

## Lời tựa

Giáo trình "Thủy khí kỹ thuật ứng dụng" được biên soạn theo đề cương giảng dạy cho sinh viên các ngành kỹ thuật của trường đại học Bách khoa Đà Nẵng nhằm mục đích giúp cho sinh viên có tài liệu tham khảo trong học tập cũng như trong tính toán thiết kế các hệ thống thủy - khí.

Tài liệu được biên soạn không thể tránh khỏi sai sót trên mọi phương diện.

Rất mong độc giả vui lòng góp ý kiến xây dựng để tài liệu được hoàn chỉnh.

Xin chân thành cảm ơn.

Đà Nẵng 8 - 2005

Tác giả

---

---

## Chương 1

# Mở đầu

## §1 - Mục đích, đối tượng và phương pháp nghiên cứu

Thủy khí kỹ thuật ứng dụng nghiên cứu các qui luật cân bằng và chuyển động của dòng chất lỏng, nghiên cứu lực tác dụng của chất lỏng lên vật ngập trong chất lỏng tĩnh hay chuyển động và nghiên cứu ứng dụng các kết quả trên vào sản xuất và đời sống.

Đối tượng nghiên cứu là chất lỏng còn gọi là chất nước. Các kết quả nghiên cứu được áp dụng cho chất khí, kim loại nóng chảy và hỗn hợp thủy lực, được gọi chung là chất lỏng Nui-ton. Các bài toán của chất lỏng ở trạng thái tĩnh được trình bày trong phần tĩnh học chất lỏng, các bài toán chuyển động của chất lỏng được giới thiệu trong phần động lực học chất lỏng.

Trong quá trình nghiên cứu thủy khí ứng dụng phải kết hợp chặt chẽ giữa nghiên cứu lý thuyết và thực nghiệm.

Việc nghiên cứu lý thuyết bắt đầu từ quan sát hiện tượng và mô tả bằng mô hình cơ học, vật lý và toán học. Khi nghiên cứu một vấn đề, chúng ta phải vận dụng các nguyên lý cơ bản của cơ học và vật lý, ngoài ra phải kết hợp chặt chẽ kiến thức toán học, cơ lý thuyết, vật lý và nhiệt động kỹ thuật ... . Đôi khi phải kiểm tra kết quả nghiên cứu lý thuyết bằng thực nghiệm trên mô hình.

Việc nghiên cứu bằng thực nghiệm đóng vai trò hết sức quan trọng vì nó bổ sung cho lý thuyết. Trong một số lĩnh vực nó là phương pháp chủ yếu làm cơ sở cho lý thuyết, ví dụ như nghiên cứu dòng rối, ... .

Để đơn giản cho việc nghiên cứu lý thuyết người ta thường bắt đầu từ chất lỏng lý tưởng, sau đó mở rộng ra cho chất lỏng thực. Nghĩa là phải xét đến ảnh hưởng của tính nhớt, tính nén, ... của chất lỏng. Trong nghiên cứu lý thuyết người ta tách khỏi chất lỏng một phân tử lỏng có hình dạng tùy ý và có các tính chất cơ - lý như toàn bộ chất lỏng. Cần lưu ý rằng mỗi phân tử lỏng dù nhỏ đến đâu cũng có kích thước lớn hơn rất nhiều so với kích thước phân tử và nó chứa một khối lượng rất lớn phân tử. Môi trường chất lỏng được coi là gồm vô số những phân tử lỏng phân bố liên tục. Với khái niệm phân tử lỏng cho phép chúng mở rộng môi trường chất lỏng như trường vật lý để có thể ứng dụng các qui luật động học và động lực học của cơ học để nghiên cứu chuyển động của chất lỏng. Vì thế những đại lượng đặc trưng động học và động lực học của chất lỏng có thể biểu diễn bằng các hàm liên tục đối với tọa độ không gian và thời gian, đồng thời những hàm số đó là những hàm khả tích, khả vi. Các phương pháp được sử dụng trong nghiên cứu trong thủy khí kỹ thuật :

- Phương pháp thể tích hữu hạn, trong đó sử dụng định luật giá trị trung bình của tích phân và các biểu thức liên hệ giữa tích phân mặt và tích phân khối.

- Phương pháp tương tự thủy khí-điện từ, trong đó môi trường vận tốc được thay bằng thế hiệu của môi trường.

- Phương pháp phân tích thứ nguyên dựa trên cơ sở đồng nhất của hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng.

-----  
-----  
- Phương pháp thống kê thủy động thường được dùng để khảo sát chuyển động trung bình của dòng rối.

## \$2 - Lịch sử phát triển

Những năm trước công nguyên (tr.CN) Arixtôt (384-322 tr.CN) nhà triết học Hy Lạp đã mô tả và giải thích các hiện tượng chuyển động của nước và không khí. Gần 100 năm sau Asimét (287 -212 tr.CN) nhà vật lý bác học Hy Lạp đã tìm ra định luật đẩy lên của chất lỏng và nó trở thành cơ sở cho ngành đóng tàu thuyền. Năm 1506 LêonadaVanxi (1452-1519) dựa kết quả của Asimét đã nghiên cứu tác dụng tương hỗ giữa vật chuyển động và môi trường chất lỏng. Ông đã phát hiện ra lực nâng và đã thiết kế máy bay kiểu cánh dơi. Xtêvin (1548-1620) đã đưa ra "nguyên lý thủy tĩnh". Năm 1612 Galilê (1564- 1642) đã phát hiện lực cản môi trường chất lỏng lên vật chuyển động và nó tỷ lệ với vận tốc. Năm 1643 Tôrixeli (1608-1647) tìm ra công thức tính vận tốc chất lỏng chảy ra khỏi lỗ vòi. Năm 1650 Pascan (1623 - 1662) nghiên cứu sự truyền áp suất và chuyển động khả dĩ của chất lỏng. Dựa trên cơ sở đó các máy ép thủy lực, bộ tăng áp đã ra đời. Huyghen (1629-1695) đã chứng minh lực cản chất lỏng lên các vật chuyển động tỷ lệ với bình phương vận tốc. Trong "Những nguyên lý cơ bản của chất lỏng" Nuiton (1642-1727) đã tách cơ học chất lỏng ra khỏi lĩnh vực cơ học vật rắn với giả thuyết nhớt của chất lỏng thực. Mãi đến thế kỷ 18 - thời kỳ phục hưng các công trình nghiên cứu của Ôle (1707-1783), Bernoulli (1718-1813), ... đã hoàn chỉnh cơ sở động lực học chất lỏng lý tưởng. Đặc biệt phương trình "tuốc bin - bom" của Ôle là cơ sở cho việc thiết kế các máy thủy - khí cánh dẫn. Phương trình Bernoulli đã được sử dụng rộng rãi để giải các bài toán kỹ thuật.

Cuối thế kỷ 18 đầu thế kỷ 19 các công trình nghiên cứu hướng vào các bài toán dòng hai chiều, chuyển động xoáy, lý thuyết dòng tia, ... Lagrăng (1736-1813) đã giải các bài toán phẳng không xoáy bằng hàm biến phức. Hemhôn (1847-1894) đã chứng minh các định lý cơ bản của chuyển động xoáy trong chất lỏng. Nó trở thành cơ sở cho việc thiết kế cánh dẫn theo lý thuyết dòng xoáy và việc nghiên cứu chuyển động của gió bão trong khí quyển.

Cuối thế kỷ 19 do yêu cầu phát triển kỹ thuật các công trình nghiên cứu hướng vào giải quyết các bài toán về chất lỏng thực. Tên tuổi các nhà bác học, kỹ sư gắn liền với các công trình, Ví dụ như : ông Venturi (1746-1822) dùng để đo lưu lượng. Công thức tính tổn thất năng lượng mang tên hai nhà bác học Đăcxì (1803-1858) và Vâyxbác (1866-1871). Số Râynon (1842-1912) để phân biệt hai trạng thái dòng chảy. Phương trình Naviê (1785-1836) và Stóc (1819-1903) là phương trình chuyển động chất lỏng thực có xét tới vận tốc biến dạng. Phương trình vi phân lớp biên của Porăn đã đặt cơ sở lý thuyết cho các bài toán tính lực cản của chất lỏng thực lên vật chuyển động,... Tuy nhiên do tính chất phức tạp của chất lỏng thực nên bên cạnh các công trình nghiên cứu lý thuyết có các công trình nghiên cứu thực nghiệm. Các kết quả thực nghiệm đã góp phần khẳng định sự đúng đắn các kết quả nghiên cứu lý thuyết. Các bài toán chảy tầng trong khe hẹp của Cuét đã được sử dụng trong bài toán bôi trơn thủy động. Đến năm 1883 các thực nghiệm của Pêtorôp đã khẳng định sự đúng đắn của lý thuyết bôi trơn thủy động. Đến năm 1886 Jukôpxki và học trò của ông là Traplugin đã bổ sung và hoàn chỉnh lý thuyết bôi trơn này. Do yêu cầu thiết kế tuốc bin hơi nước, tuốc bin khí và kỹ thuật hàng không việc nghiên cứu động lực học chất khí đã được quan tâm tới. Năm 1890 Jukôpxki đã tổng quát hoá bài toán chảy bao vật có điểm rời và xác

-----  
-----

định công thức tính lực nâng trong chảy bao prôfin cánh dẫn. Trong thời gian này nhà bác học người Đức là Kutý cũng đã công bố kết quả tương tự. Dòng vượt âm được hai anh em người Áo là Mác nghiên cứu. Jukôpxki nghiên cứu chế tạo ra ống khí động và thành lập phương trình chuyển động của đạn đạo phản lực có khối lượng biến thiên.

Việc nghiên cứu chuyển động của chất lỏng thực mà đặc biệt làm sáng tỏ nguyên nhân xuất hiện dòng rối và các tính chất của nó đang là vấn đề nan giải. Áp dụng phương pháp thống kê thủy lực và giá trị trung bình theo thời gian của các thông số dòng rối chúng ta đã có những kết quả gần đúng về các bài toán dòng rối.

Trong thời đại cơ giới hoá và tự động hoá các ngành kỹ thuật việc ứng dụng các thành tựu nghiên cứu chất lỏng vào các lĩnh vực đó trở thành nhu cầu. Ở các trường đại học, các ngành kỹ thuật môn học thủy khí kỹ thuật ứng dụng đã được đưa vào giảng dạy một cách có hệ thống trong chương trình đào tạo.

## §3 - Những tính chất vật lý cơ bản của chất lỏng

### 3.1- Cấu tạo phân tử

Các chất được cấu tạo từ phân tử. Đó là những phần tử nhỏ bé nhất. Giữa chúng có lực tương tác tác dụng. Giữa các phân tử có khoảng cách. Nếu khoảng cách này nhỏ hơn  $3 \cdot 10^{-10}$  m thì các phân tử đẩy nhau, còn nếu nó lớn hơn  $3 \cdot 10^{-10}$  m thì chúng hút nhau. Nhưng nếu khoảng cách đó lớn hơn  $15 \cdot 10^{-10}$  m thì lực tương tác giữa các phân tử rất nhỏ, các phân tử được coi là không tương tác nhau nữa. Các phân tử chuyển động không ngừng. Theo thuyết động năng thì vận tốc của chúng phụ thuộc vào nhiệt độ của vật thể. Tùy theo sự so sánh giữa lực liên kết và động năng của phân tử do chuyển động nhiệt vật chất được phân ra ba loại chất rắn, chất lỏng và chất khí. Các phân tử chất lỏng chuyển động quanh vị trí cân bằng, đồng thời các vị trí cân bằng này lại di chuyển, nên chất lỏng có hình dạng theo vật chứa và không thể chống lại sự biến dạng về hình dáng. Do còn bị ảnh hưởng đáng kể lực tương tác giữa các phân tử nên chất lỏng không chịu nén, không chịu cắt và chịu kéo. Tùy theo nhiệt độ và áp suất của môi trườngng chất lỏng có tính chất như chất rắn hay chất khí.

Đối với chất khí lực liên kết giữa các phân tử nhỏ hơn động năng chuyển động do nhiệt. Các phân tử chuyển động hỗn loạn, tự do. Vì thế chất khí không có thể tích và hình dáng nhất định. Các phân tử khí có khả năng điền đầy thể tích mà nó có mặt. Khi có sự thay đổi áp suất, nhiệt độ thì thể tích chất khí thay đổi lớn. Tuy nhiên trong điều kiện áp suất nhiệt độ khí trời và vận tốc dòng khí nhỏ thì vẫn có thể coi chất khí là chất lỏng không nén được. Nghĩa là có thể áp dụng các qui luật của chất lỏng cho chất khí. Chất lỏng và chất khí được coi là đồng tính đẳng hướng.

### 3.2 - Lực tác dụng lên chất lỏng

Tất cả các lực tác dụng lên chất lỏng đều có thể phân ra làm hai loại là lực khối và lực mặt. Lực khối tỷ lệ với thể tích chất lỏng (còn gọi là lực thể tích). Lực khối gồm có trọng lượng, lực quán tính,... Nó được biểu diễn bằng biểu thức :

$$F_R = \int_{(V)} R \cdot \rho \cdot dV$$

Trong đó  $V$  là thể tích hữu hạn của chất lỏng chịu tác dụng bởi lực khối,  
 $\rho$  là khối lượng riêng của chất lỏng,  
 $R$  là gia tốc khối (hay lực khối đơn vị).

Nếu chất lỏng chỉ chịu tác dụng bởi trọng lực thì gia tốc khối là gia tốc trọng trường. Nếu chất lỏng chuyển động với gia tốc thì gia tốc lực khối gồm gia tốc trọng trường và gia tốc quán tính của chuyển động.

Lực mặt tỷ lệ với diện tích bề mặt chất lỏng. Lực mặt gồm các lực như lực áp, lực ma sát, ... Lực mặt được tính theo công thức:

$$F_p = \int_{(S)} p \cdot dS$$

Trong đó  $p$  là lực mặt tính trên một đơn vị diện tích. Nếu  $F_p$  thẳng góc với mặt chất lỏng thì  $p$  là áp suất. Nếu  $F_p$  tác dụng theo phương tiếp tuyến với mặt  $S$  thì  $p$  là ứng suất tiếp.

Bảng 3.1

Đơn vị	Pa (N/m <sup>2</sup> )	bar	at (KG/cm <sup>2</sup> )	atm	torr (mm Hg)
Pa	1	10	1,01972.10 <sup>-5</sup>	0,98692.10 <sup>-5</sup>	7,5006.10 <sup>-3</sup>
bar	10 <sup>5</sup>	1	1,01972	0,98692	7,5006.10 <sup>2</sup>
at	0,98066.10 <sup>5</sup>	0,98066	1	0,96784	7,3556.10 <sup>2</sup>
atm	1,01325.10 <sup>5</sup>	1,01325	1,03332	1	7,60.10 <sup>2</sup>
torr	1,3332.10 <sup>2</sup>	1,3332.10 <sup>-3</sup>	1,3995.10 <sup>-3</sup>	1,31579.10 <sup>-3</sup>	1

Áp suất là lực trên một đơn vị diện tích. Nếu chất lỏng cân bằng gọi là áp suất thủy tĩnh còn chất lỏng chuyển động thì gọi là áp suất thủy động. Áp suất tại một điểm được tính theo :

$$p = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{dF}{dS}$$

Đơn vị của áp suất là Pa, ký hiệu là Pa - tương đương với N/m<sup>2</sup>. Các đơn vị đo lường khác với quan hệ tương đương được trình bày trong bảng 3-1.

### 3.3 Khối lượng riêng

Khối lượng riêng là khối lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng, ký hiệu là  $\rho$ , đơn vị là kg/m<sup>3</sup>. Công thức tính là :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{hay} \quad \rho = \frac{dm}{dV} \quad (3.1)$$

Trong đó m là khối lượng (tính theo kg) chứa trong thể tích V (tính theo m<sup>3</sup>).

Khối lượng riêng thay đổi khi nhiệt độ và áp suất thay đổi. Nếu nhiệt độ tăng thì khối lượng riêng giảm. Đối với chất lỏng sự thay đổi này không đáng kể. Ví dụ khối lượng riêng của nước thay đổi theo nhiệt độ được trình bày ở bảng 3.2. Khi nhiệt độ tăng đến 4°C thì khối lượng riêng tăng (do tính chất co thể tích của nước) và khi nhiệt độ tiếp tục tăng thì khối lượng riêng giảm dần. Tuy nhiên sự thay đổi này không đáng kể. Trong kỹ thuật người ta thường lấy khối lượng riêng của nước là 1000 kg/m<sup>3</sup>.

Bảng 3.2

t (°C)	0	4	10	30	60	80	100
ρ(kg/m <sup>3</sup> )	999,9	1000	999,7	995,7	983,3	971,8	958,4

Đối với chất khí sự thay đổi khối lượng theo nhiệt độ và áp suất được biểu diễn bằng phương trình trạng thái. Trong bảng 3.3 là sự thay đổi khối lượng riêng của không khí theo nhiệt độ và áp suất.

Bảng 3.3

t (°C)	-3		27			100
p (Pa)	10 <sup>5</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>5</sup>	10 <sup>6</sup>	10 <sup>7</sup>	10 <sup>6</sup>
ρ (kg/m <sup>3</sup> )	1,33	13,3	1,127	11,27	112,7	0,916

Khối lượng riêng của một số chất lỏng thường gặp :

- nước biển : 1030 kg/m<sup>3</sup>,
- thủy ngân : 13546 kg/m<sup>3</sup>,
- glixerin : 1260 kg/m<sup>3</sup>,
- dầu : 800 kg/m<sup>3</sup>.

Trước đây chúng ta hay dùng khái niệm " trọng lượng riêng". Chất lỏng có khối lượng m trong thể tích V thì nó chịu sức hút trái đất với gia tốc trọng trường g và trọng lượng của nó là G = m.g và trọng lượng riêng (trọng lượng của một đơn vị thể tích chất lỏng) là :

$$\gamma = \frac{G}{V} = \rho.g \quad (\text{N/m}^3) \quad (3.2)$$

Vì giá trị của g thay đổi theo vĩ độ địa lý và độ cao vị trí tính toán so với mực nước biển nên γ có giá trị thay đổi. Trong tính toán kỹ thuật chúng ta thường lấy giá trị g = 9,81 m/s<sup>2</sup>.

Trong kỹ thuật còn dùng khái niệm tỷ trọng (ký hiệu δ). Đó là tỷ số giữa trọng lượng riêng của chất lỏng và trọng lượng riêng của nước ở 4°C

$$\delta = \frac{\gamma}{\gamma_{H_2O, 4^\circ C}} \quad (3.3)$$

Đối với chất khí chúng ta còn dùng thể tích riêng ký hiệu là  $v$ , đơn vị  $m^3 / kg$  và tính theo công thức :

$$v = \frac{1}{\rho} \quad (3.4)$$

### 3.4 - Tính nén và tính dẫn nở

Khả năng thay đổi thể tích của chất lỏng khi có sự thay đổi áp suất gọi là tính nén, còn do sự thay đổi nhiệt độ gọi là tính dẫn nở của chất lỏng.

#### 3.4.1 Tính nén

Tính nén được đặc trưng bởi hệ số nén  $\beta_p$  ( $m^2/N$ ). Đó là sự thay đổi thể tích tương đối của chất lỏng khi áp suất thay đổi một đơn vị :

$$\beta_p = -\frac{\Delta V}{V_o} \cdot \frac{1}{\Delta p} \quad hay \quad \beta_p = -\frac{dV}{V} \cdot \frac{1}{dp} \quad (3.5)$$

Trong đó :  $\Delta V = V - V_o$  là sự thay đổi thể tích ,  
 $V_o$  là thể tích ban đầu của chất lỏng.  
 $\Delta p = p - p_o$  là sự thay đổi áp suất.

Vì sự thay đổi thể tích và sự thay đổi áp suất ngược nhau nên trước biểu thức có dấu " -".

Từ (3.5) suy ra :

$$V = V_o (1 - \beta_p \Delta p) \quad hay \quad \rho = \frac{\rho_o}{1 - \beta_p \Delta p} \quad (3.6)$$

Trong đó  $\rho$  ,  $\rho_o$  là khối lượng riêng của chất lỏng ứng với áp suất  $p$  và  $p_o$ .

Đại lượng nghịch đảo của hệ số nén là mô đun đàn hồi của chất lỏng, ký hiệu là  $E$ , đơn vị là  $N/m^2$  :

$$E = \frac{1}{\beta_p} \quad (3.7)$$

Nếu áp suất chất lỏng không làm giảm đi quá một nửa so với thể tích ban đầu của chất lỏng thì  $E$  không thay đổi và nó có ý nghĩa như mô đun đàn hồi của chất rắn.

Tính nén của chất lỏng phụ thuộc vào áp suất và nhiệt độ. Nhưng sự thay đổi này không đáng kể. Ví dụ như nước :

-----  
 -----

$$\begin{aligned} \text{Khi } p = 10^5 \text{ Pa và } t = 0^\circ\text{C} & \text{ thì } E_{\text{nước}} = 2,01 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2. \\ \text{Nếu nhiệt độ tăng lên } 20^\circ\text{C} & \text{ thì } E_{\text{nước}} = 2,20 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2. \end{aligned}$$

Điều này cũng giải thích được khả năng hấp thụ chất khí và khả năng hoà tan muối trong nước khi nhiệt độ tăng.

Nếu áp suất tăng lên từ  $10^5$  đến  $400 \cdot 10^5$  Pa còn nhiệt độ không thay đổi thì khối lượng riêng của nước tăng lên khoảng 2%. Vì vậy nên chất lỏng được coi như không nén được. Tuy nhiên trong cùng một điều kiện  $p=10^5$  Pa,  $t=10^0$  C thì  $E_{\text{nước}} = 2 \cdot 10^9$  N/m<sup>2</sup> còn  $E_{\text{thép}} = 2 \cdot 10^{11}$  N/m<sup>2</sup>, nghĩa là môđun đàn hồi của thép lớn gấp 100 lần so với nước. Vậy tính không nén được của chất lỏng chỉ để so sánh với chất khí.

Trong kỹ thuật thường có thể bỏ qua tính nén của chất lỏng. Nhưng nếu có sự thay đổi áp suất lớn, đột ngột và đặc biệt đối với những thể tích chất lỏng lớn chuyển động thì không thể bỏ qua tính nén được, ví dụ như trong va đập thủy lực ...

Trong quá trình nén chất lỏng thì khối lượng của nó không thay đổi nên chúng ta có thể viết

$$m = \rho \cdot V = \text{const.}$$

Lấy đạo hàm biểu thức này ta có :

$$\rho dV + V d\rho = 0$$

hay :

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

Kết hợp với công thức (3.7) tính môđun đàn hồi của chất lỏng :

$$\frac{E}{\rho} = \frac{dp}{d\rho}$$

Đơn vị của biểu thức là bình phương của đơn vị vận tốc. Nên chúng ta có thể viết :

$$a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.8)$$

Theo Vật lý thì  $a$  gọi là vận tốc truyền âm trong chất lỏng và cũng là vận tốc truyền sóng áp suất ; trong nước  $a = 1414,2$  m/s ; trong chất lỏng không nén được  $a \rightarrow \infty$ .

Đối với chất khí quá trình nén khí xảy ra rất nhanh chúng ta có thể coi là quá trình đoạn nhiệt và vận tốc truyền âm được tính theo công thức :

$$a = \sqrt{k \cdot r \cdot T} = \sqrt{k \frac{p}{\rho}} \quad (3.9)$$



Trong đó  $k$  là chỉ số đoạn nhiệt,  
 $r$  là hằng số chất khí.  
 Nếu cho  $M$  trọng lượng phân tử chất khí thì :

$$a = \sqrt{k \frac{RT}{M}} \quad (3.10)$$

Trong đó  $R = 8314 \text{ J.kmol}^{-1}\text{K}$  là hằng số tổng quát của chất khí.  
 Vận tốc truyền âm trong không khí với  $T = 288^\circ\text{K}$  ;  $M = 28,96 \text{ Kmol}$  và  $k = 1,4$  thì  $a = 341 \text{ m/s}$ .

### 3.4.2 Tính dẫn nở.

Khi nhiệt độ thay đổi thì thể tích các chất đều thay đổi. Sự thay đổi này được biểu diễn một cách tổng quát bằng hàm số mũ theo nhiệt độ :

$$V = V_0 (1 + \beta_1 \Delta t + \beta_2 \Delta t^2 + \dots) \quad (3.11)$$

Trong đó  $V_0$  là thể tích chất khí ở nhiệt độ ban đầu. Đối với chất lỏng chỉ cần sử dụng mối quan hệ bậc nhất :

$$V = V_0 (1 + \beta_t \Delta t) \quad (3.12)$$

$\beta_t$  là hệ số dẫn nở của chất lỏng. Đó là sự tăng thể tích tương đối khi nhiệt độ của chất lỏng tăng lên  $1^\circ\text{C}$ . Đơn vị của hệ số dẫn nở là  $^\circ\text{C}^{-1}$ . Từ (3.12) suy ra :

$$\beta_t = \frac{\Delta V}{V_0} \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad \text{hay} \quad \beta_t = \frac{dV}{V_0 dt} \quad (3.13)$$

Tính dẫn nở của chất lỏng phụ thuộc vào nhiệt độ và áp suất. Ví dụ nước :

khi nhiệt độ  $t = 4^\circ\text{C}$  đến  $10^\circ\text{C}$  và áp suất  $p = 10^5 \text{ Pa}$  thì  $\beta_t = 0,000014 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ,

khi  $t = 10^\circ\text{C}$  đến  $20^\circ\text{C}$  (tăng 10 lần,  $p = 10^5 \text{ Pa}$ ) thì  $\beta_t = 0,000150 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

Nếu áp suất tăng lên đến  $10^7 \text{ Pa}$  thì  $\beta_t = 0,00043 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  (tăng gấp 3 lần).

Nếu nhiệt độ thay đổi từ từ, độ chênh lệch nhiệt độ không đáng kể thì chúng ta cũng có thể bỏ qua sự dẫn nở thể tích của chất lỏng. Nhưng khi sự thay đổi nhiệt độ lớn thì phải xét đến sự thay đổi thể tích chất lỏng. Ví dụ trong hệ thống sưởi ấm thì sự thay đổi thể tích do nhiệt độ làm cho nước chuyển động. Từ công thức trên chúng ta có thể suy ra công thức tính khối lượng riêng của chất lỏng ở nhiệt độ  $t$  :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta_t \Delta t} \quad (3.14)$$

Riêng đối với chất khí hệ số bành trướng thể tích được tính theo công thức :

$$\beta_v = \frac{1}{p_o} \cdot \frac{dp}{dt} \quad (3.15)$$

Đối với chất khí lý tưởng thì  $\beta_t = \beta_v = 1/273,15 \text{ độ}^{-1}$ .

### 3.5- Tính nhớt

Năm 1686 Niu-ton khảo sát chuyển động ổn định lớp chất lỏng trên bề mặt tấm phẳng theo phương x (hình 3-1). Trên bề mặt tấm phẳng các phần tử chất lỏng có vận tốc bằng không. Ở khoảng cách y tính từ bề mặt tấm phẳng vận tốc là v, lớp chất lỏng y+dy có vận tốc v+dv. Như vậy vận tốc chất lỏng dọc theo phương y có giá trị khác nhau. Nghĩa là giữa các lớp chất lỏng có lực tương tác hay nói cách khác giữa các lớp chất lỏng có lực ma sát làm thay đổi vận tốc chuyển động của các lớp chất lỏng. Theo Niu-ton ứng suất tiếp của lực ma sát tỷ lệ thuận với gradien vận tốc và phụ thuộc vào chất lỏng :

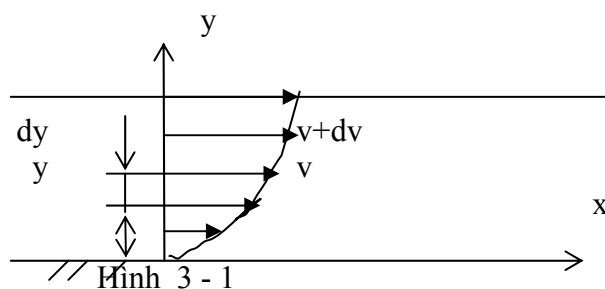
$$\tau = \mu \frac{dv}{dy} \quad (3.15)$$

Trong đó  $\mu$  hệ số tỷ lệ phụ thuộc vào loại chất lỏng, gọi là độ nhớt động lực học của chất lỏng, đơn vị là  $[\mu] = \text{Pa.s}$  hay  $\text{N.s/m}^2$ .

Ngoài ra hệ số nhớt động lực học còn đo bằng đơn vị Poazơ (ký hiệu P).

$$1P = \frac{\text{dyn.s}}{\text{cm}^2} = \frac{1}{10} \frac{\text{N.s}}{\text{m}^2}$$

Đơn vị nhỏ hơn centipoazơ (cP) :  $P=100 \text{ cP}$



Ngoài hệ số nhớt động lực học trong kỹ thuật hay dùng hệ số nhớt động học (ký hiệu là  $\nu$ ).

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{3.16}$$

Độ nhớt động học của chất lỏng được đo  $[\nu]$ :  $m^2/s$  ;  
 Stốc (ký hiệu là St) :  $1St = 1 cm^2/s$ .  
 Đơn vị nhỏ hơn là centiStốc (cSt) :

$$1cSt = 1mm^2/s ; 1St = 100 cSt$$

Thường độ nhớt dầu bôi trơn được ghi kèm theo mác dầu ví dụ dầu AK15 là dầu bôi trơn dùng cho ô tô máy kéo có độ nhớt  $\nu_{50}=15 cSt$  ở nhiệt độ  $50^\circ C$ ...

