Chương 3

DAO ĐỘNG CỦA HỆ VÔ HẠN BẬC TỰ DO

Phương trình vi phân dao động tự do của dầm có khối lượng phân bố theo chiều dài và độ cứng không đổi có dạng:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad (3.1)$$

Nghiệm của phương trình vi phân này được biểu thị bằng tích của hai hàm:

$$y_{(x,t)} = X_{(x)} \cdot T_{(t)} \qquad (3.2)$$

trong đó: $X_{(x)}$ - hàm chỉ phụ thuộc vào tọa độ x;

$T_{(t)}$ - hàm chỉ phụ thuộc vào thời gian t.

Khi đó phương trình vi phân dao động tự do được tách làm hai phương trình vi phân thông thường:

$$\frac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$$

$$\frac{d^4X}{dx^4} - \omega^2\frac{m}{EJ}X = 0$$

Nghiệm của các phương trình vi phân tương ứng này là:

$$T_{(t)} = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (3.3)$$

$$X_{(x)} = C_1\sin kx + C_2\cos kx + C_3\,\mathrm{sh}\,kx + C_4\,\mathrm{ch}\,kx \qquad (3.4)$$

trong đó:

A, B là các hằng số được xác định từ các điều kiện ban đầu, C_1, C_2, C_3, C_4 là các hằng số được xác định từ các điều kiện biên.

$k^4 = \omega^2 \cdot \frac{m}{EJ}$. Giá trị k được xác định theo các điều kiện biên, nó phụ thuộc vào liên kết đầu dầm. Từ biểu thức trên, ta có thể tìm được công thức xác định tần số dao động tự do:

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ}{m}} \cdot k^2 \qquad (3.5)$$

Khi hệ chịu tác dụng xung phân bố, xung khai triển theo các dạng dao động riêng được xác định theo công thức:

$$S_{i(x)} = m_x \; X_i \; \frac{\int_0^l S_{(x)} X_i dx}{\int_0^l m_x X_i^2 dx} \tag{3.6}$$

Phương trình dao động của hệ chịu tác dụng xung là:

$$y_{(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{S_i(x)}{m_x \, \omega_i} \sin \omega_i t \tag{3.7}$$

Khi hệ chịu tác dụng của tải trọng động phân bố có quy luật thay đổi bất kỳ theo thời gian, tải trọng khai triển theo các dạng dao động riêng được xác định theo công thức:

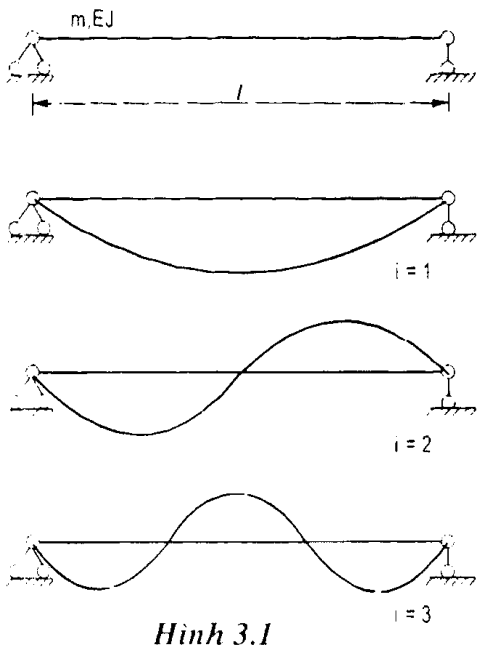
$$q_{i(x)} = m_x \; X_{i(x)} \cdot \frac{\int_0^l X_i \cdot q_{(x)} dx}{\int_0^l m_x X_i^2 dx} \tag{3.8}$$

Phương trình dao động của hệ:

$$y_{(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_{i(x)}}{m_x} K_{ai}(t) \tag{3.9}$$

Trong đó: $K_{ai}(t)$ là hệ số ảnh hưởng động học theo thời gian.

Bài 3.1: a) Xác định tần số dao động riêng:



Hình 3.1

Các điều kiện biên:

tại x = 0:

$$X_{(0)} = 0, \quad \frac{d^2 X_{(0)}}{dx^2} = 0 \tag{a}$$

tại x = l:

$$X_{(l)} = 0, \quad \frac{d^2X_{(l)}}{dx^2} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Từ 3.4 ta lấy đạo hàm lên:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = k^2(-C_1 \sin kx - C_2 \cos kx + C_3 \operatorname{sh} kx + C_4 \operatorname{ch} kx)$$

Thay điều kiện biên (a) vào phương trình $X_{(x)}$ và $\frac{d^2X}{dx^2}$ sẽ được:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ -C_2 + C_4 = 0 \text{, suy ra: } C_2 = C_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Viết điều kiện biên (b) có kể đến (c) sẽ được hai phương trình:

$$\begin{cases} C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl = 0 \\ -C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl = 0 \end{cases}$$

Để tồn tại dao động thì $C_1 \neq 0$, $C_3 \neq 0$, do đó ta có định thức:

$$\begin{vmatrix} \sin kl & \operatorname{sh} kl \\ -\sin kl & \operatorname{sh} kl \end{vmatrix} = 0$$

Khai triển định thức, sẽ nhận được phương trình tần số:

$$D = \sin kl, \operatorname{sh} kl = 0$$

Vì k luôn khác không, nên sh $kl \neq 0$, do đó:

$$\sin kl = 0 \qquad \text{(d)}$$

Suy ra: $kl = i\pi$,

Với i = 1, 2, 3,.. ∞. Đưa giá trị k vào biểu thức (3.5) ta nhận được:

$$\omega_i = \frac{i^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \qquad \text{e)}$$

Tần số dao động riêng thấp nhất (tần số cơ bản) ứng với i = 1:

$$\omega_1 = \omega_{min} = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

b) Xác định các dạng dao động riêng:

Dạng dao động tổng quát của hệ theo (3.4) có tính đến (c) sẽ là:

$$X_{(x)} = C_1 \sin kx + C_1 \operatorname{sh} kx \qquad \text{(f)}$$

Tại x = l, ta có

$$X_{(l)} = C_1 \sin kl + C_1 \operatorname{sh} kl = 0 \qquad \text{(i)}$$

Từ (i) suy ra: $C_3 = -C_1 \cdot \dfrac{\sin kl}{\operatorname{sh} kl}$

Vì sin kl = 0 nên $C_3 = 0$, do đó ta viết lại (f):

$$X_x = C_1 \sin kx, \text{ hay:}$$

$$X_{i,x} = C \sin \frac{i\pi x}{l} \qquad \text{(k)}$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots \infty)$$

(k) là phương trình dạng dao động riêng của hệ. Các dạng dao động riêng của hệ được mô tả trên hình 3.1 với ba dạng dao động riêng đầu tiên ứng với i = 1, i = 2, i = 3.

Bài 3.2: Các điều kiện biên:

- Tại x = 0:

$$X_{(0)} = 0, \quad \frac{dX_{(0)}}{dx} = 0 \qquad \text{(a)}$$

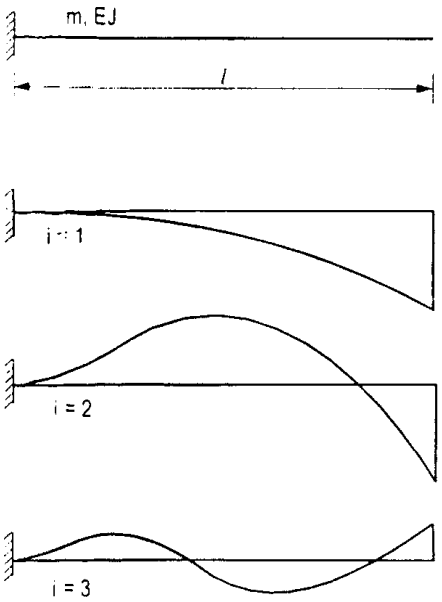
- Tại x = l:

$$\frac{d^2X_{(l)}}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3X_{(l)}}{dx^3} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Thế điều kiện biên (a) vào phương trình (3.4) và đạo hàm của nó, ta được:

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Viết điều kiện biên (b) có kể đến (c) ta được hai phương trình. Điều kiện để tồn tại dao động sẽ cho ta phương trình tần số sau:



Hình 3.2

$$D = \cos kl \operatorname{ch} kl + 1 = 0$$

Nghiệm của phương trình siêu việt trên:

$$k_1 = \frac{1,875}{l}, \qquad k_2 = \frac{4,694}{l}, \quad k_3 = \frac{7,855}{l}, \ldots..$$

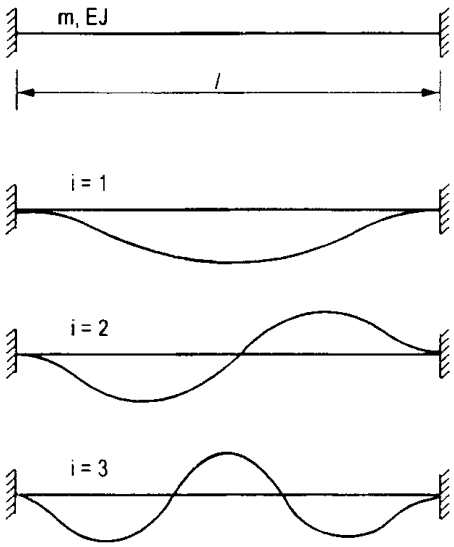
Thế các giá trị k vào (3.5) ta được các giá trị tần số dao động riêng:

$$\omega_1 = \frac{3,516}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_2 = \frac{22}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_3 = \frac{61,7}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Mỗi tần số ω_i ứng với mỗi dạng dao động riêng. Ba dạng dao động riêng đầu tiên được mô tả trên hình 3.2.

Bài 3.3: Đáp số:

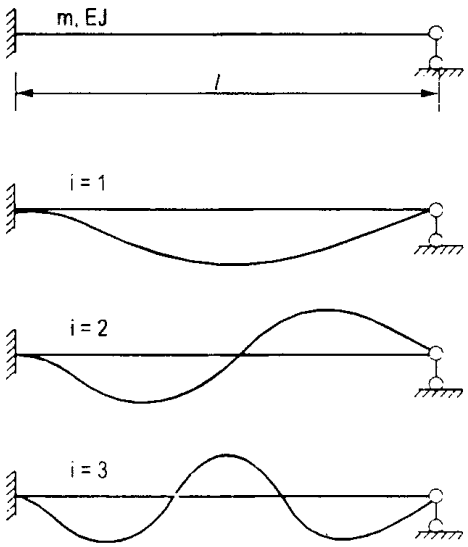
Phương trình tần số dao động riêng, giá trị các tần số dao động riêng và phương trình dạng dao động riêng cho ở bảng 3.1. Ba dạng dao động riêng đầu tiên được mô tả trên hình 3.3.



Hình 3.3

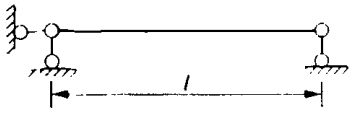
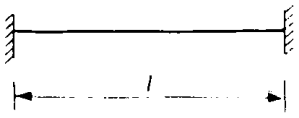
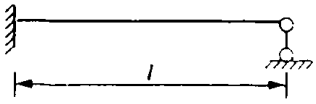
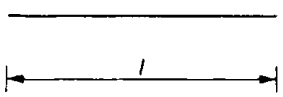
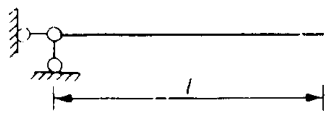
Bài 3.4: Đáp số:

Phương trình tần số dao động riêng, giá trị các tần số dao động riêng và phương trình dạng dao động riêng cho ở bảng 3.1. Ba dạng dao động riêng đầu tiên được mô tả trên hình 3.4.



Hình 3.4

Bảng 3.1

Sơ đồ dầm và phương trình tần số	$\omega_i = \frac{\alpha_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$		Dạng dao động riêng
	i	α_i	
 $\sin k_i l = 0$ $k_i = \frac{\alpha_i}{l}$	1 2 3 i	3,142 6,283 9,425 $i\pi$	$X_{i(x)} = A_i \sin k_i x$
 $-\cos k_i l \,/\, \mathrm{ch}\, k_i l = 1$	1 2 3 i	1,875 4,694 7,855 $\frac{\pi}{2}(2i-1)$	$X_{i(x)} = A_i [(\mathrm{sh}\, k_i l + \sin k_i l)$ $(\mathrm{ch}\, k_i x - \cos k_i x) -$ $-(\mathrm{ch}\, k_i l + \cos k_i l).$ $.(\mathrm{sh}\, k_i x - \sin k_i x)]$
 $\cos k_i l \,/\, \mathrm{ch}\, k_i l = 1$	1 2 3 i	4,73 7,859 10,996 $\frac{\pi}{2}(2i+1)$	$X_{i(x)} = A_i [(\sin k_i l + \mathrm{sh}\, k_i l)$ $(\mathrm{ch}\, k_i x - \cos k_i x) -$ $-(\mathrm{ch}\, k_i l + \cos k_i l).$ $.(\mathrm{sh}\, k_i x - \sin k_i x)]$
 $\mathrm{tg}\, k_i l - \mathrm{th}\, k_i l = 0$	1 2 3 i	3,927 7,069 10,21 $\frac{\pi}{2}(4i+1)$	$X_{i(x)} = A_i [(\sin k_i l + \mathrm{sh}\, k_i l)$ $(\mathrm{ch}\, k_i x - \cos k_i x) -$ $-(\mathrm{ch}\, k_i l + \cos k_i l).$ $.(\mathrm{sh}\, k_i x - \sin k_i x)]$
 $\cos k_i l \,/\, \mathrm{ch}\, k_i l = 1$	1 2 3 i	4,73 7,853 10,996 $\frac{\pi}{2}(2i-1)$	$X_{i(x)} = A_i [(\mathrm{ch}\, k_i l - \cos k_i l)$ $(\mathrm{sh}\, k_i x - \sin k_i x) -$ $-(\mathrm{sh}\, k_i l + \sin k_i l).$ $.(\mathrm{ch}\, k_i x + \cos k_i x)]$
 $\mathrm{tg}\, k_i l - \mathrm{th}\, k_i l = 0$	1 2 3	3,927 7,069 10,21	$X_{i(x)} = A_i [(\mathrm{ch}\, k_i l + \cos k_i l)$ $(\mathrm{sh}\, k_i x + \sin k_i x) -$ $-(\mathrm{sh}\, k_i l + \sin k_i l).$ $.(\mathrm{ch}\, k_i x + \cos k_i x)]$

Bài 3.5: Với dầm đặt trên nền đàn hồi có hệ số nền k, trong phương trình vi phân dao động tự do, ta phải kể đến thành phần phản lực nền, khi đó phương trình (3.1) có dạng:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0$$

Nếu tính đến tải trọng phân bố đều q thì phương trình trên sẽ là:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + (1+e)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0$$

Trong đó: $e = \frac{q}{mg}$

Để tiện cho quá trình giải, ta đưa vào biến $z = \frac{x}{l}$. Khi đó, ta có phương trình vi phân dạng dao động tự do:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{(1+e)\,ml^4}{EJ}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{kl^4}{EJ}y = 0$$

Nghiệm của phương trình này được biểu thị bằng tích của hàm:

$$y_{(z,t)} = X_{(z)} \cdot T_{(t)}$$

Trong đó, $X_{(z)}$ - hàm chỉ phụ thuộc vào z, T(t) - hàm chỉ phụ thuộc vào thời gian t.

Phương trình dao động tự do được tách ra làm hai phương trình:

$$\ddot{T}_{(t)} + \omega^2 T_{(t)} = 0$$

$$X^{IV}_{(z)} - (r^2\omega^2 - e)\,X_{(z)} = 0$$

Nghiệm của phương trình vi phân đầu là:

$$T_{(t)} = A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

Nghiệm của phương trình vi phân thứ hai có dạng:

$$X_{(z)} = C_1\,\mathrm{sh}\,r_1 z + C_2\,\mathrm{ch}\,r_1 z + C_3\sin r_1 z + C_4\cos r_1 z \qquad \text{(a)}$$

Trong đó:

$$r^4 = \frac{(1+e)ml^4}{EJ},\ r_1^4 = (r^4.\omega^2 - C)\ ;\ C = \frac{kl^4}{EJ}$$

Điều kiện biên của dầm đơn giản hai gối tựa khớp nằm trên nền đàn hồi như sau:

$$x = 0,\ z = \frac{x}{l} = 0,\ \text{có}: X_{(o)} = 0,\ \frac{d^2X_{(o)}}{dz^2} = 0 \qquad \text{(b)}$$

$$x = l,\ z = 1,\ \text{có}: X_{(l)} = 0,\ \frac{d^2X_{(l)}}{dz^2} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Thế điều kiện biên (b) vào phương trình (a) và đạo hàm bậc hai của nó, ta được: $C_2 = C_4 = 0$, và do đó:

$$X_{(z)} = C_1 \operatorname{sh} r_1 z + C_3 \sin r_1 z$$

Viết điều kiện biên (c) có kể đến: $C_2 = C_4 = 0$, ta nhận được hai phương trình sau:

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{sh}(r_1.l) + C_3 \sin r_1.l = 0 \\ r_1^2 \left(C_1 \operatorname{sh} r_1.l - C_3 \sin r_1.l\right) = 0 \end{cases}$$

Hệ số có nghiệm khác không khi định thức của hệ bằng không:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} r_1 & \sin r_1 \\ \operatorname{sh} r_1 & -\sin r_1 \end{vmatrix} = 0$$

Khai triển định thức, ta sẽ nhận được phương trình tần số:

$$\operatorname{sh} r_1 \sin r_1 = 0$$

Như vậy: $r_1 = i\pi$.

Ở trên ta đã có: $r_1^4 = (r^4\omega^2 - C)$ cuối cùng sẽ nhận được.

$$\omega^2 = \frac{r_1^4 + C}{r^4} = \frac{i^4\pi^4 - C}{r^4}$$

$$\omega_i = \sqrt{\frac{i^4\pi^4 EJ + kl^4}{(1+e)\, ml^4}}$$

Tần số dao động riêng thứ nhất (tần số cơ bản):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi^4 EJ + kl^4}{(1+e)\, ml^4}}$$

Bài 3.6: Với dầm đặt tự do trên nền đàn hồi, ta có điều kiện biên là lực cắt và mô men uốn ở hai đầu dầm bằng không:

Tại $z = 0$, $(x = 0)$, ta có: $\dfrac{d^2X_{(0)}}{dz^2} = \dfrac{d^3X_{(0)}}{dz^3} = 0$

tại $z = 1$, $(x = l)$; $\dfrac{d^2X_{(l)}}{dz^2} = \dfrac{d^3X_{(l)}}{dz^3} = 0$

Thế các điều kiện biên này vào các phương trình tương ứng, ta được bốn phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 + C_2 + 0 - C_4 = 0 \\ C_1 + 0 - C_3 + 0 = 0 \\ C_1 \operatorname{sh} r_1 + C_2 \operatorname{ch} r_1 - C_3 \sin r_1 - C_4 \cos r_1 = 0 \\ C_1 \operatorname{ch} r_1 + C_2 \operatorname{sh} r_1 - C_3 \cos r_1 - C_4 \sin r_1 = 0 \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu rút ra:

$$C_1 = C_3$$

$$C_2 = C_4$$

Thế vào hai phương trình cuối, ta được:

$$\begin{cases} C_2(\text{ch}\, r_1 - \cos r_1) + C_1(\text{sh}\, r_1 - \sin r_1) = 0 \\ C_2(\text{sh}\, r_1 + \sin r_1) + C_1(\text{ch}\, r_1 - \cos r_1) = 0 \end{cases}$$

Điều kiện để tồn tại dao động là định thức của hệ phương trình trên phải bằng không, từ đó rút ra phương trình tần số dao động riêng:

$$\text{ch}\, r_1 \cos r_1 = 1$$

Nghiệm của phương trình này: $r_1 = \frac{\pi}{2}(2i - 1)$,

trong đó: i = 2, 3, 4...

Khi đó, tần số dao động riêng sẽ là:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{EJ\pi^4(2i-1)^4 + 16kl^4}{16(1+e)ml^4}}$$

Với i = 2, ta có tần số cơ bản:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{81EJ\pi^4 + 16kl^4}{16(1+e)ml^4}}$$

Bài 3.7: a) Xác định độ võng và mô men uốn lớn nhất.

Ở bài 3.1 đã có tần số dao động riêng và dạng dao động riêng:

$$\omega_i = \frac{i^2\pi^2}{l^4} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} = i^2\omega_1 \; ; \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^4} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$X_{i(x)} = \sin\frac{i\pi x}{l}$$

Xác định xung khai triển theo các dạng dao động riêng theo công thức (3.6):

$$S_{i(x)} = m_x X_i \cdot \frac{\int_0^l S_x X_i dx}{\int_0^l m_x X_i^2 dx} = m \sin\frac{i\pi x}{l} \cdot \frac{\int_0^l S.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx}{\int_0^l m.\sin^2\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx}$$

Lần lượt tính tử số và mẫu số biểu thức $S_{i(x)}$.

$$\int_0^l S.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx = \frac{sl}{i\pi}(1 - \cos\pi) = \frac{2sl}{i\pi}$$

với i = 1, 3, 5, 7, ...

$$\int_0^l m.\sin^2\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx = m\int_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\frac{i\pi x}{l}\right)dx = \frac{ml}{2}$$

Do đó:

$$S_{i(x)} = m.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\cdot\frac{i\pi}{\frac{ml}{2}} = \frac{4S}{i\pi}\sin\frac{i\pi x}{l}$$

Phương trình dao động của hệ viết theo công thức (3.7):

$$y_{(x,t)} = \sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{4.S.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)}{i\pi.m\cdot\frac{i^2\pi^2}{l}\cdot\sqrt{\frac{EJ}{m}}}\cdot\sin(i^2\omega_1 t)$$

hay:

$$y_{(x,t)} = \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJ.m}}\cdot\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\cdot\sin(i^2\omega_1 t)$$

Giá trị lớn nhất của độ võng theo thời gian, xảy ra khi:

$$\sin(i^2\omega_1 t) = \sin\left(i^2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$i = 1, 3, 5, ...$$

ứng với thời điểm $t_{max} = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{T_1}{4}$,

Trong đó: T_1 - chu kỳ dao động riêng dạng dao động riêng thứ nhất.

Vậy:

$$y_x = \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJ.m}}\cdot\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right);$$

Giá trị lớn nhất của độ võng theo tọa độ trục dầm tại vị trí $x = \frac{l}{2}$ (giữa dầm).

$$y_{max} = \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJ.m}}\cdot\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i^3}\sin\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJ.m}}\left(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+...\right) =$$

$$= \frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJ.m}}\cdot\frac{\pi^3}{32} = \frac{Sl^2}{8\sqrt{EJ.m}} = 0{,}125\frac{Sl^2}{\sqrt{EJ.m}}$$

Để xác định nội lực mô men uốn trong dầm, ta sử dụng biểu thức quan hệ vi phân giữa nội lực mô men uốn và độ võng:

$$M_x = -EJ\frac{d^2y}{dx^2}$$

Đưa biểu thức $y_{(x)}$ ở trên vào, ta sẽ có:

$$M_x = -EJ\left[\frac{4Sl^2}{\pi^3\sqrt{EJ.m}}\cdot\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i^3}\cdot\frac{i^2\pi^2}{l^2}\cdot\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\right]\cdot =$$

$$= \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i}\cdot\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

Giá trị lớn nhất của mô men uốn tại vị trí giữa dầm $x = \frac{l}{2}$

$$M_{max} = \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\cdot\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i}\cdot\sin\left(i\cdot\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right) =$$

$$= \frac{4S}{\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}}\cdot\frac{\pi}{4} = S\cdot\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

b) So sánh kết quả với cách tính gần đúng

Khi tính toán gần đúng dao động của hệ, ta xem hệ chỉ dao động với một dạng dao động riêng ứng với tần số thấp nhất phù hợp với sự tác dụng của tải trọng động. Ở đây, xung tác dụng phân bố đối xứng, do đó ta chỉ tính gần đúng dao động xảy ra ứng với tần số ω_1, dao động của hệ xảy ra như dao động của hệ một bậc tự do.

