu nhiên độc lập có kỳ vọng hữu hạn, khi đó

$$D_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_X(u-y)dF_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} D_Y(u-x)dF_X(x).$$

Bổ đề 3.2. Nếu $EX = 0$ thì

i. $D_X((1+t)u) \leq D_X(u) + t \mid u \mid \forall u \in R, t \geq 0.$

ii. $D_X(u) \geq D_{\frac{X}{n}}(u) = \frac{1}{n} D_X(nu) \geq \mid u \mid \quad \forall u \in R, n \geq 1$

iii. Nếu $E \mid X \mid > 0$ thì $D_X(u) < E \mid X \mid + \mid u \mid \forall u \neq 0.$

Bổ đề 3.3. Giả sử X, Y là các biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn $EX = EY = 0$, khi đó

$$E \mid X \mid + E \mid Y \mid - E \mid X+Y \mid = \int_{-\infty}^{+\infty} (E \mid X \mid + \mid y \mid - D_X(-y))dF_Y(y)$$

$$\geq \alpha(t_0) P(\mid Y \mid > t_0).$$

trong đó $\alpha(t_0) = min\{E \mid X \mid + t_0 - D_X(t_0), E \mid X \mid + t_0 - D_X(-t_0)\}, \ t_0 > 0.$

Mệnh đề 3.2 Giả sử X, Y, Z, T là các biến ngẫu nhiên độc lập có kỳ vọng hữu hạn thỏa mãn $X \overset{d}{\geq} Z, \ Y \overset{d}{\geq} T$. Khi đó

i. $X + Y \overset{d}{\geq} X + T.$

ii. $X + Y \overset{d}{\geq} Z + T.$

Ký hiệu $F_1 * F_2$ là tích chập của các hàm phân phối F_1 và F_2, và ký hiệu

$$F^{n*} = F * F * F .... * F \text{ (n lần)}$$

Khi đó từ mệnh đề trên ta nhận được kết quả dưới đây.

Hệ quả 3.1.

i. Nếu $F_k \overset{d}{\leq} F \ \forall k = 1, 2, ..., n$ thì

$$F_1 * F_2 * .... * F_n \overset{d}{\leq} F^{n*} \tag{3}$$

ii. Nếu $X_k \overset{d}{\leq} X \ \forall k = 1, 2, ..., n$ thì

$$D_{X_1+X_2+....+X_n-EX_1-EX_2-....-EX_n}(u) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \mid x - n\mu - u \mid dF(x).$$

trong đó

$$\mu = EX \text{và } F = F_X^{n*}.$$

Định lý 3.1. Giả sử $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thỏa mãn

$$\sup_{n \in N} E \mid X_n \mid = M < +\infty,$$