Ngoài ra một số nước có đơn vị đo độ nhớt riêng ,ví dụ như : Nga dùng độ Engle ( $^\circ E$ ), Anh dùng giây Redút ("R), Pháp dùng độ Bachê ( $^\circ B$ ), Mỹ dùng giây Sêbôn ("S).... giữa các đơn vị này có công thức chuyển đổi :

$$\nu = 0,0731 E \frac{0,0631}{^\circ E} \quad (S)$$

$$\nu = 0,00260 R \frac{1,72}{"R} \quad (S)$$

$$\nu = 0,00220 S \frac{1,80}{"S} \quad (S)$$

$$\nu = \frac{4,85}{^\circ B} \quad (S)$$

Cũng cần lưu ý rằng khi so sánh độ nhớt của hai chất lỏng phải dùng cùng một khái niệm là hệ số nhớt động học hay hệ số nhớt động lực học và cùng ở nhiệt độ. Ví dụ so sánh nước và không khí :

Khi nhiệt độ  $20^\circ C$  hệ số nhớt động lực học của không khí  $\mu_{kk} = 18.10^{-5} Poazơ$   
 hệ số nhớt động lực học của nước  $\mu_{nước} = 1.10^{-2} Poazơ$  (lớn hơn 57 lần so với không khí )

Nhưng hệ số nhớt động học của không khí  $\nu_{kk} = 15.10^{-2} Stốc$  (lớn hơn 15 lần so với nước; hệ số nhớt động học của nước  $\nu_{nước} = 1.10^{-2} Stốc$  )

Độ nhớt của chất lỏng phụ thuộc vào nhiệt độ và áp suất môi trường làm việc. Khi nhiệt độ tăng độ nhớt của chất lỏng giảm, còn của chất khí thì lại tăng (Hình 3-2). Tùy theo phạm vi nhiệt độ làm việc cần chọn dầu bôi trơn cho phù hợp. Trong công nghiệp thường lấy độ nhớt động học ở  $50^\circ C$  làm chuẩn.

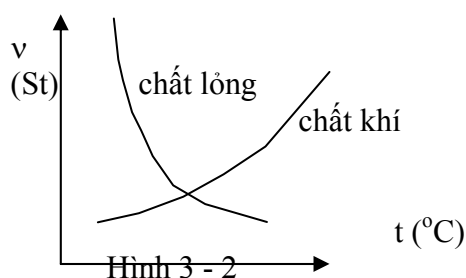
Ảnh hưởng của áp suất đến độ nhớt không đáng kể. Nếu  $p < 200.10^5 Pa$  thì không cần xét tới sự thay đổi của độ nhớt khi áp suất thay đổi. Sự thay đổi này được mô tả bằng phương trình sau :

$$\nu_p = \nu(1+k.p)$$

- v độ nhớt khí áp suất bằng áp suất khí trời
- k hệ số phụ thuộc loại dầu : dầu nhẹ  $k=0,002$  ; dầu nặng  $k=0,003$  (thường dùng trong truyền động thủy lực)
- p áp suất tính bằng at

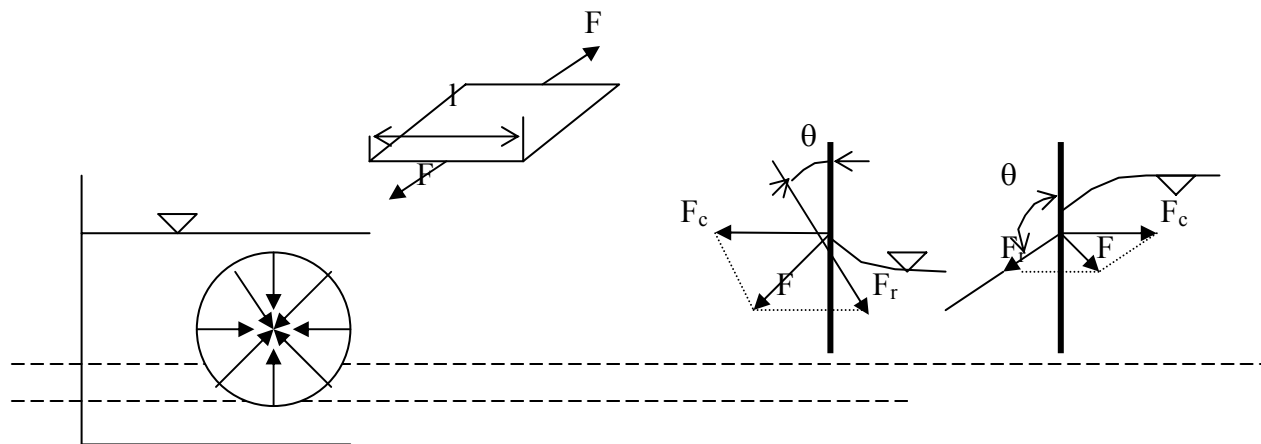
Hệ số nhớt động học (v) của một số chất lỏng :

- nước :  $1,01.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ; (ở  $20^\circ\text{C}$ ) ;
- xăng =  $0,83.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ; (ở  $20^\circ\text{C}$ ) ;
- thủy ngân =  $0,116.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (ở  $18^\circ\text{C}$ ) ;
- dầu máy =  $60.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  ; (ở  $18^\circ\text{C}$ ) ;
- không khí =  $14,9.10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  (ở  $30^\circ\text{C}$ ) ; ...



### 3.6 - Sức căng bề mặt của chất lỏng

Tính chất này của chất lỏng thể hiện rõ ở những bề mặt giữa chất lỏng này với chất lỏng khác (giữa nước với thành rắn, ...) mà giữa chúng không thực hiện phản ứng hoá học. Ở các mặt tiếp xúc này chất lỏng tạo ra một màng mỏng bao quanh bề mặt chất lỏng. Nguyên nhân xuất hiện sức căng bề mặt là lực hút giữa các phân tử. Các phân tử lỏng ở trong chất lỏng chịu tác dụng mọi phía như nhau. Còn ở các phân tử trên bề mặt tiếp xúc hoặc ở lớp ngoài có bề dày nhỏ hơn  $10^{-9} \text{ m}$  thì các lực tác dụng lên chúng không bằng nhau. Các phân tử này chịu tác dụng một lực tổng hợp hướng vào trong chất lỏng và tạo nên một màng mỏng trên bề mặt tiếp xúc gọi là sức căng bề mặt (hình 3-3a). Hệ số sức căng bề mặt (ký hiệu C) là lực tác dụng lên một đơn vị độ dài bề mặt thẳng góc với độ dài và nằm trong bề mặt của chất lỏng (hình 3-3b) :



a/ b/  
 Hình 3 - 3

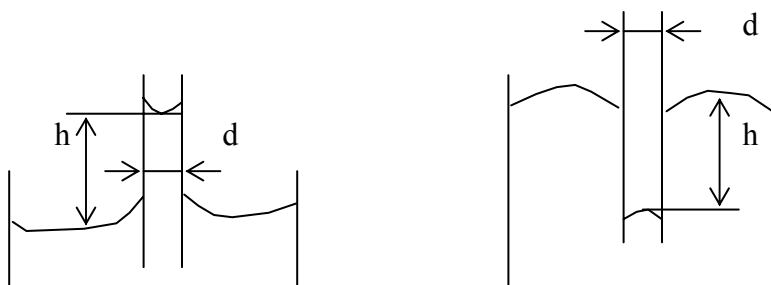
$$c = \frac{dF}{dl} \tag{3.17}$$

Trong đó  $F$  là lực tác dụng,  
 $l$  là chiều dài bề mặt tiếp xúc của chất lỏng.  
 Hệ số sức căng bề mặt chất lỏng (hoặc gọi là hệ số mao dẫn) đo bằng  $N/m$ . Trong bảng 3.3 là hệ số sức căng bề mặt của một vài chất lỏng ở  $20^\circ C$

Bảng 3.3

chất lỏng	nước	dầu	thủy ngân	cồn
C(dyn/cm)	72,5	27	460	22,5

Khi nhiệt độ tăng hệ số sức căng bề mặt chất lỏng giảm theo qui luật tuyến tính. Ví dụ hệ số sức căng bề mặt của nước thay đổi theo nhiệt độ  $t=100^\circ C$  thì  $c=55 \text{ dyn/cm}$ ;  $t=200^\circ C$  thì  $c=27,5 \text{ dyn/cm}$ .



Hình 3 - 4

Dựa vào tính chất sức căng bề mặt của chất lỏng để khảo sát các vấn đề sau:

- Sức bề mặt giữa các lớp chất lỏng với nhau.
- Hiện tượng dính ướt.

- Hiện tượng mao dẫn : Khi chất lỏng ở trong ống có đường kính nhỏ (gọi là ống mao dẫn) nếu lực dính ướt ( $F_r$ ) lớn hơn lực kéo các phân tử lỏng ( $F_c$ ) thì chất lỏng dâng lên trong ống cao hơn mực nước bên ngoài. Độ cao này gọi là độ cao mao dẫn (chất lỏng là nước). Còn nếu như  $F_c > F_r$  thì chất lỏng trong ống tụt xuống so với mực chất lỏng bên ngoài. Hiện tượng này gọi là hạ mao dẫn (chất lỏng là thủy ngân) (hình-3.4).

Độ cao mao dẫn được tính từ điều kiện cân bằng giữa trọng lượng cột chất lỏng và lực căng bề mặt:

$$\pi.d.c = \frac{\pi}{4} d^2 h.\rho.g$$

Suy ra: 
$$h = \frac{4c}{\rho \cdot g \cdot d}$$

Công thức này thường dùng để tính hệ số sức căng bề mặt. Để tránh hiện tượng mao dẫn trong các dụng cụ đo bằng chất lỏng (đo áp suất, nhiệt độ) phải chọn đường kính ống đo lớn hơn 10 mm.

### 3.7 - Sự sôi của chất nước

Sự sôi của chất nước là quá trình bay hơi chất lỏng được xảy ra không những từ mặt thoáng mà còn xảy ra bên trong chất lỏng, các bọt khí được tạo thành trong toàn bộ chất nước và vỡ ra. Lúc đó áp suất bay hơi bão hòa trong bọt khí  $p_{bh} > p_o$ . Nhiệt độ ứng với  $p_{bh}$  gọi là nhiệt độ sôi. Nhiệt độ sôi của chất nước ở áp suất  $p_o$  là không đổi. Nhiệt lượng cung cấp tiếp cho chất nước đang sôi dùng để sinh công tách các phân tử ra khỏi pha lỏng và chuyển chúng sang pha hơi.

### 3.8 - Sự hấp thụ khí của chất lỏng

Sự hấp thụ khí trong chất nước được biểu thị bằng độ hoà tan chất khí trong chất lỏng, ký hiệu là  $\alpha^*$ :

$$\alpha^* = \frac{V_k}{V} \quad (3.18)$$

Trong đó  $V_k$  là thể tích chất khí được hấp thụ trong  $V$  thể tích chất lỏng.

Thể tích chất khí ở nhiệt độ  $t$  ( $V_k$ ) được tính theo thể tích khí ở nhiệt độ  $t = 0^\circ \text{C}$  ( $V_{ok}$ ):

$$V_k = V_{ok} (1 + \beta_t \cdot t)$$

Hệ số hấp thụ khí của chất lỏng ở nhiệt độ  $t = 0^\circ \text{C}$ ;  $T = 273^\circ \text{K}$  là:

$$\alpha = \frac{V_{ok}}{V} = \frac{V_k}{V(1 + \beta_t \cdot t)} = \frac{\alpha^*}{1 + \beta_t \cdot t} = \frac{273}{T} \alpha^* = \frac{273}{T} \frac{V_k}{V} \quad (3.19)$$

Hệ số hấp thụ khí của nước trong điều kiện  $0^\circ \text{C}$  và áp suất khí quyển là:

Oxy	: 0,0489 ;
Nitơ	: 0,0231 ;
OxýtCácbonít	: 1,7130 ;
Amôniắc	: 1300 .

Hệ số hấp thụ khí giảm khi nhiệt độ tăng nhưng lúc đầu thì giảm nhanh sau đó chậm hơn. Chẩn hạn như oxy và nito ở 40°C thì hệ số hấp thụ trong nước giảm đi một nửa.

Khối lượng chất khí được hấp thụ vào chất lỏng được tính từ phương trình trạng thái :

$$P.V_K = m.r.T \quad \text{suy ra} \quad m = \frac{p.V_k}{r.T} = \frac{\alpha^* . p}{273.r} V \quad (3.20)$$

Nghĩa là ở nhiệt độ xác định khối lượng chất khí được hấp thụ vào chất lỏng tỷ lệ với áp suất trên mặt thoáng chất lỏng.

Bây giờ chúng ta xét trường hợp hấp thụ hỗn hợp chất khí vào chất lỏng. Trong trường hợp này áp suất riêng phần của từng chất khí là :

$$p_1 = \frac{m_1.r_1.T_1}{V_{hh}} \quad ; \quad p_2 = \frac{m_2.r_2.T_2}{V_{hh}}$$

$$\text{suy ra} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1.r_1}{m_2.r_2}$$

Trong đó  $m_1, m_2$  là khối lượng chất khí trong hỗn hợp.  
 $V_{hh}$  là thể tích hỗn hợp của chất khí,  
 $T_1=T_2$ .

Bởi vì mỗi chất khí có khả năng điền đầy thể tích không gian trên mặt thoáng chất lỏng và nếu tách hỗn hợp khí ra thành những thể tích riêng rẽ thì mỗi chất khí sẽ chiếm thể tích :

$$V_1 = \frac{m_1.r_1.T}{p} \quad \text{suy ra} \quad m_1.r_1 = \frac{V_1.p}{T} \quad ;$$

$$V_2 = \frac{m_2.r_2.T}{p} \quad \text{suy ra} \quad m_2.r_2 = \frac{V_2.p}{T}$$

Trong đó  $p = p_1+p_2$  (theo định luật Đantôn ).  
 $T$  là nhiệt độ hỗn hợp.

Từ các phương trình trên chúng ta suy ra :

$$\varphi = \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_1}{V_2} \quad (3.21)$$

Nghĩa là tỷ số áp suất riêng phần của hỗn hợp chất khí bằng thể tích riêng phần của chúng. Khi hỗn hợp này được hấp thụ vào chất lỏng thì tỷ lệ hỗn hợp sẽ phụ thuộc vào hệ số hấp thụ  $\alpha$  của mỗi chất nghĩa là :

$$\varphi^* = \frac{V_{1h}}{V_{2h}} = \frac{p_1 \cdot \alpha_1}{p_2 \cdot \alpha_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \varphi \quad (3.22)$$

Ví dụ : Trong không khí có 21% Oxy và 79% Nitơ.

Tỷ lệ hỗn hợp này là :  $\varphi = \frac{V_o}{V_n} = \frac{0,21}{0,79} = 0,265$ .

Khi được hấp thụ trong nước ở 0° C thì tỷ lệ này là :  $\varphi^* = \frac{0,21 \cdot 0,0489}{0,79 \cdot 0,0231} = 0,563$ .

Như vậy lượng ôxy được hấp thụ trong nước gấp hai lần trong không khí.

Khi chất lỏng giải phóng chất khí hấp thụ được do sự thay đổi áp suất (giảm) hoặc nhiệt độ (tăng) làm ảnh hưởng đến tính toán thủy lực và gây ra sự gián đoạn chuyển động của chất lỏng.

### 3.9 - Sự trao đổi nhiệt và khối lượng

Hiện tượng này được xảy ra ở trong môi trường chất lỏng ở trạng thái tĩnh lẫn chuyển động. Nhiệt được truyền qua chất lỏng tuân theo định luật Furiê. Sự khuếch tán khối lượng tuân theo định luật Fích. Hệ số dẫn nhiệt và hệ số khuếch tán phụ thuộc vào nhiệt độ [1].

### 3.10 - Các đại lượng trạng thái của chất khí

#### 3.10.1 - Phương trình trạng thái của chất khí

Các thông số trạng thái của chất khí lý tưởng có liên quan chặt chẽ với nhau trong phương trình trạng thái Clapeyrôn (1884) :

$$p \cdot v = r \cdot T \quad \text{hay} \quad \frac{p}{\rho} = r \cdot T \quad (3.23)$$

Phương trình trạng thái viết cho m kg khối lượng chất khí :

$$p V = m r T \quad (3.24)$$

cho  $n = m/M$  mol chất khí :  $pV = \frac{m}{n} R \cdot T \quad (3.25)$

Trong đó M là trọng lượng phân tử của chất khí ,  
 r hằng số chất khí (với không khí  $r=287 \text{ J/kg/}^0\text{K}$ )  
 R là hằng số tổng quát của chất khí,  
 ρ là khối lượng riêng của chất khí ,  
 p là áp suất của chất khí.

Phương trình trạng thái chỉ được sử dụng khi chất khí ở trạng thái cân bằng.



### 3.10.2 - Nội năng, công thể tích chất khí

Theo nguyên lý thứ nhất của nhiệt động học chất khí thì nhiệt truyền cho hệ trong một quá trình có giá trị bằng biến thiên nội năng của hệ và công thể tích do hệ sinh ra trong quá trình :

$$dq = du + da \quad (3.26)$$

Trong đó  $q$  là nhiệt truyền cho hệ (J/kg) ;  
 $u$  là nội năng của chất khí (J/kg) ;  
 $a$  là công thể tích của chất khí (J/kg).

Nội năng được xác định theo thuyết động lực học phân tử.,  $du = c_v.dT$ . Nội năng là hàm trạng thái đơn vị nên nó có vi phân toàn phần bởi vì độ biến thiên của nó không phụ thuộc vào quá trình .

Công thể tích được sinh ra khi chất khí bị tác dụng bởi áp suất  $p$  làm thay đổi thể tích chất khí  $dv$  là  $da = p dv$  ; (ở đây  $v$  là thể tích riêng ). Độ lớn của công phụ thuộc vào quá trình làm thay đổi trạng thái chất khí, nên công không phải là hàm của quá trình.

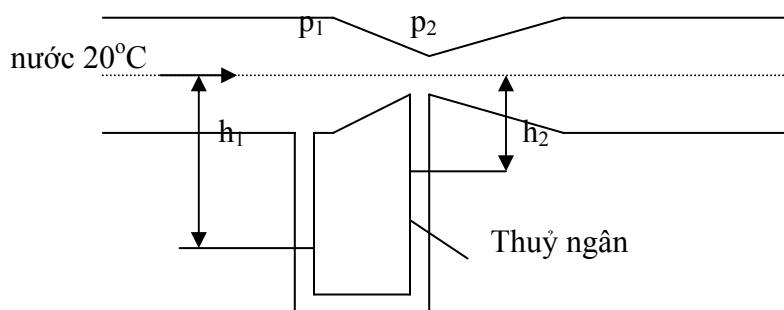
### 3.11 Chất lỏng lý tưởng

Việc nghiên cứu chất lỏng được bắt đầu từ chất lỏng lý tưởng, trên cơ sở đó chúng ta mở rộng cho chất lỏng thực. Chất lỏng lý tưởng có những tính chất sau :

- Không có tính nhớt
- Di động tuyệt đối
- Hoàn toàn không chống được lực kéo và lực cắt

Chất lỏng ở trạng thái tĩnh hoàn toàn tuân theo các qui luật cân bằng của chất lỏng lý tưởng.

Ví dụ 1: Nước ở nhiệt độ  $20^\circ\text{C}$  chảy qua ống có tiết diện thay đổi. Người ta lắp một áp kế thủy ngân như hình 3-5 để đo độ chênh áp suất ở hai tiết diện. Hãy tính độ chênh lệch áp suất ? Cho biết  $\rho_0=13600 \text{ kh/m}^3$  ở  $0^\circ\text{C}$ . Hệ số dẫn nở của thủy ngân  $\beta_t=1,815.10^{-4} \text{ độ}^{-1}$  và  $h_1=350 \text{ mm}$  ;  $h_2=150 \text{ mm}$  và  $\rho_n=1000 \text{ kg/m}^3$ .



Hình 3-5

Khối lượng riêng của thủy ngân ở 20°C là

$$\rho_m = \rho_o \frac{1}{1 + \beta_t \cdot \Delta t} = \frac{13600}{1 + 1,815 \cdot 10^{-4} \cdot 20} = 13515 \quad \text{kg / m}^3$$

Từ điều kiện cân bằng hai nhánh áp kế chữ U ta có

$$p_1 + \rho_n g(h_1 - h_2) = p_2 + \rho g(h_1 - h_2)$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_1 - p_2 = g(h_1 - h_2)(\rho - \rho_m) \\ &= 9,81(0,350 - 0,150)(13515 - 1000) = 24554,43 \quad \text{Pa} \end{aligned}$$

Ví dụ 2 : Tính lượng nước cần thiết mà bơm phải cung cấp để thử thủy lực đường ống. Đường kính ống  $d=350$  mm ; ống dài  $l=50$  m ; áp suất thử  $p=5 \cdot 10^6$  Pa (áp suất dư) ; mô đun đàn hồi của nước  $E_n=2 \cdot 10^9$  Pa.

Từ công thức tính hệ số nén ta tính được lượng nước cần phải cung cấp để thử áp lực

$$\Delta V = \frac{V \cdot \Delta p}{E_n} = \frac{\frac{\pi d^2}{4} l \cdot p}{E_n} = \frac{\frac{\pi 0,3^2}{4} 50 \cdot 5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^9} = 8,83 \cdot 10^{-3} \quad \text{m}^3$$

## Chương 2

# Tĩnh học chất lỏng

## 2.1- Khái niệm cơ bản

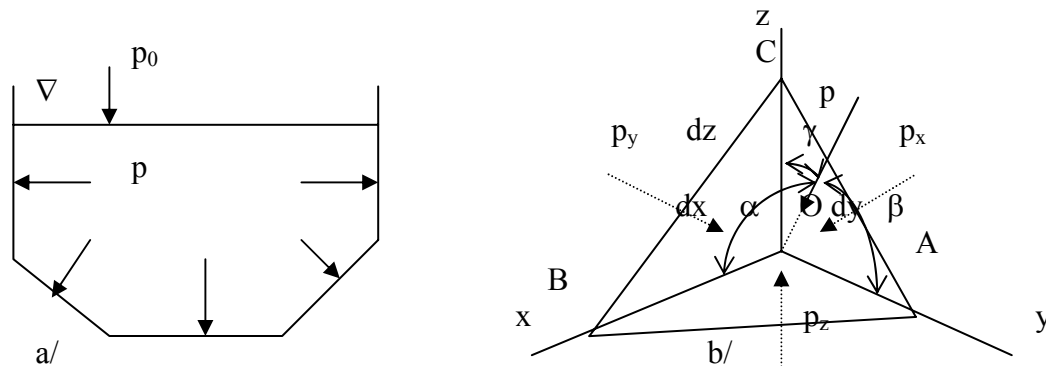
1. Trong chương này chúng ta nghiên cứu điều kiện cân bằng của chất lỏng ở trạng thái tĩnh, qui luật phân bố áp suất và tính lực chất lỏng tác dụng lên vật tiếp xúc hay ngập trong chất lỏng. Trong tĩnh học chất lỏng chúng ta có thể coi chất lỏng như chất lỏng lý tưởng vì ảnh hưởng tính nhớt không thể hiện.

2. Cần phân biệt trạng thái tĩnh tuyệt đối và tĩnh tương đối. Nếu chất lỏng không chuyển động so với hệ tọa độ gắn với quả đất thì chất lỏng ở trạng thái tĩnh tuyệt đối (ví dụ như nước trong ao hồ...). Trong trường hợp này lực khối chỉ là trọng lực. Nếu chất lỏng chuyển động so với hệ tọa độ tuyệt đối nhưng giữa chúng không có chuyển động tương đối, nghĩa là chất lỏng chuyển động liên một khối thì gọi đó là tĩnh tương đối (xe chở nước chuyển động có gia tốc...). Lực khối gồm trọng lực và lực quán tính. Hệ tọa độ nghiên cứu các bài toán này được gắn vào bình chứa chất lỏng.

### 3. Áp suất tĩnh của chất lỏng

Ứng suất trong chất lỏng tĩnh khi có ngoại lực tác dụng vào gọi là áp suất thủy tĩnh. Áp suất thủy tĩnh có các tính chất :

-Áp suất tĩnh tác dụng thẳng góc và hướng vào mặt tiếp xúc (hình 4.1a). Tính chất này được suy ra từ định nghĩa áp suất: vì chất lỏng ở trạng thái cân bằng nên không có thành phần ứng suất tiếp tuyến chống lại sự trượt của các phần tử lỏng với nhau và chất lỏng chỉ chịu lực nén.



Hình 4 - 1

- Áp suất tĩnh tại một điểm theo mọi phương có giá trị như nhau.

Trong chất lỏng đứng yên ta trích một phân tử lỏng hình dạng tứ diện OABC vô cùng bé, có các cạnh  $dx, dy, dz$  (hình 4.1b). Phân tử lỏng ở trạng thái cân bằng bởi các lực khối và lực mặt. Trên mặt ABC có áp suất  $p$  tác dụng. Phương của áp suất này tạo với các trục của tọa độ các góc  $\alpha, \beta, \gamma$ . Vì các mặt vô cùng bé nên có thể coi áp suất tại mọi điểm trên một mặt đều bằng nhau. Trên mặt OBC có áp suất  $p_x$  trên mặt OAC có  $p_y$  trên mặt OAB có  $p_z$ . Các các phân tử diện tích này có liên quan với nhau :

$$dS_x = dS \cos \alpha ; dS_y = dS \cos \beta ; dS_z = dS \cos \gamma$$

lực mặt tác dụng lên phân tử lỏng là :

$$dF_p = p dS ; dF_x = p_x dS_x ; dF_y = p_y dS_y ; dF_z = p_z dS_z$$

và

$$dF_{px} = p.dS \cos \alpha = p dS_x ; dF_{py} = p.dS \cos \beta = p dS_y ; dF_{pz} = p.dS \cos \gamma = p dS_z$$

lực khối tác dụng lên phân tử lỏng theo các trục tọa độ :

$$dF_{Rx} = R_x \frac{1}{6} \rho . dx . dy . dz ; dF_{Ry} = R_y \frac{1}{6} \rho . dx . dy . dz ; dF_{Rz} = R_z \frac{1}{6} \rho . dx . dy . dz$$

trong đó  $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$  là gia tốc khối.

Chất lỏng ở trạng thái cân bằng nghĩa là tổng các lực tác dụng lên phân tử sẽ bằng không. Chiều lên trục  $ox$  :

$$dF_x - dF_{px} + dF_{Rx} = 0$$

$$\text{hay : } p_x \frac{1}{2} dy . dz - p \frac{1}{2} dy . dz + R_x \frac{1}{6} \rho . dx . dy . dz = 0$$

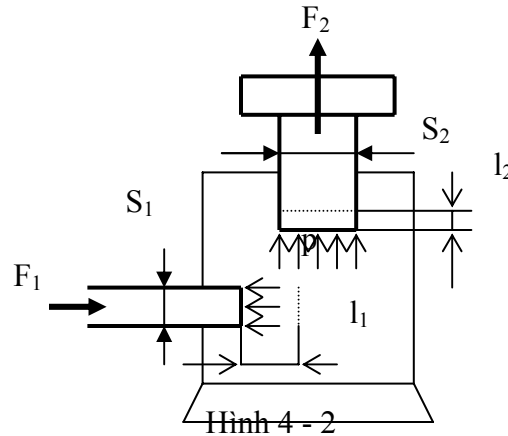
Khi  $dx, dy, dz \rightarrow 0$  (tại một điểm) ta thấy  $dx . dy . dz$  là tích vô cùng bé bậc ba có thể bỏ qua được so với tích  $dy . dz$  là tích vô cùng bé bậc hai vì thế chúng ta có thể viết  $p = p_x$ .

Chứng minh tương tự cho hình chiếu các lực lên các trục còn lại ta có :  $p = p_y ; p = p_z$ . Cuối cùng ta có :

$$p_x = p_y = p_z = p \quad (4.1)$$

Vậy áp suất tĩnh của chất lỏng có tính chất như một đại lượng vô hướng nó không phụ thuộc vào vị trí của mặt tác dụng. Nó là hàm của tọa độ không gian  $p = p(x, y, z)$ .

-Áp suất do ngoại lực gây ra được truyền trong chất lỏng theo mọi phương như nhau (định luật Patxcan).



Xét hệ thống thủy lực trên hình 4.2 gồm một bình chứa chất lỏng và hai pítông. Khi lực  $F_1$  tác dụng lên pítông 1 tạo ra trong chất lỏng áp suất  $p_1 = F_1/S_1$  ( $S_1$  là diện tích của pítông 1). Pítông 1 chuyển động một đoạn đường là  $l_1$ , nghĩa là pítông 1 thực hiện một công là  $A_1 = F_1 \cdot l_1 = p_1 \cdot S_1 \cdot l_1$ . Theo định luật bảo toàn năng lượng thì công  $A_1$  được trao cho pítông 2 làm pítông 2 chuyển động một đoạn đường là  $l_2$ . Công của pítông 2 nhận được là  $A_2 = F_2 \cdot l_2 = p_2 \cdot S_2 \cdot l_2$

Từ điều kiện :  $A_1 = A_2$  ta có :  $p_1 \cdot S_1 \cdot l_1 = p_2 \cdot S_2 \cdot l_2$

hay :  $p_1 V_1 = p_2 V_2$

Sự dịch chuyển pítông 1, 2 thỏa mãn điều kiện bảo toàn thể tích chất lỏng :  $V_1 = V_2 = V$ . Từ đó ta có :

$$p_1 = p_2 = p .$$

Đó là nguyên lý làm việc của máy ép thủy lực, kích thủy lực, hay bộ tăng áp suất. Lực ép tính theo công thức :

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1} \tag{4.2}$$

## 2.2 - Phương trình Ôle thủy tĩnh

Năm 1775 Ôle đã thiết lập mối quan hệ giữa ngoại lực và nội lực chất lỏng ở trạng thái tĩnh.

Xét sự cân bằng của một phân tử chất lỏng khối hộp chữ nhật có các cạnh là  $dx, dy, dz$  (hình 5.1).

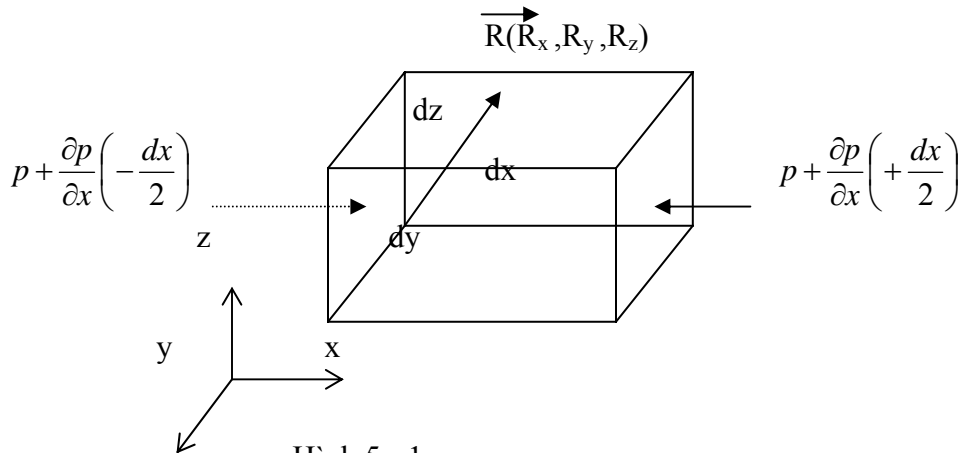
Các lực tác dụng lên phân tử này gồm lực khối và lực mặt.