Tải trọng tĩnh tương đương trong trường hợp này:

$$q_{td} = S\,.\,\omega_1$$

Độ võng lớn nhất trong dầm đơn giản tại vị trí giữa dầm do tải trọng tương đương gây ra là:

$$y = \frac{5}{384}\frac{q_{td}l^4}{EJ} = \frac{5S.\omega_1.l^4}{384\,EJ} = 0{,}12865\cdot\frac{Sl^2}{\sqrt{EJ.m}}$$

Mômen uốn lớn nhất trong dầm đơn giản do tải trọng phân bố q_{td} gây ra tại giữa dầm là:

$$M = \frac{q_{td}l^4}{8} = \frac{S.\omega_1.l^2}{8} = 0{,}1235\,.\,S\cdot\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Như vậy, sai số tính toán về độ võng là:

$$\frac{0,125-0,12865}{0,125}\cdot 100\% = 2,9\%$$

Sai số về nội lực mô men uốn là:

$$\frac{1-1,235}{1}\cdot 100\% = 23,5\%$$

Bài 3.8: Thành phần khai triển của tải trọng theo dạng dao động riêng thứ i được tính theo công thức (3.8):

$$q_i(x) = m_x X_i \cdot \frac{\int_0^l q_x X_i dx}{\int_0^l m_x X_i^2 dx} = m.\sin\frac{i\pi x}{l}\,\frac{\int_0^l q.\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right).dx}{m\int_0^l \sin^2\left(\frac{i\pi x}{l}\right)dx}$$

$$q_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } i = 2, 4, 6, \ldots \quad (i: \text{chẵn}) \\ \frac{4.q}{i\pi}\cdot\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) & \text{khi } i = 1, 3, 5\ldots \quad (i: \text{lẻ}) \end{cases}$$

Hệ số ảnh hưởng động học theo thời gian trong trường hợp này:

$$K_{ai}(t) = \frac{1-\cos\omega_i t}{\omega_i^2}$$

Phương trình dao động của hệ được viết theo công thức (3.9)

$$y_{(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{q_i(x)}{m_x}\cdot k_{ai}(t) = \sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{4.q}{i.\pi}\cdot\frac{\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)}{m\cdot\frac{i^4\pi^4}{l^4}\cdot\frac{EJ}{m}}\cdot(1-\cos\omega_i t) =$$

$$= \frac{4ql^4}{\pi^5.EJ}\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i^5}\cdot\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\cdot(1-\cos\omega_i t)$$

Giá trị lớn nhất của $y_{(x,t)}$ theo thời gian xảy ra khi $\cos^2(i^2\omega_1 t) = -1$, ứng với thời điểm $t = \frac{T_1}{4}$, trong đó: T_1 là chu kỳ dao động riêng của dạng chính thứ nhất.

$$y_{(x)} = \frac{8q.l^4}{EJ.\pi^5}\sum_{i=1,3}^{\infty}\frac{1}{i^5}\cdot\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

Giá trị lớn nhất của chuyển vị y_x theo trục dầm tại vị trí $x = \frac{l}{2}$.

$$y_{max} = \frac{8ql^4}{EJ\,.\,\pi^5} \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^5} \cdot \sin\left(\frac{i\,\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{8ql^4}{EJ\,.\,\pi^5}\left(1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{8ql^4}{EJ\,.\,\pi^5} \cdot \frac{5.\pi^5}{1536} = \frac{5}{192} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

Biểu thức mômen uốn được xác định từ quan hệ vi phân:

$$M_x = -EJ\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$M_x = \frac{8ql^4}{\pi^3} \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^3} \cdot \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$$

Giá trị lớn nhất của mô men uốn tại vị trí $x = \frac{l}{2}$.

$$M_{max} = \frac{8ql^4}{\pi^3} \sum_{i=1,3}^{\infty} \frac{1}{i^3} \sin\frac{i\pi}{2} = \frac{8ql^2}{\pi^3}\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} \cdots\right)$$

$$= \frac{8ql^4}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^3}{32} = \frac{ql^2}{4}$$

Nếu ta xem rằng dạng dao động riêng của dầm trùng với đường đàn hồi tĩnh do tải trọng phân bố đều gây ra, thì:

$$y_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_{td}\,.\,l^4}{EJ} = \frac{5.2q\,.\,l^4}{384EJ} = \frac{5ql^4}{192EJ}$$

$$M_{max} = \frac{q_{td}\,.\,l^2}{8} = \frac{2ql^2}{8} = \frac{ql^2}{4}$$

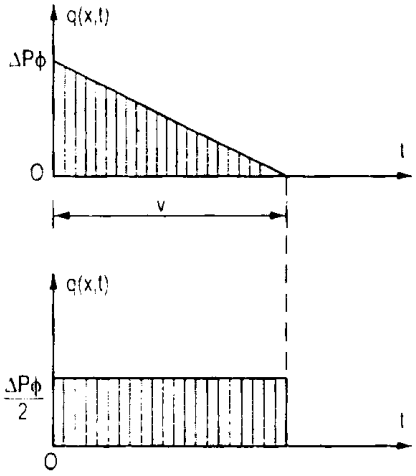
Như vậy, sai số trong trường hợp cụ thể này là không có.

Bài 3.9: Thay tải trọng động đã cho bằng tải trọng bậc thang tác dụng lên dầm:

$$q = \frac{\Delta P_{\Phi}}{2} \cdot a = \frac{10}{2} \cdot 100 = 500N/cm$$

Chu kỳ dao động riêng thứ nhất:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{m}{EJ}} = \frac{2.500^2}{3{,}14}\sqrt{\frac{0{,}08}{4{,}2.10^{12}}} = 0{,}02\,.\,S$$



Hình 3.5

Thời gian duy trì tải trọng θ = 1,4.s lớn hơn nhiều so với nửa chu kỳ dao động riêng T_1, do đó giá trị độ võng và mômen uốn sẽ đạt được trong thời gian duy trì tải trọng. Ta có thể sử dụng công thức đã nhận được ở bài 3.8. Nếu chỉ lấy một số hạng đầu của chuỗi, ta có: động võng lớn nhất:

$$y_{max} = y_{\left(\frac{l}{2}, \frac{T_1}{2}\right)} = \frac{8ql^4}{EJ.\pi^5} = 0{,}02614\ \frac{ql^4}{EJ}$$

$$y_{max} = 0{,}02614 \cdot \frac{500.500^4}{4{,}2.10^{12}} = 0.195cm$$

Mô men uốn lớn nhất:

$$M_{max} = M_{\left(\frac{l}{2}, \frac{T_1}{2}\right)} = \frac{8ql^4}{\pi^3} = 0{,}258\ ql^2$$

$$M_{max} = 0{,}258\ .\ 500\ .\ 500^2 = 321\ .\ 10^5 N.cm = 321.kN\ .m$$

Bài 3.10: Đáp số:

- Độ võng lớn nhất:

$$y_{max} = \frac{5}{243} \cdot \frac{ql^4}{EJ}$$

- Mômen uốn lớn nhất.

$$M_{max} = \frac{2ql^2}{\pi^2}$$

Bài 3.11: Hệ số ảnh hưởng động theo thời gian trong trường hợp hệ chịu tác dụng lực kích động điều hòa.

$$k_{dt}(t) = \frac{\sin rt}{\omega_i^2 - r^2}$$

Phương trình dao động của hệ viết theo công thức (3.9) có tính đến hệ số $k_{ai}(t)$ sẽ là:

$$y_{(x,t)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i(x)}{m_x} \cdot \frac{\sin rt}{\omega_i^2 - r^2} = \frac{\sin rt}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i(x)}{\omega_i^2 - r^2}$$

Với dầm đơn giản, ta có:

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad , \qquad X_i = \sin \frac{i \pi x}{l}$$

Thành phần khai triển của tải trọng ứng với dạng dao động riêng thứ i được viết tương tự như công thức (3.8) khi hệ chịu tải trọng động tập trung:

$$q_i(x) = m_x X_i \cdot \frac{\sum_{j=1}^{m} P_j(t) X_i(x_j)}{\int_0^l m_x X_i^2 dx} = m \sin \frac{i \pi x}{l} \cdot \frac{P.\sin \frac{i \pi a}{l}}{\frac{ml}{2}}$$

$$= \frac{2P}{l} \cdot \sin \frac{i \pi x}{l} \sin \frac{i \pi a}{l}$$

Đưa tải trọng khai triển $q_i(x)$ vào biểu thức $y_{(x,t)}$ ở trên, ta có:

$$y_{(x,t)} = \frac{\sin rt}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2P}{l} \cdot \frac{\sin \frac{i \pi x}{l} \cdot \sin \frac{i \pi a}{l}}{\omega_i^2 - r^2}$$

Giá trị lớn nhất của độ võng theo thời gian tại sin rt = 1, ta có:

$$y_{(x)} = \frac{2P}{ml} = \sum_{i=1}^{\infty} \cdot \frac{\sin \frac{i \pi x}{l} \cdot \sin \frac{i \pi a}{l}}{\omega_i^2 - r^2} =$$

$$= \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} = \sum_{i=1}^{\infty} \cdot \frac{\sin \frac{i \pi x}{l} \cdot \sin \frac{i \pi a}{l}}{i^4 \left(1 - \frac{r^2}{\omega_i^2}\right)}$$

Khi tải trọng động tập trung đặt tại vị trí giữa dầm, $\left(a = \frac{1}{2}\right)$, thì độ võng của dầm sẽ có giá trị lớn nhất theo trục dầm. Khi đó biểu thức tử số bên trong dấu tổng của phương trình độ võng sẽ là:

$$\sin \frac{i \pi x}{l} \sin \frac{i \pi a}{l} = \left(\sin \frac{i\pi}{2}\right)^2 = \begin{cases} 0 \text{ khi i chẵn} \\ 1 \text{ khi i lẻ.} \end{cases}$$

Do đó:

$$y_{max} = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4\left(1-\frac{r^2}{\omega_i^2}\right)} = y_T \cdot \frac{96}{\pi^4}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4\left(1-\frac{r^2}{\omega_i^2}\right)}$$

Trong đó:

$y_T = \frac{Pl^3}{48EJ}$ là độ võng tĩnh do tải trọng tập trung P đặt tĩnh tại giữa dầm gây ra.

$$y_{max} = y_T \cdot \frac{96}{\pi^4}\left[\frac{1}{l^2(1-0{,}075^2)} + \frac{1}{3^2(1-0{,}083^2)} + \cdots\right] \approx 2{,}254 . y_T$$

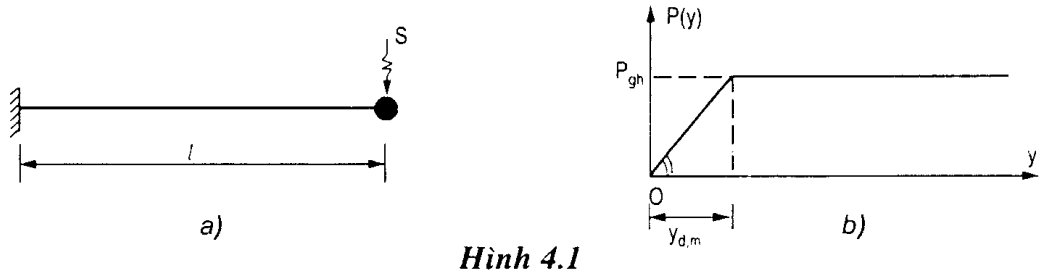
Bài 3.12: Đáp số:

$$y_{max} = \frac{Sl}{4\sqrt{EJ.m}}$$

Chương 4

DAO ĐỘNG ĐÀN DẺO HỆ MỘT BẬC TỰ DO

Bài 4.1: Vật liệu làm việc theo sơ đồ đàn hồi dẻo lí tưởng cho trên hình 4.1.



Hình 4.1

1. Tính trong giai đoạn đàn hồi

a) Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{M.\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{3EJ}{Q.l^3}} = \sqrt{\frac{3.2,1.10^8.7,8.10^{-8}.9,81}{1,23.1^3}} = 62,6\ (l/s)$$

$$T = \frac{2\Pi}{\omega} = \frac{6,28}{62,6} = 0,1\ (s)$$

b) Xác định lực đàn hồi giới hạn (lực tính giới hạn) dưới tác dụng của lực này, trong dầm sẽ phát sinh khớp dẻo:

$$P_{gh} = \frac{\sigma_{gh}.W_d}{l} = \frac{\sigma_{gh}.1,15W_{dh}}{l} = \frac{\sigma_{gh}.1,15.J}{l.\frac{h}{2}}$$

$$= \frac{2,1.10^4.1,15.78.10^{-8}}{1.0,04} = 4,71.kN$$

c) Xác định độ võng đàn hồi lớn nhất:

$$Y_{d,m} = \frac{P_{gh}.l^3}{3EJ} = \frac{471.1^3}{3.2,1.10^8.78.10^8} = 0,0096.M = 0,96.cm$$

d) Tính xung đàn hồi giới hạn

$$S_{gh} = \frac{P_{gh}}{\omega} = \frac{4,71}{62,6} = 7,52.10^{-2}\ kNs$$

Giá trị xung tác dụng đã cho $S = 20.10^{-2}$ kNs lớn hơn nhiều so với xung đàn hồi giới hạn, do đó dầm sẽ làm việc trong giai đoạn dẻo.

e) Xác định thời gian đạt độ võng đàn hồi lớn nhất

$$t_{d,m} = \frac{1}{\omega}\arcsin\frac{S_{gh}}{S} = \frac{1}{62,6}\arcsin\frac{7,52.10^{-2}}{20.10^{-2}} = 0,00617\ (s)$$

2. Tính trong giai đoạn dẻo

a) Độ võng cực đại của hệ do tác dụng của xung đã cho:

$$y_{max} = \frac{1}{2}y_{d,m}\left(1+\frac{S^2}{S_{gh}^2}\right) = \frac{0,96}{2}\left(1+\frac{20^2\,10^{-4}}{7,52.10^{-4}}\right) = 3,88\,cm$$

b) Thời điểm hệ đạt chuyển vị cực đại Y_{max} đó:

$$t_{max} = t_{d,m} + \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{S^2}{S_{gh}^2}-1} = 0,00617 + \frac{1}{62,6}\sqrt{\frac{20^2}{7,52^2}-1} = 0,00617 + 0,0395 = 0,0457\ (s)$$

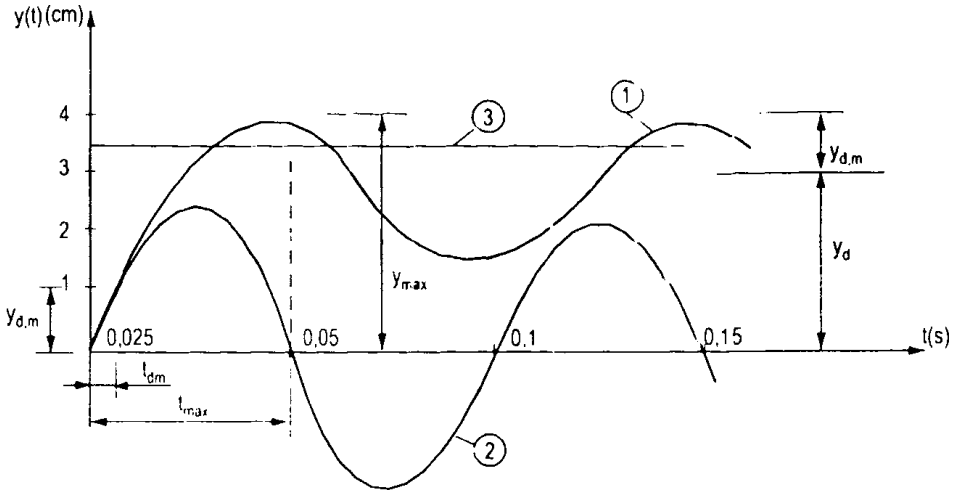
Sau khi đạt giá trị độ võng cực đại, dầm sẽ dao động tự do với tần số $\omega = 62,6$ (1/s).

Biên độ dao động tự do là $Y_{d\,m} = 0,96$cm.

c) Chuyển định chuyển vị dư:

$$Y_d = Y_{max} - Y_{d,m} = 3,88 - 0,96 = 2,92cm$$

Với các kết quả tính được ở trên, ta xây dựng biểu đồ thay đổi độ võng tại điểm A của dầm, khi điều kiện làm việc của vật liệu dầm làm việc theo sơ đồ đàn hồi dẻo lí tưởng, xem hình 4.2.



Hình 4.2

1. Chuyển vị khi tính theo sơ đồ đàn hồi dẻo lí tưởng;
2. Chuyển vị khi tính theo sơ đồ đàn hồi lí tưởng; 3. Chuyển vị khi tính theo sơ đồ cứng dẻo.

Bài 4.2: Khi vật liệu của dầm làm việc theo sơ đồ đàn hồi lí tưởng, phương trình dao động của hệ một bậc tự do chịu tác dụng xung như đã biết:

$$y(t) = \frac{S}{M\omega}\sin\omega t = y_{max}\sin\omega t$$

Độ võng cực đại:

$$y_{max} = \frac{S}{M\omega} = \delta_{11}.\omega.S = \frac{l^3}{3EJ}\omega.S$$

$$y_{max} = \frac{1^3.62,6.0,2}{3,78.10^{-8}.2,1.10^8} = 0,0255.M = 2,55cm$$

Thời gian đạt độ võng cực đại:

$$t_{max} = \frac{T}{4} = \frac{0,1}{4} = 0,025(s)$$

Biểu đồ thay đổi độ võng cực đại tại điểm A trong trường hợp này được biểu thị bằng đường số (2) trên hình 4.2.

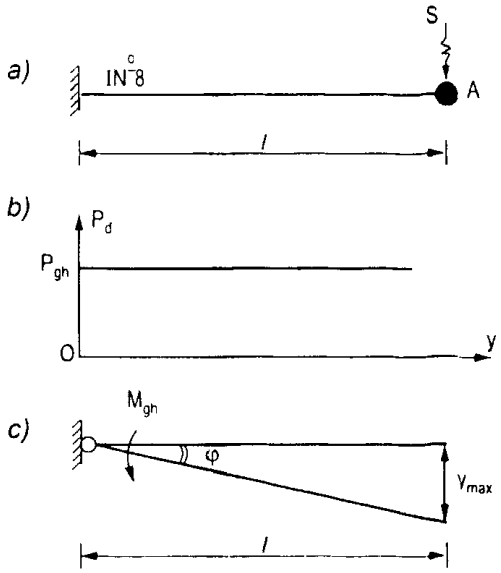
Bài 4.3: Ta sẽ xác định chuyển vị lớn nhất của hệ tại điểm A khi hệ chịu tác dụng xung và vật liệu làm việc theo sơ đồ cứng dẻo hình 4.3b, theo phương pháp năng lượng.

Tốc độ chuyển động của khối lượng tại thời điểm ban đầu t = 0:

$$\dot{y}_{(t=0)} = \frac{S}{M}$$

Động năng của hệ do tác dụng của tốc độ ban đầu là:

$$K = \frac{1}{2}M(\dot{y})^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{M}\right)^2 = \frac{S^2}{2M}$$



Hình 4.3

Động năng này sẽ hoàn toàn biến thành năng lượng ứng với công thực hiện bằng mômen giới hạn ở trạng thái dẻo M_{gh} tương ứng với góc chuyển dịch φ (công nội lực):

$$A = M_{gh}.\varphi = M_{gh}.\frac{y_{max}}{l}$$

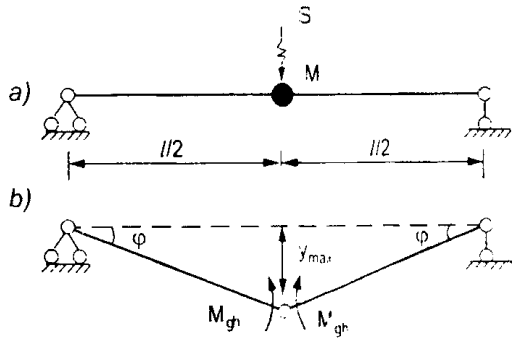
Cho cân bằng hai biểu thức năng lượng ta sẽ nhận được giá trị độ võng cực đại:

$$y_{max} = \frac{S^2 l}{2M_{gh}.M} = \frac{S^2.g}{2P_{gh}.G} = \frac{(0,2)^2.9,81}{2.4,71.1,23} = 0,034(m)$$

$$y_{max} = 3,4\ (cm)$$

Biểu đồ chuyển vị tại điểm A của trường hợp này là đường đồ thị số (3) trên hình 4.2.

Bài 4.4: Chuyển vị lớn nhất của dầm khi chịu tác dụng xung trong điều kiện vật liệu làm việc theo sơ đồ cứng dẻo được tính theo phương pháp năng lượng hình 4.4.



Hình 4.4

Tốc độ chuyển động của khối lượng tại thời điểm ban đầu:

$$\dot{y}_{(o)} = \frac{S}{M}$$

Động năng của hệ: $K = \frac{1}{2}M(\dot{y}_{(o)})^2 = \frac{S^2}{2M}$

Nội lực mô men uốn có giá trị lớn nhất tại giữa dầm, do đó khớp dẻo sẽ xuất hiện tại vị trí đó.