Lực khối được tính theo công thức :

$$dF_{Rx} = R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz ; dF_{Ry} = R_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz ; dF_{Rz} = R_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Áp suất tại trọng tâm phân tử lỏng là  $p$ , áp suất ở điểm M cách T một đoạn  $+\frac{dx}{2}$  theo phương x là

là  $p + \frac{\partial p}{\partial x} \left( +\frac{dx}{2} \right)$ . Áp suất tại N một đoạn  $-\frac{dx}{2}$ :  $p + \frac{\partial p}{\partial x} \left( -\frac{dx}{2} \right)$



Hình 5 - 1

Lực áp tác dụng lên các mặt thẳng góc với phương x là :

$$dF_{px} = \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) dy \cdot dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot xy \cdot dz$$

Suy luận tương tự lực áp theo các phương y,z :

$$dF_{py} = -\frac{\partial p}{\partial y} dy \cdot dx \cdot dz \quad ; \quad dF_{pz} = -\frac{\partial p}{\partial z} dz \cdot dy \cdot dx$$

Điều kiện cân bằng của phân tử lỏng theo trục ox là :

$$dF_{Rx} - dF_{px} = 0 \quad \text{hay} \quad R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Tính cho một đơn vị khối lượng chất lỏng và húng minh tương tự cho các trục oy, oz :

$$R_x = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad ; \quad R_y = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad ; \quad R_z = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \tag{5.1}$$

Viết phương trình này dưới dạng véctơ :

$$\rho \cdot \vec{R} - \text{grad}p = 0 \quad (5.2)$$

Phương trình (5.1) hoặc (5.2) là phương trình vi phân cân bằng cho chất lỏng ở trạng thái tĩnh ; chất lỏng ở trạng thái cân bằng khi lực khối bằng lực áp.

### 2.3 - Ứng dụng phương trình Ole thủy tĩnh.

Chúng ta biến đổi phương trình (5.1) về dạng ứng dụng như sau. Nhân lần lượt phương trình thứ nhất với dx, phương trình thứ hai với dy, phương trình thứ ba với dz rồi cộng lại với nhau:

$$\rho(R_x \cdot dx + R_y \cdot dy + R_z \cdot dz) = \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \quad (6.1)$$

Vế phải của phương trình (6.1) là vi phân toàn phần của áp suất (dp) thì vế trái cũng phải là vi phân toàn phần của một hàm U (x,y,z) nào đó mà chúng ta gọi là hàm số lực thế. Nghĩa là (ở đây chúng ta không viết dấu âm trước biểu thức đạo hàm và cũng có thể gọi là hàm thế gia tốc) :

$$R_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; \quad R_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad R_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (6.2)$$

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

$$\text{và} \quad \frac{\partial R_x}{\partial y} = \frac{\partial R_y}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial R_x}{\partial z} = \frac{\partial R_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial R_y}{\partial z} = \frac{\partial R_z}{\partial y} \quad (6.3)$$

Vậy chất lỏng ở trạng thái cân bằng khi lực khối có thể :

$$dp = \rho \cdot dU \quad (6.4)$$

Nghĩa là áp suất tại mỗi điểm trong chất lỏng có giá trị duy nhất và không phụ thuộc vào hình dáng quãng đường đi đến điểm đó.

Phương trình (6.1) được viết thành :

$$dp = \rho (R_x dx + R_y dy + R_z dz) \quad (6.5)$$

Vế phải của phương trình (6.5) là công toàn phần của phân tử lỏng dịch chuyển dọc theo đường chéo của phân tử lỏng. Vậy (6.5) được viết thành :

$$dp = \rho \cdot \vec{R} \cdot d\vec{s} = \rho \cdot R \cdot ds \cos \alpha$$

Trong đó  $\alpha$  là góc tạo bởi hai vectơ lực khối và vectơ quãng đường dịch chuyển.  
 Phương trình (6.5) được dùng để giải các bài toán trong tĩnh học chất lỏng.

### 6.1 - Mặt đẳng áp

Trên mặt đẳng áp áp suất tại mọi điểm có giá trị như nhau, nghĩa là  $p = \text{const}$  hay  $dp = 0$ .  
 Nếu  $p = \text{const}$  thì từ (6.5) :

$$R ds \cos \alpha = 0$$

suy ra  $\alpha = 90^\circ$ , nghĩa là mặt đẳng áp thẳng góc với vectơ gia tốc lực khối.

- Kết hợp với (6.4) thì mặt đẳng áp cũng là mặt đẳng thế.
- Đối với chất khí ( $\rho = \text{const}$ ) mặt đẳng áp cũng là mặt đẳng nhiệt.

### 6.2 - Áp suất trong tĩnh tuyệt đối

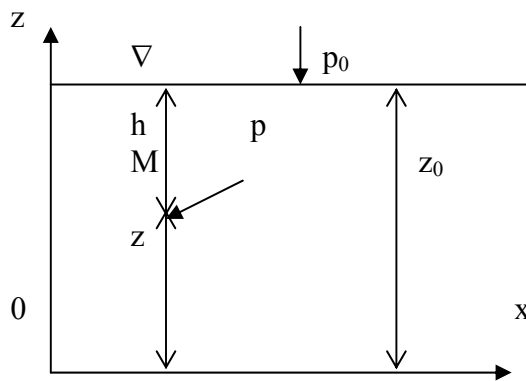
#### 6.2.1 Công thức tính áp suất.

Trong tĩnh tuyệt đối vì lực khối chỉ có trọng lực nên  $R_x = R_y = 0$ ,  $R_z = -g$ . Thay các giá trị này vào phương trình (6.5) :

$$dp = -\rho g dz$$

Tích phân phương trình này ta có:

$$p = -\rho g z + k \tag{a}$$



Hình 6-1

Trong đó k là hằng số tích phân được xác định từ điều kiện biên :

Ở tại  $z = z_0$  thì  $p = p_0$  (áp suất trên mặt thoáng)

$$k = -p_0 + \rho g z_0$$

Thay k vào phương trình (a) :



$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z)$$

hay

$$p = p_0 + \rho g h \tag{6.6}$$

Trong đó  $h = z_0 - z$  là độ sâu của điểm kể từ mặt thoáng.

Chú ý :

1) Từ phương trình (a) suy ra :

$$z + \frac{p}{\rho g} = const \tag{6.7}$$

Trong đó  $z$  là độ cao hình học kể từ mặt chuẩn ( $z = 0$ ),  $\frac{p}{\rho g}$  là cột áp tĩnh của chất lỏng.

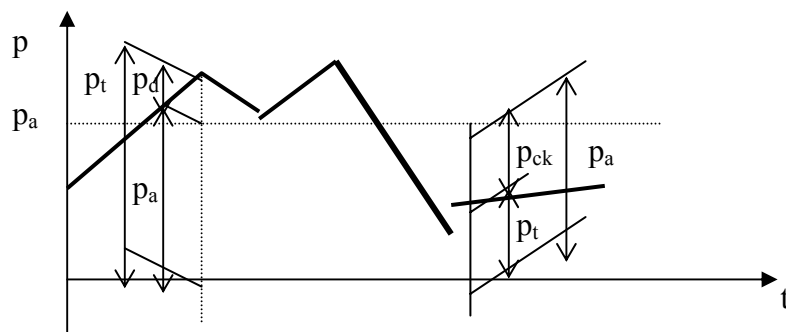
Vậy trong chất lỏng cân bằng tổng độ cao hình học và độ cao cột áp là một hằng số.

Trong chất lỏng muốn tăng thế năng người ta có thể đưa chất lỏng lên cao hoặc nén chất lỏng trong thể tích kín với áp suất lớn.

2) Các loại áp suất :

Áp suất được tính theo công thức (6.6) thì gọi là áp suất tuyệt đối, ký hiệu là  $p_t$ . Áp suất tuyệt đối có thể nhỏ hơn hoặc lớn hơn áp suất khí trời.

Nếu mặt thoáng chất lỏng tiếp xúc với khí trời thì  $p_0 = p_a$  ( $p_a$  là áp suất khí trời). Ngoài giá trị tuyệt đối dùng làm gốc để đo áp suất người ta thường lấy áp suất khí trời làm gốc để đo các loại áp suất.



Hình 6.2 Các loại áp suất thủy tĩnh

Người ta qui ước áp suất khí trời  $p_a = 1at = 98100 \text{ N/m}^2 (\approx 10^5 \text{ N/m}^2)$ ,  $\frac{p_a}{\gamma} \approx 10m$  cột nước

+ Nếu  $p_t > p_a$  thì chúng ta có áp suất dư, ký hiệu là  $p_d$  :

$$p_d = p_t - p_a = \rho \cdot g \cdot h_d \tag{6.8}$$

+ Nếu  $p_t < p_a$  thì chúng ta có áp suất chân không, ký hiệu  $p_{ck}$  :

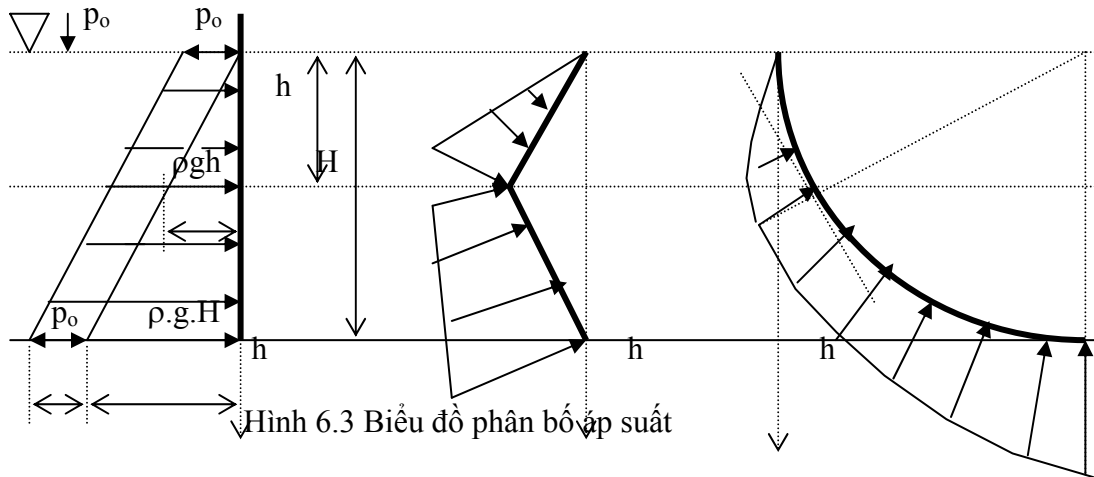
$$p_{ck} = p_a - p_t = \rho \cdot g h_{ck} \tag{6.9}$$

Giá trị  $p_{ckmax} \approx 10$  m cột nước.

Trên hình 6.2 là biểu diễn các loại áp suất.

3) Biểu diễn phân bố áp suất trên bề mặt vật tiếp xúc

Từ phương trình (6.6) ta thấy áp suất tĩnh là hàm số bậc 0 nhất của độ sâu. Trên hình 6.3 là sự phân bố áp suất dư trên các mặt khác nhau (cần chú ý rằng biểu đồ phân bố áp suất trên mặt cong được vẽ từng điểm chứ không thể vẽ như đường thẳng).



Hình 6.3 Biểu đồ phân bố áp suất

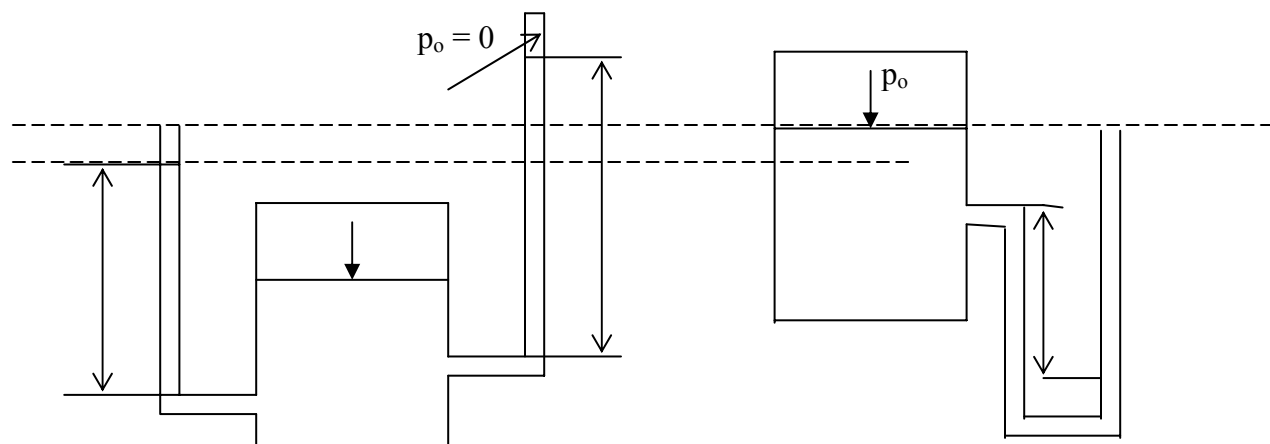
4) - Đo áp suất

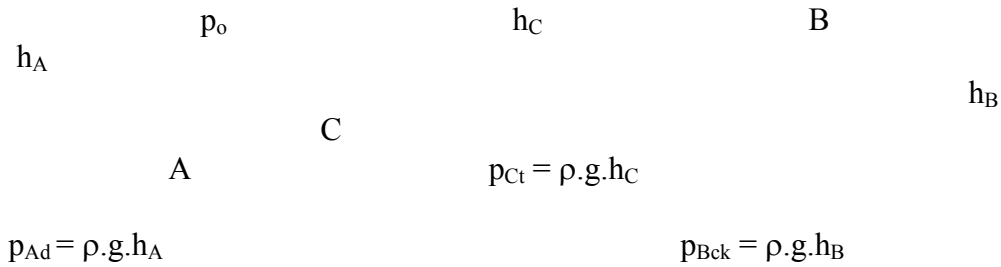
Ngoài các dụng cụ đo áp suất bằng kim loại, người ta còn dùng các dụng cụ đo áp suất bằng chất lỏng theo phương trình cơ bản của chất lỏng như ống đo áp (còn gọi là ống Pitô). Ống đo áp là ống trong suốt đường kính từ 10 mm trở lên (để tránh hiện tượng mao dẫn).

Muốn đo áp suất dư hay chân không chúng ta dùng ống đo áp hở một đầu một đầu thông với khí trời đầu kia nối với điểm cần đo. Chất lỏng dâng lên  $h_A$  hay tụt xuống  $h_B$  trong ống là độ cao cột áp cần đo (hình 6.3).

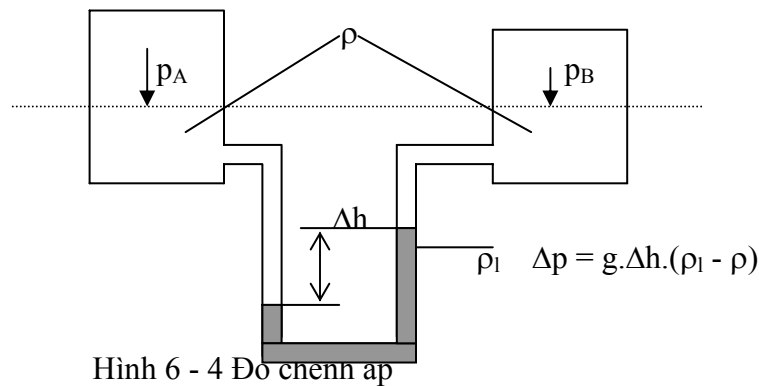
Muốn đo áp suất tuyệt đối chúng ta dùng ống đo áp kín một đầu, trước khi đo phải rút hết không khí ra, còn đầu hở thì nối vào nơi cần đo áp suất. Cột chất lỏng dâng lên trong ống  $h_c$  chỉ cột áp tuyệt đối (ví dụ như phong vũ biểu).

Ống đo áp kiểu chữ U, trong đoạn cong có chứa môi chất khác với chất lỏng cần đo thường dùng để đo độ chênh áp giữa hai điểm (hình 6.4). Ngoài ra người ta còn dùng áp kế thủy ngân kiểu bình để đo áp suất dư, áp suất chân không. Môi chất có thể là thủy ngân, nước, rượu tùy theo độ lớn của áp suất cần đo.





Hình 6 - 3 Cách đo áp suất dư, chân không, tuyệt đối



Hình 6 - 4 Đo chênh áp

### 6.3 - Bình thông nhau

Trong bình thông nhau có hai chất lỏng khác nhau ( $\rho_1 > \rho_2$ ). Khi chất lỏng trong bình ở trạng thái cân bằng nghĩa là áp suất ở hai nhánh của hai bình phải bằng nhau:

$$p_a + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_a + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$

Suy ra :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{6.11}$$

Vậy chiều cao của cột chất lỏng tỷ lệ nghịch với khối lượng riêng. Nếu  $\rho_1 = \rho_2$  thì  $h_1 = h_2$ . Nghĩa là mặt thoáng chất lỏng đồng chất trong hai nhánh của bình thông nhau ở cùng một độ cao.

### 6.4 - Sự cân bằng của chất khí, sức hút tự nhiên

Áp suất của chất khí cũng được tính từ phương trình (6.5), trong đó khối lượng riêng được tính từ phương trình trạng thái. Áp suất chất khí trong tĩnh tuyệt đối được tính theo :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{r.T} dz$$

Để tích phân được phương trình này cần phải biết được quy luật thay đổi nhiệt độ theo độ cao hình học. Người ta thường sử dụng quan hệ tuyến tính giữa T và z [ 2 ] :

$$T = T_0 \pm \alpha.z \tag{6.12}$$

Trong đó T<sub>0</sub> là nhiệt độ không khí trên mặt đất,

α là gradien nhiệt độ, đó là sự thay đổi nhiệt độ không khí trên 1m độ cao. Dấu "+" cho trường hợp nhiệt độ tăng, dấu "-" cho nhiệt độ giảm. Hệ số α được xác định theo các yếu tố khí tượng. Nếu chiều cao nhỏ hơn 1000m thì α = 0,0065 °K/m ,đối với hầm lò thì α = 0,006°K/m đến 0,01°K/m.

Thay (6.14) vào (6.13) và tích phân theo điều kiện từ p<sub>0</sub> đến p ứng với độ cao từ 0 đến H :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{r} \cdot \int_0^H \frac{dz}{T - \alpha.z}$$

$$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{g}{r.\alpha} \ln \frac{T_0 + \alpha.H}{T_0}$$

Thay r = 284 J/(kg °K) ; g = 9,81 m/s<sup>2</sup> vào phương trình trên suy ra :

$$H = 29,27(T - T_0) \frac{\ln \frac{p}{p_0}}{\ln \frac{T}{T_0}} \tag{6.13}$$

Áp suất không khí ở độ cao H là :

$$p = p_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{H}{29,27(T - T_0)}} \tag{6.14}$$

Trong hầm lò có sự khác nhau về khối lượng riêng nên xuất hiện sức hút tự nhiên :

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

Trong đó p<sub>1</sub> , p<sub>2</sub> được tính theo công thức (6.14).

## 6.5 - Áp suất chất lỏng trong tĩnh tương đối

### 6.5.1 - Bình chứa chất lỏng chuyển động tịnh tiến có gia tốc không đổi

Để xác định qui luật phân bố áp suất chúng ta chọn hệ tọa độ không quán tính (hệ tọa độ được gắn vào bình chứa chất lỏng) ( hình 6.5a). Thành phần gia tốc khối theo các trục tọa độ:

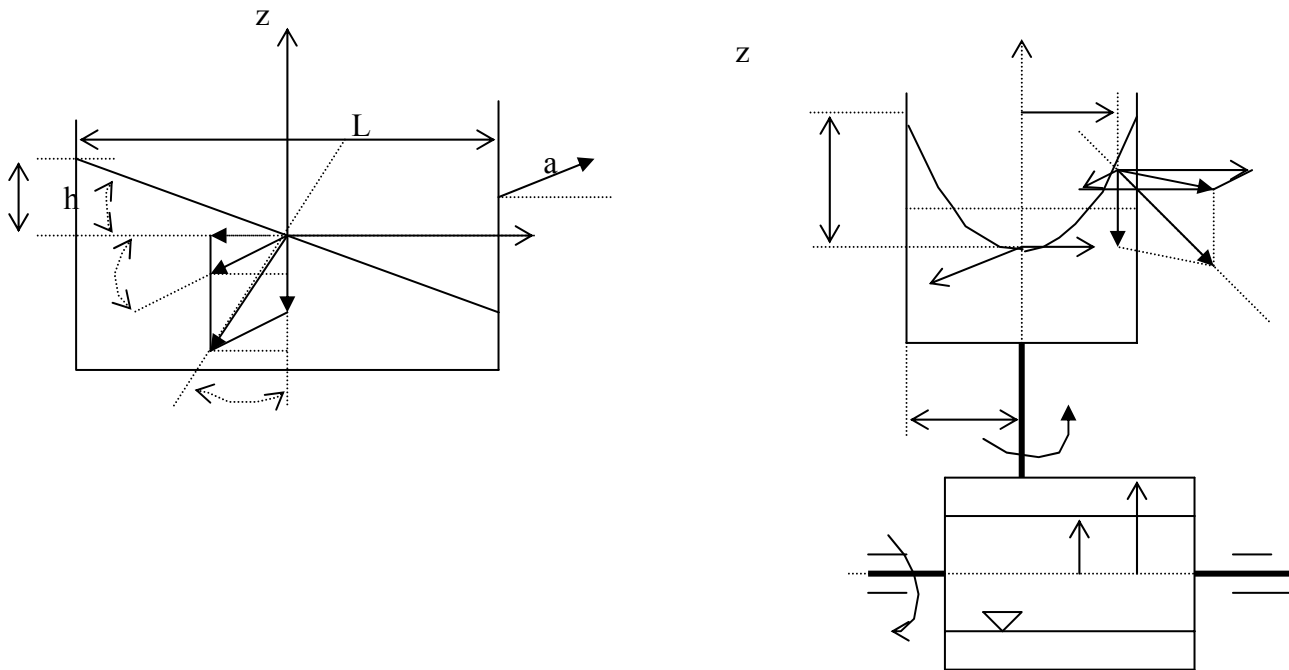
$$R_x = 0 ; R_y = - a \cos \alpha ; R_z = - (g + a \sin \alpha )$$

Thay các giá trị này vào (6.5) và sau khi tích phân ta có:

$$p = k - \rho a y \cos \alpha - \rho a z \sin \alpha - \rho g z$$

Hằng số tích phân k được xác định từ điều kiện biên. Nếu  $x = y = z = 0$  thì  $p = p_0$ , suy ra  $k = p_0$ .

$$p = p_0 - \rho a y \cos \alpha - \rho a z \sin \alpha - \rho g z \tag{6.16}$$



Hình 6.5 Tĩnh tương đối

Mặt đẳng áp khi  $dp=0$ . Sau tích phân chúng ta có phương trình mặt đẳng áp là :

$$y a \cos \alpha + z a \sin \alpha + g z = C \quad (6.17)$$

Đây là phương trình của những mặt phẳng song song và thẳng góc với vectơ gia tốc khối R. Góc nghiêng của mặt đẳng áp so với mặt nằm ngang (x,y).

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha} \quad (6.18)$$

Cường độ gia tốc khối là :  $R = \sqrt{a^2 + g^2 + 2a.g \sin \alpha}$  (6.19)

Nếu bình chuyển động theo phương nằm ngang thì :  $\alpha = 0$  ;  $\operatorname{tg} \varphi = - (a/g)$

Khi bình tăng tốc ( $a > 0$ ) thì chất lỏng dồn về sau, khi bình chuyển động chậm dần ( $a < 0$ ) thì chất lỏng dồn về phía trước.

Nếu bình chuyển động xuống thì  $\alpha = 90^\circ$  ,  $\operatorname{tg} \varphi = 0$ ,  $R = -g + a$ . Bình rơi tự do thì  $a = g$ ,  $R=0$ ,  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \infty$  , mặt đẳng áp không có hình dạng nhất định. Nếu bình chuyển động lên  $\alpha = -90^\circ$  thì  $\operatorname{tg} \varphi = 0$  ,  $R = -(a + g)$ .

### 6.5.2 - Bình quay đều ( $\omega = \text{const}$ )

Chuyển động quay của bình được truyền vào chất lỏng. Phân tử lỏng ở tại r sẽ có vận tốc chuyển động  $u = r.\omega$ . Lực chất lỏng tác dụng lên phân tử lỏng gồm có trọng lực và lực ly tâm. Trên hình 6.5b ta có :

$$R_x = x^2 \omega; R_y = \omega y^2; R_z = -g$$

Thay vào (5.6) và tích phân lên :

$$p = \frac{1}{2} \rho (x^2 + y^2) \omega^2 - \rho . g . z + k$$

Hằng số tích phân k được xác định từ điều kiện biên. Khi  $x = y = z = 0$  thì  $p = p_0$  nên  $k = p_0$ . Thay  $x^2 + y^2 = r^2$  chúng ta có phương trình tính áp suất trong bình quay là :

$$p = p_0 + \frac{1}{2} \rho . r^2 . \omega^2 - \rho . g . z \quad (6.20)$$

Mặt đẳng áp ( $dp=0$ ) :  $z = \frac{\omega^2 . r^2}{2g} + C$  (6.21)

Đây là phương trình của những mặt parabolôit. Khi  $C=0$  chúng ta có phương trình mặt thoáng.

Từ phương trình trên ta thấy : nếu  $\omega$  càng lớn thì đỉnh parabol càng tụt xuống, thậm chí xuống dưới đáy bình. Trong bơm li tâm có vòng quay lớn thì lực ly tâm lớn hơn trọng lực nên

chúng ta có thể bỏ qua thành phần trọng lực. Mặt đẳng áp trong trường hợp này là mặt trụ đối xứng với trục quay. Áp suất được tính theo công thức sau:

$$p = p_o + \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 (r_o^2 - r^2) \quad (6.22)$$

Nghĩa là trong trường hợp này áp suất trong chất lỏng không phụ thuộc vào vị trí của trục quay (hình 6.5c).

Các kết quả nghiên cứu các bài toán tĩnh tương đối được ứng dụng nhiều trong kỹ thuật như các dụng cụ đo vận tốc, đúc ly tâm, bộ nhạy cảm thủy lực... .

## §7 - Áp lực thủy tĩnh tác dụng lên vật

### 7.1 - Áp lực thủy tĩnh lên mặt phẳng (hình 7 - 1)

Mặt phẳng được đặt nghiêng so với mặt thoáng một góc  $\alpha$  và tiếp xúc với chất lỏng về một phía. Hệ toạ độ được chọn có gốc nằm trên mặt thoáng, trục z nằm dọc theo tấm phẳng hướng xuống dưới, trục x nằm trên mặt tấm phẳng.

Lực chất lỏng tác dụng lên phân diện tích  $dS$  của tấm phẳng ở độ sâu  $h$  là:

$$dF = p \cdot dS = (p_o + \rho g h) dS$$

mà  $h = z \sin \alpha$

nên

$$dF = p_o dS + \rho g \sin \alpha z dz$$

Tích phân phương trình này theo diện tích  $S$  ta có :

$$F = p_o S + \rho g \sin \alpha \int_{(S)} z \cdot dS$$

Biểu thức tích phân chính là mômen tĩnh hình học của mặt  $S$  đối với trục  $x$ :  $M_T = z_T \cdot S$  trong đó  $z_T$  là toạ độ trọng tâm hình học  $T$  của tấm phẳng. Vậy:

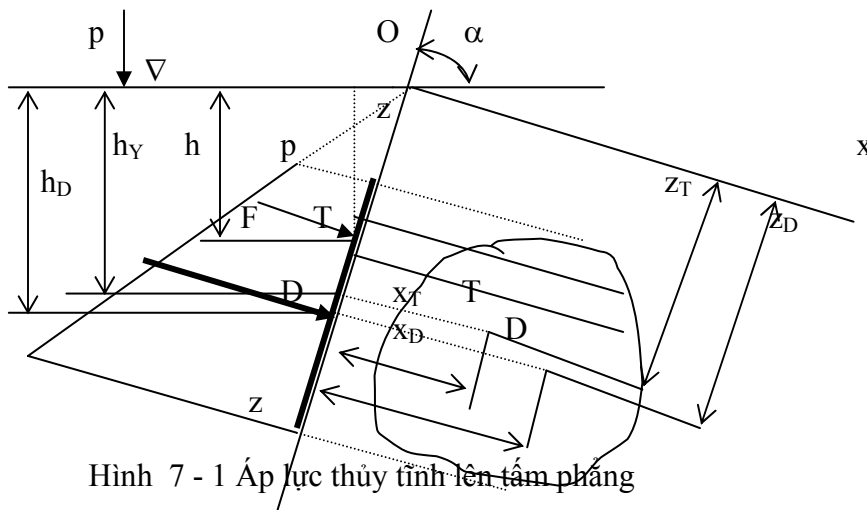
$$F = p_o S + \rho g \sin \alpha z_T S = p_o S + \rho g h_T S = (p_o + \rho g h_T) \cdot S$$

hay

$$F = p_T \cdot S \quad \text{và} \quad p_T = p_o + \rho g h_T$$

Nếu áp suất trên mặt thoáng là áp suất khí trời và phía sau tấm phẳng là áp suất khí trời. Lực của áp suất khí trời lên tấm phẳng ở hai phía như nhau. Cho nên áp lực chất lỏng tác dụng lên tấm phẳng trong trường hợp này là :

$$F = g \cdot \rho h_T S \quad (7.1)$$



Hình 7 - 1 Áp lực thủy tĩnh lên tấm phẳng

Từ công thức này chúng ta thấy rằng :áp lực của chất lỏng tác dụng lên tấm phẳng chính bằng tích áp suất của chất lỏng tại trọng tâm hình học nhân với diện tích tấm phẳng.