Công nội lực ứng với trạng thái dẻo được thực hiện bởi mô men giới hạn của trạng thái dẻo và góc chuyển dịch φ tương ứng, hình 4.4b.

$$A = 2M_{gh} \cdot \varphi = 4\frac{M_{gh} \cdot y_{max}}{l}$$

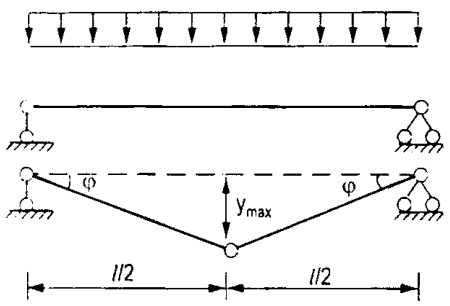
Cân bằng hai biểu thức năng lượng ta sẽ nhận được chuyển vị cực đại của hệ:

$$\frac{S^2}{2M} = 4\frac{M_{gh} \cdot y_{max}}{l}$$

$$y_{max} = \frac{S^2 \cdot l}{8M_{gh} \cdot M}$$

Bài 4.5: Ta xem rằng toàn bộ biến dạng của dầm được tính theo một khớp dẻo tại vị trí giữa nhịp dầm. Khi đó tốc độ chuyển động của một điểm cách gối tựa một đoạn x sẽ là:

$$\dot{y}_{(x)} = \dot{y}_{\left(\frac{l}{2}\right)} \cdot \frac{2x}{l} \qquad (a)$$



Hình 4.5

Để xác định giá trị tốc độ của điểm ở vị trí giữa dầm $\dot{y}_{\left(\frac{l}{2}\right)}$, ta làm cân bằng biểu thức năng lượng giữa động năng chuyển động của hệ và động năng do tác dụng của xung lượng gây ra:

$$2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{l/2} m_x(\dot{y}_{(x)})^2 dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{l/2} S.\dot{y}_{(x)} dx \qquad (b)$$

Đưa (a) vào (b) ta sẽ nhận được:

$$\dot{y}_{\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{3S}{2m} \qquad (c)$$

trong đó m là khối lượng phân bố của dầm. Bây giờ ta xác định động năng của hệ:

$$K = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{l/2} m[\dot{y}_{(x)}]^2 dx = \int_0^{l/2} m\left(\frac{3S}{2m} \cdot \frac{2x}{l}\right)^2 dx = \frac{3}{8}\frac{S^2 l}{m} \qquad (d)$$

Công nội lực sinh ra bởi mômen giới hạn của trạng thái dẻo tương ứng với các góc chuyển dịch φ sẽ là:

$$A = 2\, M_{gh} \cdot \varphi = 4\frac{M_{gh} \cdot y_{max}}{l} \qquad (e)$$

Cho cân bằng hai biểu thức năng lượng (d) và (e), ta rút ra:

$$y_{max} = \frac{3}{32} \cdot \frac{S^2 l^2}{m\, M_{gh}} \qquad (f)$$

Bài 4.6: Đáp số:

$$y_{max} = \frac{3}{8}\frac{S^2 l^2}{m\,.\,M_{gh}}$$

Bài 4.7: Đáp số:

$$y_{max} = \frac{S^2 l}{16\, M_{gh}.M}$$

Bài 4.8: Đáp số:

$$y_{max} = \frac{3}{64} \cdot \frac{S^2 l}{m.M_{gh}}$$

Bài 4.9: Đáp số:

$$y_{max} = \frac{l^2 \sigma_{gh}.W_d}{24\, EJ}\left(1 + \frac{3EJ.S^2}{M l \sigma_{gh}^2\,.\,W_d^2}\right)$$

Bài 4.10: Đáp số:

$$y_{max} = \frac{l^2 \sigma_{gh}.W_d}{48\, EJ}\left(1 + \frac{3EJ.S^2}{M l \sigma_{gh}^2\,.\,W_d^2}\right)$$

Chương 5

DAO ĐỘNG CỦA KHUNG

Ta đã biết đối với các công trình thực như các hệ: dầm, khung, vòm... đều là các hệ có khối lượng phân bố, các kết cấu này đều có số bậc tự do lớn vô hạn. Tính toán động lực học các kết cấu như vậy sẽ rất phức tạp. Vì vậy trong thực tế người ta thường áp dụng các phương pháp gần đúng. Khi tính kết cấu khung chịu tải trọng động ngắn hạn, phương pháp gần đúng hay được sử dụng là phương pháp dựa trên giả thiết sau:

- Công trình được khảo sát như hệ một bậc tự do, nghĩa là xem hệ chỉ dao động với một dạng dao động xác định duy nhất.

- Dạng dao động duy nhất phù hợp với dao động của hệ có đường đàn hồi tương ứng với đường đàn hồi do tác dụng của tải trọng tĩnh phân bố giống với tải trọng động tác dụng trên hệ. Từ đường đàn hồi này sẽ cho phép xác định được tần số dao động riêng cơ bản của hệ.

Sau khi xác định được tần số dao động riêng, ta sẽ xác định được hệ số động, tải trọng tĩnh tương đương và tính toán kết cấu chịu tác dụng của tải trọng tĩnh tương đương đó.

Tần số dao động riêng được xác định theo phương pháp năng lượng như đã biết đối với hệ một bậc tự do:

$$\omega = \sqrt{\frac{U_{max}}{\overline{K}_{max}}} \tag{5.1}$$

Trong đó: U_{max} - thế năng lớn nhất của hệ;

$\overline{K}_{max}$ - động năng lớn nhất của hệ khi $\omega = 1$.

Đối với kết cấu khung:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i}\frac{M_x}{EJ_x}\cdot dx \tag{5.2}$$

$$\overline{K}_{max} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{l_i} m_x X_x^2\, dx \tag{5.3}$$

Với: M_x, X_x là nội lực mômen uốn và đường đàn hồi do tác dụng của tải trọng tĩnh có quy luật phân bố giống với quy luật tác dụng của tải trọng động đã cho gây ra. Để tiện lợi trong quá trình tính toán, các tích phân của biểu thức động năng và thế năng lớn nhất đối với từng phần tử của khung được cho sẵn ở bảng 5.1.

Khi tính dao động đối xứng của kết cấu khung như hệ một bậc tự do, tần số dao động riêng thứ nhất được xác định gần đúng theo công thức sau:

$$\omega = \frac{k}{l_1^2}\sqrt{\frac{EJ_1}{m_1}} \tag{5.4}$$

trong đó:

k - hệ số đặc trưng của tần số dao động riêng của kết cấu khung;

l_1, EJ_1, m_1 - lần lượt là chiều dài, độ cứng và khối lượng phân bố của thanh thứ nhất của khung.

Hệ số đặc trưng tần số dao động riêng được tính theo công thức:

$$K = 10 \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{l_i}{l_1}\right)^5 \cdot \frac{EJ_1}{EJ_i} \cdot U'_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{l_i}{l_1}\right)^9 \cdot \left(\frac{EJ_1}{EJ_i}\right)^2 \cdot \frac{m_i}{m_1} K'_i}} \tag{5.5}$$

trong đó:

i - chỉ số các thanh của khung được đánh số theo một trình tự nào đó;

n - số thanh của khung;

U'_i - thế năng quy đổi;

K'_i - động năng quy đổi.

Thế năng quy đổi và động năng quy đổi được tính theo các công thức sau:

$$U'_i = q_i^2 + 40\left(\overline{M}_{Ai}^2 \pm \overline{M}_{Ai}\overline{M}_{Bi} + \overline{M}_{Bi}^2\right) + 10q_i\left(\pm \overline{M}_{Ai} \pm \overline{M}_{Bi}\right) \tag{5.6}$$

$$K'_i = 1{,}025\, q_i^2 + 25{,}4\left(\overline{M}_{Ai}^2 \pm 1{,}938\overline{M}_{Ai}\overline{M}_{Bi} + \overline{M}_{Bi}^2\right) + 10{,}12q_i\left(\pm \overline{M}_{Ai} \pm \overline{M}_{Bi}\right) \tag{5.7}$$

Đại lượng $\overline{M}_{Ai}$, $\overline{M}_{Bi}$ là các giá trị mômen uốn quy đổi tại đầu các thanh thứ i, A, B là chữ ký hiệu đầu thanh AB.

$$\overline{M}_{Ai} = \frac{M_{Ai}}{l_1^2}\ ;\ \overline{M}_{Bi} = \frac{M_{Bi}}{l_1^2} \tag{5.8}$$

trong đó: M_{Ai}, M_{Bi} là mômen uốn tại các đầu thanh A, B của thanh AB. Các mô men M_{Ai}, M_{Bi} phát sinh do tác dụng của tải trọng tĩnh có quy luật phân bố giống với tải trọng động tác dụng trên hệ đã cho. Trong các thanh không có tải trọng tác dụng thì khi tính thế năng và động năng quy đổi ta xem $q_i = 0$.

Dấu các đại lượng trong biểu thức (5.6), (5.7) được lấy như sau:

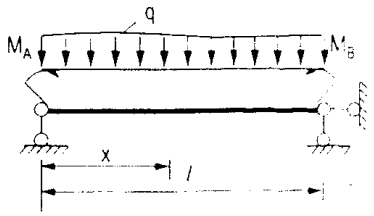
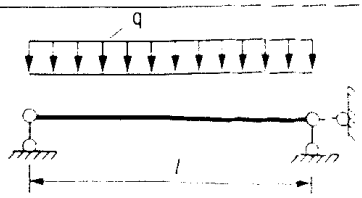
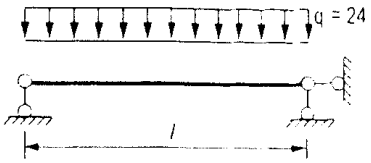
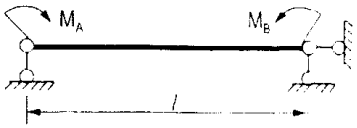
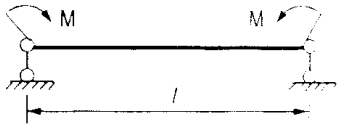
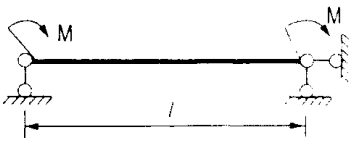
- Các mô men quy đổi lấy dấu dương (+) khi căng thớ trên và ngược lại.

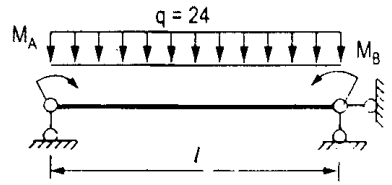
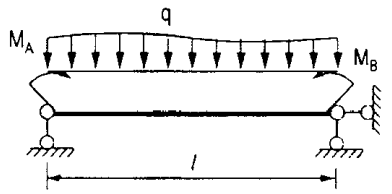
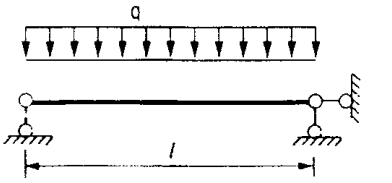
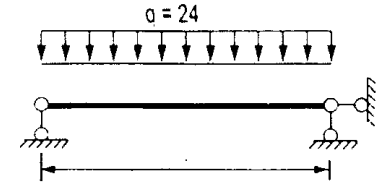
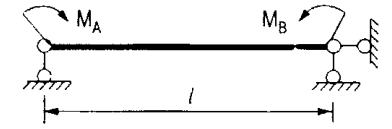
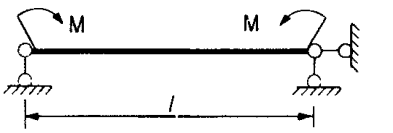
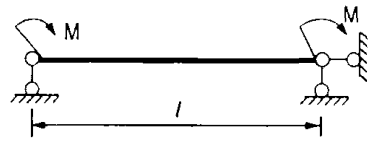
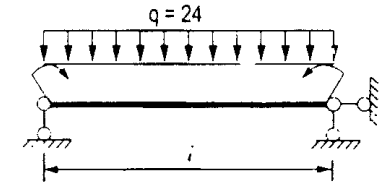
- Tích các mômen quy đổi $\overline{M}_{Ai}$, $\overline{M}_{Bi}$ lấy dấu dương nếu chúng cùng căng về một phía và ngược lại.

Để tiện cho tính toán, ta thường vẽ biểu đồ mômen uốn trong khung do q = 1 gây ra.

Trong tính toán gần đúng dao động của khung người ta còn sử dụng phương pháp thay thế khối lượng. Nội dung của phương pháp này là thay thế sơ đồ khối lượng phân bố theo chiều dài của các thanh trong khung về một số khối lượng tập trung. Như vậy bài toán dao động hệ khung có số bậc tự do lớn vô hạn được đưa về bài toán dao động của hệ hữu hạn bậc tự do đã được xét ở phần trên.

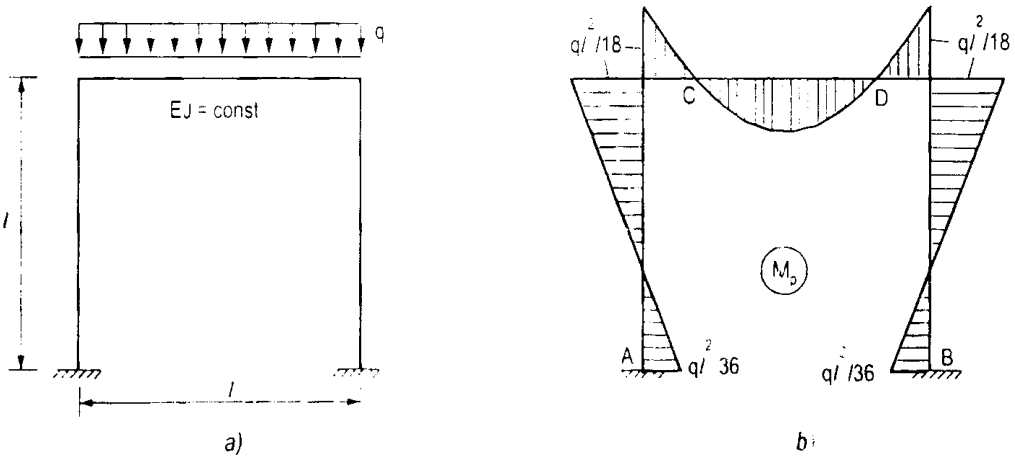
Bảng 5.1.

N°	Sơ đồ tính toán	$\int \frac{M^2}{EJ} dx$
1		$\frac{1}{EJ}\left[\int_0^l M_P^2\,dx + (M_A^2 + M_A M_B + M_B^2).\frac{l}{3} + 2(M_A A_\Phi + M_B B_\Phi)\right]$ $A_\Phi = \frac{1}{l}\int_0^l M_P\left(1-\frac{x}{l}\right)dx\ ;\ B_\Phi = \frac{1}{l}\int_0^l M_P\,x\,dx$
2		$\frac{q^2 l^5}{120EJ}$
3		$\frac{24 l^5}{5EJ}$
4		$\left(M_A^2 - M_A M_B + M_B^2\right)\frac{l}{3EJ}$
5		$\frac{M^2 l}{EJ}$
6		$\frac{M^2 l}{3EJ}$

N°	Sơ đồ tính toán	$\int \frac{M^2}{EJ} dx$
7		$\frac{1}{EJ}\left[\frac{24l^5}{5} + \left(M_A^2 + M_A M_B + M_B^2\right)\frac{l}{3} + 2l^3(M_A + M_B)\right]$
N°	Sơ đồ tính	$\int m X_x^2 dx$
1		$m\left[\int_0^l X_P^2 dx + 2\int_0^l X_P X_4 dx + \int_0^l X_4^2 dx\right]$ $X_P = q\,(l^3x - 2lx^3 + x^4)/24EJ.$ $X_4 = \left[M_A(x^3 - 2lx^2 + 2l^2x) + M_B(l^2x - x^3)\right]/6EJl$
2		$\frac{31}{630} \cdot \frac{q^2 m l^9}{24^2 (EJ)^2}$
3		$\frac{31}{630} \cdot \frac{m l^9}{(EJ)^2}$
4		$\frac{m l^5}{7560(EJ)^2}\left[16\left(M_A^2 + M_B^2\right) + 31 M_A M_B\right]$
5		$\frac{m l^5 . M^2}{120(EJ)^2}$
6		$\frac{m l^5 . M^2}{7560\,(EJ)^2}$
7		$\frac{31}{630} \cdot \frac{m l^9}{(EJ)^2} + \frac{m l^5}{7560(EJ)^2}\left[16\left(M_A^2 + M_B^2\right) + 31 M_A M_B\right] + \frac{17}{840} \cdot \frac{m l}{(EJ)^2}(M$

Bài 5.1: Để xác định tần số dao động riêng đối xứng đầu tiên của khung, ta lấy dạng dao động của khung là đường đàn hồi phù hợp với dạng uốn của khung do tải trọng tĩnh phân bố đều tác dụng trên thanh ngang của khung hình 5.1a.

Để tìm các biểu thức động năng và thế năng cực đại, ta phải xây dựng biểu đồ mômen uốn do tải trọng tĩnh phân bố đều trên thanh ngang. Biểu đồ của mômen uốn được tính toán bằng phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị cho trên hình 5.1b.



Hình 5.1

Từ biểu đồ đó mô men uốn và bảng 5.1 ta tính động năng và thế năng cực đại như sau:

Thế năng cực đại:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\left(2\int_{AC}\frac{M_{AC}^2}{EJ}dx + \int_{CD}\frac{M_{CD}^2}{EJ}dx\right)$$

$$\int_{AC}\frac{M_{AC}^2}{EJ}dx = \left[\left(\frac{ql^2}{36}\right)^2 - \frac{ql^2}{36}\cdot\frac{ql^2}{18} + \left(\frac{ql^2}{18}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{3EJ} = \left(\frac{ql^2}{36}\right)^2\cdot\frac{1}{EJ}$$

$$\int\frac{M_{CD}^2}{EJ}dx = \frac{q^2l^5}{120EJ} + \left(\frac{ql^2}{18}\right)^2\frac{1}{EJ} - \frac{ql^2}{24}\left(2\cdot\frac{ql^2}{18}\right)\frac{2}{EJ} = \frac{7}{3240}\cdot\frac{q^2l^2}{EJ}$$

Vậy:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{ql^2}{36}\right)^2\frac{1}{EJ} + \frac{7}{3240}\cdot\frac{q^2l^2}{EJ}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{1}{270}\cdot\frac{q^2l^2}{EJ}$$

Động năng cực đại khi $\omega = 1$.

$$\overline{K}_{max} = \frac{1}{2}\left[2\int_{AC}m\,X_{AC}^2\,dx + \int_{CD}X_{CD}^2\,dx\right].$$

$$\int_{AC}m\,X_{AC}^2dx = \frac{ml^2}{7560(EJ)^2}\left[16\left\{\left(\frac{ql^2}{36}\right)^2 + \left(\frac{ql^2}{18}\right)^2\right\} - 31\frac{ql^2}{36}\cdot\frac{ql^2}{18}\right] = \frac{18}{7560}\cdot\frac{mq^2l^9}{(EJ)^2}$$

$$\int_{CD} m X_{CD}^2 dx = \frac{31}{630}\frac{ml^9}{(EJ)^2}\cdot\frac{q^2}{24^2} + \frac{ml^5}{7560(EJ)^2}\cdot\frac{63\,q^2l^4}{18^2} + \frac{17\,ml^7}{840(EJ)^2}\cdot\left(-2\cdot\frac{ql^9}{18}\right)\cdot\frac{q}{24}$$

$$= \frac{mq^2l^9}{(EJ)^2}\left(\frac{31}{630.24^2} + \frac{1}{120.18^2} - \frac{17}{840}\cdot\frac{1}{9.24}\right) = \frac{19}{210}\frac{mq^2l^9}{(72\,EJ)^2}$$

Vậy:

$$\overline{K}_{max} = \frac{1}{2}\left[\frac{2.18}{7560}\frac{mq^2l^9}{(EJ)^2} + \frac{19}{210}\frac{mq^2l^9}{(72\,EJ)^2}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{23}{210}\cdot\frac{mq^2l^9}{(72\,EJ)^2}$$

Tần số dao động riêng của hệ được xác định theo công thức (5.1):

$$\omega = \sqrt{\frac{U_{max}}{\overline{K}_{max}}} = \sqrt{\frac{1}{270}\frac{q^2l^5}{EJ} : \frac{23}{210}\frac{mq^2l^9}{(72\,EJ)^2}} = \frac{13,24}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Giá trị chính xác của tần số dao động riêng trong trường hợp này:

$$\omega = \frac{12,65}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Ở đây có sai số là 4,6%. Phương pháp năng lượng cho giá trị tần số dao động riêng lớn hơn tần số thực.

Bài 5.2: Xác định tần số dao động riệng đối xứng của khung phù hợp với tác dụng của tải trọng động:

$$\omega = \frac{12,65}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{12,65}{6^2}\sqrt{\frac{2.10^5}{1,25}} = 140,5\ (s^{-1})$$

Chu kỳ dao động riêng của khung:

$$T = \frac{2\Pi}{\omega} = \frac{6,28}{140,5} = 0,0447\ (s)$$

Tỷ số $\frac{\theta}{T}$: $\qquad \frac{\theta}{T} = \frac{0,5}{0,0447} = 11,2 > 0,371$

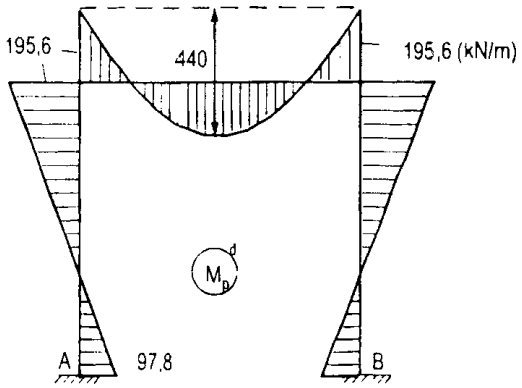
Hệ số động: (có thể tra bảng hoặc tính theo công thức).

$$K_d = 2\left(1 - \frac{\text{arc tg}\,\omega\theta}{\omega\theta}\right) = 2\left(1 - \frac{1,5669}{70,25}\right) = 1,955$$

Tải trọng tĩnh tương đương:

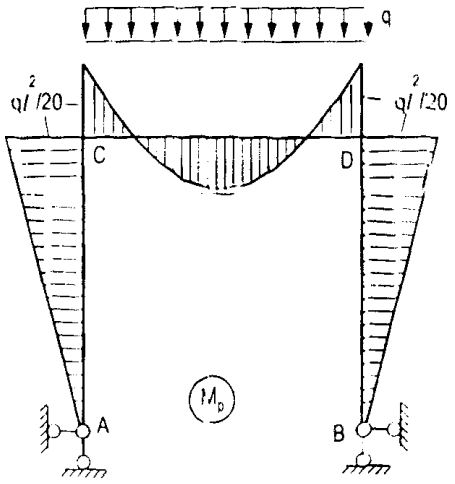
$$q_{td} = q_m \cdot K_d = 50\ .\ 1,955 = 98,7\ kN/m$$

Biểu đồ mômen uốn do tải trọng tĩnh tương đương tác dụng trên thanh ngang gây ra cho trên hình 5.2.



Hình 5.2

Bài 5.3: Để tìm tần số dao động riêng đối xứng của khung, trước hết ta phải vẽ biểu đồ mômen uốn do tải trọng tĩnh phân bố đều trên thanh ngang gây ra, sau đó sẽ xác định các biểu thức động năng và thế năng cực đại và tính tần số. Biểu đồ mômen uốn do tải trọng tĩnh phân bố đều tác dụng trên thanh ngang cho trên hình 5.3.



Hình 5.3

Tính các tích phân trong biểu thức động năng và thế năng cực đại.

$$U_{max} = \frac{1}{2}\left[2\int_{AC}\frac{M_{AC}^2}{EJ}dx + \int_{CD}\frac{M_{CD}^2}{EJ}dx\right],$$

$$2\int\frac{M_{AC}^2}{EJ}dx = 2\left(\frac{ql^2}{20}\right)^2\cdot\frac{l}{3EJ} = 2\frac{q^2l^5}{1200\,EJ} = \frac{q^2l^5}{600\,EJ},$$

$$\int\frac{M_{CD}^2}{EJ}dx = \frac{q^2l^5}{120\,EJ} + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{q^2l^2}{20}\right)^2\cdot\frac{l}{EJ} - 2\frac{ql^3}{24}\cdot 2\frac{ql^2}{20}\right]$$

$$= \frac{q^2l^5}{EJ}\left[\frac{1}{120} + \frac{1}{400} - \frac{1}{120}\right] = \frac{1}{400}\cdot\frac{q^2l^5}{EJ}$$

$$\overline{K}_{max} = \frac{1}{2}\left[2\int_{AC} m\, X_{AC}^2 dx + \int_{CD} m\, X_{CD}^2\, dx\right].$$

$$2\int_{AC} m\, X_{AC}^2\, dx = 2 \cdot \frac{ml^5}{7560(EJ)^2} \cdot 16\left(\frac{ql^5}{20}\right)^2$$

$$= 2\frac{mq^2l^9}{(EJ)^2} \cdot \frac{16}{7560 \cdot 400} = \frac{32}{7560 \cdot 400} \cdot \frac{mq^2l^9}{(EJ)^2}.$$

$$\int m\, X_{CD}^2\, dx = \frac{31}{630} \cdot \frac{ml^9}{(EJ)^2} \cdot \frac{q^2}{24^2} + \frac{ml^5}{7560\,(EJ)^2} \cdot \frac{63\, q^2l^4}{400} + \frac{17}{840} \cdot \frac{ml^5}{(EJ)^2} \cdot \left(-2\frac{ql^5}{20} \cdot \frac{q}{24}\right)$$

$$= \frac{ml^9}{(EJ)^2}\left[\frac{31}{630.576} + \frac{1}{120.400} - \frac{17}{840.240}\right]$$

Cuối cùng:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2l^5}{(EJ)}\left(\frac{1}{600} + \frac{1}{400}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2l^5}{EJ} \cdot 0{,}00416666$$

$$\overline{K}_{max} = \frac{1}{2}\frac{ml^9}{(EJ)^2}\left[\frac{31}{630.576} + \frac{1}{120.400} - \frac{17}{840.240} + \frac{32}{7560.400}\right] =$$

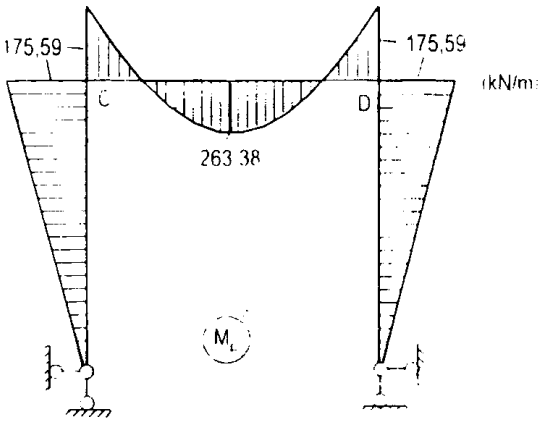
$$= \frac{1}{2}\frac{ml^9}{(EJ)^2} \cdot 0{,}000032518$$

Tần số dao động riêng đối xứng của khung:

$$\omega = \sqrt{\frac{U_{max}}{\overline{K}_{max}}} = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m} \cdot \frac{0{,}00416666}{0{,}000032518}} = \frac{11{,}32}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Bài 5.4: Đáp số:

Biểu đồ mômen uốn động của khung cho trên hình 5.4.



Hình 5.4

Bài 5.5: Đáp số:

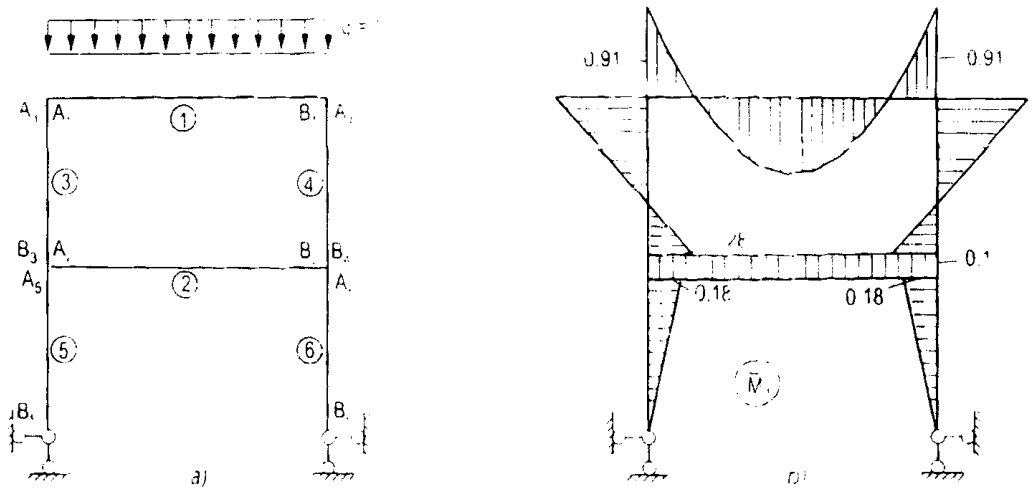
$$\omega = \frac{4{,}035}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Bài 5.6: Các thanh của khung được đánh số theo trình tự cho trên hình 5.5a, trong đó, thanh thứ nhất được chọn là thanh ngang tầng trên, ở đó có tải trọng phân bố tác dụng. Để xác định tần số dao động riêng đối xứng đầu tiên của hệ, cần phải xây dựng biểu đồ mô men uốn do tác dụng của tải trọng tĩnh phân bố đều trên thanh ngang. Biểu đồ này được vẽ trên hình 5.5b, vẽ với q = 1.

- Xác định mômen quy đổi tại các đầu thanh theo công thức (5.8):

$$\bar{M}_{A1} = \frac{M_{A1}}{l_1^2} = \frac{0{,}91}{16} = \frac{91}{1600}\ ;\ \bar{M}_{B1} = \bar{M}_{A1} = \frac{91}{1600}$$

$$\bar{M}_{A2} = \bar{M}_{B2} = \frac{M_{A2}}{l_2^2} = \frac{0{,}1}{4^2} = \frac{1}{160}$$



Hình 5.5

$$\bar{M}_{A3} = \bar{M}_{A4} = \frac{M_{A3}}{l_3^2} = \frac{0{,}91}{3^2} = \frac{91}{900}$$

$$\bar{M}_{B3} = \bar{M}_{B4} = \frac{M_{B3}}{l_3^2} = \frac{0{,}28}{3^2} = \frac{7}{225}$$

$$\bar{M}_{A5} = \bar{M}_{A6} = \frac{0{,}18}{3^2} = \frac{1}{50}\ ;\ \bar{M}_{B5} = \bar{M}_{B6} = 0$$

- Tính thế năng quy đổi của hệ theo công thức (5.6):

$$U'_1 = 1^2 + 40\left[\left(\frac{91}{1600}\right)^2 + \left(\frac{91}{1600}\right)\left(\frac{91}{1600}\right) + \left(\frac{91}{1600}\right)^2 + 10\left(\frac{-91}{1600} + \frac{-91}{1600}\right)\right] = 0{,}2507$$

$$U'_2 = 40\left(\frac{1}{160}\right)^2 .3 = 0{,}0047$$

$$U'_3 = 40\left[\left(\frac{91}{900}\right)^2 - \left(\frac{91}{900}\right)\left(\frac{7}{225}\right) + \left(\frac{7}{225}\right)^2\right] = 0{,}332$$

$$U'_4 = U'_3 = 0{,}332.$$

$$U'_5 = U'_6 = 40 \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 = 0{,}016$$

- Tính động năng quy đổi của các thanh theo công thức (5.7):

$$K'_1 = 1{,}025 + 25{,}4\left(\frac{91}{1600}\right)^2 \cdot 3{,}938 + 10{,}12\left(\frac{-91}{1600}\right) \cdot 2 = 0{,}1974$$

$$K'_2 = 25{,}4\left(\frac{1}{160}\right)^2 \cdot 3{,}938 = 0{,}0039$$

$$K'_3 = K'_4 = 25{,}4\left[\left(\frac{91}{900}\right)^2 - 1{,}938\left(\frac{91}{900}\right)\left(\frac{7}{225}\right) + \left(\frac{7}{225}\right)^2\right] = 0{,}1294$$

$$K'_5 = K'_6 = 25{,}4\left(\frac{1}{50}\right)^2 = 0{,}01016$$

- Tính hệ số đặc trưng tần số theo công thức (5.5):

Các thanh của hệ có $m_x = m = const$, $EJ_x = const$, do đó:

$$K = 10\sqrt{\frac{U'_1 + U'_2 + 2U'_3 \cdot \left(\frac{h}{l_1}\right)^5 + 2U'_5\left(\frac{h}{l_1}\right)^5}{K'_1 + K'_2 + 2K'_3 \cdot \left(\frac{h}{l_1}\right)^9 + 2K'_5\left(\frac{h}{l_1}\right)^9}} =$$

$$= 10\sqrt{\frac{0{,}2507 + 0{,}0047 + 2.0{,}322\left(\frac{3}{4}\right)^5 + 2.0{,}016 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5}{0{,}1974 + 0{,}0039 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^9 . 0{,}1294 + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 . 0{,}01016}} = 13{,}7$$

- Xác định tần số dao động riêng của hệ theo công thức (5.4):

$$\omega = \frac{K}{l_1^2}\sqrt{\frac{EJ_1}{m_1}} = \frac{K}{l_1^2}\sqrt{\frac{E \cdot \frac{ab^3}{12}}{\gamma \cdot \frac{ab}{g}}} = \frac{Kb}{l_1^2}\sqrt{\frac{E.g}{12.\gamma}} = 845\,\frac{Kb}{l_1^2}(s^{-1})$$

$$\omega = 845 \cdot \frac{13,7 \cdot 0,15}{4^2} = 108,5\left(\frac{1}{s}\right)$$

- Chu kỳ dao động riêng của khung:

$$T = \frac{2\Pi}{\omega} = \frac{6,28}{108,5} = 0,058\ (s)$$

Bài 5.7: Tần số dao động riêng và chu kỳ dao động riêng (bài 5.6):

$$\omega = 108,5\left(\frac{1}{s}\right);\ T = 0,058\ (s)$$

- Xác định hệ số động

Tỷ số $\frac{\theta}{T}$:

$$\frac{\theta}{T} = \frac{0,1}{0,058} = 1,72 > 0,371,\ \text{do đó:}$$

$$K_d = 2\left(1 - \frac{\operatorname{arctg}\omega\theta}{\omega\theta}\right) = 2\left(1 - \frac{\operatorname{arctg}(108,5 \cdot 0,1)}{108,5 \cdot 0,1}\right)$$

$$K_d = 1,726$$

- Tính tải trọng tĩnh tương đương:

$$q_{td} = K_d \cdot q_m = 1,726 \cdot 200 = 345,2\ \text{kN/m}^2$$

- Xác định tải trọng tính toán cho một bước khung:

$$q_{tt} = q_{td} \cdot a = 345,2 \cdot 1,6^m = 552,32\ \text{kN/m}$$

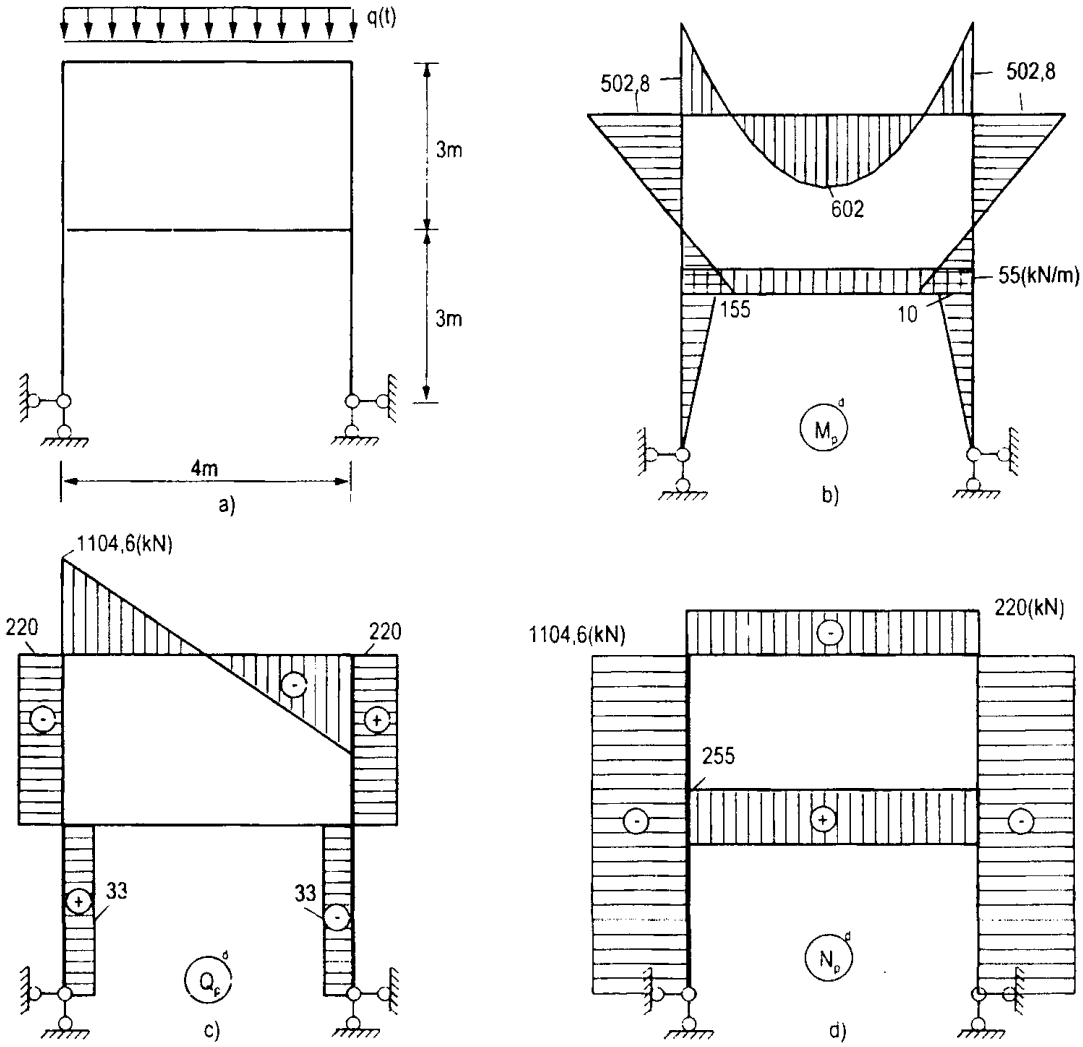
- Biểu đồ nội lực động của hệ:

Biểu đồ mômen uốn động được xây dựng trên cơ sở biểu đồ mômen uốn do tải trọng phân bố tác dụng tĩnh trên thanh ngang bằng đơn vị đã có ở bài 5.6 khi xác định tần số dao động riêng của khung.

$$(M_P)^d = (\overline{M}_1).q_{tt}$$

Biểu đồ $(M_P)^d$ cho trên hình 5.6b. Biểu đồ lực cắt lớn nhất được xác định từ biểu đồ $(M_P)^d$ bằng cách xét cân bằng từng thanh của khung.

Biểu đồ lực dọc lớn nhất được xác định từ biểu đồ lực cắt lớn nhất bằng cách xét cân bằng tại các điểm góc của khung, các biểu đồ lực cắt và lực dọc lớn nhất cho trên hình 5.6c, d.

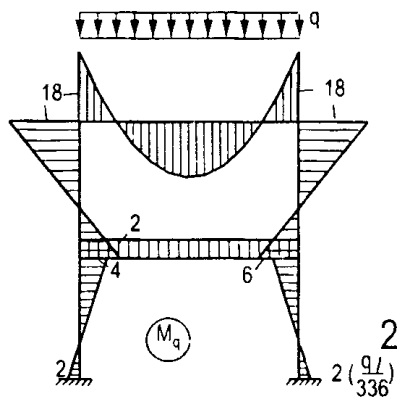


Hình 5.6

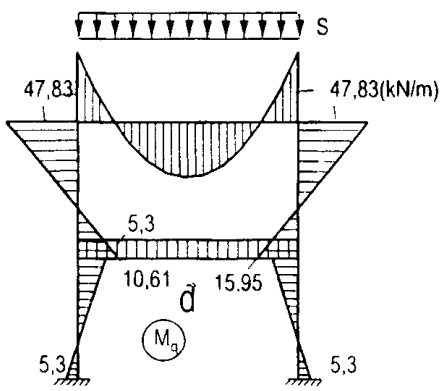
Bài 5.8: Biểu đồ mômen uốn do tải trọng phân bố đều q tác dụng tĩnh trên thanh ngang cho trên hình 5.7.

- Tần số dao động riêng đối xứng của khung:

$$\omega = \frac{14,625}{l} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}}$$



Hình 5.7



Hình 5.8

Bài 5.9: Đáp số:

Biểu đồ mô men uốn động cho trên hình 5.8.

Bài 5.10: Để tính theo phương pháp gần đúng là phương pháp thay thế khối lượng, ta đưa khối lượng phân bố của hệ về tập trung tại các điểm đầu và giữa các đoạn thanh (hình 5.9a). Vì tất cả các nút và các gối của khung không có chuyển vị thẳng theo phương đứng và phương ngang nên ta không xét đến các khối lượng tập trung tại đó (hình 5.9b). Hệ đã cho có tính chất đối xứng, vì vậy với dao động đối xứng hệ có ba bậc tự do.

Để xác định các tần số dao động riêng của hệ, cần phải xây dựng các biểu đồ trạng thái đơn vị do các lực đơn vị đặt tại các khối lượng tương ứng với các bậc tự do của hệ (hình 5.9c, d, e).

Chuyển vị đơn vị được tính theo phép nhân biểu đồ Vêrêsaghin:

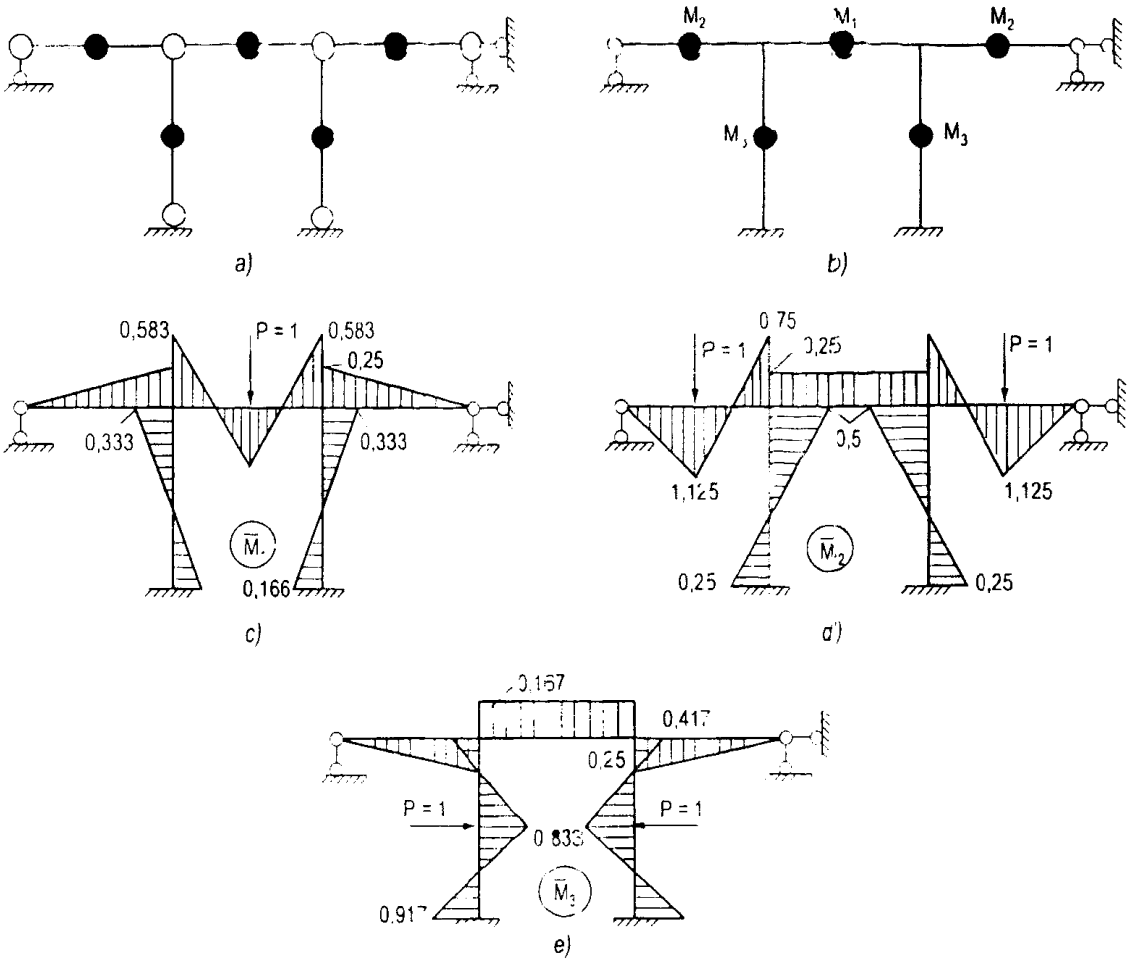
$$\delta_{km} = (\overline{M}_K)(\overline{M}_m) = (\overline{M}_K^o)(\overline{M}_m)$$

Các biểu đồ trạng thái đơn vị trong hệ cơ bản tĩnh định $(\overline{M}_K^o)$ dễ dàng được xây dựng, ở đây chỉ đưa ra kết quả tính các chuyển vị đơn vị.

$EJ\,\delta_{11} = 1{,}88$; $EJ\,\delta_{22} = 5{,}63$

$EJ\,\delta_{33} = 3{,}0$; $EJ\,\delta_{12} = -1{,}13 = EJ\,\delta_{21}$

$EJ\,\delta_{13} = EJ\,\delta_{31} = -0{,}75$; $EJ\,\delta_{23} = EJ\,\delta_{32} = 1{,}13$



Hình 5.9

Vậy ma trận mềm sẽ là:

$$[F]=\frac{1}{EJ}\begin{bmatrix} 1,88 & -1,13 & -0,75 \\ -1,13 & 5,63 & 1,13 \\ -0,75 & 1,13 & 3,0 \end{bmatrix}$$

Ma trận khối lượng:

$$[M]=\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix}=\frac{M.l}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số:

$$\left|[F][M]-\frac{1}{\omega^2}[E]\right|=0 \text{ sẽ là:}$$

$$\begin{vmatrix} (1,88-u) & -0,565 & -0,375 \\ -1,13 & (2,815-u) & 0,565 \\ -0,75 & 0,565 & (1,5-u) \end{vmatrix}=0,$$

Với : $u=\dfrac{2EJ}{m/\omega^2}$

Sau khi khai triển định thức và giải phương trình, ta nhận được:

$$u_1=3,55\ ;\ u_2=1,5;\ u_3=1,14$$

Tần số dao động riêng:

$$\omega_i=\sqrt{\frac{2EJ}{m/u_i}}=\sqrt{\frac{EJ}{3u_i m}}$$

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0,306 \\ 0,471 \\ 0,541 \end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Bài 5.11: Hệ đã cho là hệ đối xứng. Sơ đồ nửa hệ khi dao động đối xứng cho trên hình 5.10a, sơ đồ nửa hệ khi dao động phản đối xứng cho trên hình 5.10b. Như vậy hệ có 5 bậc tự do, bao gồm hai bậc tự do khi dao động đối xứng và ba bậc tự do khi dao động phản đối xứng.

Để tính các tần số dao động riêng thứ nhất và thứ hai (ứng với các tần số dao động riêng thấp nhất của dao động phản đối xứng và dao động đối xứng), ta cần xây dựng các biểu đồ trạng thái đơn vị do các lực P = 1 đặt vào các khối lượng phù hợp với bậc tự do của hệ. Các biểu đồ đơn vị này được cho trên hình 5.10c, d.