Nếu tấm phẳng đặt nằm ngang song song với mặt thoáng ở độ sâu H (như đáy bình) thì  $h_T=H$ . Theo phương trình (7. 1) :  $F = g \rho.H S = G$  ; (7.2)

G là trọng lượng khối lỏng chứa trên đáy S ở độ sâu H. Theo kết luận này thì dù hình dạng bình chứa như thế nào đi nữa nếu diện tích mặt đáy giống nhau và ở độ sâu như nhau thì lực tác dụng của chất lỏng lên đáy như nhau. Nó không phụ thuộc vào trọng lượng thực của chất lỏng chứa trong bình (hình 7 - 2). Đây chính là nghịch lý tĩnh học chất lỏng. Ứng dụng nghịch lý này người ta chế ra các dụng cụ chứa chất lỏng theo nhu cầu sử dụng ví dụ để tăng độ ổn định các bình chứa hóa chất đặc biệt bao gời cũng có đáy lớn.

Để xác định điểm đặt lực (ký hiệu là Đ) chúng ta xét điều kiện cân bằng mômen lực tổng hợp và mômen của các lực phân đối với các trục tọa độ. Đối với trục ox ta có :

$$F \cdot z_D = \int_{(S)} z \cdot dF \quad \text{hay} \quad z_D \rho_T S = \rho_o \int_{(S)} z dS + g \cdot \rho \cdot \sin \alpha \int_{(S)} z^2 \cdot dS$$

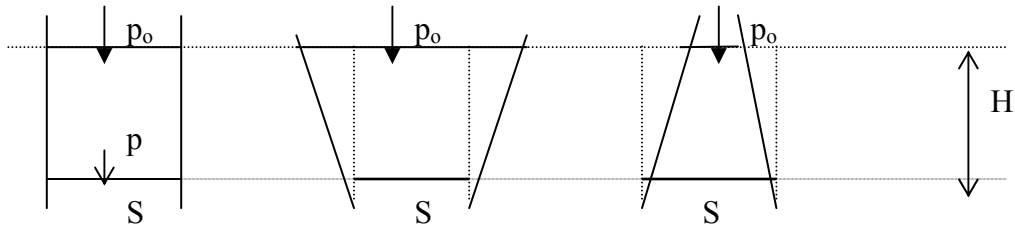
Trong đó tích phân :

$$J_x = \int_{(S)} z^2 \cdot dS$$

là mômen quán tính hình học của mặt S đối với trục ox . Có thể tính  $J_x$  theo trục ox đi qua trọng tâm hình học T của mặt S :

$$J_x = J_{Tx} + z_T^2 \cdot S$$





Hình 7 - 2 Áp lực thủy tĩnh lên đáy bình

Từ đó suy ra

$$z_D = \frac{p_o}{p_T} z_T + \frac{J_x}{p_T \cdot S} \rho \cdot g \cdot \sin \alpha = \frac{p_o}{p_T} z_T \frac{z_T^2 S + J_{Tx}}{(p_o + g \rho \sin \alpha \cdot z_T) \cdot S} \rho \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Nếu  $p_o = p_a$  tác dụng lên hai phía tấm phẳng thì :

$$z_D = z_T + \frac{J_{Tx}}{M_T} \tag{7.3}$$

Từ phương trình cân bằng mô men so với trục oz ta có tọa độ điểm đặt lực  $x_D$  :

$$F \cdot x_D = \int_{(S)} x \cdot dF \quad \text{hay} \quad x_D = \frac{J_{xz}}{M_T} \tag{7.4}$$

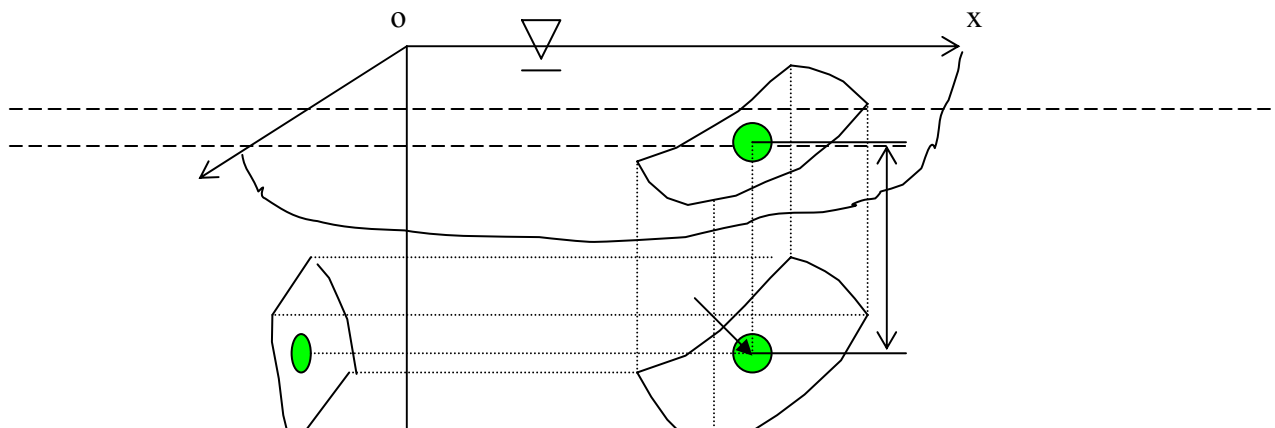
$J_{xz}$  là mômen quán tính ly tâm của tấm phẳng S đối với trục x,y. Nếu tấm phẳng đối xứng so với trục z (như hình tròn, hình chữ nhật...) thì  $J_{xz} = 0$ .

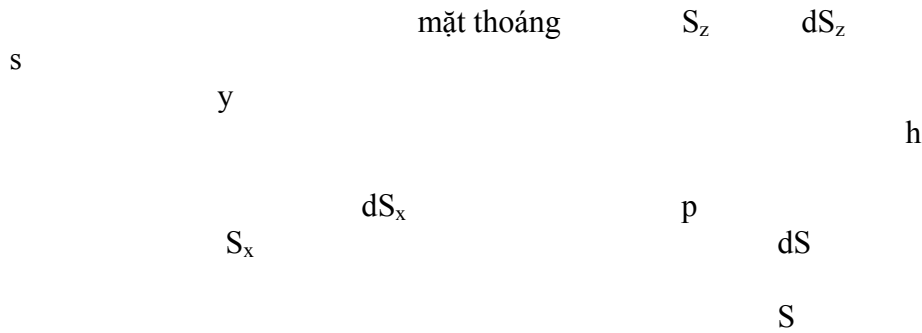
### 7.2 - Áp lực thủy tĩnh lên mặt cong

Nếu mặt cong có hình dạng không gian bất kỳ thì tổng hợp các lực phân tố là tổng hợp hệ lực không gian sẽ cho ta một lực và một ngẫu lực. Tuy nhiên trong kỹ thuật mặt cong thường là những mặt cong đơn : như mặt trụ, mặt cầu... Tổng hợp các lực phân tố sẽ cho chúng ta một lực. Lực này được phân tích thành ba thành phần theo các trục tọa độ là  $F_x, F_y, F_z$  :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{7.5}$$

các góc hướng:  $\cos \alpha = \frac{F_x}{F} \quad ; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F} \quad ; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F} \tag{7.6}$





Hình 7 - 3 Áp lực thủy tĩnh lên mặt cong

Muốn xác định được lực  $F$  ta phải xác định các lực thành phần. Chúng ta tính lực chất lỏng tác dụng lên mặt cong mà phía kia của mặt cong là không khí. Để thuận tiện cho việc tính toán chúng ta chọn hệ tọa độ như hình vẽ ; trục  $z$  theo phương thẳng đứng và mặt oxy trùng với mặt thoáng . Xét lực chất lỏng tác dụng lên diện tích  $dS$  ở độ sâu  $h$  trong chất lỏng (hình 7 - 3). Vì diện tích  $dS$  nhỏ nên áp suất trên đó được coi là giống nhau và được tính theo công thức :  $p = \rho g h$ . Áp lực tác dụng lên phần tử lỏng :  $dF = p dS$ . Các thành phần lực theo các trục tọa độ là :

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \cos\alpha = \rho g h dS \cos\alpha = \rho g h dS_x \\ dF_y &= dF \cos\beta = \rho g h dS \cos\beta = \rho g h dS_y \\ dF_z &= dF \cos\gamma = \rho g h dS \cos\gamma = \rho g h dS_z \end{aligned}$$

trong đó  $dS_x, dS_y, dS_z$  là hình chiếu  $dS$  lên các mặt phẳng của hệ tọa độ. Để tính các lực  $F_x, F_y, F_z$  chúng ta thực hiện tích phân theo các mặt hình chiếu của  $S$  lên các mặt phẳng tọa độ tương ứng .

$$F_x = \int_{(S_x)} dF_x = p_{Tx} \cdot S_x \quad ; \quad F_y = \int_{(S_y)} dF_y = p_{Ty} \cdot S_y \tag{7.7}$$

Chúng ta thấy rằng các lực  $F_x, F_y$  tác dụng lên mặt phẳng  $S_x, S_y$  được tính như trọng hợp áp lực lên thành phẳng đã nêu. Trong đó  $p_{Tx}, p_{Ty}$  là áp suất tại trọng tâm các mặt  $S_x, S_y$ . Còn lực  $F_z$  :

$$F_z = \int_{S_z} dF_z = g \cdot \rho \int_{(S_z)} h \cdot dS_z = G \tag{7.8}$$

Nghĩa là lực  $F_z$  chính bằng trọng lượng của khối lỏng thẳng đứng có một đáy là nặt cong và một đáy là hình chiếu mặt cong lên mặt thoáng. Hướng của lực  $F_z$  đi lên nếu mặt cong bị chất lỏng đẩy lên, ngược lại thì lực  $F_z$  hướng xuống. Điểm đặt lực được xác định theo các cosin định hướng

(7.6). Nếu mặt cong là mặt trụ, hay mặt cầu thì lực  $F$  đi qua trục tâm mặt trụ hay tâm mặt cầu. Cần lưu ý rằng việc chọn hệ tọa độ hợp lý sẽ giúp cho tính toán đơn giản.

### 7.3 - Áp lực thủy tĩnh tác dụng lên vật ngập

#### 7.3.1 - Định luật Asimét

Một vật ngập trong chất lỏng sẽ bị đẩy lên theo phương thẳng đứng với một lực bằng trọng lượng khối lỏng do vật đó chiếm chỗ. (Chúng ta hãy tự chứng minh định luật này theo phương pháp tính lực lên mặt cong).

#### 7.3.2 - Điều kiện vật nổi

Gọi trọng lượng của vật là  $G$ , lực đẩy asimét là  $F_s$ . Các trường hợp có thể xảy ra như sau :

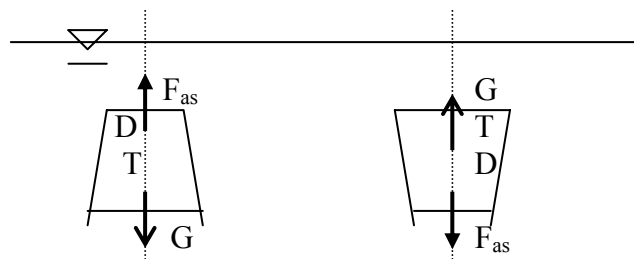
Nếu  $F_s > G$  thì vật nổi một phần lên chất lỏng để có  $F_s^* = G$ .

Nếu  $F_s = G$  thì vật lơ lửng trong chất lỏng.

Nếu  $F_s < G$  thì vật chìm xuống đáy.

#### 7.3.3 - Điều kiện ổn định của vật lơ lửng trong chất lỏng

Khi vật lơ lửng bị lệch khỏi vị trí cân bằng, nếu trọng tâm của vật cao hơn tâm đẩy thì mômen của ngẫu lực sẽ làm vật lệch khỏi vị trí cân bằng. Nếu tâm đẩy cao hơn trọng tâm vật thì mômen làm cho vật trở về vị trí cân bằng ban đầu (hình 7.4). Nếu  $T$  trùng với  $D$  thì vật lơ lửng trong chất lỏng theo vị trí đặt ban đầu của nó.



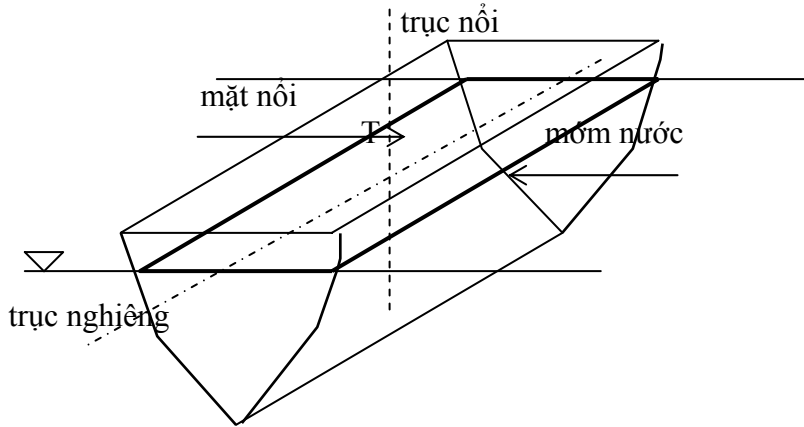
Hình 7 - 4 Vật lơ lửng

#### 7.3.4 - Điều kiện ổn định của vật ngập không hoàn toàn

Trước hết chúng ta định nghĩa một số yếu tố liên quan (hình 7 - 5) :

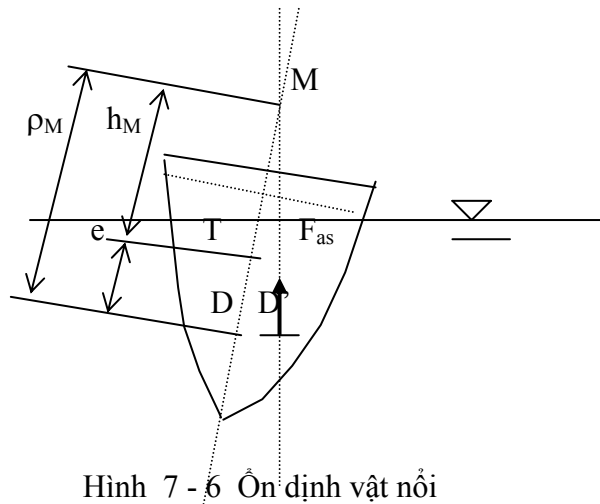
-Mớn nước : là giao tuyến giữa vật nổi và mặt nước.

- Mặt nổi : là mặt phẳng mà chu vi của nó là đường môn nước.
- Trục nổi : là đường thẳng góc với mặt nổi và đi qua trọng tâm của vật.
- Trục nghiêng (hay trục lác) : là trục đối xứng của mặt nổi (vật nổi lác nghiêng quanh trục này).



Hình 7 - 5 Vật nổi

Các định nghĩa này ứng với lúc vật ở trạng thái cân bằng. Khi vật nổi bị nghiêng đi thì tâm đáy  $D$  cũng thay đổi đến vị trí  $D'$ . Giao điểm trục nổi với phương của lực đẩy mới gọi là tâm định khuynh  $M$  (hình 7 - 6).



Hình 7 - 6 Ổn định vật nổi

Khi góc nghiêng của trục nổi và đường thẳng đứng nhỏ hơn  $15^\circ$  thì có thể xem như tâm đáy di chuyển trên cung tròn tâm là  $M$  và bán kính là  $M\bar{D}$  (gọi là bán kính định khuynh, ký hiệu  $\rho_M$ ). Khi vật bị nghiêng có thể xảy ra các trường hợp sau :

- Nếu  $M$  cao hơn  $T$  thì ngẫu lực  $G$  và  $F_s$  sẽ có xu hướng làm cho vật trở về trạng thái cân bằng ban đầu.

- Nếu M thấp hơn T thì ngẫu lực có xu hướng làm cho vật nghiêng thêm.
- Nếu M trùng với T thì không còn ngẫu lực nữa, mà hợp lực triệt tiêu. Ở mọi vị trí vật đều cân bằng, nghĩa là sau khi nghiêng vật nổi giữ nguyên trạng thái mà không quay về vị trí ban đầu. Trường hợp này gọi là cân bằng phiếm định. Bán kính tâm định khuynh được xác định theo công thức :

$$\rho_M = \frac{J}{V} \tag{7.9}$$

trong đó : J là mômen quán tính của mặt nổi đối với trục nghiêng.  
 V là thể tích ngập nước của vật.

Để tăng độ ổn định của tàu thủy có thể tăng độ cao định khuynh  $h_m$  bằng cách hạ trọng tâm T (xếp hàng nặng xuống đáy) hoặc nâng cao M bằng cách tăng J như lắp thêm phao mạn thuyền ... Trong kỹ thuật đóng tàu thường chọn  $h_m = 0,3 \div 1,5$  m tùy theo hình dạng, kích thước và công dụng của từng loại.

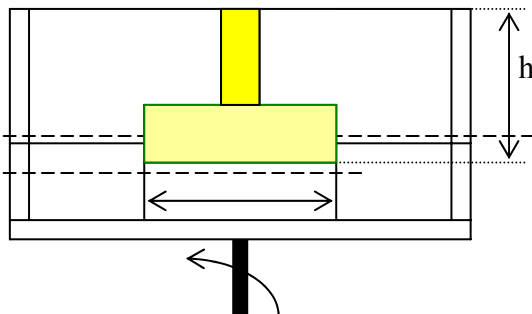
Khi vật nổi dao động thì nó dao động giống như con lắc toán học có chiều dài l :

$$l = \frac{J \cdot g}{G_m}$$

Chu kỳ dao động :  $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

Gia tốc dao động :  $\varepsilon = \frac{g}{l} \sin \varphi$

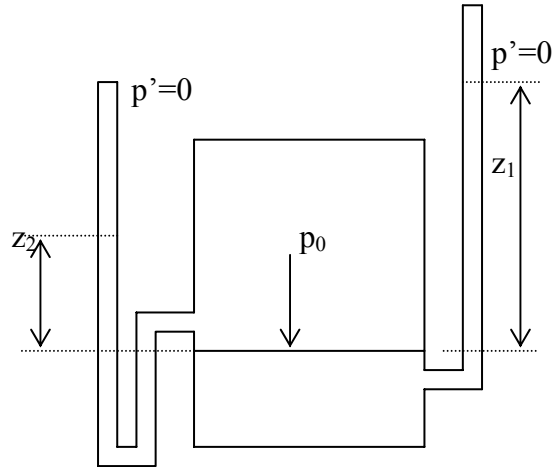
1. Tính áp suất tại đáy bể sâu 4 m , nước trong bể có khối lượng riêng 1000 kg/m<sup>3</sup>, áp suất tuyệt đối trên mặt thoáng là 1 at.
- 2 . Tính áp suất tuyệt đối và áp suất tại đáy nồi hơi sâu 1.2 m, áp suất trên mặt thoáng 196200 Pa, khối lượng riêng của nước 1000 kg/m<sup>3</sup>, áp suất không khí là 735 mm thủy ngân.
3. Áp suất tại cửa vào của bơm ly tâm đo bằng áp kế chân không là 0,7 at. Xác định áp suất tuyệt đối tại đó. Biết rằng áp suất không khí là 735 mm thủy ngân.
4. Một bể chứa nước có áp suất tuyệt đối tại M là 147000 N/m<sup>2</sup>. tính chiều cao cột áp tại đó theo m cột dầu. Cho biết áp suất không khí 1at , khối lượng riêng của nước 1000 kg/m<sup>3</sup> khối lượng riêng của dầu 800 kg/m<sup>3</sup>.
5. Đúc một bánh xe bành thep đường kính D=1850 mm , cao h=30 mm .  
 Khuôn quay 120 vòng/phút .



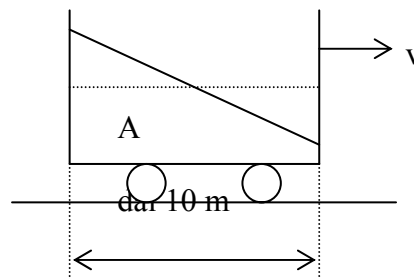
Cho biết khối lượng riêng của nước thép  $7800 \text{ kg/m}^3$ . Xác định áp suất tại điểm A (ở xa trực nhất)

A D

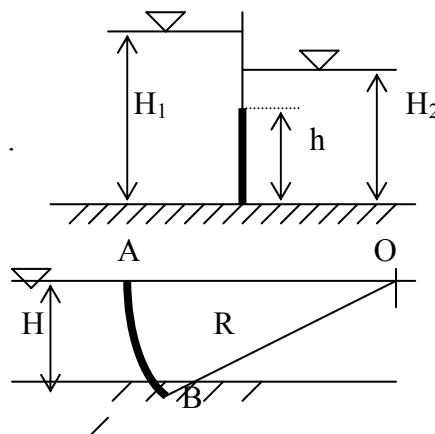
6. Người ta gắn vào bình M một áp kế thủy ngân và một ống đo áp. Điều chỉnh vị trí áp kế thủy ngân sao cho điểm A ngang với mặt thoáng chất lỏng trong bình. Áp suất trên mặt thoáng của áp kế thủy ngân và ống đo áp đều bằng không. Xác định áp suất trên mặt thoáng bình M và chiều cao  $z_1$  của ống đo áp. Cho biết  $z_2 = 0,05 \text{ m}$ , khối lượng riêng của thủy ngân là  $13600 \text{ kg/m}^3$  và nước là  $1000 \text{ kg/m}^3$



7. Một xe chở nước hở sau khi khởi động được 3 phút thì vận tốc đạt đến  $30 \text{ km/giờ}$  với gia tốc đều không đổi. Chiều dài xe  $10 \text{ m}$ , rộng  $3 \text{ m}$ , cao  $2 \text{ m}$ , mực nước trong xe  $2 \text{ m}$ . Tìm phương trình mặt thoáng. Áp suất tại điểm A. Mực nước dâng lên là bao nhiêu?

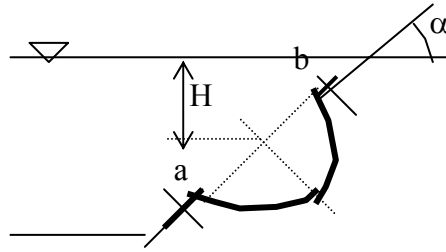


8. Tính lực tác dụng và điểm đặt lực lên cánh cửa công hình chữ nhật có chiều dài là  $h=3 \text{ m}$ , chiều rộng là  $b=2 \text{ m}$ . Mực nước bể thượng lưu là  $H_1=6 \text{ m}$ ; hạ lưu là  $H_2=5 \text{ m}$ . Khối lượng riêng của nước là  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

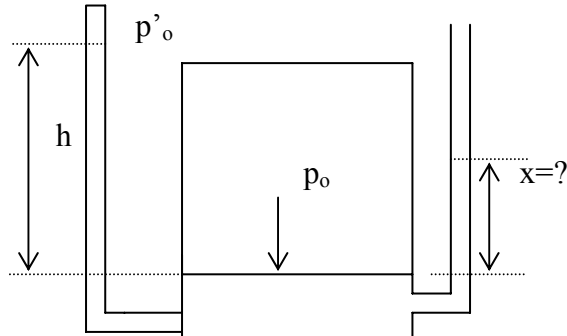


9. Tính áp lực của nước tác dụng lên cửa công hình trụ tròn AB bán kính  $R=4 \text{ m}$ , dài  $10 \text{ m}$  ngăn nước ở độ cao  $H=2 \text{ m}$ . Khối lượng riêng của nước là  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

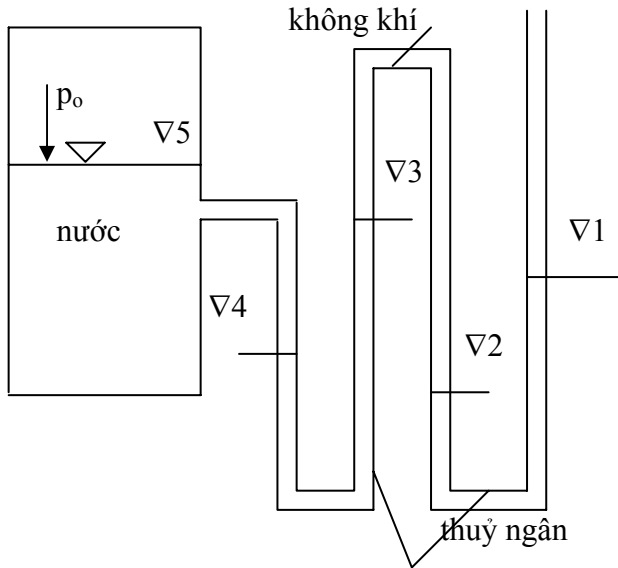
10. Trên một thành nghiêng của một bể chứa dầu mỏ loại trung ( có khối lượng riêng  $900 \text{ kg/m}^3$  ) ta dùng một nắp hình bán cầu đậy kín một lỗ tròn đường kính 1,2 m. Độ sâu tâm bán cầu  $H=4 \text{ m}$ . Thành bể nghiêng một góc  $\alpha=60^\circ$ . Tính lực kéo lên các bu lông a,b.



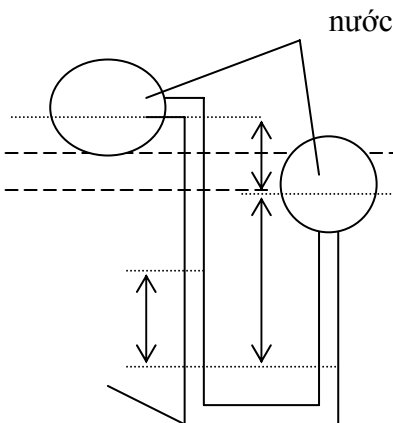
11. Nối hai ống đo áp vào một bình kín chứa nước. Ống đo áp bên trái có áp suất trên mặt thoáng  $p_o' = 0,8 \text{ at}$ . chiều cao nước dâng lên trong ống này là  $h=3 \text{ m}$ . Hỏi áp suất trên mặt thoáng của bình. Tính chiều cao nước dâng lên trong ống đo áp hở bên phải. Áp suất chân không trên mặt thoáng ống đo áp bên trái là bao nhiêu ?.



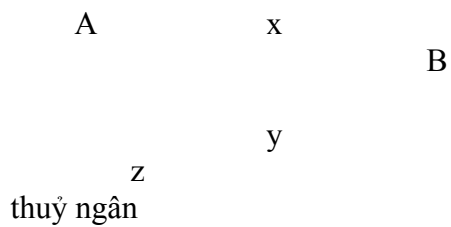
12- Người ta lắp áp kế như hình vẽ để đo áp suất. Hỏi lắp áp kế như vậy đo được áp suất tại điểm nào giá trị đo được là bao nhiêu at ?. Cho biết cao độ tại các vị trí như sau :  $\nabla 1 = 2,3 \text{ m}$  ;  $\nabla 2 = 1,2 \text{ m}$  ;  $\nabla 3 = 2,5 \text{ m}$  ;  $\nabla 4 = 1,4 \text{ m}$  ;  $\nabla 5 = 3,0 \text{ m}$  ; trọng lượng riêng của nước  $9810 \text{ N/m}^3$  ; thủy ngân  $13600 \text{ N/m}^3$



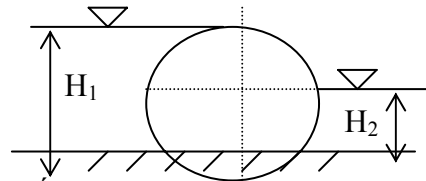
13. Hỏi chênh lệch áp suất của hai bình A,B ? . Biết các giá trị  $x=1 \text{ m}$  ,  $y=2 \text{ m}$  ,  $z=1 \text{ m}$ . Khối lượng riêng của nước  $1000 \text{ kg/m}^3$ ,



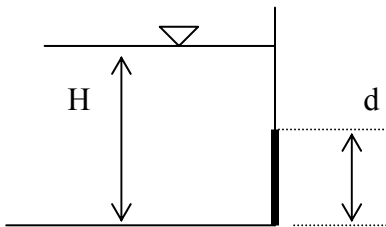
thủy ngân  $13600 \text{ kg/m}^3$



14. Tính lực và điểm đặt lực lên hình trụ tròn ngăn đôi một bể chứa nước. Trụ dài 10 m., đường kính trụ 4 m, mực nước các bể  $H_1 = 4 \text{ m}$ ,  $H_2 = 2 \text{ m}$ , khối lượng riêng của nước  $1000 \text{ kg/m}^3$

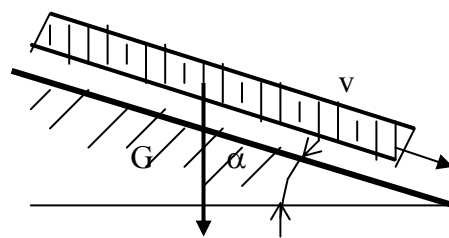


15. Tính lực của nước và điểm đặt lực tác dụng lên nắp hình tròn (xem hình vẽ). Cho biết  $H = 4 \text{ m}$ ; đường kính nắp tròn  $d = 2 \text{ m}$ ; khối lượng riêng của nước  $1000 \text{ kg/m}^3$ ; mô men quán tính của hình tròn  $J_{Tx} = \pi \cdot d^4 / 64$

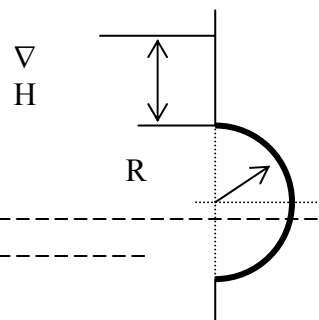


16. Xác định tổn thất dọc đường đường ống dẫn nước dài 20 m; đường kính 200 mm; lưu lượng chảy qua ống 100 lít/s; độ nhớt động học của nước  $0,013 \text{ cm}^2 / \text{s}$ .  
- Nếu giảm lưu lượng đi một nửa thì tổn thất giảm đi bao nhiêu lần.

17- Một tấm phẳng nặng  $G = 8,75 \text{ N}$  có diện tích  $S = 64 \text{ cm}^2$  trượt trên một lớp chất lỏng nghiêng có chiều dày  $b = 0,5 \text{ mm}$ . Xác định độ nhớt của chất lỏng khi tấm phẳng chuyển động đều với vận tốc  $v = 0,05 \text{ m/s}$ . Góc nghiêng tấm phẳng so với mặt phẳng nằm ngang  $\alpha = 12^\circ$ . Trọng lượng riêng của chất lỏng  $8820 \text{ N/m}^3$ .