Với dao động đối xứng, ta có:

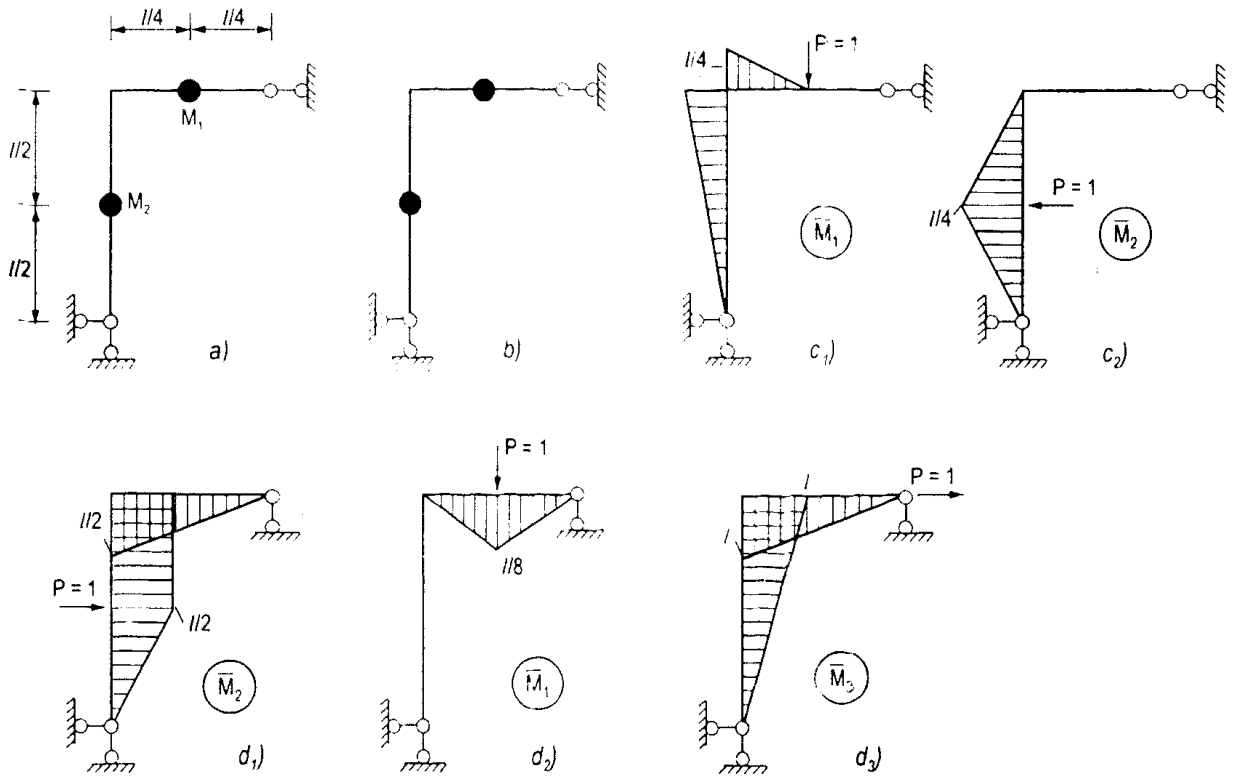
$$\delta_{11} = \frac{5l^3}{192\,EJ}\ ;\ \delta_{22} = \frac{4\,l^3}{192\,EJ}\ ;\ \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{3\,l^3}{192\,EJ}$$

Với hệ hai bậc tự do, sau khi giải phương trình tần số, ta nhận được:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)M_1M_2}[(M_1\delta_{11} + M_2\delta_{22}) \pm$$

$$\pm \sqrt{(M_1\delta_{11} + M_2\delta_{22})^2 - 4M_1M_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12})^2}]$$

Tần số thấp nhất của dao động đối xứng sẽ được tính ở công thức trên với dấu (-):



Hình 5.10

$$\omega^2 = \frac{1}{2(5.4 - 3^2).2.1}\left[(2.5 + 1.4) - \sqrt{(2.5 + 1.4)^2 - 4.2.1(5.4 - 3^2)}\right] \cdot \frac{192\,EJ}{l^3}$$

Suy ra:

$$\omega = 3{,}97\sqrt{\frac{EJ}{l^3}}$$

Với dao động phản đối xứng, ta sẽ áp dụng công thức của S.A. Berstein để tính tần số dao động riêng thấp nhất:

$$\omega_1^2 \approx \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{B_2}} + \frac{2}{B_1\left(1+\sqrt{2\frac{B_2}{B_1^2}-1}\right)}\right]$$

trong đó:

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n} M_i \,.\, \delta_{ii}$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^{n} M_i^2 \,.\, \delta_{ii}^2 + 2\sum_{i,K} M_i\ M_K\ \delta_{iK}^2$$

Từ các biểu đồ đơn vị trên hình 5.10d, ta sẽ tính được:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{384\,EJ};\ \delta_{22} = \frac{5l^3}{24\,EJ}\ ;\ \delta_{33} = \frac{l^3}{2\,EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^3}{128\ EJ};\ \delta_{13} = \delta_{31} = \frac{l^3}{64\ EJ};\ \delta_{23} = \delta_{32} = \frac{5l^3}{16\ EJ}$$

Các hệ số B_1 và B_2:

$$B_1 = (M_1\delta_{11} + M_2\delta_{22} + M_3\delta_{33}) = (2.1 + 1.80 + 2.192)\cdot\frac{l^3}{384\,EJ} = \frac{466\ l^3}{384\,EJ}$$

$$B_2 = (M_1^2\delta_{11}^2 + M_2^2\,\delta_{22}^2 + M_3\delta_{33}^2) + 2(M_1M_2\delta_{12}^2 + M_1M_3\delta_{13}^2 + M_2M_3\delta_{23}^2) =$$

$$= \left[\left(2^2.1^2 + 1^2.80^2 + 2^2.192^2\right) + \left(2.1.3^2 + 2.2.6^2 + 1.2.120^2\right).\ 2\right]\cdot\frac{l^6}{(384\,EJ)} =$$

$$= [153860 + 2(28962)]\cdot\frac{l^6}{(384\,EJ)^2} = \frac{211784\,l^6}{(384\,EJ)^2}.$$

Thay các giá trị B_1 và B_2 vào công thức xác định ω^2, ta có:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left[0{,}8344\ \frac{EJ}{l^3} + 0{,}8348\ \frac{EJ}{l^3}\right].$$

Hai giá trị B_1 và B_2 gần như nhau, nên kết quả được xem là chính xác.

Tần số dao động riêng thấp nhất của dao động phản đối xứng:

$$\omega = 0{,}91356\sqrt{\frac{EJ}{l^3}}$$

Bài 5.12: Đáp số:

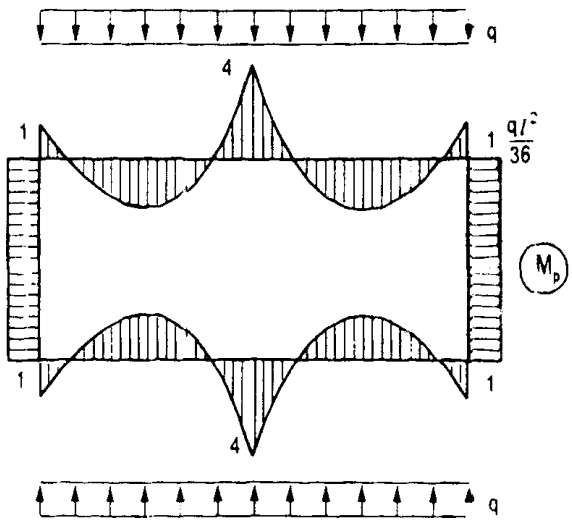
$$\omega_1 = 0{,}3756\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

$$\omega_2 = 0{,}52\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Bài 5.13: Đáp số:

- Biểu đồ mô men uốn do tác dụng của tải trọng tĩnh đối xứng cho trên hình 5.11.
- Tần số dao động riêng đối xứng của khung xác định theo phương pháp năng lượng:

$$\omega = \frac{14{,}597}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$



Hình 5.11

Chương 6

DAO ĐỘNG CỦA VÒM

Tính toán động lực học các kết cấu công trình dạng vòm và vành tròn có trình tự tương tự như tính toán động lực học kết cấu khung. Trước hết là phải giải bài toán xác định tần số cơ bản của dao động riêng, tức là xem kết cấu vòm dao động như hệ một bậc tự do, sau đó là xác định tải trọng tĩnh tương đương và cuối cùng là việc xác định nội lực và chuyển vị động của hệ. Phương pháp tính gần đúng dao động của vòm chịu tác dụng của tải trọng động được áp dụng thông qua các bảng tra các hệ số xác định tần số cơ bản của dao động riêng. Dưới đây sẽ lần lượt đưa ra các công thức, các hệ số, các bảng biểu để tính tần số dao động riêng thấp nhất của các dạng dao động đối xứng và dao động phản đối xứng của các loại kết cấu vòm. Kết cấu vòm thường gặp trong thực tế bao gồm:

- Kết cấu vòm tròn (bao gồm cả vành tròn).
- Kết cấu vòm dạng parabol.

Tùy theo tính chất cấu tạo hình học của các loại vòm, ta sẽ có các biểu thức tần số dao động riêng khác nhau.

1. Vòm tròn ba khớp

- Biểu thức gần đúng xác định tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dạng dao động uốn đối xứng của vòm tròn ba khớp (hình 6.1). Có dạng:

$$\omega = \frac{k}{R^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{6.1}$$

trong đó:

R - bán kính của vòm;

k - hệ số phụ thuộc vào góc mở của vòm:

$$k = \sqrt{\frac{(0{,}5b^2 + 1{,}35b' + 1)\,(1-\beta^2)^2}{3{,}472b^2 + 8{,}34b + 5 + \frac{1}{\beta^2}(0{,}705b^2 + 1{,}679b + 1)}} \tag{6.2}$$

với: $\beta = \dfrac{\pi}{2\alpha_o}$; α_o: nửa góc mở của vòm.

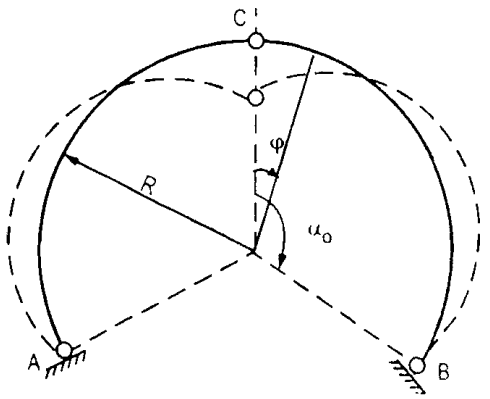
$$b = -1 - \frac{1-\beta^2}{3(1-9\beta^2)} \quad , \quad b' = b\frac{1-4\beta^2}{1-4\beta^2}$$

Các giá trị của hệ số k theo các góc mở của vòm được cho trong bảng (6.1)

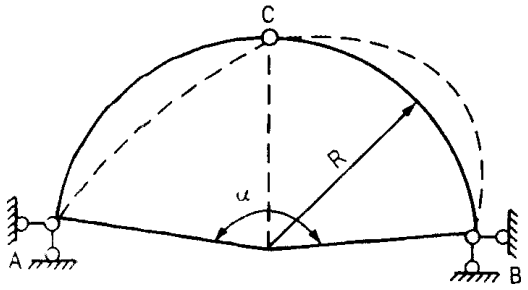
Bảng 6.1

α_0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
k	215,4	52,98	22,92	12,43	7,592	4,987

α_0	105°	120°	135°	150°	165°	180°
k	3,437	2,448	1,785	1,327	0,9934	0,7506



Hình 6.1



Hình 6.2

Biểu thức gần đúng xác định tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dạng dao động uốn phản đối xứng của vòm tròn ba khớp hình 6.2 có dạng:

$$\omega = \frac{(2\pi)^2 - \alpha^2}{\sqrt{1 + 3\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2}} \cdot \frac{1}{(\alpha R)^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{6.3}$$

trong đó: α - góc mở của vòm.

Với vòm nửa trụ tròn ứng với $\alpha = \pi$, ta có:

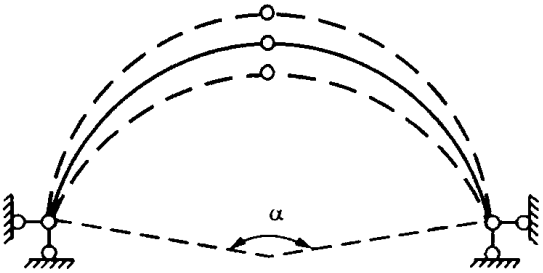
$$\omega = \frac{2,27}{R^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$$

Biểu thức gần đúng xác định tần số dao động riêng cơ bản ứng với dạng dao động hướng tâm của vòm tròn ba khớp hình 6.3 có dạng:

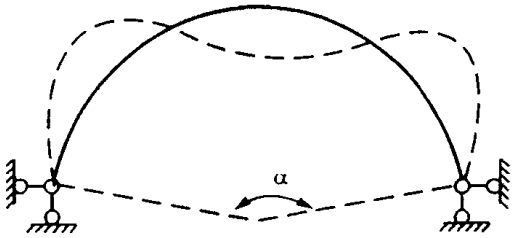
$$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{1 + \frac{\pi^4}{\alpha^4} \cdot \frac{J}{R^2 E}}\sqrt{\frac{EF}{m}} \tag{6.4}$$

trong đó:

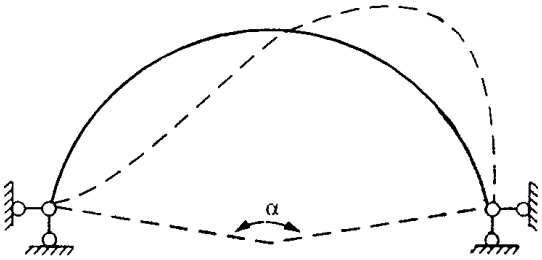
F là diện tích tiết diện ngang của vòm.



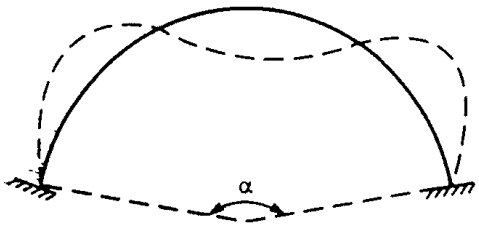
Hình 6.3



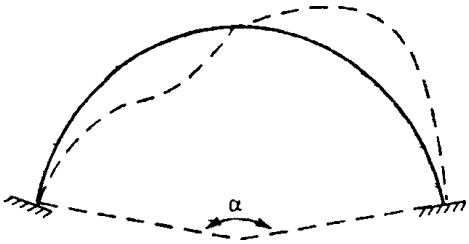
Hình 6.4



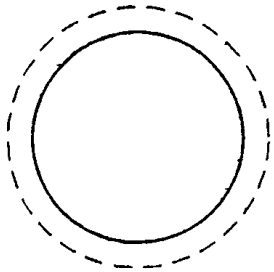
Hình 6.5



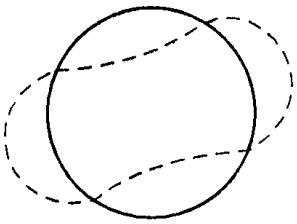
Hình 6.6



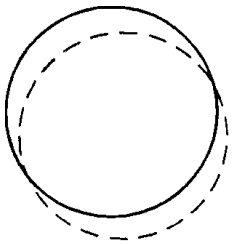
Hình 6.7



Hình 6.8



Hình 6.9



Hình 6.10

2. Vòm tròn hai khớp

Biểu thức tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dao động uốn đối xứng hình 6.4 là:

$$\omega = \frac{9\pi^2 - \alpha^2}{\sqrt{1 + 0{,}165\,\dfrac{\alpha^2}{\pi^2}}} \cdot \frac{1}{\alpha^2 R^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} \qquad (6.5)$$

Biểu thức tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dao động uốn phản đối xứng hình 6.5 là:

$$\omega = \frac{4\pi^2 - \alpha^2}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\alpha^2}{\pi^2}}} \cdot \frac{1}{\alpha^2 R^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{6.6}$$

Biểu thức tần số dao động riêng ứng với dạng dao động hướng tâm của vòm tròn hai khớp được xác định bằng biểu thức như tính đối với vòm tròn ba khớp (công thức 6.4).

3. Vòm tròn không khớp

Biểu thức tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dạng dao động uốn đối xứng hình 6.6:

$$\omega = \sqrt{\frac{14620 - 197{,}8\,\alpha^2 + \alpha^4}{1 + 0{,}01227\,\alpha^2}} \cdot \frac{1}{\alpha^2 R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{6.7}$$

Biểu thức tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dạng dao động uốn phản đối xứng hình 6.7.

$$\omega = \sqrt{\frac{3803 - 92{,}1\,\alpha^2 - \alpha^4}{1 + 0{,}0605\,\alpha^2}} \cdot \frac{1}{\alpha^2 R^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{6.8}$$

4. Vành tròn

Biểu thức tần số dao động riêng ứng với dao động hướng tâm hình 6.8:

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{EF}{rn}} \tag{6.9}$$

Biểu thức tần số dao động riêng ứng với các dao động uốn

$$\omega = \frac{i\,(i^2 - 1)}{\sqrt{i^2 + 1}} \cdot \frac{1}{R^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{6.10}$$

$$(i = 2, 3, \ldots)$$

Tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dạng uốn hình (6.9) khi i = 2; Với i = 1 thì vành tròn được xem là kết cấu cứng, chuyển dịch của vành tròn cho trên hình 6.10.

5. Vòm parabol 3 khớp

Tần số dao động riêng thấp nhất của vòm parabol ba khớp khi dao động đối xứng và phản đối xứng được xác định theo công thức:

$$\omega = \frac{k}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \tag{6.11}$$

trong đó: l - nhịp của vòm;

k - hệ số phụ thuộc vào tỷ số $\frac{f}{l}$, với f là chiều cao của vòm.

Hệ số k đối với dao động đối xứng được tra trong bảng 6.2. Hệ số k đối với dao động phản đối xứng được tra trong bảng 6.3.

Bảng 6.2

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
k	48,58	43,54	36,82	29,98	23,96

Bảng 6.3

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
k	36,72	28,6	22,51	17,52	13,12

6. Vòm parabol 2 khớp

Tần số dao động riêng thấp nhất của vòm parabol hai khớp khi dao động đối xứng và phản đối xứng cũng được xác định theo công thức (6.11); trong đó hệ số k đối với dao động đối xứng được cho trong bảng 6.4; khi dao động phản đối xứng, hệ số k được lấy như đối với dao động phản đối xứng của vòm parabol ba khớp ở bảng 6.3.

Bảng 6.4

f/l	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
k	82,84	77,26	59,25	47,14	37,23

Bài 6.1: *a) Xác định tần số dao động riêng của hệ:*

Nửa góc mở của vòm $\alpha_o = 90^o$, ta tra bảng được hệ số k = 4,987.

Tần số dao động riêng đối xứng thấp nhất được tính theo công thức (6.1).

$$\omega = \frac{k}{R^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{5}{4{,}8^2}\sqrt{\frac{85.000}{4}} = 31{,}6 \cdot \left(\frac{1}{S}\right)$$

b) Xác định tải trọng tĩnh tương đương

Chu kỳ dao động riêng đối xứng của vòm:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6{,}28}{31{,}6} = 0{,}199\ .\ (S)$$

Tính tỷ số $\frac{\theta}{T}$:

$$\frac{\theta}{T} = \frac{0{,}14}{0{,}199} = 0{,}7 > 0{,}371$$

Với quy luật thay đổi tải trọng động theo thời gian đã cho, ta tính hệ số động theo công thức:

$$k_d = 2\left(1 - \frac{\text{arc tg}\,\omega\theta}{\omega\theta}\right) = 2\left(1 - \frac{\text{arc tg}\,31{,}6.0{,}14}{31{,}6.0{,}14}\right)$$

$$k_d = 1{,}39$$

Tải trọng tĩnh tương đương trên một đơn vị diện tích:

$$q_{td} = q_m \cdot k_d = 100 \cdot 1{,}39 = 139 \cdot kN/m^2$$

Tải trọng tính toán trên một đơn vị dài:

$$q_{tt} = q_{td} \cdot b = 139 \cdot 1 = 139\ kN/m$$

c) Xây dựng các biểu đồ nội lực động (mômen uốn, lực cắt, lực dọc) trong vòm:

Từ tải trọng tĩnh tương đương trên một đơn vị dài, ta sẽ xác định các phản lực tựa ở hai chân vòm ba khớp:

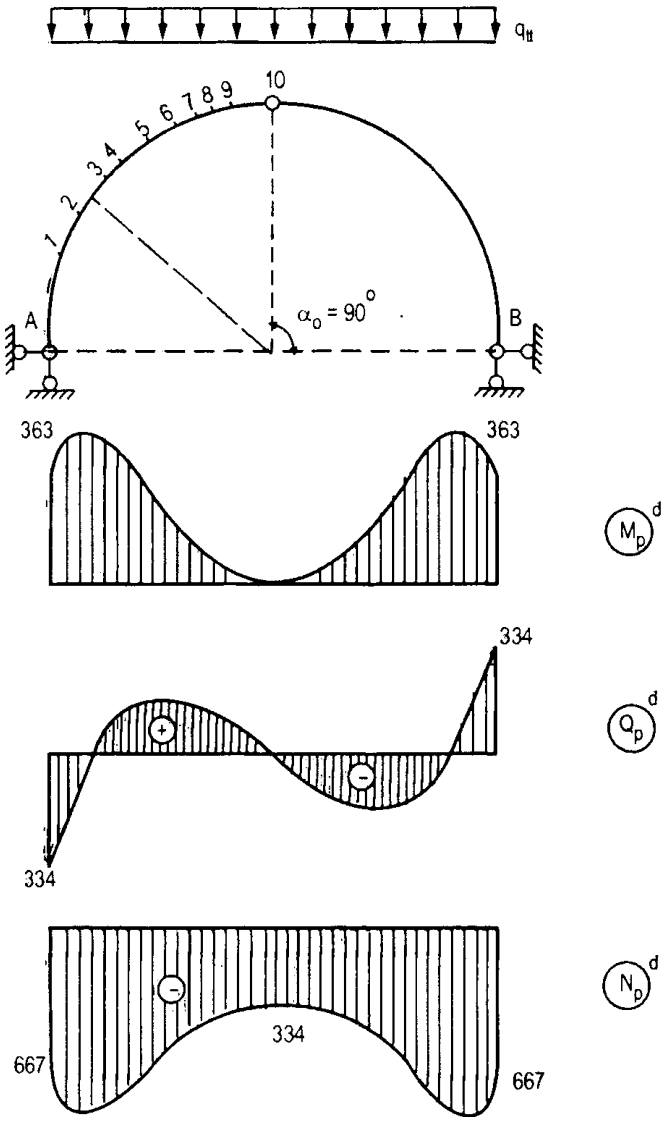
$$R_A = R_B = \frac{1}{2} q_{tt} \cdot l = 667{,}2 \cdot kN$$

$$H_A = H_B = \frac{qR}{2} = 333{,}6 \cdot kN$$

Từ các giá trị của phản lực và tải trọng tĩnh tương đương ta sẽ tính được nội lực trong vòm. Kết quả tính toán đối với nửa vòm bên trái cho ở bảng 6.5. Các biểu đồ nội lực động lớn nhất cho trên hình 6.11.

Bảng 6.5

Tiết diện	Tọa độ		Mômen uốn (kN.m)	Lực cắt (kN)	Lực dọc (kN)
	$x_{(m)}$	$y_{(m)}$			
0	0,00	0,00	0,00	-334,0	-667,0
1	0,48	2,00	-363,0	-38,	-687,
2	0,96	2,80	-357,0	53,	-627,
3	1,44	3,39	-314,	99,	-565,
4	1,92	3,79	-239,	120,	-507,
5	2,40	4,09	-163,	122,	-456,
6	2,88	4,32	-96,	112,	-413,
7	3,36	4,49	-41,	91,	-378,
8	3,84	4,65	-14,	63,	-354,
9	4,32	4,76	-3,	34,	-339,
10	4,80	4,80	0.0	0,	-334,



Hình 6.11

Bài 6.2: *a) Xác định tần số dao động riêng của hệ*

Hệ chịu tải trọng động phân bố phản đối xứng, do đó tần số dao động riêng thấp nhất ứng với dao động phản đối xứng được tính theo công thức (6.3), với $\alpha = 180^o$, ta có:

$$\omega = \frac{2,27}{R^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{2,27}{4,8^2} = \sqrt{\frac{85000}{4}}$$

$$\omega = 14,36 \,.\left(\frac{1}{S}\right)$$

b) Xác định tải trọng tĩnh tương đương

Chu kỳ dao động riêng phản đối xứng của vòm:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,28}{14,36} = 0,437 \,.\, (S)$$

Tính tỷ số $\frac{\theta}{T}$:

$$\frac{\theta}{T} = \frac{0,14}{0,437} = 0,32 < 0,37$$

Với quy luật thay đổi tải trọng theo thời gian cho trên hình 6.2b phần I, ta tính hệ số động theo công thức:

$$k_d = \sqrt{1 - \frac{2\sin\omega\theta}{\omega\theta} + \frac{2(1-\cos\omega\theta)}{\omega^2\theta^2}} =$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2\sin 14{,}36 \,.\, 0{,}14}{14{,}36 \,.\, 0{,}14} + \frac{2(1-\cos 14{,}36 \,.\, 0.14)}{14.36^2 \;\; 0{,}14^2}}$$

$$k_d = 0{,}9.$$

Tải trọng tĩnh tương đương trên một đơn vị diện tích:

$$q_{td} = q_m \,.\, k_d = 100 \,.\, 0{,}9 = 90 \,.\, kN/m^2$$

Tải trọng tĩnh tương đương trên một đơn vị dài (tải trọng tính toán):

$$q_{tt} = q_{td} \,.\, b = 90 \,.\, 1 = 90 \,.\, kN/m$$

c) Xây dựng các biểu đồ nội lực động: (mômen uốn, lực cắt, lực dọc) trong vòm do tải trọng tĩnh tương đương trên một đơn vị dài gây ra:

Phản lực tựa tại chân vòm:

$$V_A = (q_{tt}.R) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(90.4.8) = 216\ kN$$

$$V_B = -V_A = -216\ kN.$$

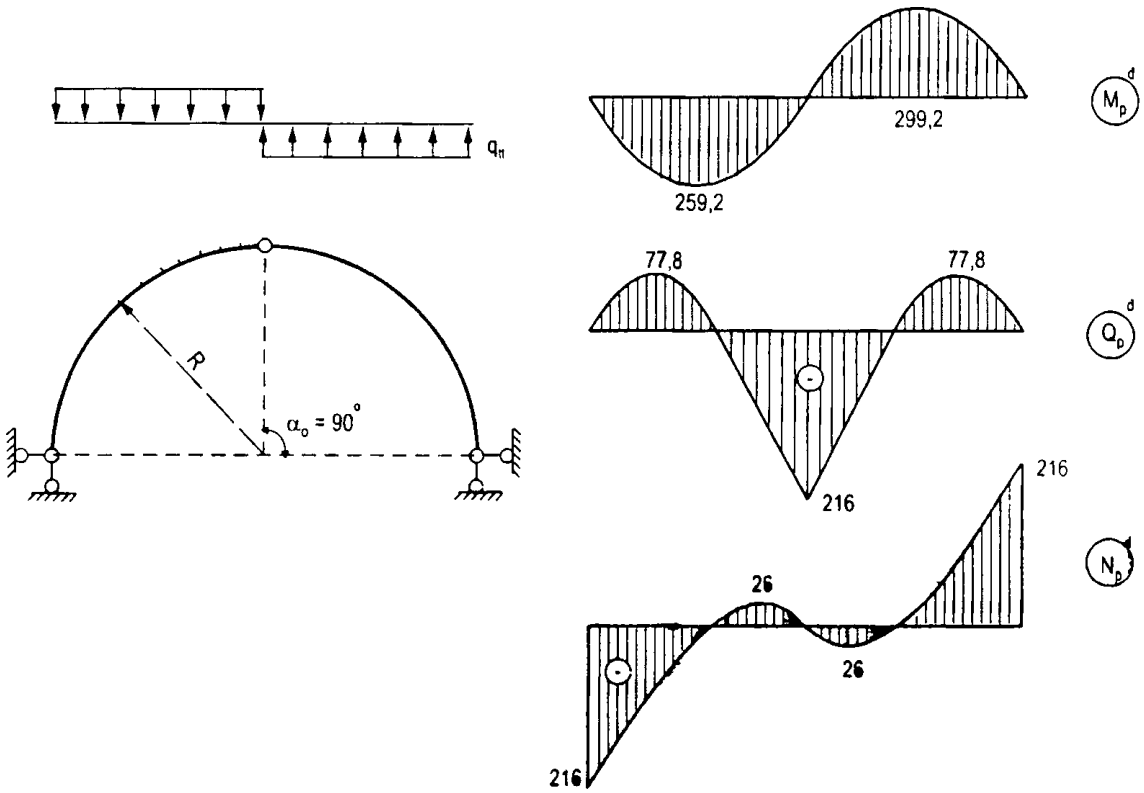
$$H_A = H_B = 0.$$

Từ các phản lực tựa và tải trọng tĩnh tương đương ta sẽ tính được các nội lực trong vòm.

Kết quả tính toán các giá trị mô men uốn, lực cắt lực dọc đối với nửa vòm bên trái cho ở bảng 6.6. Các biểu đồ nội lực động lớn nhất cho trên hình 6.12.

Bảng 6.6

Tiết diện	Tọa độ (m)		Mô men uốn (kN.m)	Lực cắt (kN)	Lực dọc (kN)
	x	y			
0	0	0	0	0	-216
1	0,48	2,0	93,3	75,3	-155,5
2	0,96	2,8	165,9	77,8	-103,7
3	1,44	3,39	217,7	61,7	-60,5
4	1,92	3,79	248,8	34,6	-25,9
5	2,40	4,09	259,2	0	0
6	2,88	4,32	248,8	-39,6	17,3
7	3,36	4,49	217,7	-82,4	25,9
8	3,84	4,65	165,9	-127,	25,9
9	4,32	4,76	93,3	-171,9	17,3
10	4,8	4,8	0	-216	0



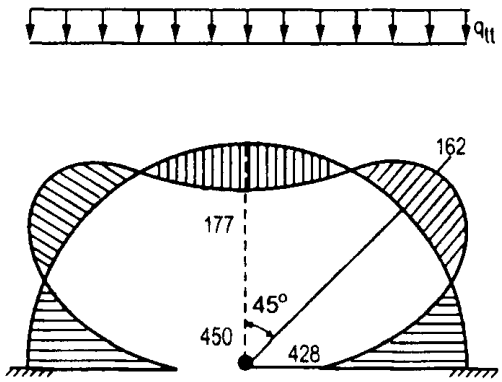
Hình 6.12

Bài 6.3: Đáp số:

$$\omega = 66{,}4S\ .\ (S^{-1})$$

Bài 6.4: Đáp số:

Cho trên hình 6.13



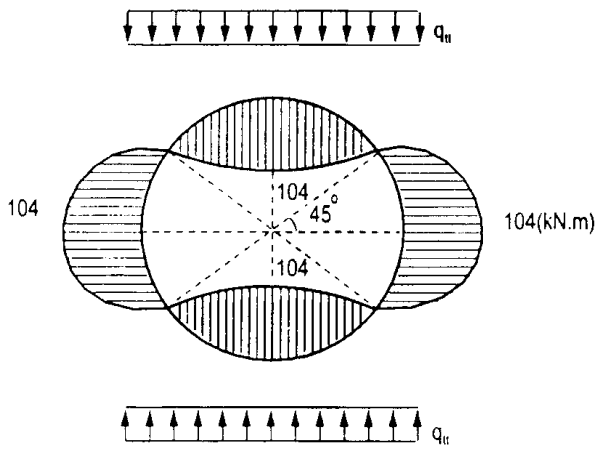
Hình 6.13

Bài 6.5: Đáp số:

$$\omega = 154 \cdot \left(\frac{1}{S}\right)$$

Bài 6.6: Đáp số:

Cho trên hình 6.14.



Hình 6.14

Bài 6.7: Đáp số:

$$H = 481.kN$$

Bài 6.8: Đáp số:

$$V_A = V_B = 845.kN$$

$$H = 469.kN$$

$$M_C = 295.kN.m$$

Bài 6.9: Đáp số:

$$V_A = V_B = 510.kN$$

$$H_A = H_B = 255.kN$$

Bài 6.10: Đáp số:

$$V_A = V_B = 603,7.kN$$

$$H_A = H_B = 310,85.kN$$

Chương 7

DAO ĐỘNG CỦA DÀN

Khi tính toán dao động của hệ dàn, nếu kể đến sự phân bố của khối lượng trên các thanh dàn, thì hệ dàn sẽ là hệ có vô hạn bậc tự do. Việc xác định chính xác các tần số dao động riêng của dàn kể đến ảnh hưởng độ cứng của các mắt dàn và việc tính dao động cưỡng bức của dàn là một bài toán động học cực kỳ phức tạp.

Việc tính toán động lực học kết cấu dàn trong thực tế thường được giải quyết bằng các phương pháp gần đúng. Việc tính toán được gọi là "chính xác" khi sơ đồ tính kết cấu dàn được đơn giản hóa với giả thiết sau: Khối lượng phân bố của các thanh dàn được tập trung về các mắt dàn, các mắt dàn được xem là các khớp lý tưởng. Như vậy số bậc tự do của hệ sẽ giảm xuống và hệ dàn sẽ trở thành hệ hữu hạn bậc tự do. Đối với các dàn đơn giản, trong thực tế tính toán còn có thể bỏ qua các chuyển vị ngang của các mắt dàn.Với sơ đồ khối lượng đã được đơn giản hóa như vậy, ta có thể áp dụng các công thức tính toán ở chương 2 (dao động của hệ hữu hạn bậc tự do) để xác định tần số và dạng dao động riêng cũng như xác định nội lực động và chuyển vị động của hệ dàn.

Đối với bài toán dao động riêng của hệ dàn, để xác định tần số dao động riêng cơ bản có thể áp dụng nhiều các phương pháp gần đúng khác nhau, một trong những phương pháp thường dùng là phương pháp năng lượng và phương pháp dầm tương đương.

Công thức xác định tần số dao động riêng cơ bản của phương pháp năng lượng khi bỏ qua chuyển vị ngang của các mắt dàn được viết như sau:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} M_k\, g\, y_k}{\sum_{k=1}^{n} M_k\, y_k^2} \tag{7.1}$$

trong đó: g là gia tốc trọng trường;

M_k là khối lượng tập trung của dàn tại mắt k;

y_k là chuyển vị tại mắt k do trọng lượng các khối lượng của dàn gây ra:

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{N}_i\, N_p\, l_i}{E_i F_i} \tag{7.2}$$

Với:

$\overline{N}_i$ là nội lực trong thanh thứ i của dàn do lực đơn vị P = 1 đặt tại mắt k gây ra;

N_p là nội lực do các thanh dàn do trọng lượng các khối lượng của dàn gây ra.

l_i, E_i, F_i lần lượt là chiều dài, môđun đàn hồi, diện tích mặt cắt ngang của thanh thứ i trong dàn.

Phương pháp dầm tương đương để xác định tần số dao động riêng cơ bản của dàn được xem xét trên cơ sở thay hệ dàn bằng dầm đặc, và coi hai hệ này có độ võng tương đương thì tần số dao động riêng của chúng cũng tương đương. Từ điều kiện độ võng của điểm đặc trưng của hai hệ bằng nhau, sẽ xác định được độ cứng của dầm tương đương, và từ đó sẽ tính được tần số dao động riêng cơ bản của dầm tương đương, đó chính là tần số dao động riêng cơ bản của dàn.

Công thức xác định tần số dao động riêng cơ bản của dàn theo phương pháp này là:

$$\omega = k\sqrt{\frac{g}{\Delta_p}}\ , \qquad (7.3)$$

trong đó: k là hệ số phụ thuộc loại dàn;

k = 1,13 với dàn dầm đơn giản;

k = 1,21 với dàn dầm công xôn.

Δ_p là chuyển vị tại điểm đặc trưng do trọng lượng bản thân các khối lượng của dàn gây ra.

$$\Delta_p = \sum_{i}^{m} \frac{\bar{N}_i N_p l_i}{E_i F} \qquad (7.4)$$

Với:

$\bar{N}_i$ là nội lực trong thanh thứ i của dàn do lực đơn vị P = 1 đặt tại điểm đặc trưng gây ra.

N_p là nội lực trong các thanh dàn do trọng lượng bản thân các khối lượng của dàn gây ra.

Bài 7.1: Hệ dàn đã cho có tính chất đối xứng, để đơn giản việc tính toán tần số và dạng dao động riêng đối xứng, ta sử dụng cách tính chuyển vị kép. Phù hợp với cách tính này ta có ma trận khối lượng như sau:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & \frac{m_2}{2} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Để xác định các phần tử của ma trận mềm, ta tạo các trạng thái lực đơn vị như trên hình 7.1 a, b; Các chuyển vị đơn vị được tính theo công thức:

$$\delta_{ii} = \sum \frac{\bar{N}_i \bar{N}_i l}{EF}\ ,\ \delta_{ik} = \sum \frac{\bar{N}_i \bar{N}_k l}{EF}$$

Các giá trị nội lực trong các thanh ứng với các trạng thái lực và các tích tương ứng của chúng với chiều dài cho trong bảng 7.1.

Các cột 5, 6, 7 của bảng 7.1 có các giá trị đã được chia cho 2 ứng với hàng thứ 5 (thanh 7 - 8)

Từ số liệu của bảng 7.1, ta tính được:

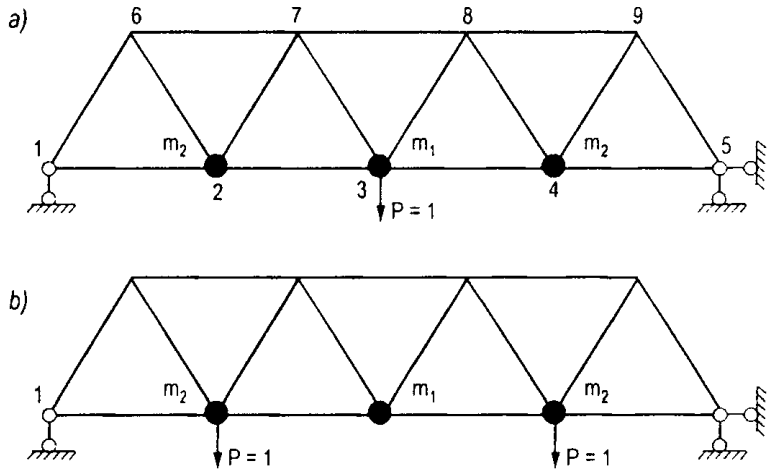
$$\delta_{11} = 2\left(\frac{1}{EF} \cdot 26{,}375\right) = \frac{52{,}75}{EF}$$

$$\delta_{22} = 2\left(\frac{1}{EF} \cdot 52{,}75\right) = \frac{105{,}5}{EF}$$

$$\delta_{12} = 2\left(\frac{1}{EF} \cdot 33{,}125\right) = \frac{66{,}25}{EF}$$

Vậy, ma trận mềm sẽ nhận được:

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{EF}\begin{bmatrix} 52{,}75 & 66{,}25 \\ 66{,}25 & 105{,}5 \end{bmatrix}$$



Hình 7.1

Bảng 7.1

Thanh	l	$\overline{N}_1$	$\overline{N}_2$	$\overline{N}_1^2 . l$	$\overline{N}_2^2 . l$	$\overline{N}_1 \overline{N}_2 . l$
1 - 2	6	0,375	0,750	0,844	3,375	1,688
2 - 3	6	1,125	1,500	7,594	13,500	10,125
6 - 7	6	-0,750	-1,500	3,375	13,500	6,750
7 - 8	3	-1,500	-1,500	6,750	6,750	6,750
1 - 6	5	-0,625	-1,250	1,953	7,813	3,906
2 - 6	5	0,625	1,250	1,953	7,813	3,906
2 - 7	5	-0,625	0	1,953	0	0
3 - 7	5	0,625	0	1,953	0	0
				$\Sigma = 62{,}375$	$\Sigma = 52{,}75$	$\Sigma = 33{,}125$

Phương trình tần số $\left|[F][M]-\frac{1}{\omega^2}[E]\right|=0$ sẽ là:

$$\frac{M}{EF}\begin{vmatrix}(52,75-u) & 33,125\\ 66,25 & (52,725-u)\end{vmatrix}=0$$

trong đó:

$$u=\frac{EF}{M\omega^2}$$

Sau khi khai triển định thức trên và giải phương trình bậc hai đối với u, ta nhận được nghiệm:

$$u_1=99,58,$$
$$u_2=5,92.$$

Phù hợp với các giá trị u_1, u_2 ta có véc tơ tần số dao động riêng đối xứng:

$$\{\omega\}=\begin{Bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{Bmatrix}=\sqrt{\frac{EF}{M}}\begin{Bmatrix}0,1\\ 0,4105\end{Bmatrix}$$

Để xác định các dạng dao động riêng, ta sử dụng công thức:

$$\{\varphi_i^*\}=-[B_{11}]^{-1}\{B_1\}$$

$$\varphi_i^*=-\frac{66,25}{52,725-u_i}\text{, thay } u_1, u_2 \text{ ta được:}$$

$$\varphi_1^*=\sqrt{2}\ ,\ \varphi_2^*=-\sqrt{2}$$

Vậy dạng dao động riêng đối xứng của dàn là:

$$[\Phi]=[\{\varphi_1\},\{\varphi_2\}]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Hai dạng dao động riêng này thỏa mãn điều kiện trục giao:

$$\{\varphi_1\}^T[M]\{\varphi_2\}=\{1\quad\sqrt{2}\}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}M\begin{Bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{Bmatrix}=0$$

Bài 7.2: Để xác định nội lực động trong các thanh của dàn, ta áp dụng phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng dao động riêng.

Tải trọng khai triển theo dạng chính thứ nhất và thứ hai lần lượt là:

(Ở đây lấy kết quả tần số và dạng dao động riêng ở bài 7.1).

$$\{P_1\}=\frac{\{\varphi_1\}^T\{P\}}{\{\varphi_i\}^T[M]\{\varphi_i\}}\cdot[M]\{\varphi_1\}=\frac{\{1\quad\sqrt{2}\}\,20\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}}{\{1\quad\sqrt{2}\}\,M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{Bmatrix}}\cdot M\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}24,142\\ 17,07\end{Bmatrix}$$

$$\{P_2\} = \frac{\{1 \quad -\sqrt{2}\}\, 20 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1 \quad -\sqrt{2}\}\, M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix}} \cdot M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4{,}142 \\ 293 \end{Bmatrix}$$

Vậy ma trận tải trọng khai triển theo các dạng dao động riêng là:

$$[P_{kh}] = [\{P_1\}, \ \{P_2\}] = \begin{bmatrix} 24{,}142 & -4{,}142 \\ 17{,}07 & 2{,}93 \end{bmatrix}. \ (kN)$$

Lực đàn hồi được xác định theo công thức:

$$\{P_d(t)\} = [P_{kh}] \,.\, \{K_i\,(t)\}$$

trong đó: Các phần tử của véc tơ hệ số động học theo thời gian ứng với tải trọng điều hòa là:

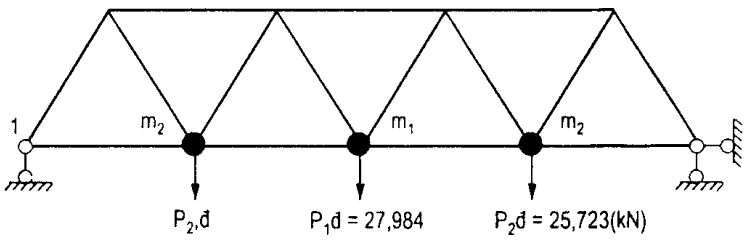
$$k_i(t) = \frac{\sin rt}{1 - \left(\dfrac{r}{\omega_i}\right)^2}$$

$$k_1\,(t) = 1{,}3333 \sin rt \quad ; \quad k_2\,(t) = 1{,}01506 \sin rt.$$

Vậy:

$$\{P_d(t)\} = \begin{bmatrix} 24{,}142 & -4{,}142 \\ 17{,}07 & 2{,}93 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1{,}3333 \\ 1{,}01506 \end{Bmatrix} \sin rt = \begin{Bmatrix} 27{,}984 \\ 25{,}733 \end{Bmatrix} \sin rt$$

Giá trị các lực đàn hồi lớn nhất tác dụng hệ cho trên hình 7.2.



Hình 7.2

Giá trị lớn nhất của lực đàn hồi có thể tìm được bằng tổng của biên độ lực quán tính và biên độ tải trọng ngoài, trong đó các biên độ lực quán tính được xác định từ hệ phương trình (2.52).

Giá trị nội lực động trong các thanh của dàn được tính theo các giá trị biên độ của lực đàn hồi:

$$N = \overline{N}_1 P_{1,d} + \overline{N}_2 P_{2,d}$$

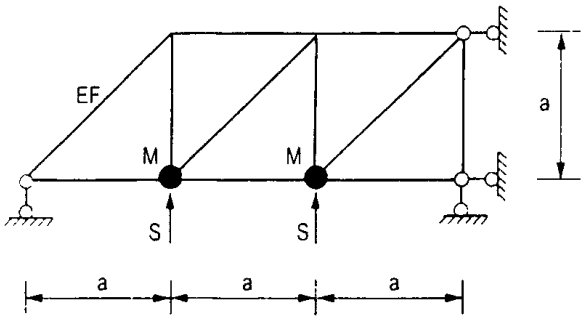
trong đó:

$\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ là nội lực trong dàn do $P_1 = 1$, $P_2 = 1$, gây ra, chúng được lấy từ các giá trị cho trong bảng 7.1. Kết quả xác định nội lực động của dàn cho trong bảng 7.2.

Bảng 7.2

Thanh	1 - 2	2 - 3	6 - 7	7 - 8	1 - 6	2 - 6	2 - 7	3 - 7
N (kN)	29,76	70,01	- 59,53	- 80,49	- 49,61	49,61	- 17,47	17,47

Bài 7.3: Dàn đã cho có tính chất đối xứng, xung tác dụng lên dàn cũng đối xứng, vì vậy để đơn giản cho quá trình tính toán, ta tính trên sơ đồ nửa nhịp, hình 7.3.



Hình 7.3

Ma trận khối lượng:

$$[M] = M\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận mềm:

$$[F] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{a}{EF}\begin{bmatrix} 3,259 & 1,763 \\ 1,763 & 3,146 \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số:

$$\left| [F][M] - \frac{1}{\omega^2}[E] \right| = \frac{aM}{EF}\begin{vmatrix} (3,259 - u) & 1,763 \\ 1,763 & (3,146 - u) \end{vmatrix} = 0$$

Với: $u = \dfrac{EF}{aM\omega^2}$

Sau khi khai triển định thức và giải phương trình, ta được: $u_1 = 4,98$; $u_2 = 1,44$.

Do đó:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{EF}{aM}}\begin{Bmatrix} 0,448 \\ 0,832 \end{Bmatrix}$$

Công thức xác định véc tơ các dạng dao động riêng:

$$\{\varphi_i^*\} = -[B_{11}]^{-1}\{B_1\} = \frac{-1,763}{3,146 - u_i}$$

$$\varphi_1^* = 0{,}972 \ , \ \varphi_2^* = -1{,}028$$

Do đó ma trận dạng dao động riêng:

$$[\Phi] = [\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}972 & -1{,}028 \end{bmatrix}$$

Chuyển vị của hệ dàn dưới tác dụng của xung được xác định theo phương pháp khai triển tải trọng theo các dạng dao động riêng.