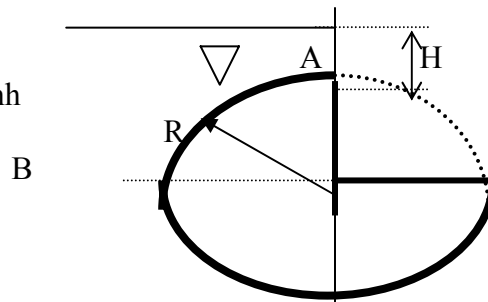


18. Tính lực tác dụng lên nửa nắp cầu bán kính  $R = 1 \text{ m}$  kín một bình chứa nước. Mép trên của nắp đặt sâu dưới mặt nước  $H = 1 \text{ m}$ . (khối lượng riêng của nước là  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ).

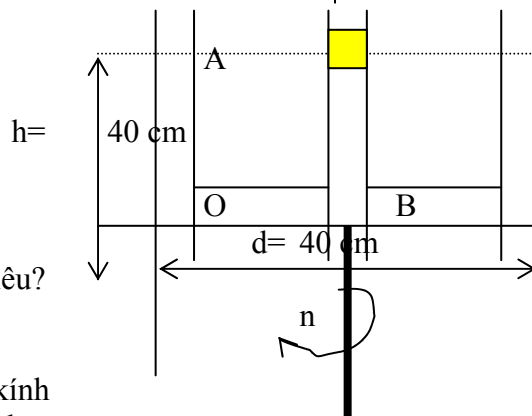




19- Tính lực tác dụng lên nửa trên nắp cầu (mặt AB) bán kính  $R=1\text{ m}$  kín một bình chứa nước. Mép trên của nắp đặt sâu dưới mặt nước  $H=1\text{ m}$  (khối lượng riêng của nước là  $\rho=1000\text{ kg/m}^3$ ).

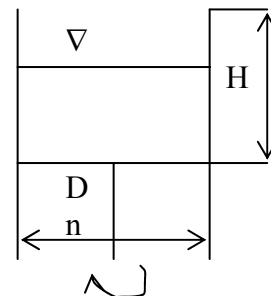


20. Một máy thí nghiệm gồm 3 ống thẳng đứng đường kính ống bằng nhau quay được quanh trục Oz của ống giữa. Ba ống đều chứa nước và không quay thì mức nước như hình vẽ. Cho máy quay  $116\text{ vg/phút}$ ; bỏ qua độ nghiêng của mặt nước trong ống. Hỏi :



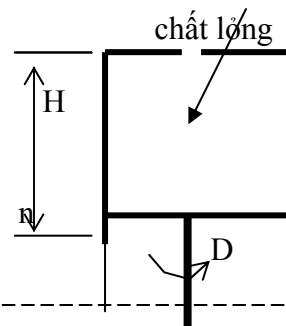
1. Nếu ống giữa bị nút kín tại A trước khi quay thì áp suất dư tại A, O, B là bao nhiêu?
2. Hỏi như trên, nhưng lần này A hở.

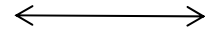
21. Người ta dùng một hình trụ tròn đường kính trong  $100\text{ mm}$  chứa chất nước và quay quanh trục thẳng đứng của nó để làm máy đo vận tốc quay. Hỏi : 1). Khi chất lỏng giữa bình hạ thấp xuống  $200\text{ mm}$  (so với lúc tĩnh) thì số vòng quay trong một phút là bao nhiêu?



- 2). Nếu cho bình quay  $800\text{ vg/phút}$  mà không muốn cạnh đáy bị cạn thì chiều cao tối thiểu của bình là bao nhiêu?

22- Tính lực thủy tĩnh tác dụng lên đáy bình hình trụ kín chứa đầy chất lỏng quay đều với vòng quay  $500\text{ vòng/phút}$ . Cho biết đường kính bình  $D=2\text{ m}$ , chiều cao  $H=1,5\text{ m}$ , Khối lượng riêng của chất lỏng  $1000\text{ kg/m}^3$





## Chương 3

# Cơ sở động học và động lực học chất lỏng

## §8 - Khái niệm chung

Trong chương này sẽ nghiên cứu các quy luật đặc trưng của chuyển động chất lỏng và tác dụng lực giữa chất lỏng và vật tiếp xúc với nó.

Việc nghiên cứu cũng bắt đầu từ chất lỏng lý tưởng. Có thể theo đường dòng nguyên tố hay theo phân tử lỏng, sau đó mở rộng ra cho chất lỏng thực. Chất lỏng vẫn được coi là môi trường liên tục gồm vô số phân tử lỏng hay các dòng nguyên tố tạo nên. Các đại lượng đặc trưng cho chuyển động được biểu diễn bằng những hàm số liên tục của không gian và thời gian.

### 8.1 Phân loại chuyển động

Nếu các đại lượng đặc trưng cho chuyển động của chất lỏng phụ thuộc vào không gian và thời gian thì chuyển động đó được gọi là chuyển động không dừng.

$$v = v(x, y, z, t) ; p = p(x, y, z, t) ; \rho = \rho(x, y, z, t) , \dots \quad (8.1)$$

Nếu chuyển động không phụ thuộc vào thời gian thì gọi là chuyển động dừng. Nghĩa là :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \dots \quad (8.2)$$

Trong kỹ thuật thường gặp các dòng chảy không dừng, nhưng nếu trong thời gian đủ lớn mà các thông số đặc trưng của chuyển động ít thay đổi thì có thể coi đó là dòng dừng trung bình theo thời gian và các đại lượng đặc trưng trung bình theo thời gian chuyển động loại này được xét như các thông số của bài toán chuyển động dừng.

Nếu phần tử lỏng chuyển động và quanh trục tức thời đi qua chính nó gọi là chuyển động xoáy. Chuyển động này được mô tả bằng phương trình :

$$\text{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega} \quad (8.3)$$

trong đó :  $\vec{v}$  là vận tốc chuyển động của phân tử chất lỏng.

$\omega$  là vận tốc chuyển động quay của phân tử chất lỏng.

Nếu các phân tử chuyển động mà không quay quanh trục đi qua chính nó gọi là chuyển động không xoáy. Đặc trưng cho chuyển động này là dòng thế vận tốc. Phương trình chuyển động không xoáy :

-----  
-----

$$\text{rot}\vec{v} = 0 \quad (8.4)$$

Có hai phương pháp nghiên cứu chuyển động chất lỏng :

- Phương pháp Lagrăng nghiên cứu chuyển động chất lỏng thông qua việc nghiên cứu quỹ đạo của các phần tử chất lỏng. Từ hình dáng của quỹ đạo các phần tử chất lỏng chúng ta có thể xác định được các thông số khác. Chuyển động được mô tả bằng phương trình :

$$r = r(x, y, z, t) \quad (8.5)$$

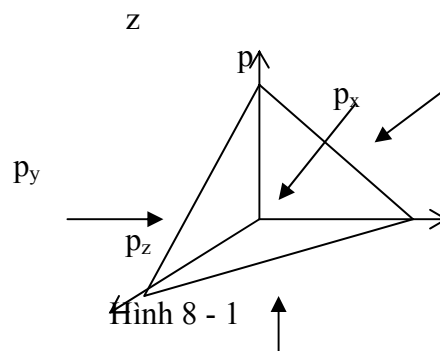
- Phương pháp Ôle nghiên cứu chuyển động của chất lỏng tại các vị trí xác định trong không gian. Trong phương pháp này chúng ta có ảnh của các đại lượng đặc trưng (vận tốc, ...). Từ đó chúng ta xác định được các thông số khác. Chuyển động được mô tả bằng phương trình :

$$v = v(x, y, z, t) \quad (8.6)$$

## 8.2 đặc trưng cho chuyển động

-Áp suất thủy động

Trong chất lỏng lý tưởng nó tác dụng theo phương thẳng góc và hướng vào mặt tác dụng. Trong chất lỏng thực thì nó chỉ hướng vào mặt tác dụng và là tổng hợp của hai thành phần ứng suất trong chất lỏng theo phương pháp tuyến và tiếp tuyến. Cường độ của áp suất thủy động theo phương pháp tuyến tại một điểm thì bằng giá trị trung bình số học của ba thành phần áp suất pháp tuyến tác dụng lên ba mặt thẳng góc với nhau tại điểm đó (hình 8 - 1).



$$p = \frac{1}{3}(p_x + p_y + p_z) \quad (8.7)$$

- Vận tốc. Vận tốc chất lỏng tại một điểm nhất định trong dòng chảy gọi là vận tốc điểm tức thời (ký hiệu là  $v$ ). Đại lượng này thường thay đổi cả hướng lẫn cường độ theo thời gian nên việc xác định nó rất phức tạp. Trong thủy khí kỹ thuật chúng ta thường dùng vận tốc điểm trung bình theo thời gian, ký hiệu là  $\bar{v}$  (trong phần tiếp theo chúng ta chỉ ký hiệu là  $v$ ) :

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_{(x)} v \cdot dt \quad (8.8)$$

Đối với chuyển động dừng chất lỏng thực và dòng có kích thước hữu hạn chúng ta thường dùng vận tốc trung bình trên thiết diện ướt ký hiệu là  $v_{tb}$

$$v_{tb} = \frac{1}{S} \int_{(S)} v \cdot dS \tag{8.9}$$

Đối với dòng khí ngoài vận tốc, áp suất chúng ta phải xét đến các thông số trạng thái của nó. Sự thay đổi của các thông số này ở mỗi vị trí trong dòng chảy phụ thuộc vào các quá trình.

### 8.3 Các dạng chuyển động của phân tử lỏng

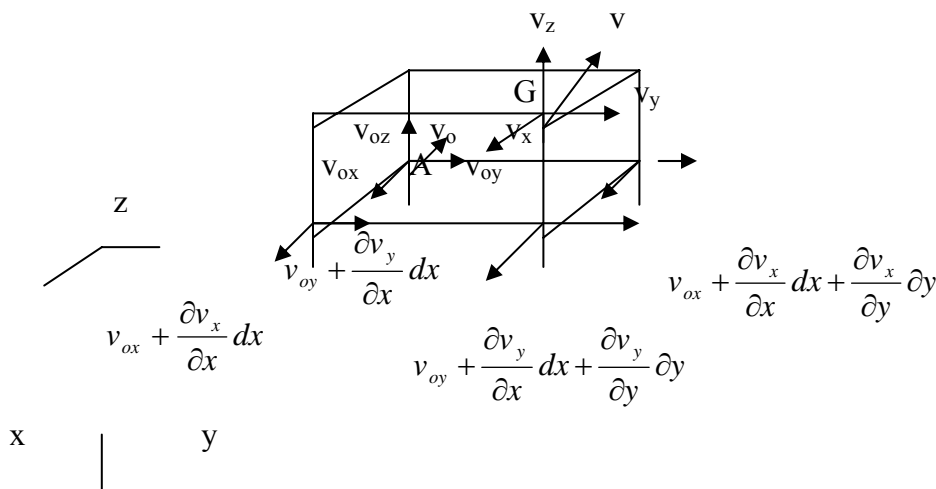
Chuyển động phức tạp của phân tử lỏng được Hémhôn phân tích thành ba chuyển động đơn giản là chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay và chuyển động biến dạng. Sau đây sẽ lần lượt giới thiệu các loại chuyển động đó và sự liên hệ giữa chúng .

Xét vận tốc các điểm lân cận trong chất lỏng (hình 8.2). Gọi  $v_o$  là vận tốc điểm A của phân tử lỏng. Tại điểm lân cận G vận tốc là  $v$  được biểu diễn bằng hàm điều hoà :

$$v_x = v_{ox} + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

$$v_y = v_{oy} + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz$$

$$v_z = v_{oz} + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz$$



Hình 8. - 2

Từ phương trình này chúng ta thấy rằng vận tốc điểm lân cận của một điểm được xác định bởi chín đạo hàm riêng của các thành phần vận tốc tại điểm đó. Trước hết chúng ta xét bài toán phẳng. Trong trường hợp này sự thay đổi vận tốc chỉ có 4 đạo hàm riêng được viết dưới dạng ma trận:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{vmatrix}$$

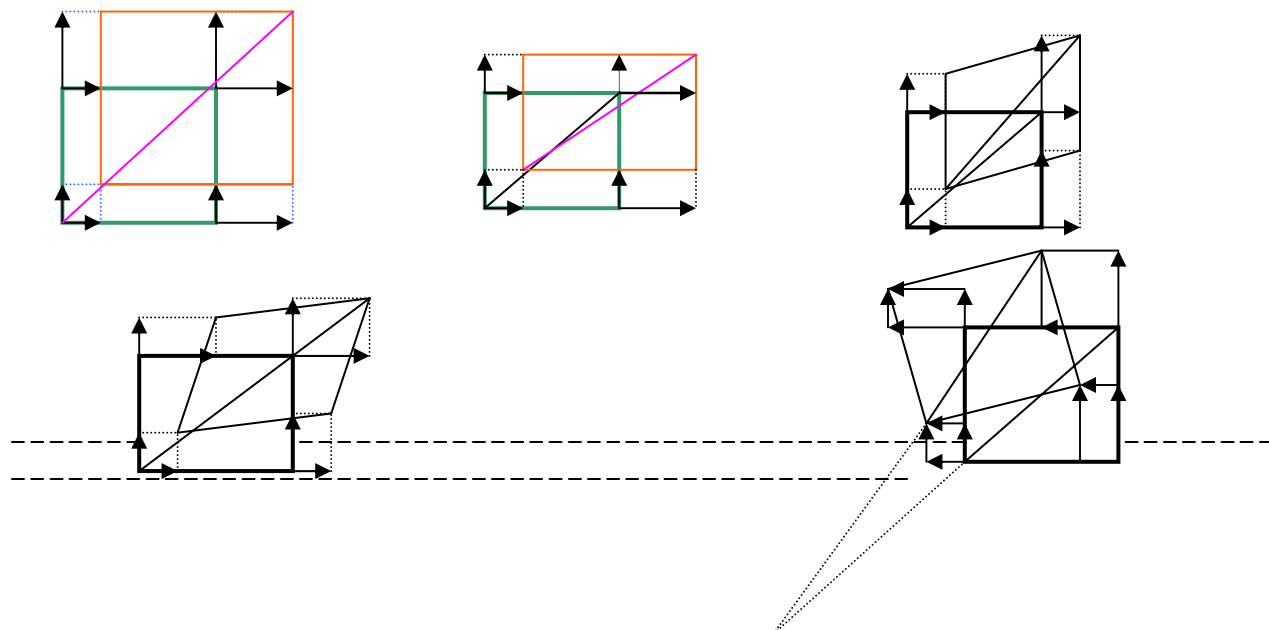
1- Nếu  $\frac{\partial v_x}{\partial x} \neq 0$  và các đạo hàm khác bằng không thì phân tố biến dạng dài dọc theo trục x (hình 8.4a). Vận tốc biến dạng dài là :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{8.12}$$

2- Nếu  $\frac{\partial v_y}{\partial x} \neq 0$  và các đạo hàm khác bằng không thì phân tố biến dạng trượt dọc theo trục y, đường chéo AC quay khi phân tố trượt (hình 8.4b).

3- Nếu  $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$  và các đạo hàm khác bằng không thì phân tố biến dạng nhưng đường chéo không quay (H 8.4c). Độ biến dạng mặt của phân tố này

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \tag{8.13}$$



Hình 8 - 4

4- Nếu  $\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{\partial v_x}{\partial y}$  và các đạo hàm khác bằng không thì phân tố chỉ quay thuần túy (hình 8 - 4d). Vận tốc góc quay của phân tố là :

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (8.14)$$

Ma trận trên được viết dưới dạng :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial v_x}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 \end{vmatrix} \quad (8.15)$$

$$= \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yi} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{vmatrix}$$

Ma trận thứ nhất là biến dạng dài, ma trận thứ hai là chuyển động trượt thuần túy, ma trận thứ ba là chuyển động quay.

Trong bài toán không gian, phân tố lỏng có hình dạng là khối lập phương thì biến dạng dài theo các trục là :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (8.16)$$

Biến dạng trượt thuần túy :

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \quad ; \quad \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \quad (8.17)$$

Vận tốc quay của các mặt phẳng :

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad ; \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \quad ; \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \quad (8.18)$$

Vận tốc quay của phân tử lỏng trong không gian được tính :

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (8.19)$$

Ở đây cần lưu ý rằng  $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$  không phải là hình chiếu của vectơ vận tốc biến dạng trượt không gian. Chúng phụ thuộc vào hình dạng của phân tử lỏng. Các phương trình (8.16), (8.17) biểu diễn mối quan hệ giữa các biến dạng với các thành phần vận tốc chuyển động tịnh tiến.

Chuyển động quay của mỗi phân tử lỏng quanh trục tức thời đi qua nó gọi là chuyển động xoáy. Thực nghiệm cho ta thấy rằng chuyển động xoáy có thể xảy ra cục bộ trong chất lỏng.

Nếu  $\vec{\omega} = 0$  và quỹ đạo chuyển động của các phân tử lỏng này là những đường cong khép kín thì phân tử lỏng đó chuyển động quay vòng ; nghĩa là chất lỏng quay quanh trục nằm ngoài phân tử lỏng với vận tốc góc là :  $\vec{\Omega}$

Từ (8.16) , (8.17) suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \varepsilon_{zy} + \omega & ; & \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \varepsilon_{zx} + \omega_y \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= \varepsilon_{yx} + \omega_z & ; & \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \varepsilon_{yz} + \omega_x \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \varepsilon_{xy} + \omega_z & ; & \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \varepsilon_{xz} + \omega_y \end{aligned}$$

Thay (8.20) vào (8.10) :

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \varepsilon_{xx} dx + (\varepsilon_{xz} dz + \varepsilon_{xy} dy) + (\omega_y dz - \omega_z dy) \\ v_y &= v_{0y} + \varepsilon_{yy} dy + (\varepsilon_{yz} dz + \varepsilon_{yx} dx) + (\omega_z dx - \omega_x dz) \\ v_z &= v_{0z} + \varepsilon_{zz} dz + (\varepsilon_{zy} dy + \varepsilon_{zx} dx) + (\omega_x dy - \omega_y dx) \end{aligned} \quad (8.21)$$

Phương trình (8.21) chính là kết luận của Hemhôn : chuyển động của phân tử lỏng trong trường hợp tổng quát nó gồm các chuyển động sau: chuyển động tịnh tiến, chuyển động biến dạng (dài và trượt) và chuyển động quay.

### 8.3 - Khái niệm của dòng chất lỏng

Trong nghiên cứu chuyển động của chất lỏng người ta thường tiến hành trên dòng nguyên tố, sau đó mở rộng cho toàn dòng. Các khái niệm cơ bản về dòng chuyển động chất lỏng là :

#### 8.3.1- Đường dòng

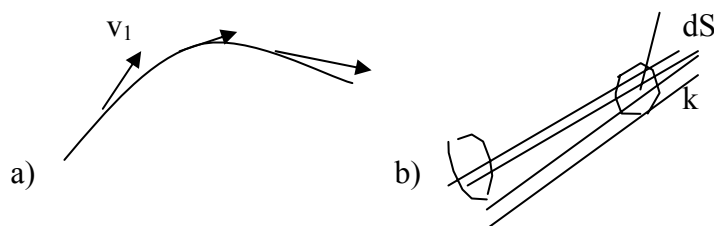
Đường dòng là đường cong mà tiếp tuyến của nó tại mỗi điểm trên đường này trùng với véctor vận tốc chuyển động của chất lỏng (hình 8 - 5a). nghĩa là véctor quãng đường trùng với véctor vận tốc :

$\vec{ds} \times \vec{v} = 0$   
 hay viết dưới dạng định thức bậc 3 :

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0 \quad \text{hay} \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (8.22)$$

### 8.3.2 Dòng nguyên tố

Tập hợp các đường dòng tựa lên một vòng kín vô cùng nhỏ tạo nên một ống dòng. Dòng chất lỏng chảy đây trong ống gọi là dòng nguyên tố (hình 8 - 5b).



Hình 8 - 5

Về ý nghĩa vật lý của dòng nguyên tố, nó biểu diễn phương chuyển động của chất lỏng tại một thời điểm và thể hiện sự phân bố các véctor vận tốc trong một khoảng khắc. Các tính chất của dòng nguyên tố:

- Dòng nguyên tố của chuyển động không dừng có hình dạng thay đổi theo thời gian.
- Chất lỏng trong dòng nguyên tố chỉ chuyển động dọc theo dòng nguyên tố không có hiện tượng chất lỏng chuyển động xuyên qua dòng nguyên tố.
- Trên tiết diện của dòng nguyên tố sự phân bố các thông số thủy động giống nhau.
- Chỉ trong chuyển động dừng thì quỹ đạo và đường dòng trùng nhau.

Đường dòng trong chuyển động phẳng được biểu diễn bởi hàm dòng  $\psi(x,y)$  mà :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.23)$$

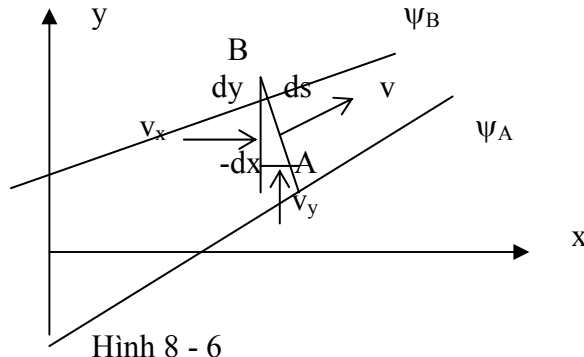
Thay (8.23) vào (8.22) :



$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial \psi}{\partial x}} \quad \text{hay} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \quad ; \quad d\psi = 0 \quad (8.24)$$

Nghĩa là dọc theo đường dòng giá trị của hàm số không thay đổi.

Ý nghĩa vật lý của hàm dòng (8.23) là lưu lượng chất lỏng chảy giữa hai đường dòng chính bằng hiệu giá trị của hai đường dòng.



Hình 8 - 6

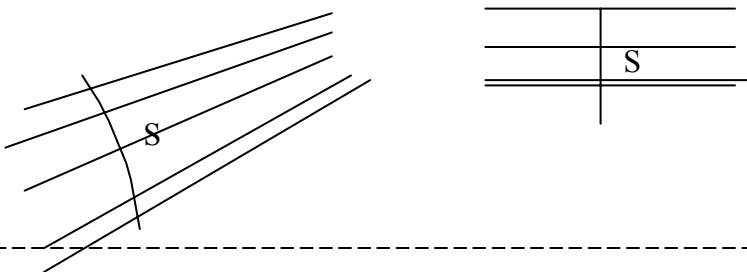
Thật vậy lưu lượng chảy giữa tiết diện AB của hai đường dòng  $\psi_A, \psi_B$  là :

$$Q = \int_{\psi_A}^{\psi_B} v_x \cdot dy - v_y \cdot dx = \int_{\psi_A}^{\psi_B} \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \int_{\psi_A}^{\psi_B} d\Psi = \Psi_B - \Psi_A$$

#### 8.4 Những khái niệm dòng thủy lực hữu hạn

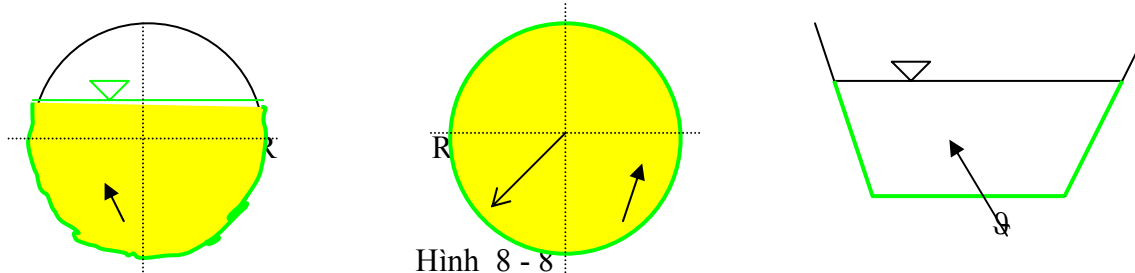
Dòng chảy bị giới hạn bởi các thành rắn là dòng hữu hạn, như dòng chảy trong ống tròn, trong kênh .... để có thể áp dụng các công thức chúng ta đưa ra các khái niệm như sau :

- Tiết diện ướt (ký hiệu là S) là mặt cắt thẳng góc với tất cả các đường dòng. Nếu dòng đều thì tiết diện ướt trùng với tiết diện của dòng chảy (hình 8 - 7a). Nếu dòng không đều - dòng thay đổi dần thì nó là mặt cong không gian (hình 8 - 7b).



Hình 8 - 7

- Chu vi ướt (ký hiệu là  $\vartheta$ ) : Đường giao tuyến giữa mặt cắt ướt và thành rắn của dòng chảy (hình 8 - 8).



Hình 8 - 8

- Bán kính thủy lực (ký hiệu là  $R_h$ ) là tỷ số giữa diện tích ướt và chu vi ướt:

$$R_h = \frac{S}{\vartheta} \quad (8.25)$$

Cần chú ý rằng bán kính thủy lực không phải là bán kính của ống tròn. Thật vậy :

$$R_h = \frac{\pi \cdot R^2}{2 \cdot \pi \cdot R} = \frac{R}{2} = \frac{d}{4}$$

- Lưu lượng (ký hiệu là  $Q$ ) là lượng chất lỏng chảy qua tiết diện ướt trong một đơn vị thời gian. Đối với dòng nguyên tố:

$$dQ = v \cdot dS \quad (8.26)$$

Cho toàn dòng :

$$Q = \int_S v \cdot dS \quad (8.27)$$

Muốn tích phân (8.27) phải biết được quy luật phân bố vận tốc trên tiết diện ướt. Nếu chúng ta dùng khái niệm vận tốc trung bình trên tiết diện ướt thì lưu lượng:

$$Q = v_{tb} S \quad (8.28)$$

suy ra 
$$v_{tb} = \frac{1}{S} \int_{(S)} v \cdot dS$$

8.5 - Khái niệm về chuyển động xoáy:

Chuyển động của phân tử lỏng thỏa mãn phương trình (8.3) thì gọi là chuyển động xoáy. Đường cong mà tiếp tuyến tại mỗi điểm của nó trùng với vectơ vận tốc góc của phân tử lỏng ở tại điểm đó gọi là đường xoáy. Vậy đường xoáy cũng chính là trục xoáy tức thời của những phân tử lỏng nằm trên đó (hình 8 - 9a) phương trình đường xoáy là :

$$\vec{\omega} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 0$$

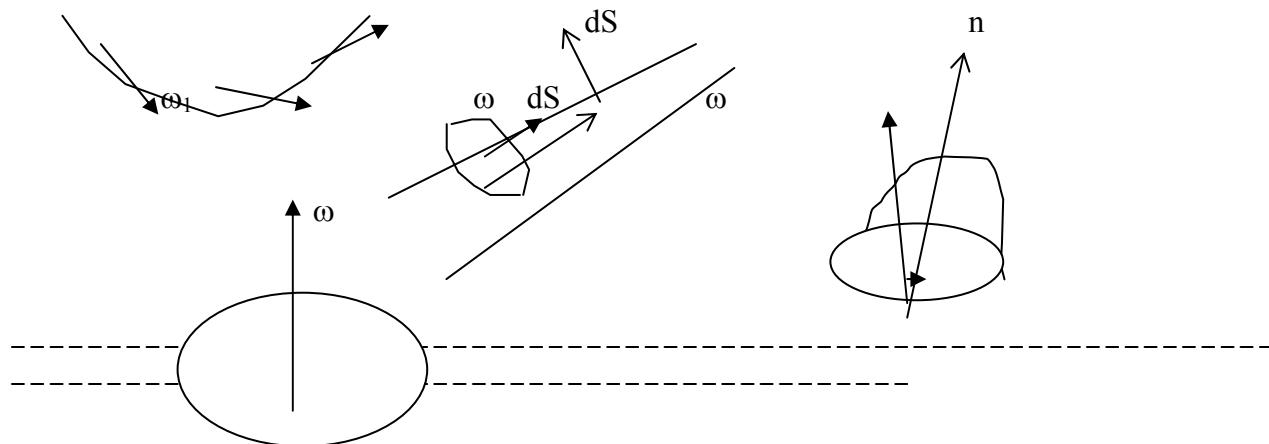
hay

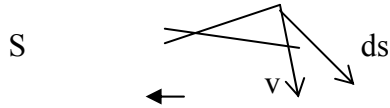
$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \tag{8.29}$$

trong đó  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  là những thành phần vectơ vận tốc góc theo các trục tọa độ. Chúng là hàm của không gian và thời gian.

Tập hợp những đường xoáy tựa lên một đường cong khép kín vô cùng nhỏ trong môi trường chất lỏng tạo thành ống xoáy nguyên tố. Chất lỏng chuyển động trong ống xoáy gọi là sợi xoáy (H 8.9b). Sợi xoáy có kích thước nhỏ nên vận tốc góc trên tiết diện có giá trị như nhau. Để tính cường độ sợi xoáy chúng ta phải xác định xircula (còn gọi là lưu số vận tốc hay lượng xoáy ký hiệu là  $\Gamma$ ). Đó là tích phân theo một đường cong khép kín của tích quãng đường tích phân và hình chiếu của vectơ vận tốc lên hướng của quãng đường đó :

$$\mathcal{Q} \quad \Gamma = \oint_{(k)} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{(k)} v \cdot ds \cdot \cos \alpha \tag{8.30}$$





Hình 8 .- 9

Thay tích phân theo đường cong khép kín bằng tích phân mặt :

$$\Gamma = \iint_{(S)} 2.\omega.dS \tag{8.31}$$

Công thức(8.31) là định lý Stóc. Nếu mặt S là hình tròn thì vận tốc chuyển động quay dọc theo đường tròn bán kính r sẽ không thay đổi và góc  $\alpha = 0$  . Lưu số vận tốc là :

$$\Gamma = 2.\omega \frac{1}{2} R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi = 2.\omega.\pi.R^2$$

$$\Gamma = 2.\omega.S \tag{8.32}$$

Trong chuyển động xoáy không gian (hình 8 - .9d) thì :

$$\oint_{(k)} v.ds = 2 \iint_{(S)} \vec{\omega} \cdot \vec{dS} = 2 \iint_{(S)} \vec{\omega} \cdot \vec{n}.dS \tag{8.33}$$

Ở đây k là đường cong không gian khép kín giới hạn mặt S. Trong tích phân mặt thì  $\vec{dS} = \vec{n}.dS$  ;  $\vec{n}$  là véctơ đơn vị của pháp tuyến với mặt S tại điểm xét. Trên hình 8 - 9b) nếu ở thời điểm xét trục của véctơ  $\vec{\omega}$  thẳng góc với  $\vec{n}$  , nghĩa là khi tính lưu số vận tốc theo đường cong khép kín k sẽ nằm trên bề mặt của sợi xoáy thì giá trị của sẽ bằng không .