Xung khai triển theo dạng chính thứ nhất là:

$$[S_1] = \frac{\{\varphi_1\}^T.\{S\}}{\{\varphi_1\}^T[M]\{\varphi_1\}} \cdot [M]\{\varphi_1\} = \frac{\{1 \quad 0{,}972\}\begin{Bmatrix} S \\ S \end{Bmatrix}}{\{1 \quad 0{,}972\} M \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}972 \end{Bmatrix}} \cdot M \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}972 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}014 \\ 0{,}9856 \end{Bmatrix} S$$

Xung khai triển theo dạng chính thứ hai:

$$\{S_2\} = \begin{Bmatrix} 1{,}014 \\ 0{,}0144 \end{Bmatrix} S$$

Do đó: ma trận xung khai triển theo các dạng chính dao động:

$$[S_{kh}] = \begin{bmatrix} 1{,}014 & -0{,}014 \\ 0{,}9856 & 0{,}0144 \end{bmatrix} S$$

Chuyển vị tại các khối lượng của dàn được xác định theo công thức:

$$\{Y(t)\} = [M]^{-1}[S_{kh}] \ \{K_{ai}^{(t)}\}$$

trong đó, các phần tử của véc tơ hệ số ảnh hưởng động học theo thời gian ứng với tác dụng xung là:

$$K_{ai}(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\omega_i}$$

Vậy $$\{Y(t)\} = \frac{S}{M}\begin{bmatrix} 1{,}014 & -0{,}014 \\ 0{,}9856 & 0{,}0144 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(\dfrac{\sin \omega_1 t}{\omega_1}\right) \\ \left(\dfrac{\sin \omega_2 t}{\omega_2}\right) \end{Bmatrix} =$$

$$= S\sqrt{\frac{a}{MEF}} \begin{Bmatrix} (2{,}263 \sin \omega_1 t - 0{,}017 \sin \omega_2 t \\ 2{,}2 \sin \tau + 0{,}0173 \sin 1{,}857\tau \end{Bmatrix}$$

Nếu đặt $\omega_1 t = \tau$, thì: $\omega_2 t = 1{,}857\tau$, ta có:

$$\{Y(t)\} = S\sqrt{\frac{a}{MEF}} \begin{Bmatrix} (2{,}263 \sin \tau - 0{,}017 \sin 1{,}857\tau) \\ (2{,}2 \sin \tau + 0{,}0173 \sin 1{,}857\tau) \end{Bmatrix}.$$

Bài 7.4: Đáp số:

1. Trường hợp tập trung các khối lượng vào các mắt thuộc biên dưới của dàn:

$$\omega = 0{,}1002\sqrt{\frac{EF}{M}}$$

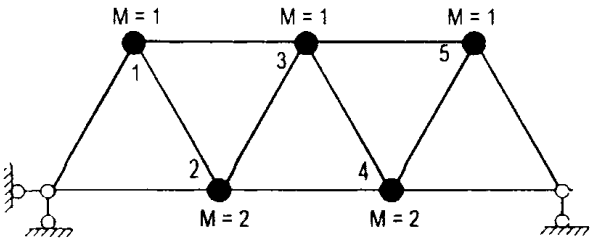
2. Trường hợp tập trung một nửa khối lượng của dàn vào mắt giữa của dàn:

$$\omega = 0{,}0973\sqrt{\frac{EF}{M}}$$

Bài 7.5: Đáp số:

$$\omega = 30{,}3\left(\frac{1}{S}\right)$$

Bài 7.6: Ta sử dụng công thức (7.1) để xác định tần số dao động riêng cơ bản của dàn, hình 7.4.



Hình 7.4

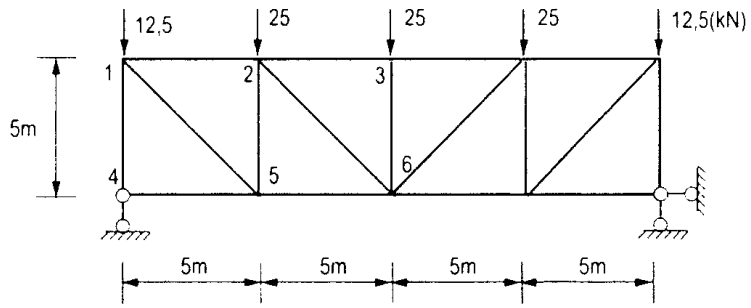
Chuyển vị tại vị trí các khối lượng của dàn được tính theo công thức (7.2) cho trên cột 3 của bảng (7.3). Giá trị các số hạng của tử số và mẫu số trong công thức (7.1) cho trên cột 4 và cột 5 của bảng 7.3.

Mắt	M_k	y_k	$M_k\, g\, y_k$	$M_k\, y_k^2$
1	1	$50 \cdot 10^{-6} \cdot g$	$50 \cdot 10^{-6} \cdot g^2$	$2500 \cdot 10^{-12} \cdot g^2$
2	2	$97{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot g$	$195 \cdot 10^{-6} \cdot g^2$	$18874 \cdot 10^{-12} \cdot g^2$
3	1	$110{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot g$	$110{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot g^2$	$12166 \cdot 10^{-12} \cdot g^2$
4	2	$97{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot g$	$195 \cdot 10^{-6} \cdot g^2$	$18874 \cdot 10^{-12} \cdot g^2$
5	1	$50 \cdot 10^{-6} \cdot g$	$50 \cdot 10^{-6} \cdot g^2$	$2500 \cdot 10^{-12} \cdot g^2$
			$\sum = 590 \cdot 10^{-6} \cdot g^2$	$\sum = 54914 \cdot 10^{-12} \cdot g^2$

Tần số dao động riêng cơ bản của dàn:

$$\omega = \sqrt{\frac{590.10^{-6}.g^2}{54914.10^{-12}.g^2}} = 106{,}4\left(\frac{1}{S}\right)$$

Bài 7.7: Tần số dao động riêng cơ bản của dàn tính theo phương pháp dầm tương đương được xác định theo công thức (7.3). Trước hết phải xác định chuyển vị tại điểm đặc trưng (là điểm giữa nhịp của dàn) do trọng lượng bản thân các khối lượng của dàn gây ra. Các giá trị tính toán được ghi trong bảng 7.4.



Hình 7.5

Bảng 7.4

Thanh	l	F	l/F	N_p	$\overline{N}_i$	$\overline{N}_i N_p \cdot \frac{l}{F}$
1 - 2	5	150	3,333	-37,5	-0,500	62,50
2 - 3	5	200	2,500	- 50,0	- 1,000	125,00
4 - 5	5	50	10,000	0	0	0
5 - 6	5	100	5,000	37,5	0,500	97,75
1 - 5	7,07	100	7,070	53,0	0,707	265,00
2 - 6	7,07	100	7,070	17,7	0,707	88,50
1 - 4	5	200	2,500	- 50,0	- 0,500	62,50
2 - 5	5	150	3,333	- 37,5	- 0,500	62,50
						$\Sigma = 759,75$
3 - 6	5	150	3,333	- 25,0	- 1,000	83,33

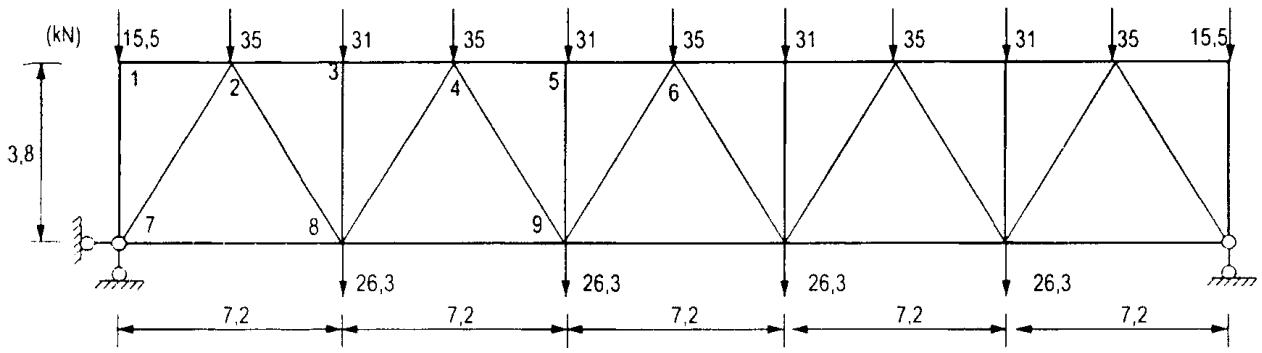
$$\Delta_p = \sum_i \frac{\overline{N}_i N_p l}{EF} = \frac{1}{E}(2.759,75 + 83,33) = \frac{1602,83}{E}$$

Vậy:

$$\omega = 1,13\sqrt{\frac{g}{\Delta_p}} = 1,13\sqrt{\frac{981.2,1.10^4}{1602,83}} = 128 \cdot \left(\frac{1}{S}\right)$$

Bài 7.8: Đáp số: $\omega = 0,103\sqrt{\frac{EF}{M}}$

Bài 7.9: Ta sử dụng công thức (7.3) để xác định tần số dao động riêng cơ bản của dàn theo phương pháp dầm tương đương. Chọn điểm đặc trưng là vị trí giữa nhịp. Chuyển vị tại vị trí này do trọng lượng bản thân các khối lượng của dàn gây ra được tính toán và ghi trong bảng 7.5; trong bảng này không cần thiết phải ghi các thanh dàn có nội lực $\overline{N}_i$ hoặc N_p bằng không.



Hình 7.6

Bảng 7.5

Thanh	l/F	$\overline{N}_i$	N_p	$\overline{N}_i N_p \cdot \frac{l}{F}$
2 - 4	4,80	- 0,945	- 350,0	1590
4 - 6	3,27	- 1,890	- 525,0	3250
2 - 7	4,43	- 0,760	- 343,0	1055
2 - 8	4,80	0,760	244,0	889
4 - 8	7,20	- 0,760	- 174,5	956
4 - 9	9,60	0,760	105,0	769
6 - 9	11,52	- 0,760	- 35,0	311
7 - 8	6,00	0,473	196,0	558
8 - 9	3,00	1,420	459,0	1976
9 - 10	1,50	2,370	546,0	1945
				$\sum = 13279$

Trong bảng 7.5 tính với nửa dàn.

$$\Delta_p = \sum_i \frac{\overline{N}_i N_p l}{EF} = 2 \cdot \frac{13279}{2{,}15 \cdot 10^4} = 1{,}232\,\text{cm}$$

Tần số dao động riêng cơ bản của dàn:

$$\omega = 1{,}13\sqrt{\frac{g}{\Delta_p}} = 1{,}13\sqrt{\frac{981}{1{,}232}} = 31{,}9 \cdot \left(\frac{1}{S}\right)$$

Bài 7.10: Đáp số:

$$\omega = 0{,}865\sqrt{\frac{EF}{Ml}}$$

Bài 7.11: Đáp số:

$$\omega = 107 \cdot \left(\frac{1}{S}\right)$$

Sai số so với kết quả của phương pháp năng lượng đã có ở bài 7.6 là 1%.

Chương 8

TÍNH CÔNG TRÌNH CHỊU TÁC DỤNG CỦA VA CHẠM

Khi công trình chịu tác dụng của tải trọng va chạm, hệ số động được xác định theo công thức sau:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g y_T\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_T\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}} \quad , \qquad (8\text{-}1)$$

trong đó:

P - trọng lượng của vật va chạm;

Q - trọng lượng quy đổi của hệ tại vị trí va chạm;

Y_T - chuyển vị tĩnh do P tác dụng tĩnh gây ra;

v - tốc độ tại thời điểm va chạm của vật tác dụng vào kết cấu;

h - độ cao của vật rơi.

Tốc độ tại thời điểm va chạm đối với vật rơi được tính qua độ cao của vật rơi theo công thức sau:

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (8.2)$$

Có thể biểu thị hệ số động qua các giá trị khối lượng:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_T} \cdot \frac{m}{M}} \quad , \qquad (8.1)'$$

trong đó: m - khối lượng của vật rơi;

M - là tổng khối lượng của vật rơi và khối lượng quy đổi của hệ tại vị trí va chạm.

Khi trọng lượng (hoặc khối lượng) quy đổi của hệ rất nhỏ so với trọng lượng (khối lượng) của vật rơi, thì biểu thức hệ số động được viết:

$$K_d = 1 = \sqrt{1 + \frac{v^2}{y_T \cdot g}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_T}} \qquad (8\text{-}3)$$

Chuyển vị cực đại của hệ do tác dụng của va chạm được tính qua hệ số động:

$$y_{max} = K_d \cdot y_T = y_T + \sqrt{y_T^2 + \frac{v^2 . y_T}{g\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}} = y_T\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_T\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}\right) \qquad (8.4)$$

Khi chuyển vị tĩnh rất nhỏ so với chuyển vị của hệ do tác dụng va chạm (thường được thể hiện qua độ cao của vật rơi), chuyển vị cực đại của hệ được xác định đơn giản như sau:

$$y_{max} = \sqrt{\frac{y_T}{g\left(1+\frac{Q}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2h.y_T}{1+\frac{Q}{P}}} \tag{8.5}$$

Nếu trọng lượng quy đổi của hệ tại vị trí va chạm rất nhỏ so với trọng lượng của vật va chạm thì:

$$y_{max} = \sqrt{2h\,y_T} = v\sqrt{\frac{y_T}{g}} \tag{8.6}$$

Và tương ứng khi đó ta có hệ số động:

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{y_T}} = v\sqrt{\frac{1}{g.y_T}} \tag{8.7}$$

Bài 8.1: Trên cơ sở công thức (8.3) và biết rằng:

Chuyển vị đơn vị tại điểm rơi:

$$\delta_{11} = \frac{a^2b^2}{3\,EJ\,.\,l}$$

Ta có:

$$K_d = 1 + \sqrt{1+\frac{6h/EJ}{P\,a^2\,b^2}}$$

Bài 8.2: Đối với dầm đơn giản hai gối tựa khớp, ta có chuyển vị tĩnh tại giữa nhịp:

$$y_T = \frac{Pl^3}{48\,EJ}$$

Do đó, hệ số động tính theo (8.3) sẽ là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1+\frac{48\,EJ}{Pl^3}\cdot\frac{v^2}{g}}$$

Đối với dầm hai đầu ngàm:

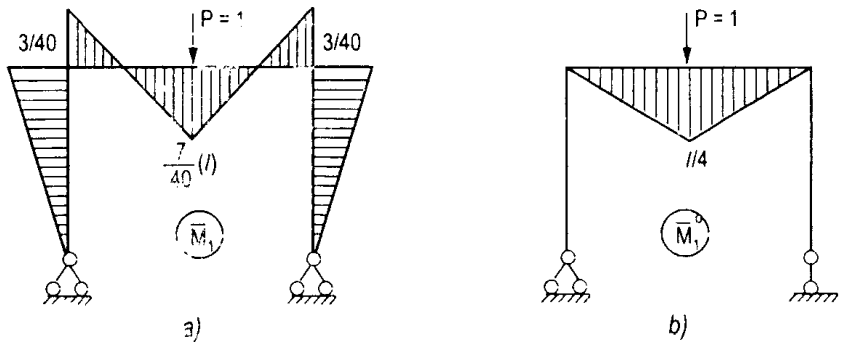
$$y_T = \frac{Pl^3}{192\,EJ}$$

$$K_d = 1 + \sqrt{1+\frac{192\,EJ}{Pl^3}\cdot\frac{v^2}{g}}$$

Khi va chạm với tốc độ lớn, chuyển vị tĩnh của hệ sẽ rất nhỏ so với chuyển vị của hệ khi va chạm. Hệ số động được xác định theo công thức (8.7). Nếu gọi K_{d1}, K_{d2} lần lượt là hệ số động va chạm đối với dầm đơn giản và dầm hai đầu ngàm thì ta có:

$$\frac{K_{d1}}{K_{d2}} = \sqrt{\frac{48}{192}} = \frac{1}{2}$$

Bài 8.3: Trước hết ta phải xác định chuyển vị đơn vị tại điểm va chạm theo phương va chạm. Muốn vậy, ta xây dựng các biểu đồ mô men uốn do tác dụng của lực đơn vị.



Hình 8.1

Chuyển vị đơn vị:

$$\delta_{11} = (\overline{M}_1)(\overline{M}_1^o) = \frac{2}{EJ}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\,\frac{7l}{40} - \frac{1}{3}\,\frac{3l}{40}\right) = \frac{11l^3}{960\ EJ}$$

Do đó, hệ số động xác định theo (8.3) là:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{960\ EJ}{11P\,l^3}\cdot\frac{v_o^2}{g}}$$

Khi tác dụng va chạm ngang vào đầu thanh ngang, ta có chuyển vị đơn vị:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{4\ EJ}$$

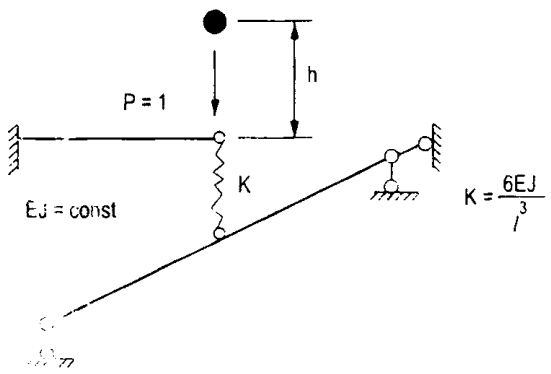
Và do đó:

$$K_n = 1 + \sqrt{1 + \frac{4\ EJ}{Pl^3}\cdot\frac{v^2}{g}}$$

So sánh các biểu thức hệ số động khi va chạm theo phương đứng và phương ngang ở trên, trong trường hợp tốc độ va chạm lớn, ta có:

$$\frac{K_d}{K_n} = \sqrt{\frac{960}{44}} = 4.671$$

Bài 8.4:



Hình 8.2

Để xác định chuyển vị đơn vị theo phương đứng tại điểm va chạm, ta tính chuyển vị đơn vị tại điểm va chạm đối với dầm côngxôn phía trên và dầm đơn giản phía dưới. Độ cứng của liên kết đàn hồi được kể đến trong quá trình tính đối với hệ dầm phía dưới.

$$\delta_{11} = \frac{l^3\,(6\,EJ + K l^3)}{9EJ\,(K l^3 + 2EJ)}$$

Với $K = \dfrac{6\,EJ}{l}$, ta có: $\delta_{11} = \dfrac{l^3}{6\,EJ}$

Chuyển vị tĩnh:

$$y_T = P\,.\,\delta_{11} = \frac{P\,l^3}{6\,EJ}$$

Thay vào công thức (8.3) ta nhận được hệ số động như sau:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{12\,h\,EJ}{P\,l^3}}$$

Bài 8.5: Chuyển vị đơn vị tại điểm va chạm:

$$\delta_{11} = \frac{l_1^3\,l_2^3}{48\,E\left(l_1^3\,J_2 + l_2^3\,J_1\right)}$$

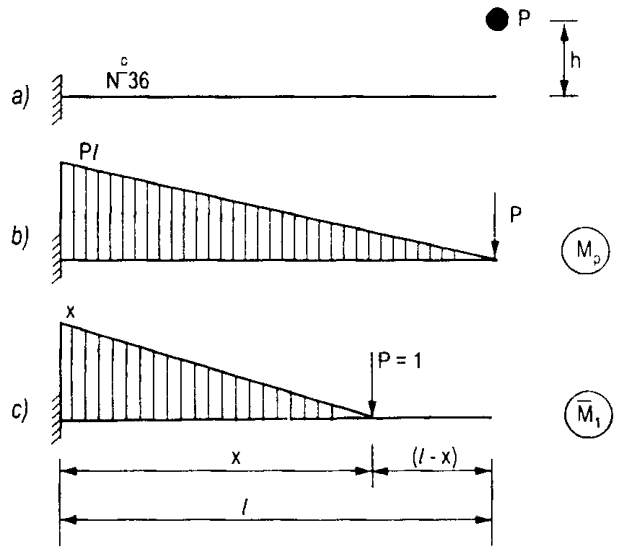
Chuyển vị tĩnh:

$$y_T = \frac{P\,l_1^3\,l_2^3}{48\,E\left(l_1^3\,J_2 + l_2^3\,J_1\right)}$$

Hệ số động do tác dụng va chạm theo (8.3):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{48\,E\,(l_1^3\,J_2 + l_2^3\,J_1)\,.\,v^2}{P\,l_1^3\,.\,l_2^3\,.\,g}}$$

Bài 8.6: Ta có thể xác định chuyển vị lớn nhất do tác dụng của va chạm theo công thức (8.3):



Hình 8.3

$$y_{max} = y_T\left(1+\sqrt{1+\frac{2h}{y_T\left(1+\frac{Q}{P}\right)}}\right)$$

trong đó: Q là trọng lượng của hệ được quy đổi về vị trí va chạm:

$$Q = \nu \,.\, G$$

Với G là trọng lượng của cả dầm, ν là hệ số quy đổi.

Hệ số ν được xác định theo phương pháp năng lượng như sau: Ta giả định dạng uốn dao động của dầm y(x) là đường đàn hồi do tải trọng P đặt tại điểm va chạm. Khi đó ta sẽ tính được động năng do tác dụng của tải trọng là trọng lượng bản thân dầm $K_1(t)$ và động năng do tải trọng thay thế P_{tt} đặt tại điểm va chạm $K_2(t)$. Cho $K_1(t) = K_2(t)$ ta sẽ xác định được P_{tt}, từ đó ta tính được hệ số thay thế ν. Biểu thức của đường đàn hồi được xây dựng theo công thức Vêrêsaghin. Ta vẽ biểu đồ tải trọng và biểu đồ đơn vị như hình vẽ 8.3b, c.

$$y_{(x)} = (M_P)\,(\overline{M}_1) = \frac{P}{2\,EJ}\left(1-\frac{x}{3}\right).\,x^2$$

Khi đó:

$$K_1(t) = \frac{\rho}{2g}\,[y_{(x)}(-\omega\sin\omega t)]^2\,dx =$$

$$= \frac{\rho\omega^2\sin^2\omega t}{2g}\cdot\int_0^l\left[\frac{Px^2}{2\,EJ}\left(1-\frac{x}{3}\right)\right]^2 dx = \frac{33}{2520}\cdot\frac{P^2 l^6\omega^2\sin^2\omega t}{gE^2J^2}\cdot\rho l$$

$$K_2(t) = \frac{P_{tt}}{2g}\,[y_A(-\omega\sin\omega t)]^2 = \frac{P_{tt}}{2g}\,\omega^2.\sin^2\omega t\cdot\left(\frac{Pl^3}{3EJ}\right)^2 = \frac{140}{2520}\cdot\frac{P^2 l^6\omega^2\sin^2\omega t}{gE^2J^2}\cdot P_{tt}$$

Cho $K_1(t) = K_2(t)$, ta xác định được trọng lượng thay thế:

$$P_{tt} = \frac{33}{140}\rho . l = 0,236\ \rho . l = 0,236G$$

Như vậy hệ số quy đổi $\nu = 0,236$.

Trọng lượng của dầm $G = \rho . l = 689,4 . 4 = 2757,6$ N.

Độ võng tĩnh của dầm tại vị trí va chạm.

$$y_T = \frac{Pl^3}{3EJ} = \frac{200.400^3}{3.2,1.10^7.17544} = 0,0116(cm)$$

Vì độ cao của vật va chạm lớn hơn rất nhiều so với độ võng tĩnh nên chuyển vị lớn nhất của hệ do tác dụng va chạm sẽ được tính theo công thức (8.5).

$$y_{max} = \sqrt{\frac{2h.y_T}{1+\frac{Q}{P}}} = \sqrt{\frac{2.200 . 0,0116}{1+\frac{0,236.2757,6}{200}}} = 1,044\ (cm)$$

So sánh độ võng lớn nhất và độ võng tĩnh ta thấy độ võng động lớn nhất lớn hơn độ võng tĩnh rất nhiều. Hệ số động trong trường hợp này là:

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = \frac{1,044}{0,0116} = 90$$

Từ hệ số động, ta sẽ xác định giá trị mômen uốn lớn nhất tại vị trí ngàm:

$M_{max} = M_T . K_d$, trong đó M_T là độ võng tĩnh do tải trọng P gây ra $M_T = Pl$.