☺

$$\Gamma = \oint_{(k)} v.ds = 2 \iint_{(S)} \vec{\omega} \cdot \vec{dS} = 2 \iint_{(S)} \omega.dS . \cos \alpha \tag{8.34}$$

Nếu đường cong k bao gồm các đường cong k1,k',k2,k" trên(hình 8 - 9a) hay trên (hình 8 - 9b) thì lưu số vận tốc cũng bằng không. Ta có  $\oint \Gamma_{2,3} = \Gamma_{4,1}$  nên  $\oint \Gamma_{1,2} = -\Gamma_{3,4}$  : ngược chiều nhau nên chúng triệt tiêu. Nếu k1,k2 nằm trên các mặt tiết diện của sợi xoáy và các đường cong cùng chiều thì:

☺

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{43} \tag{8.35}$$

Nghĩa là lưu số vận tốc ở tất cả các tiết diện của sợi xoáy đều có giá trị như nhau. Kết hợp với (8.32) ta có :

$$\varnothing \quad \Gamma = 2 \cdot \omega_1 \cdot S_1 = 2 \cdot \omega_2 \cdot S_2 = \dots = 2 \cdot \omega \cdot S \quad M = \omega \cdot S \quad (8.36)$$

trong đó M gọi là mô men xoáy, S là tiết diện của sợi xoáy.

Từ (8.36) suy ra mômen xoáy có giá trị không thay đổi dọc theo sợi xoáy. Các phương trình (8.34) , (8.35) , (8.36) là nội dung của các định lý Hémhôn về chuyển động xoáy của chất lỏng lý tưởng.

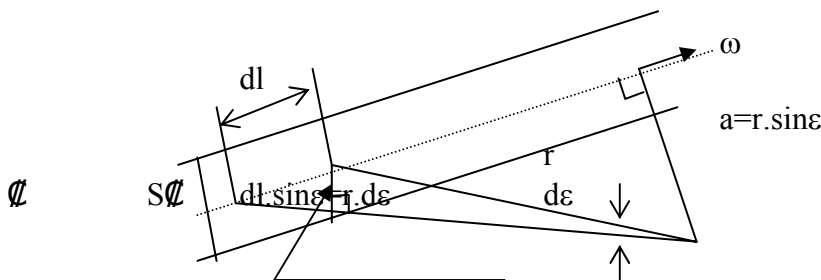
Sợi xoáy luôn luôn gây ra vận tốc cảm ứng tại các điểm trong chất lỏng bao quanh nó. Nói cách khác các sợi xoáy lôi cuốn một môi trường chất lỏng quanh nó cùng chuyển động với vận tốc cảm ứng (hình 8 - 10).

Sợi xoáy có vécto xoáy  $\vec{\omega}$  ; mômen của nó là  $M = \frac{\Gamma}{2}$  . Phân tố dl của sợi xoáy có lưu số vận tốc tương ứng là :  $\Gamma \cdot dl = 2 \cdot \omega \cdot S$  dl gây ra xung quanh nó trên một mặt cầu S bán kính r vận tốc cảm ứng dv. Từ phương trình (8.31) ta có :

$$\varnothing \quad \Gamma \cdot dl = S \cdot dv = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dv$$

Tại điểm M bán kính của nó tạo với sợi xoáy một góc  $\varepsilon$  . Từ phương trình trên ta có thành phần sin của phân tố sợi xoáy :

$$dv = \frac{\Gamma \cdot dl}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \sin \varepsilon = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot d\varepsilon$$



Hình 8 - 10

vì  $r \cdot d\varepsilon = dl \cdot \sin \varepsilon$  ; mà  $r = a / \sin \varepsilon$  nên :

$$dv = \frac{\Gamma}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \sin \varepsilon \cdot d\varepsilon$$

Tích phân phương trình trên với  $\varepsilon = 0$  đến  $\varepsilon = \pi$  ta sẽ có vận tốc cảm ứng tại M do sợi xoáy dài vô cùng gây ra:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi a} \int_0^\pi \sin \varepsilon d\varepsilon = \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (8.37)$$

Trong đó  $a$  là khoảng cách từ điểm xét đến sợi xoáy. Từ (8.37) ta cũng suy ra (8.32), trong đó  $v$  là vận tốc chuyển động của phân tử lỏng dọc theo đường tròn bán kính  $a$ . Công thức (8.37) cũng là định lý Biôsava để tính vận tốc cảm ứng trong chuyển động xoáy.

### 8.5 - Chuyển động không xoáy của chất lỏng lý tưởng

Diễn hình loại chuyển động này là dòng thế vận tốc. Từ (8.4) suy ra :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (8.38)$$

Nếu tồn tại một hàm  $\phi(x,y,z)$  mà

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (8.39)$$

thì  $\phi$  là nghiệm của (8.38).  $\phi$  gọi là hàm thế vận tốc. Vi phân toàn phần của nó là :

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad (8.40)$$

(8.40) là công của phân tử do một lực gây ra dịch chuyển phân tử này trên quãng đường  $ds$ . Đối với dòng thế phẳng thì hàm thế vận tốc là  $\phi(x, y)$ . So sánh (8.23) và (8.39) ta có:

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8.41)$$

Đây chính là phương trình Côsi-Riêman. Từ phương trình này ta thấy đường dòng và đường thế vận tốc trong chuyển động thế phẳng trực giao với nhau (hình 7 - 11)

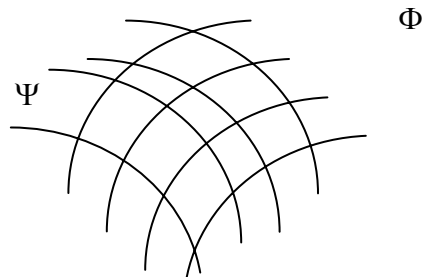
$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_\phi \cdot \left. \frac{dy}{dx} \right|_\psi = -1 \quad (8.42)$$

Bây giờ chúng ta chứng minh rằng dòng thế vận tốc là dòng không xoáy. Thay (8.39) vào (8.18). Ta có  $\text{rot } v = 0$ . Thấy vậy :

$$2\omega_z = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

$$2\omega_x = \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) = 0$$

$$2\omega_y = \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) = 0$$



Hình 7 - 11

## §9 - Các phương trình cơ bản

Các phương trình này chính là sự biểu diễn các định luật cơ bản của cơ học áp dụng cho chất lỏng.

### 9.1 - Phương trình quá trình

Định luật thứ nhất của nhiệt động kỹ thuật cho chất khí lý tưởng trong quá trình thuận nghịch được biểu diễn bằng phương trình (cho 1kg chất khí) :

$$dq = T.ds = du + pdv = c_v dT + p.d\left(\frac{1}{\rho}\right) = di - \frac{dp}{\rho} \quad (9.1)$$

trong đó s là entropi.

Phương trình trạng thái viết dưới dạng vi phân :

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} \quad \text{hay} \quad \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} \quad (9.2)$$

Từ phương trình (9.1) suy ra :

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Thay giá trị  $\frac{dT}{T}$  từ (9.2) phương trình trạng thái  $p = \rho \cdot r \cdot T$  và  $r = c_v (k-1)$  ta có :

$$ds = c_v \left[ \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} + (k-1) \cdot \rho \cdot d\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \quad (9.3)$$

hay:

$$ds = c_v [ d(\ln p) - k d(\ln \rho) ] \quad (9.4)$$

Tích phân (9.4) :

$$ds = c_v \cdot d \left[ \ln \left( \frac{p}{\rho^k} \right) \right]$$

$$s - s_1 = c_v \left( \ln \frac{p}{\rho^k} - \ln \frac{p_1}{\rho_1^k} \right) \quad (9.5)$$

Suy ra :

$$\frac{p}{p_1} = \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^k e^{\frac{s-s_1}{c}} \quad (9.6)$$

Phương trình (9.2) được viết thành :  $d(\ln p) = d(\ln T) + d(\ln \rho)$  ;. thay vào (9.4) và tích phân :

$$ds = c_v \cdot [d(\ln T) + d(\ln \rho - k \cdot d(\ln \rho))] = c_v \cdot (k-1) d \left[ \frac{1}{k-1} \ln T - \ln \rho \right] = r \cdot d \left( \ln \frac{T^{\frac{1}{k-1}}}{\rho} \right)$$

Tích phân :

$$s - s_1 = r \left( \ln \frac{T^{\frac{1}{k-1}}}{\rho} - \ln \frac{T_1^{\frac{1}{k-1}}}{\rho_1} \right) \quad (9.7)$$

hay :

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{T^{\frac{1}{k-1}}}{T_1^{\frac{1}{k-1}}} \cdot e^{-\frac{s-s_1}{r}} \quad (9.8)$$



Trong các phương trình trên chỉ số 1 chỉ trạng thái ban đầu.

Trong hệ cô lập hữu hạn bất kỳ quá trình nào xảy ra đều theo chiều tăng entropi. Ví dụ :trong quá trình đoạn nhiệt lý tưởng  $\frac{p}{\rho^k} = const$  . Thay vào phương trình (9.7) ta có :

$$s_2 - s_1 = c_v(k-1) \left[ \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] = c_v(k-1) \left[ \ln \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \right] = c_v(k-1) \left[ \ln \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \right]$$

Nếu hệ cô lập không trao đổi nhiệt với bên ngoài thì ( $T_2=T_1$ ) :

$$s_2 - s_1 = r \left[ \ln \frac{p_1}{p_2} \right]$$

Vì có tổn thất nên  $p_2 < p_1$  suy ra  $s_2 > s_1$ , nghĩa là entropi luôn luôn tăng trong quá trình thuận nghịch.

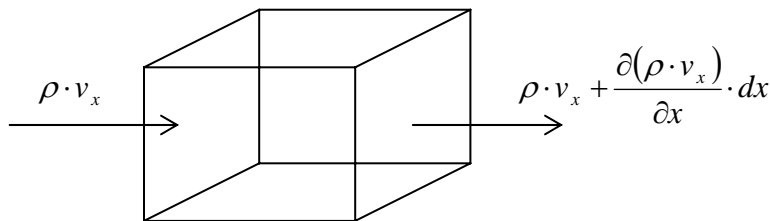
### 9.2 - Phương trình liên tục

Trong không gian bảo lưu (ở đó không có điểm nguồn , điểm hút và ở đó không thực hiện các phản ứng hoá học tiêu hao hay cung cấp chất lỏng) chúng ta khảo sát chuyển động của chất lỏng chảy qua khối hộp có các cạnh cố định  $dx, dy, dz$  trong hệ tọa độ  $oxyz$  (hình 9 - 1).

Sau thời gian  $dt$  khối lượng chất lỏng chảy vào khối hộp này là  $m_1$  và chảy ra là  $m_2$  , khối lượng chất lỏng còn lại trong khối hộp này là :  $\Delta m = m_1 - m_2$  .

Tính theo phương  $x$  , khối lượng chảy vào  $m_{1x} = \rho \cdot v_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt$  ;  
chảy ra :

$$m_{2x} = \left[ \rho \cdot v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right] dy \cdot dz \cdot dt$$



Hình 9 - 1

và 
$$dm_x = m_{2x} - m_{1x} = -\frac{\partial(\rho.v_x)}{\partial x} dx.dy.dz.dt$$

Tương tự đối với trục y, trục z :

$$dm_y = -\frac{\partial(\rho.v_y)}{\partial y} dx.dy.dz.dt \quad ; \quad dm_z = -\frac{\partial(\rho.v_z)}{\partial z} dx.dy.dz.dt$$

Khối lượng chất lỏng còn lại trong khối hộp là :  $dm = dm_x + dm_y + dm_z$

$$dm = -\left[ \frac{\partial(\rho.v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.v_z)}{\partial z} \right] dx.dy.dz.dt$$

Sự thay đổi thể tích chất lỏng trong khối hộp là do sự thay đổi khối lượng riêng của chất lỏng theo thời gian bởi vì các cạnh của khối hộp cố định (theo định luật bảo toàn khối lượng).

Khối lượng chất lỏng trong hộp :

$$m = \rho.V = \rho.dx.dy.dz$$

Sau thời gian dt sẽ có sự thay đổi :

$$dm = \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx.dy.dz.dt$$

Sau khi đơn giản các số hạng giống nhau chúng ta có phương trình liên tục:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.v_z)}{\partial z} = 0 \tag{9.9}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Nếu chất lỏng chuyển động dừng ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) thì :

$$\frac{\partial(\rho.v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho.v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho.v_z)}{\partial z} = 0 \tag{9.11}$$

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Nếu chất lỏng không nén được ( $\rho = \text{const}$ ) và chuyển động ổn định :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{9.12}$$

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

Phương trình liên tục viết trong hệ tọa độ trụ (r, z) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho.v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho.v_r)}{\partial r} = 0 \tag{9.13}$$

trong đó :

$$v_z = \frac{dz}{dt} \quad ; \quad v_r = \frac{dr}{dt} \quad ; \quad v_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{r.dt}$$

Phương trình liên tục cho dòng nguyên tố chuyển động không dừng chất lỏng nén được :

$$\frac{\partial(\rho.S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho.v.S)}{\partial l} = 0 \tag{9.14}$$

- Nếu chuyển động dừng :

$$\frac{\partial(\rho.v.S)}{\partial l} = 0 \quad \text{hay} \quad \rho.v.S = \text{const} \tag{9.15}$$

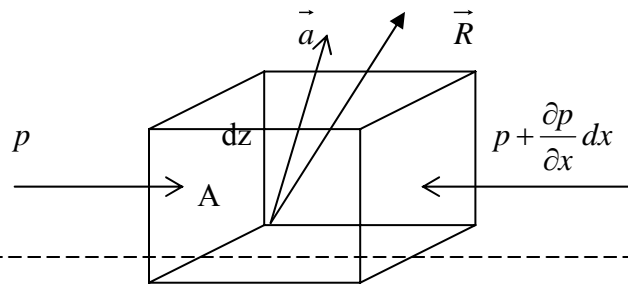
- Nếu chuyển động dừng và chất lỏng không nén được

$$\frac{\partial(v.S)}{\partial l} = 0 \quad \text{hay} \quad \rho v.S = \text{const} \tag{9.16}$$

Nếu chất lỏng là chất lỏng thực thì vận tốc trong dòng một chiều hữu hạn sẽ là vận tốc trung bình trên tiết diện ướt.

### 9.3 - Phương trình Ole thủy động

Trong chất lỏng lý tưởng chuyển động chúng ta trích một phân tử lỏng có dạng khối hộp với các cạnh là dx, dy, dz (hình 9 - 2). Các lực tác dụng lên phân tử lỏng chuyển động gồm có lực áp, lực khối và lực quán tính.



dx            dy

Hình 9 – 2

Áp suất tác dụng lên các mặt khối hộp tại điểm A là :  $p_x = p_y = p_z = p$  ; ở các mặt đối diện áp suất thay đổi một đại lượng bằng :

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad ; \quad p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad ; \quad p + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Thành phần lực áp theo các trục tọa độ là :

$$dF_{px} = p \cdot dy \cdot dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz$$

$$dF_{py} = p \cdot dz \cdot dx - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dz \cdot dx$$

$$dF_{pz} = p \cdot dx \cdot dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx \cdot dy$$

Các thành phần lực khối của gia tốc khối R là :

$$dF_{Rx} = R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad ; \quad dF_{Ry} = R_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad ; \quad dF_{Rz} = R_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Lực quán tính :

$$dF_{ax} = a_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad ; \quad dF_{ay} = a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad ; \quad dF_{Ra} = a_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Phân tử lỏng cân bằng theo nguyên lý Đalămbe . Phương trình cân bằng phân tử lỏng viết theo các trục tọa độ là:

$$p \cdot dy \cdot dz - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz + R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - a_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$p \cdot dz \cdot dx - \left( p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) dz \cdot dx + R_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

$$p \cdot dx \cdot dy - \left( p + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) dx \cdot dy + R_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - a_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

hay :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + R_x = a_x.$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + R_y = a_y.$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + R_z = a_z$$

Các gia tốc  $a_x, a_y, a_z$  được tính như sau :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Cuối cùng chúng ta có phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng lý tưởng do Ôle chứng minh năm 1775:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \tag{9.16}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

hay viết dưới dạng véctơ:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \vec{v} = \vec{R} - \frac{1}{\rho} \text{grapp} \tag{9.17}$$

Nếu chuyển động dừng thì ta có phương trình :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \vec{v} = \vec{R} - \frac{1}{\rho} \text{grapp} \tag{9.18}$$

Nếu chất lỏng chuyển động đều thì chúng ta có phương trình Ôle thủy tĩnh. Trong trường hợp này áp suất cũng phân bố theo qui luật thủy tĩnh. Phương trình (9.16) có thể áp dụng cho bài toán chuyển động tương đối. Chỉ cần lưu ý rằng gia tốc khối lúc này gồm có gia tốc khối có thể, gia tốc quán tính của chuyển động theo, gia tốc Côriôlít. (9.18) sẽ là :

$$\vec{v}grad\vec{v} = \vec{R} + \vec{a}_w + \vec{a}_{cor} - \frac{1}{\rho} grapp \quad (9.19)$$

Phương trình Ôle thủy động viết trong hệ tọa độ trụ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} &= R_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial z} + \frac{v_r \cdot v_\varepsilon}{r} &= R_\varepsilon - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \cdot \partial \varepsilon} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varepsilon}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varepsilon} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (9.20)$$

trong đó  $R_z, R_\varepsilon, R_r$  là hình chiếu của gia tốc khối lên các trục tọa độ. Gia tốc hướng kính gồm có gia tốc quán tính của chuyển động  $\frac{dv_r}{dt}$  và gia tốc quán tính ly tâm  $-\frac{v_\varepsilon^2}{r}$  :

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} - \frac{v^2}{r}$$

Gia tốc theo phương thẳng góc với bán kính gồm gia tốc chuyển động theo và gia tốc Côriôlít :

$$a_\varepsilon = \frac{dv_\varepsilon}{dt} = r \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} + 2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{d(r \cdot \varepsilon)}{dt} = \frac{v_r \cdot v_\varepsilon}{r} + \frac{dv_\varepsilon}{dt}$$

ở đây vận tốc hướng tâm  $v_r = \frac{dr}{dt}$  vận tốc vòng  $v_\varepsilon = r \frac{d\varepsilon}{dt}$ .

#### 9.4 - Phương trình Naviê - Stốc

Trong chuyển động của chất lỏng thực xuất hiện ứng suất tiếp giữa các chất lỏng. Đối với dòng một chiều chảy tầng ứng suất tiếp được tính theo công thức Niuton. Trong dòng không gian vận tốc phân bố theo các phương khác nhau sẽ có giá trị khác nhau, nên ứng suất tiếp tương đương sẽ được tính :

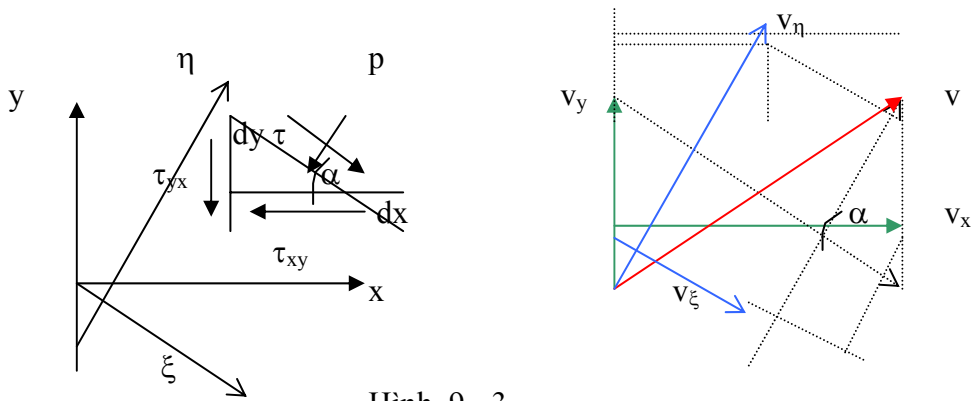
$$\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \tag{9.21}$$

Do xuất hiện ứng suất tiếp nên trong chất lỏng thực áp suất thủy động chỉ hướng vào mặt tác dụng nhưng không thẳng góc với nó. Thành phần pháp tuyến của áp suất thủy động được tính theo công thức (8.5). Trong đó áp suất thành phần theo ba phương thẳng góc với nhau là  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  được tính theo công thức :

$$p_x = p + \sigma_x ; p_y = p + \sigma_y ; p_z = p + \sigma_z \tag{9.22}$$

trong đó  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  là thành phần bổ sung,  $p$  là "áp suất thủy động quy ước".

Xét phân tử lỏng có cạnh là  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  và chiều cao là  $dz$  ở trạng thái cân bằng (hình 9.3).



Hình 9 - 3

Vì phân tử rất nhỏ, lực khối là tích bậc ba của đại lượng vô cùng nhỏ nên chúng ta có thể bỏ qua. Lực mặt tác dụng lên phân tử được tính theo các ứng suất từ (9.21 và 9.22). Chúng ta vẽ thêm hệ tọa độ ( $\xi$ ,  $\eta$ ). Trong đó trục song song với cạnh  $ds$  trục  $\eta$  thẳng góc với  $ds$ . Phương trình cân bằng lực theo phương  $\xi$  (hình 9 - 3) :

$$\tau \cdot ds \, dz = \tau_{xy} (dx \, dz \cos \alpha - dy \, dz \sin \alpha) + p_y \, dy \, dz \sin \alpha - p_x \, dy \, dz \cos \alpha$$

Từ (hình 9.3a) ta có  $dx = ds \cdot \cos \alpha$  ,  $dy = ds \cdot \sin \alpha$  thì phương trình trên được viết thành :

$$\tau = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (p_y - p_x) \cdot \sin \alpha \cos \alpha \quad (9.23)$$

$\tau_{xy}$  được tính theo (9.21) và  $\tau$  cũng được tính theo gradient vận tốc :

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} \right) \quad (9.24)$$

Để tính  $\tau$  theo  $v_x, v_y$  ta cần xác định  $\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta}; \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}$  theo  $x, y, v_x, v_y$  . Trước hết ta xác định  $dv_\xi$  .

$$dv_\xi = \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial v_\xi}{\partial x} dx + \frac{\partial v_\xi}{\partial y} dy \quad (9.25)$$

từ (hình 9-3b) ta có quan hệ giữa các vận tốc :

$$v_\xi = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha ; v = v_x \sin \alpha - v_y \cos \alpha$$

và quan hệ các tọa độ :

$$x = \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha ; y = \eta \cos \alpha - \xi \cdot \sin \alpha \quad (9.26)$$

Tính  $dx, dy$  từ (9.26) rồi thay vào (9.25) và thực hiện phép biến đổi đơn giản ta có

$$dv_\xi = \left( \frac{\partial v_\xi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v_\xi}{\partial y} \sin \alpha \right) d\xi + \left( \frac{\partial v_\xi}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial v_\xi}{\partial y} \cos \alpha \right) d\eta$$

So sánh phương trình này với (9.25) ta có :

$$\frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} = \frac{\partial v_\xi}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial v_\xi}{\partial y} \cos \alpha$$

lấy đạo hàm  $\frac{\partial v_\xi}{\partial x}; \frac{\partial v_\xi}{\partial y}$  từ phương trình tính vận tốc  $v$  :



$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} &= \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial v_y}{\partial x} \sin \alpha \right) \sin \alpha + \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial v_y}{\partial y} \sin \alpha \right) \cos \alpha \\ &\left( \frac{\partial v_x}{\partial y} \cos^2 \alpha - \frac{\partial v_y}{\partial x} \sin^2 \alpha \right) + \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (9.27)$$

Thực hiện theo trình tự trên để tính  $\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi}$ . Đạo hàm toàn phần  $dv_\eta$  :

$$dv_\eta = \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial v_\eta}{\partial x} dx + \frac{\partial v_\eta}{\partial y} dy \quad (9.28)$$

Tính  $dx, dy$  từ (9.26) rồi thay vào (9.28) và thực hiện biến đổi. Ta có :

$$\begin{aligned} dv_\eta &= \frac{\partial v_\eta}{\partial x} (\cos \alpha d\xi + \sin \alpha d\eta) + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} (\cos \alpha d\eta - \sin \alpha d\xi) \\ &= \left( \frac{\partial v_\eta}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial v_\eta}{\partial y} \sin \alpha \right) d\xi + \left( \frac{\partial v_\eta}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial v_\eta}{\partial y} \cos \alpha \right) d\eta \end{aligned} \quad (9.29)$$

So sánh (9.28) và (9.29) ta có :

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} = \frac{\partial v_\eta}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial v_\eta}{\partial y} \sin \alpha$$

Lấy đạo hàm  $\frac{\partial v_\eta}{\partial x}; \frac{\partial v_\eta}{\partial y}$  từ phương trình vận tốc  $v$  và thế vào phương trình trên :

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \cos^2 \alpha - \frac{\partial v_x}{\partial y} \sin^2 \alpha \right) - \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \alpha \cos \alpha \quad (9.30)$$

Thay (9.27), (9.30) vào (9.24) :

$$\tau = \mu \left[ \frac{\partial v_y}{\partial x} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \frac{\partial v_x}{\partial y} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \alpha \cos \alpha \right]$$

Kết hợp với (9.21) ta có :

$$\tau = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (9.31)$$

Thay (9.31) vào (9.23) sau khi đơn giản và chứng minh tương tự cho các hệ tọa độ khác. Ta có :

$$\begin{aligned} p_y - p_x &= 2\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ p_z - p_y &= 2\mu \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ p_x - p_z &= 2\mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9.32)$$

Từ (9.32) suy ra áp suất thủy động quy ước (8.7). Từ đó suy ra công thức tính các áp suất theo các trục tọa độ :

$$\begin{aligned} p_x &= p + \frac{2}{3} \mu \cdot \text{div} \vec{v} - 2\mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \\ p_y &= p + \frac{2}{3} \mu \cdot \text{div} \vec{v} - 2\mu \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ p_z &= p + \frac{2}{3} \mu \cdot \text{div} \vec{v} - 2\mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (9.34)$$

Từ (9.34) ta có các giá trị bổ sung của áp suất thủy động theo phương pháp tuyến trong chất lỏng thực. Trong chất lỏng thực ta trích một phân tử lỏng có dạng khối hộp với các cạnh  $dx, dy, dz$  và được đặt trong hệ tọa độ Oxyz (H 9.4). Phân tử lỏng này chịu tác dụng bởi lực khối lực áp suất theo phương pháp tuyến, lực ma sát là lực quán tính chuyển động. Các lực này được tính lần lượt như sau.

Thành phần của lực khối :

$$dF_{R_x} = R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz ; \quad dF_{R_y} = R_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz ; \quad dF_{R_z} = R_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Thành phần của lực quán tính :

$$dF_{ax} = -a_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz ; \quad dF_{ay} = -a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz ; \quad dF_{az} = -a_z \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Lực áp :

$$dF_{px} = p_x \cdot dy \cdot dz - \left( p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz = -\frac{\partial p_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz$$

$$dF_{py} = p_y \cdot dz \cdot dx - \left( p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \right) dz \cdot dx = -\frac{\partial p_y}{\partial y} dy \cdot dx \cdot dz$$

$$dF_{pz} = p_z \cdot dx \cdot dy - \left( p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right) dx \cdot dy = -\frac{\partial p_z}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy$$

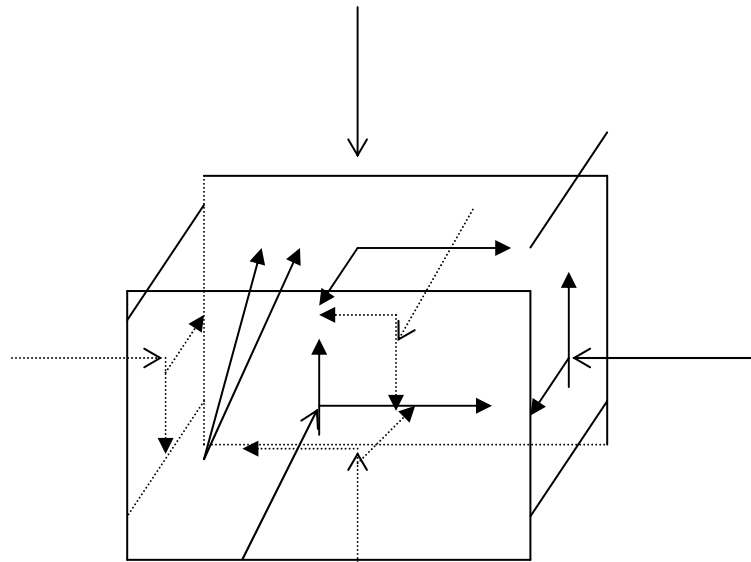
Lực ma sát :

$$dF_{\tau_x} = -\tau_{yi} \cdot dx \cdot dz + \left( \tau_{yi} + \frac{\partial \tau_{yi}}{\partial y} dy \right) dx \cdot dz - \tau_{zi} \cdot dy \cdot dx + \left( \tau_{zi} + \frac{\partial \tau_{zi}}{\partial z} dz \right) dy \cdot dx$$

$$= \left( \frac{\partial \tau_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zi}}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz$$

$$dF_{\tau_y} = \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz$$

$$dF_{\tau_z} = \left( \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \right) dx \cdot dy \cdot dz$$



Hình 9.4

Phương trình cân bằng chuyển động của phần tử này theo trục ox :

$$dF_{Rx} + dF_{px} + dF_{\tau x} + dF_{ax} = 0$$

hay :

$$R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz + \left( \frac{\partial \tau_{yi}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zi}}{\partial z} \right) dx \cdot dy \cdot dz - a_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Lấy đạo hàm  $\frac{\partial p_x}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial \tau_{yi}}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial \tau_{zi}}{\partial z}$  từ (9.21) và  $a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$  thế vào phương trình trên . Ta có :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} v \frac{\partial}{\partial x} (\text{div} \vec{v}) + v \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \quad (9.35.)$$

Chứng minh tương tự cho các trục y,z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} v \frac{\partial}{\partial y} (\text{div} \vec{v}) + v \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3} v \frac{\partial}{\partial z} (\text{div} \vec{v}) + v \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (9.35)$$

hay viết dưới dạng véctơ :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} \vec{v} = \vec{R} + \vec{a}_w + \vec{a}_{cor} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \frac{1}{3} v \cdot \text{grad} (\text{div} \vec{v}) + v \cdot \Delta \vec{v} \quad (9.36)$$

Hệ phương trình (9.35) hoặc (9.36) là phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng thực. Nếu  $v = 0$  phương trình (9.35) sẽ thành (9.16). Nếu chuyển động dừng  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  thì dù  $v \neq 0$

thì trong mặt cắt ứớt của dòng chảy áp suất thủy động sẽ phân bố theo quy luật thủy tĩnh. Trong dòng chảy biến đổi chậm ồng có độ cong không đáng kể thì kết luận này vẫn đúng. Do tính chất phi tuyến của hệ phương trình (9.36) đến nay chúng ta chưa có được một cách giải tổng quát. Trong kỹ thuật người ta áp dụng phương trình này để giải một số bài toán có điều kiện biên đơn giản, hoặc bằng một số giả thuyết nhất định để giảm bớt một số số hạng của phương trình mà không ảnh hưởng đến kết quả tính toán. Để có hệ phương trình xác định người ta kết hợp thêm phương trình liên tục, phương trình trạng thái, phương trình chuyển hoá của các quá trình. Các ẩn số của hệ phương trình này là  $v_x, v_y, v_z, p, \rho$ . Chúng là những đại lượng phụ thuộc vào không gian và thời gian. Nếu chất lỏng không nén được và chuyển động dừng thì ta có hệ phương trình:

$$\begin{aligned}
 v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= R_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\
 v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= R_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\
 v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= R_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)
 \end{aligned} \tag{9.37}$$

### 9.5. Phương trình Hemhôn

Để nghiên cứu chuyển động xoáy Hemhôn biết thực hiện các biến đổi phương trình chuyển động, đưa các đại lượng đặc trưng chuyển động xoáy vào phương trình.

Từ  $\vec{rotv} = 2\vec{\omega}$  và (8.18) ta có :

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = 2\omega_y + \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = -2\omega_z + \frac{\partial v_y}{\partial z} \tag{9.39}$$

Thay (9.39) và  $R_x = \frac{\partial U}{\partial x}$  vào phương trình thứ nhất của (9.37) cho chất lỏng không nén được ( $\rho = const; \vec{divv} = 0$ ):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} - 2\omega_z \cdot v_y + 2\omega_y \cdot v_z = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \tag{9.40}$$

Ta có :  $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right)$

Ký hiệu :  $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U \right)$

Phương trình (9.40) được viết lại :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - 2\omega_z \cdot v_y + 2\omega_y \cdot v_z = - \frac{\partial F}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \tag{9.41a}$$

Biến đổi tương tự cho phương trình thứ hai (9.37) :

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} - 2\omega_x \cdot v_z + 2\omega_z \cdot v_x = - \frac{\partial F}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \tag{9.41b}$$

Lấy đạo hàm phương trình (9.41a) theo y và phương trình (9.41b) theo x, rồi lấy phương trình hai trừ cho phương trình thứ nhất. Ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + 2.v_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + 2.v_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - 2.v_z \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) + 2.\omega_z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\ & - 2. \left( \omega_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \omega_x \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) = v \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

Cộng và trừ phương trình trên với :  $\pm 2.v_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \pm 2.\omega_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + v_y \frac{\partial \omega_z}{\partial z} - v_z \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) + \omega_z \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ & - \left( \omega_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \omega_x \frac{\partial v_z}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = v \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Vi :

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + v_y \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{d\omega_z}{dt}$$

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \operatorname{div} \left( \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

nên phương trình (9.42) là :

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \omega_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \omega_x \frac{\partial v_z}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) \quad (9.43a)$$

Chứng minh tương tự cho các trục quay y , x :

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \omega_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \omega_x \frac{\partial v_y}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial z^2} \right) \quad (9.43b)$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \omega_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \omega_x \frac{\partial v_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + v \left( \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) \quad (9.43c)$$

Viết phương trình này theo vectơ :

-----

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\omega} \cdot \text{grad} \vec{v} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad (9.44)$$

Từ phương trình Hémhôn chúng ta thấy rằng: đối với chất lỏng lý tưởng ( $\nu=0$ ), nếu xuất hiện chuyển động xoáy thì nó sẽ không tự mất đi. Nếu dòng chuyển động không xoáy thì vẫn xuất hiện chuyển động xoáy cục bộ và nó cũng không mất đi và không lan truyền trong chất lỏng, nó chỉ gồm những phần tử nhất định.

Đối với chất lỏng thực khi có chuyển động xoáy thì cường độ xoáy bị giảm do ma sát. Các xoáy chỉ bắt đầu và kết thúc ở trên bề mặt phân cách giữa chất lỏng và môi trường, hoặc các xoáy tạo thành những vòng xoáy khép kín. Hình dạng sợi xoáy có thay đổi thì nó cũng chỉ gồm những phần tử lỏng đã tham gia chuyển động xoáy.

## 9.6 Phương trình Bernoulli

Việc giải hệ phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng lý tưởng rất phức tạp. Trong kỹ thuật để giải các bài toán chuyển động của dòng chảy có kích thước hữu hạn chất lỏng chuyển động dọc theo chiều dòng chảy. Bernoulli đã tích phân từ phương trình Ôle dọc theo chiều dòng chảy và được một phương trình gọi là phương trình năng lượng. Chúng ta sẽ chứng minh phương trình đó như sau.

### 8.6.1 Phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng

Chúng ta nhận thấy trong phương trình (9.16) các đại lượng đều biểu diễn lực đơn vị tác dụng lên một đơn vị khối lượng chất lỏng đang chuyển động. Nếu chúng ta nhân với quãng đường dịch chuyển thì sẽ thu được công đơn vị. Trước hết chúng ta thực hiện theo phương  $x$ , nhân phương trình thứ nhất của (9.16) với  $dx$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) dx = R_x dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Biểu thức trong ngoặc đơn là năng lượng chuyển động của chất lỏng. Nó gồm năng lượng chuyển động tịnh tiến và năng lượng chuyển động quay. Để tách riêng chúng ra chúng ta cộng và trừ vào

phương trình này với biểu thức:  $\pm v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} dx \pm v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} dx$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_y}{\partial t} dx + \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dx + v_y \left( v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dx + v_z \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dx \\ & = R_y .dx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} .dx \end{aligned} \quad (9.45)$$

Biểu thức trong ngoặc đơn thứ nhất chính là năng lượng chuyển động tịnh tiến của phân tử lỏng dọc theo trục x, biểu thức trong ngoặc đơn thứ hai là  $2\omega_z$  và biểu thức trong ngoặc đơn thứ ba là  $2.\omega_y$  . Gia tốc khối R được phân tích thành hai thành phần ; gia tốc khối có thể  $R^*$  và gia tốc Côriôlít  $R_c$  . Các thành phần của chúng theo các trục tọa độ:

$$R_{tx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad ; R_{ty} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad ; R_{tz} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$R_{cx} = 2 (v_y \Omega_0 - v_z \Omega_y) ; R_{cy} = 2 (v_z \Omega_x - v_x \Omega_z) ; R_{xz} = 2 (v_x \Omega_y - v_y \Omega_x)$$

Trong đó  $\Omega$  là vận tốc góc của chuyển động quay vòng.

Thay tất cả các giá trị này vào phương trình (9.45) và thực hiện một số biến đổi nhỏ ta có :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} dx + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v^2}{2} \right) dx + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial x} dx + 2.(v_y .\omega_z - v_z .\omega_y) dx + 2.(v_y .\Omega_z - v_z .\Omega_y) dx = 0 \quad (9.46a)$$

Tương tự như thế ta có thể viết phương trình năng lượng đơn vị theo các trục tọa độ y,z.

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^2}{2} \right) dy + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial y} dy + 2.(v_z .\omega_x - v_x .\omega_z) dy + 2.(v_x .\Omega_z - v_z .\Omega_x) dy = 0 \quad (9.46b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} dz + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v^2}{2} \right) dz + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz - \frac{\partial U}{\partial z} dz + 2.(v_x .\omega_y - v_y .\omega_x) dz + 2.(v_x .\Omega_y - v_y .\Omega_x) dz = 0 \quad (9.46c)$$

Năng lượng toàn bộ của phân tử lỏng chuyển động là tổng các năng lượng theo các trục tọa độ. Sau khi cộng (9.46a) , (9.46b) , (9.46c) và thực hiện biến đổi đơn giản ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + d \left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} - dU + 2.[(v_y .dz - v_z .dy)(\omega_x + \Omega_z) + (v_z .dx - v_x .dz)(\omega_y + \Omega_y) + \\ & + (v_x .dy - v_y .dx)(\omega_z + \Omega_z)] = 0 \end{aligned} \quad (9.47)$$



$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} - dU +$$

$$+ 2 \left\{ v_x [(\omega_z + \Omega_z)dy - (\omega_z + \Omega_z)dz] + v_y [(\omega_x + \Omega_x)dz - (\omega_x + \Omega_x)dx] + \right.$$

$$\left. + v_x [(\omega_y + \Omega_y)dx - (\omega_x + \Omega_x)dy] \right\} = 0 \quad (9.48)$$

Để nghiên cứu chuyển động của các dòng chất lỏng chúng ta thực hiện tích phân (9.47) hoặc (9.48) theo các điều kiện cụ thể.

a. Tích phân dọc theo đường dòng

Từ (8.18) ta có :  $v_x dy - v_y dx = 0$  ;  $v_y dz - v_z dy = 0$  ;  $v_z dx - v_x dz = 0$  . Thay các biểu thức này vào (9.47) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} - dU = 0 \quad (9.49)$$

Tích phân (9.49) dọc theo đường dòng:

$$\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + \int d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \int \frac{dp}{\rho} + \int dU = const \quad (9.50)$$

hay :

$$\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = const \quad (9.51)$$

Đối với chất lỏng không nén được ( $\rho = const$ )

$$\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = const$$

Nếu lực khối có thể chỉ là trọng lực ( $R_z = -g$ ) ;  $U = -g.z$

$$\int \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const \quad (9.52)$$

Phương trình (9-52) viết cho hai điểm trên đường dòng :

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (9.53)$$

trong đó :

$$gh_{qt} = \int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} \tag{9.54}$$

gọi là năng lượng quán tính đơn vị của dòng chất lỏng nhanh dần đều hay chậm dần đều. Nó chính là năng lượng đơn vị bị tiêu hao để khắc phục lực quán tính trên chiều dài của dòng chảy.

$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$  Sự thay đổi động năng giữa hai điểm hoặc còn gọi là năng lượng để làm 1kg chất lỏng thay đổi vận tốc từ  $v_1$  sang  $v_2$  - gọi là động năng đơn vị.

$\frac{p_2 - p_1}{\rho}$  Sự thay đổi áp năng, chính là năng lượng chuyển 1kg chất lỏng từ áp suất  $p_1$  sang áp suất  $p_2$  - gọi là áp năng đơn vị.

$g(z_2 - z_1)$  Năng lượng để chuyển 1kg chất lỏng từ điểm có thế năng  $g.z_1$  của ngoại lực sang điểm có thế năng  $g.z_2$  - gọi là vị năng đơn vị.

b. Tích phân theo quỹ đạo bất kỳ

Điều kiện để có thể tích phân được là  $\omega = -\Omega$ . Đây cũng chính là điều kiện để tồn tại dòng thế vận tốc. Như vậy các thành phần của vận tốc được tính theo công thức (8.39) ta có :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad ; \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad ; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) dz = d \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

và thay vào phương trình (9.47) :

$$d \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + d \left( \frac{v^2}{2} \right) + \frac{dp}{\rho} - dU = 0 \tag{9.55}$$

Tích phân (9.55) ta có :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} - U = C(t) \tag{9.56}$$

nếu  $\rho = \text{const}$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - U = C(t) \quad (9.57)$$

trong đó  $C(t)$  là hằng số chỉ phụ thuộc vào thời gian.

Biểu thức (9.56) là năng lượng toàn phần của một đơn vị khối lượng chất lỏng. Từ phương trình (9.57) ta thấy rằng trong dòng thế vận tốc chất lỏng lý tưởng, năng lượng toàn phần của một đơn vị khối lượng chất lỏng không phụ thuộc vào tọa độ không gian. Tại mỗi điểm trong chất lỏng chỉ có một giá trị năng lượng toàn phần. Như vậy sự thay đổi năng lượng toàn phần của dòng thế vận tốc không dừng sẽ xảy ra đồng thời và như nhau tại mọi điểm trong toàn miền chất lỏng.

Phương trình (9.57) viết cho hai điểm bất kỳ trong dòng chảy ở một thời điểm xác định ( $\rho = \text{const}$ ):

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - U_2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_1 \quad (9.58)$$

Trong đó  $\Phi$  là hàm thế vận tốc, được tính theo công thức:

$$\phi = \int_l \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (9.59)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \int_{(l)} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \quad (9.60)$$

và

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_2 - \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_1 = \int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

Phương trình (9.58) được viết thành ( $u = -g \cdot z$ ):

$$\int_1^2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) = 0 \quad (9.61)$$

Phương trình (9.61) giống (9.53) về hình thức nhưng tính chất vật lý thì khác nhau. Phương trình (9.53) thì tích phân theo đường dòng, còn (9.61) thì tích phân trong dòng thế vận tốc ( $\omega = -\Omega$ ).

c. Tích phân dọc theo đường xoáy

Chất lỏng chuyển động trong hệ tọa độ tuyệt đối ( $\Omega = 0$ ). Từ phương trình đường xoáy (8.29) ta có:

$$\omega_x dy - \omega_y dx = 0 ; \omega_z dy - \omega_y dz = 0 ; \omega_x dz - \omega_z dx = 0$$

Tích phân (9.48) ta có kết quả như (9.51). Nhưng bản chất vật lý thì khác nhau.

Nếu chuyển động dừng thì  $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$  và lực khối có thể chỉ là trọng lực thì  $U = -g z$ , chất lỏng không nén được. Thay các giá trị này vào phương trình (9.51) hay (9.53) :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g.z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g.z_2 \quad (9.63)$$

(9.63) là phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng, chuyển động ổn định, chất lỏng không chịu nén và lực khối có thể là trọng lực.

### 9.6.2 Phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng thật

Thực hiện phép biến đổi tương tự như trên đối với phương trình Naviê-Stôc ta có :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} d\vec{l} + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} - dU + 2 \left[ \begin{array}{l} (v_y dz - v_z dy)(\omega_x + \Omega_z) + (v_z dx - v_x dz)(\omega_y + \Omega_y) + \\ + (v_x dy - v_y dx)(\omega_z + \Omega_z) \end{array} \right] + \quad (9.64)$$

$$-\frac{1}{3} v \cdot \text{grad}(\text{div} \vec{v}) d\vec{l} + v \cdot \Delta \vec{v} d\vec{l} = 0$$

Phương trình (9.64) khác (9.47) ở hai số hạng cuối cùng. Chúng biểu diễn năng lượng tổn thất của một đơn vị khối lượng chất lỏng khi chuyển động trên quãng đường  $d\vec{l}$ . Ký hiệu tổn thất năng lượng đó là  $gh_t$  :

$$g.h_t = \int_{(l)} -\frac{1}{3} v \cdot \text{grad}(\text{div} \vec{v}) d\vec{l} + v \cdot \Delta \vec{v} d\vec{l} \quad (9.65)$$

Thực hiện tích phân (9.64) dọc theo đường dòng cho hai tiết diện của dòng nguyên tố, chất lỏng chỉ chịu tác dụng bởi trọng lực :

$$\frac{v_1^2}{2} + \int_1 \frac{dp}{\rho} + g.z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \int_2 \frac{dp}{\rho} + g.z_2 + gh_{qt1-2} + gh_{t1-2} \quad (9.67)$$

- Đối với chất lỏng không nén được thì phương trình trên có dạng :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + gh_{qt1-2} + gh_{t1-2} \quad (9.68)$$

- Nếu chất lỏng không nén được mà chuyển động ổn định thì :

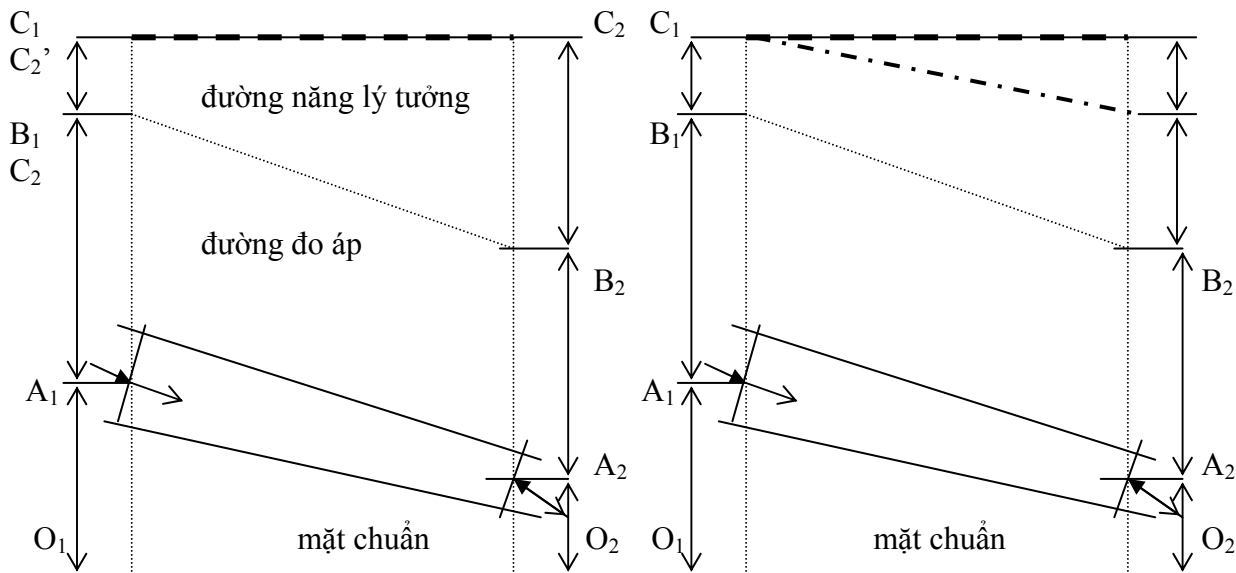
$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + gh_{t1-2} \quad (9.69)$$

Phương trình được viết dưới dạng cột áp [mét cột chất lỏng] :

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + z_2 + h_{t1-2} \quad (9.70)$$

Trong đó  $h_{t1,2}$  là cột áp tổn thất .

Biểu diễn hình học phương trình (9.70) trên hình 8.5  $z_1, z_2$  là độ cao hình học của trọng tâm mặt cắt ướt 1-1.2-2 của dòng nguyên tố tính từ mặt chuẩn 0-0. Từ các điểm  $A_1, A_2$  vẽ các đoạn thẳng  $A_1B_1, A_2B_2$  bằng độ cao  $\frac{p_1}{\rho \cdot g}; \frac{p_2}{\rho \cdot g}$  . Các độ cao  $B_1O, B_2O$  biểu diễn thế năng đơn vị hoặc gọi là cột áp tĩnh .Nối các điểm  $B_1, B_2$  ta có đường đo áp của dòng nguyên tố chất lỏng.



Hình 9-5

Đường đo áp biểu diễn thế năng đơn vị của dòng chảy. Nếu dòng chảy nằm ngang thì đường đo áp biểu diễn sự biến thiên của áp suất dòng chất lỏng. Độ dốc đo áp ký hiệu là  $i_p$  dùng để đánh

giá mức độ biến thiên của thế năng đơn vị dọc theo dòng chảy. Nó là tỷ số gia tăng của cột áp tĩnh trên một đơn vị chiều dài của dòng chảy :

$$i_p = \frac{d\left(\frac{p}{\rho \cdot g} + z\right)}{dl} \quad (9.71)$$

Đường năng được xác định bằng cách vẽ thêm các đoạn thẳng đứng  $B_1C_1$ ,  $B_2C_2$ , bằng độ cao vận tốc  $\frac{v_1^2}{2g}$ ;  $\frac{v_2^2}{2g}$ . Nối các điểm  $C_1$ ,  $C_2$  ta được đường năng của dòng nguyên tố lỏng lý tưởng.

Đường năng này song song với đường chuẩn. Trong dòng nguyên tố chất lỏng thực đường năng dốc xuống dọc theo chiều dòng chảy, vì năng lượng dòng chảy giảm dần, tổn thất năng lượng tăng lên. Các đoạn  $C_1C_1'$ ,  $C_2C_2'$  biểu diễn tổn thất năng lượng  $h_{t1}, h_{t2}$ .

Để đánh giá mức độ biến thiên năng lượng dọc theo dòng chảy chúng ta xét độ dốc thủy lực, ký hiệu là  $i$ , đó là tổn thất năng lượng trên một đơn vị chiều dài dòng chảy :

$$i = \frac{dh_t}{dl} \quad (9.72)$$

Trong tính toán thủy lực chúng ta thường dùng độ dốc thủy lực trung bình ký hiệu là  $i_{tb}$  :

$$i_{tb} = \frac{h_t}{l} \quad (9.73)$$

Độ dốc thủy lực cũng là độ dốc của đường năng. Từ các công thức (9.71), (9.72) chúng ta thấy rằng độ dốc đo áp có thể dương hoặc âm còn độ dốc thủy lực luôn luôn dương. Cũng cần thấy rằng độ dốc đo áp của chất lỏng lý tưởng khác độ dốc đo áp trong dòng chất lỏng thực. Trong trường hợp chuyển động đều đường cao áp và đường năng song song với nhau.

### 9.6.3 - Mở rộng phương trình Bernoulli cho toàn dòng chất lỏng thực

Dòng chất lỏng thực có kích thước hữu hạn được coi là gồm vô số dòng nguyên tố được giới hạn bởi thành rắn (đường ống, kênh dẫn...). Do tính nhớt nên vận tốc trên tiết diện ướt không giống nhau vì thế không thể lấy năng lượng toàn phần của dòng nguyên tố bất kỳ nào để đại diện cho toàn dòng chảy, mà chúng ta phải xác định giá trị trung bình của toàn dòng. Tuy nhiên việc mở rộng phương trình Bernoulli cho toàn dòng chảy chỉ thực hiện được đối với dòng chảy đều hay dòng biến đổi chậm. Để đơn giản trong phần này chúng ta chỉ chứng minh phương trình này cho chất lỏng không nén được.

Viết phương trình Bernoulli cho dòng nguyên tố chất lỏng thực với khối lượng chất lỏng là  $\rho \cdot v \cdot dS$  rồi sau đó tích phân cho toàn tiết diện dòng chảy :

$$\iint_{(s_1)} \left( \frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS = \iint_{(s_2)} \left( \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + gh_t + g \cdot h_{qt} \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS$$

Trong đó  $dS$  là tiết diện của dòng nguyên tố,  $v$  là vận tốc dòng nguyên tố.

Tích phân dạng :

$$\iint_{(s)} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot z \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS$$

thực hiện được khi  $\frac{p}{\rho} + g \cdot z = const$  (nghĩa là dòng biến đổi chậm hay biến đổi chậm). Như vậy ta có :

$$\iint_{(s_1)} \left( \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS = \left( \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \right) \cdot \rho \iint_{(s_1)} v \cdot dS = \left( \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \right) \cdot \rho \cdot Q \quad (9.75a)$$

$$\iint_{(s_2)} \left( \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS = \left( \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \right) \cdot \rho \iint_{(s_2)} v \cdot dS = \left( \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \right) \cdot \rho \cdot Q \quad (9.75b)$$

Các tích phân này biểu thị năng lượng thế năng của  $\rho \cdot Q$  khối lượng chất lỏng. Tích phân:

$$\iint_{(s)} \left( \frac{v^2}{2} \right) \cdot \rho \cdot dQ_d = E_d$$

biểu thị động năng của dòng chảy. Muốn tích phân được biểu thức này chúng ta phải biết quy luật phân bố vận tốc trên tiết diện ướt của dòng chảy. Chúng ta cũng có thể tính động năng của dòng chảy này bằng vận tốc trung bình trên tiết diện ướt:

$$E_{dtb} = \frac{1}{2} \rho \cdot Q \cdot v_{tb}^2$$

Rõ ràng  $E_d$  và  $E_{dtb}$  không thể bằng nhau. Sự chênh lệch này được hiệu chỉnh bằng hệ số hiệu chỉnh động năng (hệ số Côtirôlít, ký hiệu là  $\alpha$ ) :  $E_d = \alpha E_{dtb}$

Từ phương trình này suy ra :

-----  
-----

$$\alpha = \frac{E_d}{E_{dtb}} = \frac{\iint_{(s)} v^3 \rho \cdot dS}{\rho \cdot v_{tb}^3 \cdot S} \quad (9.76)$$

Nếu  $\rho = \text{const}$  thì

$$\alpha = \frac{\iint_{(s)} v^3 \cdot dS}{v_{tb}^3 \cdot S} \quad (9.77)$$

Trị số  $\alpha$  phụ thuộc vào sự phân bố vận tốc trên mặt cắt ướt của dòng chảy.

- $\alpha = 2$  nếu vận tốc phân bố theo quy luật parabol (dòng chảy tầng).
- $\alpha = 1.01 \div 1.10$  nếu vận tốc phân bố theo quy luật lôgarit (dòng chảy rối). Đối với dòng chảy rối kích thước bé  $\alpha = 1$ .

Vậy tích phân động năng của chất lỏng trên mặt cắt ướt của dòng chảy :

$$\iint_{(s_1)} \left( \frac{v_1^2}{2} \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS = \frac{\alpha_1 \cdot v_{1tb}^2}{2} \rho \cdot Q \quad ; \quad \iint_{(s_2)} \left( \frac{v_2^2}{2} \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS = \frac{\alpha_2 \cdot v_{2tb}^2}{2} \rho \cdot Q$$

Tích phân

$$\iint_{(S)} g h_t \cdot \rho \cdot v \cdot dS$$

là tổn thất năng lượng của dòng chảy khi chảy từ tiết diện 1 đến 2. Các dòng nguyên tố khác nhau sẽ có  $g \cdot h_t$  khác nhau. Sự thay đổi của chúng không có quy luật vì thế chúng ta phải đưa khái niệm giá trị tổn thất năng lượng đơn vị trung bình. Nó có giá trị như nhau cho mọi đường dòng nguyên tố trên tiết diện ướt và được tính :

$$g \cdot h_{tb} = \frac{1}{\rho \cdot Q} \iint_{(S)} g \cdot h_t \cdot \rho \cdot v \cdot dS \quad (9.79)$$

hay  $\iint_{(S)} g \cdot h_t \cdot \rho \cdot v \cdot dS = g \cdot h_{tb} \cdot \rho \cdot Q$

Tích phân  $\iint_{(S)} g \cdot h_{tqt} \cdot \rho \cdot v \cdot dS$



là năng lượng quán tính của dòng chảy không dừng. Kết hợp (9.54) chúng ta có thể viết biểu thức tích phân trên như sau:

$$E_{qt} = \iint_{(S)} g \cdot h_{qt} \cdot \rho \cdot v \cdot dS = \iint_{(S)} \left( g \int_{(l)} \frac{\partial v}{\partial t} d\vec{l} \right) \cdot \rho \cdot v \cdot dS = g \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \iint_{(S)} v \cdot \rho \cdot v \cdot dS \right) dl \quad (9.81)$$

trong đó biểu thức trong ngoặc đơn chính là động lượng của dòng chảy được tính theo quy luật phân bố vận tốc trên tiết diện ướt. Cũng có thể tính giá trị này theo vận tốc trung bình trên tiết diện ướt :

$$K = \iint_{(S)} v \cdot \rho \cdot v \cdot dS = \beta \cdot K_{tb}$$

$$K_{tb} = v_{tb} \cdot \rho \cdot v_{tb} \cdot S = \rho \cdot v_{tb}^2 \cdot S \quad (9.82)$$

$$\text{suy ra } \beta = \frac{\iint_{(S)} v \cdot \rho \cdot v \cdot dS}{\rho \cdot v_{tb}^2 \cdot S}$$

là hiệu số hiệu chỉnh động lượng (hệ số Buximét). Nếu  $\rho = \text{const}$  thì

$$\beta = \frac{\iint_{(S)} v^2 \cdot dS}{v_{tb}^2 \cdot S}$$

$\beta = 4/3$  cho vận tốc dòng chảy phân bố theo quy luật parabol (chảy tầng)

$\beta = 1,01 \div 1,05$  cho vận tốc dòng chảy phân bố theo quy luật lôgarít (chảy rối).

Trong tính toán thủy lực thường chọn  $\beta = 1$ . Sau khi sử dụng hệ số  $\beta$  chúng ta có thể tích phân biểu thức trên như sau:

$$g \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\beta \cdot \rho \cdot v_{tb}^2 \cdot S) dl = g \cdot \beta \int_{(l)} (\rho \cdot v_{tb} \cdot S) \cdot \frac{\partial v_{tb}}{\partial t} \cdot dl = \beta \cdot g \cdot \rho \cdot Q \int_{(l)} \frac{\partial v_{tb}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \quad (9.83)$$

Trong trường hợp này chúng ta cũng sử dụng khái niệm năng lượng quán tính đơn vị trung bình trên tiết diện ướt của dòng chảy  $gh_{dt,tb}$  :

$$E_{qt} = g \cdot h_{qt,tb} \cdot \rho \cdot Q = \beta \cdot g \cdot \rho \cdot Q \int_{(l)} \frac{\partial v_{tb}}{\partial t} \cdot d\vec{l} = \beta \cdot g \cdot l \cdot \frac{\partial v_{tb}}{\partial t} \cdot \rho \cdot Q \quad (9.84)$$

Thay (9.75a,b), (9.78a,b), (9.79), (9.84) vào (9.74) phương trình Bernoulli sẽ có dạng

$$\frac{\alpha_1 v_{1tb}^2}{2} \rho \cdot Q + \left( \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 \right) \rho \cdot Q = \frac{\alpha_2 v_{2tb}^2}{2} \rho \cdot Q + \left( \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 \right) \rho \cdot Q + gh_{qt1, tb} \cdot \rho \cdot Q + gh_{t, tb} \cdot \rho \cdot Q \quad (9.85)$$

Phương trình (8.86) tính cho một đơn vị khối lượng chất lỏng ta có :

$$\frac{\alpha_1 v_{1tb}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g \cdot z_1 = \frac{\alpha_2 v_{2tb}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g \cdot z_2 + gh_{qt1, tb} + gh_{t, tb} \quad (9.86)$$

Nếu chuyển động dừng  $h_{qttb} = 0$

Chú ý :

Nếu chất lỏng nén được thì tích phân  $\int \frac{dp}{\rho}$  phải xét đến quy luật biến đổi khối lượng riêng theo áp suất.

Ví dụ : dòng khí đẳng nhiệt ( $\frac{p}{\rho} = const$ ) phương trình (9.85) sẽ là :

$$\frac{\alpha_1 v_{1tb}^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \rho_1 + g \cdot z_1 = \frac{\alpha_2 v_{2tb}^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \ln \rho_2 + g \cdot z_2 + gh_{qt1, tb} + gh_{t, tb} \quad (9.86)$$

Cho dòng khí đoạn nhiệt ( $\frac{p}{\rho^k} = const$ ) phương trình (9.85) là :

$$\frac{\alpha_1 v_{1tb}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + g \cdot z_1 = \frac{\alpha_2 v_{2tb}^2}{2} + \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} + g \cdot z_2 + gh_{qt1, tb} + gh_{t, tb} \quad (9.87)$$

Nếu thay phương trình trạng thái ở các chế độ tương ứng và bỏ qua tổn thất , vị năng của chất khí thì (9.87) được viết thành :

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{k}{k-1} r \cdot T_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{k}{k-1} r \cdot T_2$$

$$\text{hay } \frac{k}{k-1} r (T_1 - T_2) = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

Đối với không khí  $k = 1.4$  ,  $r = 28714 \text{ J / kg}^\circ\text{K}$  ;  $\frac{k-1}{r \cdot T} = 0,001$  :

$$T_1 - T_2 = 0,001 \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} \tag{9.88}$$

Từ phương trình (9.88) suy ra nhiệt độ thay đổi một độ nếu như độ chênh lệch cột áp động năng ở điểm đầu và điểm cuối của dòng chảy 10000m

#### 9.6.4 Mở rộng phương trình Bernoulli cho chuyển động tương đối

Trong phần này chỉ giới thiệu hai loại chuyển động thường gặp:

- Chuyển động tịnh tiến với gia tốc không đổi
- Chuyển động quay đều.

Trong trường hợp này gia tốc của lực khối gồm gia tốc trọng trường, gia tốc chuyển động theo và gia tốc Côriôlít. Bài toán này được giải trong hệ tọa độ gắn với bình chứa và cho chất lỏng lý tưởng chuyển động dừng.

a - Chất lỏng chuyển động trong ống với vận w còn ống chuyển động với gia tốc a (hình 9 - 6).

Các thành phần gia tốc khối :  $R_x = - a_x$  ;  $R_y = 0$  ;  $R_z = - (g \pm a_z)$

thì  $dU = - a_x \cdot dx - (g \pm a_z) \cdot dz$

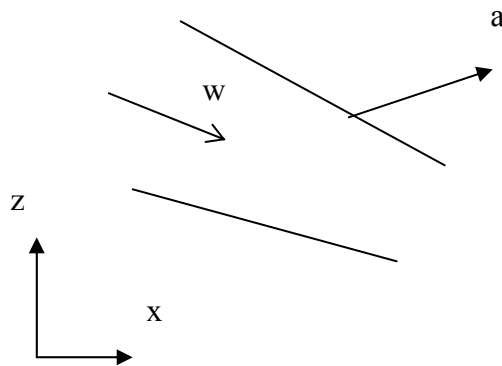
$$U = - a_x \cdot x - (g \pm a_z) z \tag{9.89}$$

Thay U từ (9.89) và  $v = w$  vào phương trình (9.53) :

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + a_x \cdot x_1 + (g \pm a_z) \cdot z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + a_x \cdot x_2 + (g \pm a_z) \cdot z_2$$

hay :

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + (g \pm a_z) \cdot z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + (g \pm a_z) \cdot z_2 + a_x \cdot (x_2 - x_1) \tag{9.90}$$



Hình 9 - 6

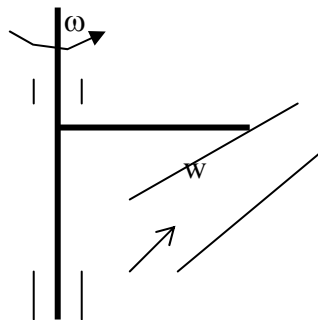
Nếu ống chuyển động theo phương nằm ngang song song với mặt chuẩn thì (9.90) sẽ là :

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g.z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g.z_2 + a.(x_2 - x_1) \quad (9.91)$$

Từ (9.91) ta thấy rằng : nếu dòng chảy cùng chiều với chuyển động của ống thì tổn thất năng lượng do quán tính chuyển động làm giảm năng lượng chuyển động của dòng chất lỏng. Nếu chất lỏng chuyển động trong ống ngược chiều với chuyển động của ống thì tổn thất năng lượng sẽ giảm. Khi ống không chuyển động thì phương trình trở về (9.63).

b - Nếu chất lỏng chuyển động trong ống với vận tốc  $w$  còn ống thì chuyển động quay đều (hình 9 - 7).

Gia tốc lực khối gồm gia tốc trọng trường , gia tốc ly tâm và gia tốc Côriôlít. Gia tốc Côriôlít thẳng góc với mặt phẳng  $(w, \omega)$  nên không có thành phần tham gia chuyển động.



Hình 9.6

Thành phần của gia tốc khối :  $R_r = r.\omega^2$  ;  $R_z = -g$  ;  $R_e = 0$

thì 
$$U = \int r.\omega^2 .dr - \int g dz = \frac{r .\omega^2}{2} - g.z$$

Thay U và  $v=w$  vào (9.53) :

$$g.z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = g.z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} \quad (9.92)$$

Chúng ta suy ra phương trình cho chất lỏng thực :

$$g.z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = g.z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + g.h_{t1,2,w}$$

trong đó  $g.h_{t1,2,w}$  là năng lượng tổn thất của dòng chảy được tính theo vận tốc tương đối  $w$ .

Phương trình (9.93) được viết thành :

$$g(z_2 - z_1) + \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{\Delta w^2}{2} - \frac{\Delta u^2}{2} + g.h_{t1,3,w} = 0$$

Chúng ta cũng có thể bỏ qua chênh lệch độ cao hình học của dòng chảy nếu ống quay với vận tốc lớn. Ký hiệu  $\varphi = S_2/S_1$  và từ phương trình liên tục ta có  $w_1 = \varphi.w_2$ , tổn thất thủy lực  $g.h_{t1,2,w} = \zeta \frac{w_2^2}{2}$ . Ta có :

$$\frac{\Delta u^2}{2} = \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} (1 + \zeta - \varphi^2)$$

hay :

$$w_2 = \sqrt{\frac{\Delta u^2 - 2 \frac{\Delta p}{\rho}}{1 + \zeta - \varphi^2}}$$

Lưu lượng chảy qua ống quay :

$$Q = S_2.w_2 = S_2 \cdot \sqrt{\frac{\Delta u^2 - 2 \frac{\Delta p}{\rho}}{1 + \zeta - \varphi^2}}$$

Từ (9.93) suy ra độ chênh lệch áp suất :

$$\frac{\Delta p}{\rho} = \frac{1}{2} \left[ \Delta u^2 - \frac{Q^2}{S_2^2} (1 + \zeta - \varphi^2) \right] = A - B.Q^2$$

## Hình 9 - 7

Phương trình (9.94) được biểu diễn trên đồ thị  $\Delta p - Q$  (hình 9 - 7)

Nếu ống có tiết diện không thay đổi :

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \cdot (u_2^2 - u_1^2)$$

Phương trình này tương tự như trong trường hợp bình quay của tĩnh tương đối.

- Nếu áp suất hai đầu ống như nhau :  $p_1 = p_2$  thì :  $\Delta u^2 = \Delta w^2$  , nghĩa là sự thay đổi cột áp vận tốc tương đối bằng sự thay đổi cột áp vận tốc theo.

- Nếu  $R_1 = R_2$  thì  $\Delta u = 0$  khi vận tốc dòng chảy trong ống tăng lên thì áp suất sẽ giảm. Loại ống này gọi là ống Cônfusô. Khi áp suất dòng chảy tăng ta có ống difusô.

Kết quả nghiên cứu của bài toán này được áp dụng trong thiết kế các loại máy thủy khí chúng ta sẽ nghiên cứu trong các giáo trình chuyên ngành.

- Một số điểm chú ý khi sử dụng phương trình Bernoulli. Phương trình này được sử dụng để giải các bài toán kỹ thuật có liên quan đến vận tốc, áp suất. Khi vận dụng phương trình cần lưu ý.

- Lưu lượng không thay đổi trên đoạn dòng chảy đang xét (theo chiều dòng chảy). Mặt cắt dùng để viết phương trình phải ở những nơi có dòng chảy đều hay biến đổi chậm. Đối với chất khí cần phải biết quy luật biến đổi khối lượng riêng theo áp suất.

Việc chọn mặt cắt, mặt chuẩn phải làm thế nào để trong phương trình chỉ còn một ẩn số. Nếu trong phương trình có hai ẩn số mà trong đó có một ẩn số vận tốc phải kết hợp với phương trình liên tục.

Áp suất trong hai vế của phương trình phải cùng một loại. Khi tính đến tổn thất năng lượng của dòng chảy phải biết chiều chuyển động của chất lỏng. Năng lượng đơn vị tại mặt cắt thượng lưu bao giờ cũng lớn hơn mặt cắt hạ lưu.

### 9.7. Phương trình động lượng

Những bài toán không thể giải được bằng phương trình Bernoulli thì phải dùng đến phương trình động lượng. Trước hết chúng ta thành lập phương trình này cho chất lỏng lý tưởng và chất lỏng không nén được, sau đó sẽ mở rộng ra cho chất lỏng thực.

Phương trình Ôle thủy động (9.16) biểu diễn sự cân bằng các lực đơn vị tác dụng lên phân tử lỏng chuyển động. Nếu chúng ta nhân nó với khối lượng của phân tử thì đó là lực tác dụng lên

phân tố đó. Muốn xác định các lực tác dụng lên bề mặt thể tích V (trong hệ tọa độ tuyệt đối) thì chỉ việc tích phân phương trình Ôle trong thể tích đó. Chúng ta thực hiện phương pháp này từ các phương trình viết cho các trục tọa độ. Nhân phương trình thứ nhất của (9.16) với khối lượng của phân tố  $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$  rồi tích phân theo thể tích V (ở đây chỉ xét bài toán chuyển động dừng):

$$\iiint_{(V)} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \iiint_{(V)} R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (9.95)$$

Mỗi số hạng trong biểu thức là lực chiếu theo trục x :  
 Lực khối chính là trọng lực :

$$G_x = \iiint_{(V)} R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (9.96)$$

lực áp :

$$F_{px} = \iiint_{(V)} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (9.97)$$

Trình tự thực hiện tích phân (9.97) được trình bày trên hình 9.8 . Trong hệ tọa độ không gian chất lỏng được trích từ một thể tích V và giới hạn bởi mặt S. Trong đó  $dS_x$  là thành phần của phân tố mặt  $dS$  chiếu theo phương x,  $dS_{xy}$  là hình chiếu của  $dS$  lên mặt phẳng (xy).

Hình 9 - 8

$$F_{px} = - \iint_{(S)} dy \cdot dz \int_1^2 \frac{\partial p}{\partial x} dx = \iint_{(S)} dy \cdot dz (p_2 - p_1) = - \iint_{S_x} p \cdot dS_x \quad (9.98)$$

Để tính được lực dòng chúng ta biến đổi như sau :

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (v_x \cdot v_x) - v_x \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (v_y \cdot v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z \cdot v_x)$$

Biểu thức trong ngoặc đơn thứ hai sẽ bằng không ( $div \vec{v} = 0$ ). Lực dòng theo phương x được phân tích theo ba phương:

$$F_{dx} = F_{dxx} + F_{dxy} + F_{dxz}$$

$$F_{dxx} = \rho \iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial x} (v_x \cdot v_x) dx \cdot dy \cdot dz = \rho \iint_{(S)} (v_x \cdot v_x) dy \cdot dz = \rho \iint_{(S)} (v_x \cdot dS_x) v_x$$

$$F_{dxy} = \rho \iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial y} (v_x \cdot v_y) dx \cdot dy \cdot dz = \rho \iint_{(S)} (v_x \cdot v_y) dx \cdot dz = \rho \iint_{(S)} (v_y \cdot dS_y) v_x$$

$$F_{dxz} = \rho \iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial z} (v_x \cdot v_z) dx \cdot dy \cdot dz = \rho \iint_{(S)} (v_x \cdot v_z) dx \cdot dy = \rho \iint_{(S)} (v_z \cdot dS_z) v_x$$

Vậy

$$F_{dx} = \rho \iint_{(S)} (v_x \cdot dS_x + v_y \cdot dS_y + v_z \cdot dS_z) v_x$$

Biểu thức trong ngoặc đơn (9.99) là lưu lượng chảy qua mặt dS. Thay (9.96), (9.97), (9.99) vào (9.95) và thực hiện biến đổi tương tự đối với trục y,z chúng ta có hệ phương trình :

$$\begin{aligned} \rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) v_x &= G_x - \iint_{(S_x)} p \cdot dS_x \\ \rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) v_y &= G_y - \iint_{(S_y)} p \cdot dS_y \\ \rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) v_z &= G_z - \iint_{(S_z)} p \cdot dS_z \end{aligned} \tag{9.100}$$

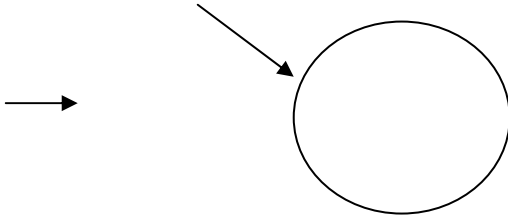
Hoặc viết dưới dạng véctor :

$$\rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \vec{v} = \vec{G} - \iint_{(S)} p \cdot d\vec{S} \tag{9.101}$$

Áp dụng phương trình (9.101) xác định lực chất lỏng tác dụng lên vật chìm ngập trong dòng chảy. Đối với chất lỏng lý tưởng khi chảy bao vật thì vận tốc của nó tiếp tuyến với bề mặt vật cản. Vật cản có thể tích  $V_1$  và bề mặt xung quanh là  $S_1$  (hình 9.9). Mặt kiểm tra S được vẽ trên



(hình 9.9). Viết phương trình (9.101) cho thể tích V được giới hạn bởi S và S<sub>1</sub>. Đối với mặt S<sub>1</sub> vì v<sub>1</sub> thẳng góc dS<sub>1</sub> nên v<sub>1</sub> dS<sub>1</sub> = 0.



Hình 9 - 9

$$\rho \iint_{(S+S_1)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \vec{v} = \vec{G} - \iint_{(S)} p \cdot d\vec{S} - \iint_{(S_1)} p \cdot d\vec{S}_1$$

Biểu thức

$$- \iint_{(S_1)} p \cdot d\vec{S}_1$$

là áp lực vật cản tác dụng lên dòng chảy. Còn lực mà chất lỏng tác dụng lên vật cản sẽ là:

$$F_{l,t} = \iint_{(S_1)} p \cdot d\vec{S}_1 \tag{9.103}$$

Phương trình (9.102) sẽ là :

$$\vec{F}_{l,t} = -\rho \iint_{(S+S_1)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \vec{v} + \vec{G} - \iint_{(S)} p \cdot d\vec{S} \tag{9.104}$$

Tích phân đầu tiên là lực do sự thay đổi động lượng của chất lỏng chảy qua mặt kiểm tra. Biểu thức trong tích phân của (9.104) có thể viết :

$$\rho \cdot \vec{v} \cdot d\vec{S} \cdot \vec{v} = \rho \cdot dS \cdot \cos \alpha \cdot \vec{v} \tag{9.105}$$

Trong đó  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $dS$  và  $v$ . Nếu  $\alpha < 90^\circ$  thì (9.105) sẽ có giá trị dương, nghĩa là chất lỏng chảy ra khỏi mặt kiểm tra. Nếu  $\alpha > 90^\circ$  thì (9.105) sẽ có giá trị âm, chất lỏng chảy vào mặt kiểm tra.

$G$  là lực khối của chất lỏng trong mặt kiểm tra. Nếu lực khối có thể  $U$  thì

$$\vec{G} = \rho \cdot \iiint_{(S)} U \cdot d\vec{S}$$

Viết theo các trục tọa độ:

$$G_x = \rho \cdot \iiint_{(S_x)} U \cdot dS_x \quad ; \quad G_y = \rho \cdot \iiint_{(S_y)} U \cdot dS_y \quad ; \quad G_z = \rho \cdot \iiint_{(S_z)} U \cdot dS_z$$

Phương trình (9.104) viết theo các trục tọa độ :

$$\begin{aligned} F_{l,t,x} &= -\rho \iiint_{(S)} (v \cdot dS) \cdot v_x + G_x - \iiint_{(S_x)} p \cdot dS_x \\ F_{l,t,y} &= -\rho \iiint_{(S)} (v \cdot dS) \cdot v_y + G_y - \iiint_{(S_y)} p \cdot dS_y \\ F_{l,t,z} &= -\rho \iiint_{(S)} (v \cdot dS) \cdot v_z + G_z - \iiint_{(S_z)} p \cdot dS_z \end{aligned} \tag{9.106}$$

Phương trình (9.104) hay (9.106) là lực dòng chảy tác dụng lên mặt kiểm tra. Trong quá trình tính toán cần phải chọn mặt kiểm tra sao cho việc tính toán được thuận lợi.

Phương trình (9.106) sẽ được viết theo vectơ :

$$\vec{F}_{l,t} = -\rho \iiint_{(S+S_1)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \vec{v} + \rho \iiint_{(S)} U \cdot d\vec{S} - \iiint_{(S)} p \cdot d\vec{S} \tag{9.107}$$

Nếu như bề mặt  $S$  tiến tới trùng với mặt  $S_1$  thì vectơ vận tốc sẽ thẳng góc với vectơ diện tích :

$$\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$$

và lực khối cũng bằng không  $G = 0$ . Vậy dòng chảy bao vật (khi  $S \rightarrow S_1$ ) thì tác dụng lên vật một lực chính bằng tích phân phân tử áp lực theo bề mặt vật cản ( $S_1$ ) :

$$F_{t,l} = \iiint_{(S_1)} p \cdot dS_1 \tag{9.108}$$

Áp dụng phương trình (9.104) cho dòng nguyên tố (H 9.10); mặt kiểm tra là ABCDA :

$$dF_{l,t} + dF_p + dG = \rho \cdot dQ \cdot (v_2 - v_1) \tag{9.109}$$

Hình 9 - 10

Tích phân :

$$\rho \iint_{(S+S_1)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \vec{v}$$

được phân tích thành bốn tích phân mặt : AD, BC, AB, CD. Ở các mặt AB và CD véctơ vận tốc thẳng góc với véctơ diện tích nên tích phân tương ứng của chúng bằng không. Còn ở mặt AD véctơ vận tốc và diện tích tạo thành một góc 180° nên kết quả tích phân cho giá trị âm. Vì vận tốc trên tiết diện của dòng nguyên tố có giá trị như nhau nên tích phân dQ theo diện tích dS. Ở mặt BC thì 0° nên giá trị tích phân sẽ dương.

Lực tác dụng lên mặt kiểm tra gồm lực của thành tác dụng lên chất lỏng ở hai mặt AB, CD. Lực tác dụng lên các mặt AD và BC chính là lực áp .

### 9.7.2 Mở rộng phương trình động lượng ra cho chất lỏng thực

Tích phân phương trình Naviê-Stốc theo thể tích V. Trước tiên chúng ta tiến hành theo phương x sau đó suy tương tự cho các trục còn lại:

$$\iiint_{(V)} \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \tag{9.110}$$

$$\iiint_{(V)} R_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \iiint_{(V)} \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \mu \iiint_{(V)} \Delta v_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Các biểu thức thứ nhất, thứ hai và thứ ba được thực hiện tương tự như ở phần trước còn biểu thức biểu diễn được ma sát của chất lỏng thực được thực hiện như sau. Chúng ta ký hiệu lực ma sát :

$$F_{\tau,x} = \mu \iiint_{(V)} \Delta v_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{9.111}$$

Vậy (9.110) và suy ra cho các trụ còn lại là :

$$\begin{aligned} \rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) v_x &= G_y + F_{p,x} + F_{\tau,x} \\ \rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) v_y &= G_y + F_{p,y} + F_{\tau,y} \\ \rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) v_z &= G_z + F_{p,z} + F_{\tau,z} \end{aligned} \tag{9.112}$$

Hoặc viết dưới dạng véctor :

$$\rho \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) \vec{v} = \vec{G} + \vec{F}_p + \vec{F}_\tau \tag{9.113}$$

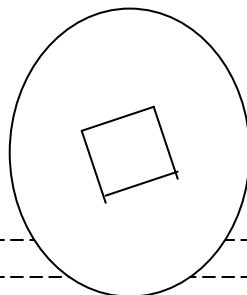
Biểu thức tích phân chính là động lượng của dòng chất lỏng thực nó được xác định như (9.81). Trong đó  $v_{tb}$  là vận tốc trung bình trên tiết diện ướt của dòng có kích thước giới hạn. Áp dụng phương trình (9.113) cho dòng một chiều kích thước hữu hạn :

$$\rho \cdot Q \cdot (\beta_2 \cdot \vec{v}_{1,tb} - \beta_1 \cdot \vec{v}_{2,tb}) = \vec{F}_p + \vec{F}_{t,l} + \vec{G} + \vec{F}_\tau \tag{9.114}$$

Trong khi sử dụng phương trình để tính toán người ta thường lấy  $\beta=1$ . Phương trình này được sử dụng rộng rãi trong kỹ thuật vì nó không cần xét tới cấu trúc của dòng chảy và những biến đổi của nó mà chỉ xét đến các thông số dòng chảy trên mặt kiểm tra.

### 9.8 - Phương trình mômen động lượng

Mômen của dòng chất lỏng tác dụng lên vật đặt trong dòng chảy có thể tích V và mặt kiểm tra S ( trước tiên tính mômen đối với trục z (hình 9 - 11) :



Hình 9 - 11

$$dM_{dz} = x dF_y - y dF_x$$

Mômen các lực chất lỏng (lực khối và lực áp) đối với trục z:

$$M_{dz} = M_{Rz} + M_{pz} \tag{9.115}$$

Kết hợp hai phương trình trên ta có:

$$\iiint_{(V)} (x.dF_y - y.dF_x) = \iiint_{(V)} (x.dF_{Ry} - y.dF_{Rx}) + \iiint_{(V)} (x.dF_{py} - y.dF_{px})$$

Mômen lực khối với gia tốc khối R :

$$M_{Rz} = \rho \iiint_{(V)} (x.R_y - y.R_x) dx.dy.dz \tag{9.116}$$

Mômen lực áp :

$$M_{pz} = \iiint_{(V)} \left( x \cdot \frac{\partial p}{\partial y} dx.dy.dz - y \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dx.dy.dz \right) = \iint_{(S)} p(x.dS_y - y.dS_x) \tag{9.117}$$

Mômen của lực dòng chất lỏng :

$$\begin{aligned} M_{dz} &= \rho \cdot \iiint_{(V)} \left[ x \left( v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) - y \left( v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] dx.dy.dz \\ &= \rho \cdot \iiint_{(V)} \left[ v_x \left( x \frac{\partial v_y}{\partial x} - y \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + v_y \left( x \frac{\partial v_y}{\partial x} - y \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + v_z \left( x \frac{\partial v_y}{\partial x} - y \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] dx.dy.dz \end{aligned}$$

Muốn tích phân được biểu thức này phải biến đổi biểu thức trong ngoặc trở thành đạo hàm :

$$M_{dz} = \rho \cdot \iiint_{(V)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_x \left( x \frac{\partial v_y}{\partial x} - y \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ v_y \left( x \frac{\partial v_y}{\partial x} - y \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial z} \left[ v_z \left( x \frac{\partial v_y}{\partial x} - y \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] \end{array} \right\} dx \cdot dy \cdot dz$$

Tích phân này được chia thành ba thành phần :

$$\begin{aligned} M_{dz,x} &= \rho \iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial x} \left[ v_x \left( x \frac{\partial v_y}{\partial x} - y \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \right] dx \cdot dy \cdot dz = \rho \iint_{(S)} v_x (x \cdot v_y - y \cdot v_x) dy \cdot dz \\ &= \rho \iint_{(S)} v_x \cdot dS_x (x \cdot v_y - y \cdot v_x) \end{aligned}$$

Tương tự :

$$\begin{aligned} M_{dz,y} &= \rho \iint_{(S)} v_y \cdot dS_y (x \cdot v_y - y \cdot v_x) \\ M_{dz,z} &= \rho \iint_{(S)} v_z \cdot dS_z (x \cdot v_y - y \cdot v_x) \end{aligned}$$

Cộng ba tích phân này lại ta có :

$$\vec{M}_{dz} = \rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (x \cdot v_y - y \cdot v_x) \tag{9.118}$$

Biểu thức (9.118) là mômen động lượng của dòng chất lỏng. Thay (9.116), (9.117) và (9.118) vào (9.115) ta có mômen quay quanh trục z :

$$\rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (x \cdot v_y - y \cdot v_x) = \rho \iiint_{(V)} (x \cdot R_y - y \cdot R_x) dx \cdot dy \cdot dz - \iint_{(S)} p(x \cdot dS_y - y \cdot dS_x) \tag{9.119a}$$

quanh trục x :

$$\rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (x \cdot v_y - y \cdot v_x) = \rho \iiint_{(V)} (x \cdot R_y - y \cdot R_x) dx \cdot dy \cdot dz - \iint_{(S)} p(x \cdot dS_y - y \cdot dS_x) \tag{9.119b}$$

quanh trục y :

$$\rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (x \cdot v_y - y \cdot v_x) = \rho \iiint_{(V)} (x \cdot R_y - y \cdot R_x) dx \cdot dy \cdot dz - \iint_{(S)} p(x \cdot dS_y - y \cdot dS_x)$$

Viết dưới dạng véctor :

$$\rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (\vec{r} \times \vec{v}) = \iiint_{(V)} (\vec{r} \times \vec{R}) dV - \iint_{(S)} p (\vec{r} \times d\vec{S}) \quad (9.120)$$

Đây là phương trình mômen động lượng của dòng chất lỏng. Nếu trong chất lỏng chuyển động có vật cản thể tích  $V_1$  được giới hạn bởi mặt  $S_1$  (hình 9.10) thì mômen của chất lỏng tác dụng lên nó sẽ cân bằng với mômen của dòng chảy :

$$\begin{aligned} M_{\tau,x} &= -\rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (x \cdot v_y - y \cdot v_x) + \rho \iiint_{(V)} (x \cdot R_y - y \cdot R_x) dx \cdot dy \cdot dz - \iint_{(S)} p (x \cdot dS_y - y \cdot dS_x) \\ M_{\tau,y} &= -\rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (x \cdot v_y - y \cdot v_x) + \rho \iiint_{(V)} (x \cdot R_y - y \cdot R_x) dx \cdot dy \cdot dz - \iint_{(S)} p (x \cdot dS_y - y \cdot dS_x) \quad (9.112) \\ M_{\tau,z} &= -\rho \cdot \iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (x \cdot v_y - y \cdot v_x) + \rho \iiint_{(V)} (x \cdot R_y - y \cdot R_x) dx \cdot dy \cdot dz - \iint_{(S)} p (x \cdot dS_y - y \cdot dS_x) \end{aligned}$$

Viết dưới dạng vecto :

$$\vec{M}_c = -\iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (\vec{r} \times \vec{v}) + \rho \cdot \iiint_{(V)} (\vec{r} \times \vec{R}) dV - \iint_{(S)} p (\vec{r} \times d\vec{S}) \quad (9.122)$$

Đối với chất lỏng thực các phương trình (9.119) đến (9.122) sẽ bổ sung thêm thành phần mômen do lực ma sát gây ra. Mô men của lực ma sát được tính theo công thức :

$$\begin{aligned} M_{\tau z} &= \iiint_{(V)} (x \cdot dF_{\tau y} - y \cdot dF_{\tau x}) = \mu \iiint_{(V)} (x \cdot \Delta v_y - y \cdot \Delta v_x) dV \\ M_{\tau x} &= \iiint_{(V)} (y \cdot dF_{\tau z} - z \cdot dF_{\tau y}) = \mu \iiint_{(V)} (y \cdot \Delta v_z - z \cdot \Delta v_y) dV \\ M_{\tau y} &= \iiint_{(V)} (z \cdot dF_{\tau x} - x \cdot dF_{\tau z}) = \mu \iiint_{(V)} (z \cdot \Delta v_x - x \cdot \Delta v_z) dV \end{aligned}$$

Phương trình mô men động lượng cho chất lỏng thực viết dưới dạng vecto :

$$\vec{M}_c = -\iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (\vec{r} \times \vec{v}) + \rho \cdot \iiint_{(V)} (\vec{r} \times \vec{R}) dV - \iint_{(S)} p (\vec{r} \times d\vec{S}) + \mu \iiint_{(V)} (\vec{r} \times \Delta \vec{v}) dV$$

Nếu vật cản  $V_1$  được giới hạn bởi mặt  $S$  thì mô men dòng chất lỏng tác dụng lên vật cản :

$$\iint_{(S)} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) (\vec{r} \times \vec{v}) = \rho \cdot \iiint_{(V)} (\vec{r} \times \vec{R}) dV - \iint_{(S)} p \cdot (\vec{r} \times d\vec{S}) + \mu \iiint_{(V)} (\vec{r} \times \Delta \vec{v}) dV$$