$M_{max} = Pl . K_d = 200 . 4 . 90 = 72.000$ N.m

$= 72.kNm$

Bài 8.7: Độ võng tĩnh của dầm tại vị trí va chạm:

$$y_T = \frac{Pl^3}{48EJ} = \frac{2.10^3.600^3}{48.10^6.3,6.10^5.3,4} = 0,00741\ (cm)$$

Khối lượng của hệ quy đổi về vị trí va chạm được tính qua hệ số ν xác định bằng phương pháp năng lượng tương tự như ở bài 8.6.

$$\nu = 0,5$$

Vì độ cao của vật va chạm rất lớn so với độ võng tĩnh; nên chuyển vị lớn nhất của hệ được tính theo công thức (8.5):

$$y_{max} = \sqrt{\frac{2h.y_T}{1+\frac{\nu G}{P}}} = \sqrt{\frac{2.20.0,0074}{1+0,5\cdot\frac{20}{2}}} = 0,23\ cm$$

Như vậy hệ số động trong trường hợp này sẽ là:

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = \frac{0,23}{0,0074} = 31$$

Từ K_d ta có tải trọng tĩnh tương đương:

$$P_{td} = K_d \,.\, P = 31 \,.\, 2 = 62 \text{ (kN)}$$

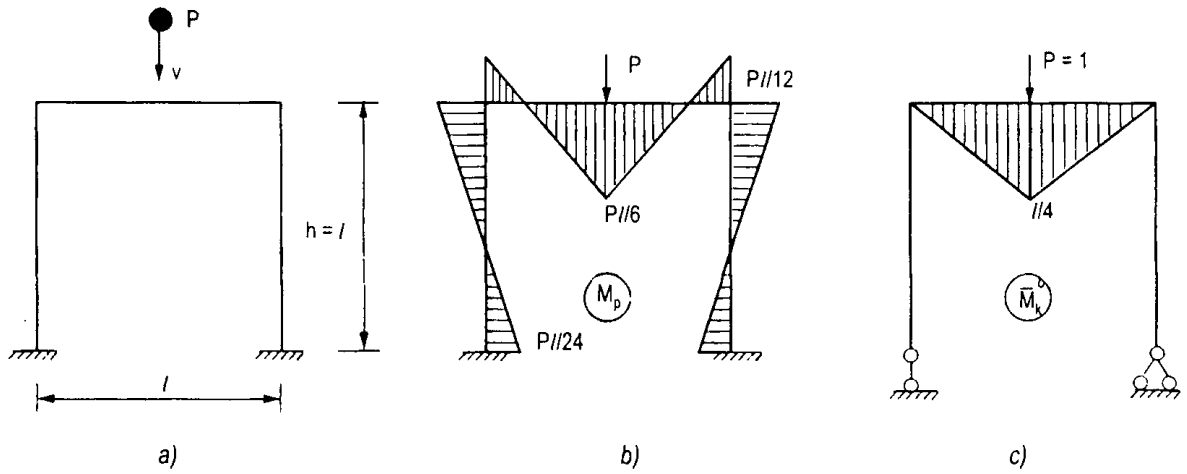
Ở bài này, nếu bỏ qua trọng lượng của hệ thì hệ số động tính theo (8.7) sẽ rất lớn:

$$K_d = \sqrt{\frac{2h}{y_T}} = \sqrt{\frac{2.20}{0,074}} = 73,5$$

Tương ứng với K_d, tải trọng tĩnh tương đương là:

$$P_{td} \,.\, K_d \,.\, P = 73,5 \,.\, 2 = 147 \text{ (kN)}$$

Bài 8.8: Trước hết phải xác định chuyển vị tĩnh tại điểm va chạm. Các biểu đồ được cho trên hình vẽ 8.4.



Hình 8.4

$$y_T = (M_P)(\bar{M}_K^o) = \frac{2}{EJ}\left(\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\,\frac{Pl}{16} - \frac{1Pl}{3.12}\right) =$$

$$= \frac{P\,l^3}{96\,EJ} = \frac{10\,.\,6^3}{96.2,1\,.\,10^8\,.\,4,588.10^{-4}} = 2,3310^{-4} \text{ (m)}$$

Vì độ võng phát sinh do va chạm với tốc độ lớn sẽ lớn hơn nhiều so với độ võng tĩnh, nên ta sử dụng công thức (8.3) để tính độ võng lớn nhất:

$$y_{max} = v\sqrt{\frac{y_T}{g\left(1 + \frac{Q}{P}\right)}}$$

trong đó: $Q = v \,.\, G$,

Với v là hệ số quy đổi khối lượng được xác định theo phương pháp năng lượng tương tự như bài 8.6. Ở đây chỉ đưa ra kết quả : $v = 0,468$.

Còn $G = \rho \cdot l$

Thế các giá trị bằng số vào biểu thức y_{max}, ta có:

$$y_{max} = 1 \cdot \sqrt{\frac{2,33 \cdot 10^{-4}}{9,81\left(1 + \frac{0,468 \cdot 1,15.6}{10}\right)}} = 0,00425\ (m) = 0,425(cm)$$

Hệ số động:

$$K_d = \frac{y_{max}}{y_T} = \frac{0,0425}{2,33.10^{-4}} = 18,24$$

Ứng suất tĩnh tại điểm va chạm:

$$\sigma_T = \frac{M}{W} = \frac{P\,l}{6} \cdot \frac{h_0}{J.2} = \frac{10.6.0,45}{6.4,585.2.10^{-4}} = 4900\ kN/m^2$$

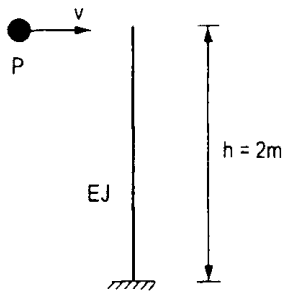
Ứng suất động lớn nhất:

$$\sigma_{max} = K_d \cdot \sigma_T = 18,24 \cdot 4,9 \cdot 10^3 = 8,9410^4\ kN/m^2$$

Bài 8.9: Tỷ số hệ số động của khung hai chân ngàm và khung hai chân khớp khi chịu tác dụng va chạm với tốc độ lớn:

$$\frac{K_n}{K_K} = 1,05$$

Bài 8.10: Chuyển vị tĩnh tại đầu trụ dưới tác dụng của tảng băng được tính như chuyển vị tĩnh tại đầu côngxôn (hình 8.5).



Hình 8.5

$$y_T = \frac{Ph^3}{3\,EJ} = \frac{20 \cdot 2^3}{3.1,2.10^7.79,5.10^{-4}} = 0,56 \cdot 10^{-3}\ (m)$$

Vì trọng lượng của kết cấu rất nhỏ so với trọng lượng của vật va chạm, nên hệ số động được tính theo công thức (8.3):

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot y_T}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1^2}{0,81.0,56.10^{-3}}} = 14,5$$

Mô men uốn lớn nhất tại ngàm (tại chân trụ):

$$M_{max} = M \cdot K_d = Ph \cdot K_d = 20.2 \cdot 14,5 = 580\ kN.m$$

Ứng suất pháp lớn nhất tương ứng với giá trị mômen uốn lớn nhất là:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{M_{max}}{\frac{J}{d}} = \frac{580.0,3}{79,5.10^{-4}} = 2,19.10^4\ kN/m^2$$

Giá trị ứng suất pháp lày là rất lớn so với ứng suất cho phép của vật liệu kết cấu trụ. Do đó cần phải có những biện pháp bảo vệ trụ.

Chương 9

TÍNH CÔNG TRÌNH CHỊU TẢI TRỌNG CHẤN ĐỘNG

Khi tính công trình chịu tải trọng chấn động, giá trị tính toán của lực chấn động tác dụng vào công trình biểu thị qua lực đàn hồi được xác định đối với các dạng dao động riêng:

$$\{P_{d,i}\} = [Q]\{\varphi_i\}(K_c \cdot \beta_i \cdot \mu_i) \tag{9.1}$$

trong đó: $\{P_{d,i}\}$ véc tơ lực động đất ứng với dạng dao động riêng thứ i;

β_i - hệ số phụ thuộc chu kỳ dao động riêng của hệ: $\beta_i = \dfrac{1}{T_i}$

và: $0,8 \le \beta_i \le 3$.

T_i - chu kỳ dao động riêng của dạng dao động riêng thứ i;

μ_i - hệ số dạng dao động riêng:

$$\mu_i = \frac{\{\varphi_i\}^T \cdot [M] \cdot \{1\}}{\{\varphi_i\}^T [M]\{\varphi_i\}} \tag{9.3}$$

$\{1\}$ - véc tơ các phần tử bằng đơn vị, một cách tổng quát, nó kể đến sự đồng thời chuyển động của khối lượng và nền;

$\{\varphi_i\}$ - véc tơ dạng dao động riêng thứ i;

[Q] - ma trận trọng lượng các khối lượng của hệ:

$$[Q] = g\ [M],$$

Với: g - gia tốc trọng trường;

[M], - ma trận khối lượng.

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix}$$

K_c - hệ số chấn động. Công trình được xây dựng trong các vùng động đất khác nhau, hệ số K_c được lấy theo cấp động đất của từng vùng cho trong bảng sau:

Bảng 9.1

Cấp động đất	7	8	9
Hệ số K_c	0,025	0,05	0,1

Một cách tổng quát, hệ số K_c phụ thuộc vào gia tốc của nền công trình khi chịu tác dụng chấn động, và nó được xác định ứng với từng dạng dao động riêng theo công thức sau:

$$K_c = \frac{2\Pi}{g} \int_0^t \ddot{y}_n \sin\omega_i (t-\tau)\, d\tau \quad , \tag{9.4}$$

trong đó: $\ddot{y}_n$ - gia tốc của nền công trình;

ω_i - tần số dao động riêng thứ i;

g - gia tốc trọng trường.

Lực đàn hồi lớn nhất đối với mỗi khối lượng (mỗi tầng) được tính gần đúng như sau, còn gọi là lực chấn động tính toán:

$$P_{d,K} = \sqrt{P_{K,1}^2 + P_{K,2}^2 + \cdots + P_{K,n}^2} \tag{9.5}$$

Véc tơ lực đàn hồi đối với cả hệ có thể được xác định một cách đầy đủ theo công thức sau:

$$\{P_d\} = [Q]\,[\Phi]\,\{\mu_i\, \beta_i\, K_c\} \quad , \tag{9.6}$$

trong đó: $[\Phi]$ là ma trận các dạng dao động riêng của hệ.

Đối với các công trình dạng khối, biến dạng của công trình thường rất bé so với biến dạng của nền. Chu kỳ dao động riêng có thể được xác định theo công thức:

$$T = 2M \,.\, \nu \sqrt{\frac{M}{K_{tr}}} \tag{9.7}$$

trong đó: M - khối lượng công trình;

ν - hệ số tính đến sự quán tính quay của công trình.

$$\nu = 1{,}12 + 0{,}41\,\frac{h_o}{b} \tag{9.8}$$

Với: h_o - độ cao từ trọng tâm công trình đến đáy móng;

b - kích thước đáy móng lớn nhất.

K_{tr} - độ cứng của nền khi trượt. Nó phụ thuộc vào diện tích đế móng, diện tích các mặt sườn xung quanh của móng, tính chất đàn hồi và độ bền của nền đất.

$$K_{tr} = C_{tr}\ F_d + C_{tr}\, F_b + C_n\, F_n \tag{9.9}$$

Với: C_{tr} - hệ số trượt đàn hồi của đất;

C_n - hệ số nén đàn hồi của đất;

F_d - diện tích đế móng;

F_b - diện tích mặt biên của móng có sự ma sát;

F_n - diện tích mặt xung quanh của móng có sự nén.

Quan hệ của hệ số nén và hệ số trượt đàn hồi.

$$C_{tr} = 0,7\ C_n \tag{9.10}$$

Nếu ở sơ đồ tính toán công trình dạng khối mà ta xem khối lượng phân bố theo chiều cao của công trình là các khối lượng tập trung thì để xác định các lực đàn hồi tại vị trí các khối lượng tập trung đó, ta xem dạng dao động riêng có dạng tuyến tính sau:

$$\varphi_K = 1 + \frac{h_K}{8,3b + 4,7h_o} \tag{9.11}$$

Với h_k là chiều cao từ vị trí khối lượng K đến đáy móng.

Đối với các công trình cao dạng ống khói, các cột tháp, các trụ đài phát thanh truyền hình thì hệ số phụ thuộc chu kỳ dao động riêng β_i sẽ được lấy tăng lên 1,6 lần, tức là:

$$\beta_i = 1,6 \cdot \frac{1}{T_i} \tag{9.12}$$

Nếu biết được phổ vận tốc của hệ khi hệ chịu tác dụng chấn động, ta sẽ xác định được các phổ chuyển vị và phổ gia tốc tương ứng. Khi đó, lực đàn hồi, chuyển vị và gia tốc đối với dạng chính thứ i sẽ được tính như sau:

$$\{P_{d,i}\} = [M]\ \{\varphi_i\}.\ (\mu_i\ \omega_i\ S_{vi}) \tag{9.13}$$

$$\{Y_i\} = \{\varphi_i\}\left(\mu_i \cdot \frac{S_{vi}}{\omega_i}\right) = \{\varphi_i\}(\mu_i\ .\ S_{di}) \tag{9.14}$$

$$\{\ddot{Y}_i\} = \{\varphi_i\}(\mu_i\ .\omega_i\ .S_{vi}) = \{\varphi_i\}(\mu_i\ S_{ai}) \tag{9.15}$$

trong đó:

S_{vi} - là giá trị của phổ vận tốc ứng với dạng chính thứ i;

$(S_{vi}\ .\ \omega_i)$ - là giá trị của phổ gia tốc ứng với dạng chính thứ i;

$\frac{S_{vi}}{\omega_i}$ - là giá trị của phổ chuyển vị ứng với dạng chính thứ i.

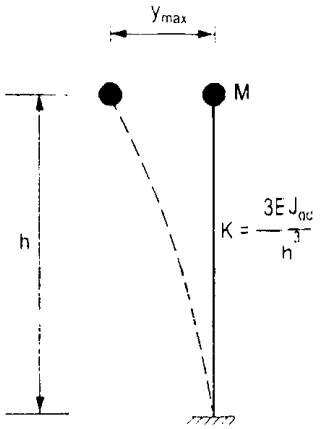
Bài 9.1: Lực động đất tính toán được xác định theo công thức (9.1). Ở đây, hệ có một khối lượng, hệ một bậc tự do, nên:

$$P_d = K_c\ \beta\ Q\ ,$$

trong đó:

Q là trọng lượng của tháp nước.

$K_c = 0,1$ (tra bảng 9.1)



Hình 9.1

$$\beta = \frac{1,6}{T} = \frac{1,6 \cdot \omega}{2\Pi} = 0,255\omega = 0,255\sqrt{\frac{K}{M}}$$

$$= 0,255\sqrt{\frac{3\,EJ_q \cdot g}{h^3 \cdot Q}} = 0,442\sqrt{\frac{g\,EJ_q}{Q \cdot h^3}}$$

Vậy:

$$P_d = 0,1 \cdot Q \cdot 0,442\sqrt{\frac{g\,EJ_q}{Q \cdot h^3}} = 0,442Q\sqrt{\frac{g\,EJ_q}{Q\,h^3}}$$

Độ lệch ngang lớn nhất của khối lượng do P_d gây ra là:

$$y_{max} = \frac{P_d}{K} = P_d \cdot \frac{h^3}{3EJ_q}$$

Mômen uốn lớn nhất phát sinh tại móng kết cấu là:

$$M_{max} = P_d \cdot h + Q \cdot Y_{max} = P_d \cdot h + P_d \cdot Q\frac{h^3}{3EJ_q}$$

$$= \left(0,0442Q\sqrt{\frac{g\,EJ_q}{Q \cdot h^3}}\right) \cdot \left(h + \frac{Q\,h^3}{3\,EJ_q}\right)$$

$$= \left(0,0442Q\sqrt{\frac{g\,EJ_q}{Q\,h}}\right) \cdot \left(1 + \frac{Q\,h^2}{3\,EJ_q}\right)$$

Lực dọc tác dụng vào móng kết cấu: $N_{max} = Q + G$

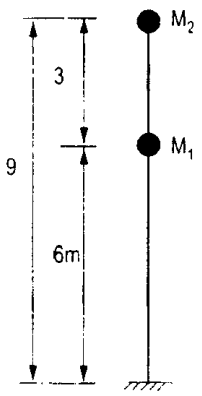
Trong đó: G là trọng lượng phần trụ tháp.

Bài 9.2. Đây là hệ dao động có 2 bậc tự do.

a) Xác định tần số và dạng dao động riêng

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 6 \\ 43 \end{Bmatrix} \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1,956 & -0,371 \end{bmatrix}$$



Hình 9.2

b) Xác định các hệ số dạng dao động riêng theo (9.3)

$$\mu_1 = \frac{\{1 \quad 1,956\}\begin{bmatrix} 106,5 & 0 \\ 0 & 145,8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1 \quad 1,956\}\begin{bmatrix} 106,5 & 0 \\ 0 & 145,8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1,965 \end{Bmatrix}} = 0,59$$

$$\mu_2 = \frac{\{1 \quad -0{,}371\} \begin{bmatrix} 106{,}5 & 0 \\ 0 & 145{,}8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1 \quad -0{,}371\} \begin{bmatrix} 106{,}5 & 0 \\ 0 & 145{,}8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}371 \end{Bmatrix}} = 0{,}414$$

c) Các hệ số phụ thuộc chu kỳ dao động riêng:

$$\beta_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\Pi} = 0{,}96$$

$$\beta_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{\omega_2}{2\Pi} = 6{,}85 > 3, \text{ ta lấy } \beta_2 = 3$$

Lực đàn hồi ứng với mỗi dạng dao động riêng được xác định theo công thức (9.1) với $K_c = 0{,}05$:

$$\{P_{d1}\} = \begin{bmatrix} 1065 & 0 \\ 0 & 1458 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}956 \end{Bmatrix} . \; 0{,}59.0{,}96.0{,}05 = \begin{Bmatrix} 30{,}2 \\ 81 \end{Bmatrix} \text{(kN)}$$

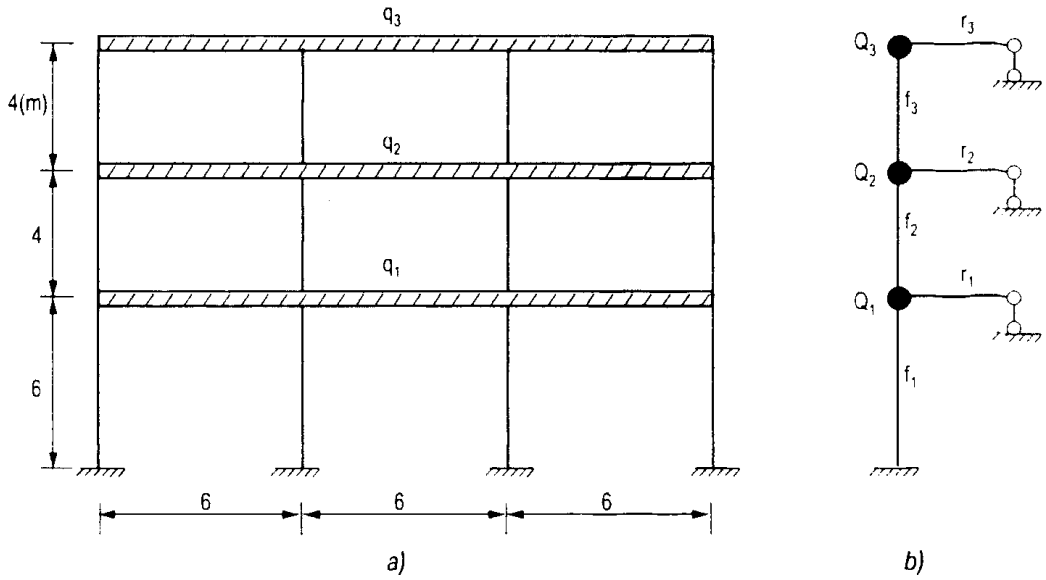
$$\{P_{d2}\} = \begin{bmatrix} 1065 & 0 \\ 0 & 1458 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}371 \end{Bmatrix} . \; 0{,}414.3.0{,}05 = \begin{Bmatrix} 66{,}1 \\ -33{,}6 \end{Bmatrix} \text{(kN)}$$

Tải trọng chấn động tính toán tại vị trí các khối lượng được tính theo công thức (9.5)

$$P_{1d} = \sqrt{P_{11}^2 + P_{12}^2} = \sqrt{30{,}2^2 + 66{,}1^2} = 72{,}7 \text{ (kN)}$$

$$P_{2d} = \sqrt{P_{21}^2 + P_{22}^2} = \sqrt{81^2 + (-33{,}6)^2} = 87{,}7 \text{ (kN)}$$

Bài 9.3.



Hình 9.3

a) Để xác định tần số và dạng dao động riêng của kết cấu dạng khung nhà ba tầng ba nhịp hình 9.3a, ta phải đưa hệ về dạng hình 9.3b bằng cách tập trung khối lượng về mỗi tầng. Các giá trị f_1, f_2, f_3, r_1, r_2, r_3 là tổng các độ cứng phân bố theo chiều dài của tất cả các cột và các thanh ngang tương ứng của các tầng của khung nhà. Để tính các chuyển vị đơn vị do tải trọng đặt tại đầu các thanh ngang, cần sử dụng công thức của Xigalốp với các độ cứng ở hình 9.3b.

Tần số và dạng dao động riêng có các giá trị ghi ở dạng ma trận như sau:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 6,98 \\ 21,3 \\ 31,1 \end{Bmatrix} \left(\frac{1}{s}\right) \; ; \; [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1,885 & 0,222 & -1,197 \\ 2,256 & -1,248 & 1,096 \end{bmatrix}$$

b) Xác định các hệ số dạng dao động riêng theo (9.3)

Trọng lượng của các khối lượng:

$$Q_1 = 68,2 \,.\, 18 = 1230 \text{ kN}.$$

$$Q_2 = Q_1 = 1230 \text{ kN},$$

$$Q_3 = 35.\ 18 = 630 \text{ (kN)}.$$

$$\mu_1 = \frac{\{1 \quad 1,885 \quad 2,256\} \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \frac{1}{g} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{\{1 \quad 1,885 \quad 2,256\} \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,885 \\ 2,256 \end{Bmatrix} \frac{1}{g}} = 0,565$$

$$\mu_2 = \frac{\{1 \quad 0,222 \quad -1,248\} \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \frac{1}{g} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1 \quad 0,222 \quad -1,248\} \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,222 \\ -1,248 \end{Bmatrix} \frac{1}{g}} = 0,319$$

$$\mu_3 = \frac{\{1 \quad -1,197 \quad 1,096\} \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \frac{1}{g} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1 \quad -1,197 \quad 1,096\} \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1,197 \\ 1,096 \end{Bmatrix} \frac{1}{g}} = 0,119$$

c) Xác định các hệ số β_i theo (9.2)

$$\beta_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\Pi} = 1,11$$

$$\beta_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{\omega_2}{2\Pi} = 3,39 > 3, \text{ lấy } \beta_2 = 3$$

$$\beta_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{\omega_3}{2\Pi} = \frac{31}{2\Pi} > 3, \text{ lấy } \beta_3 = 3$$

d) Xác định lực đàn hồi ứng với từng dạng dao động riêng theo công thức (9.1) với $K_c = 0{,}05$ ứng với vùng động đất cấp 8:

$$\{P_{d,1}\} = \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}885 \\ 2{,}256 \end{Bmatrix} . 0{,}565 . 0{,}05 . 1{,}11 = \begin{Bmatrix} 38{,}5 \\ 72{,}8 \\ 44{,}4 \end{Bmatrix} . \text{(kN)}$$

$$\{P_{d,2}\} = \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}222 \\ -1{,}248 \end{Bmatrix} . 0{,}319 . 0{,}05 . 3 = \begin{Bmatrix} 58{,}8 \\ 13{,}1 \\ -37{,}4 \end{Bmatrix} . \text{(kN)}$$

$$\{P_{d,3}\} = \begin{bmatrix} 1230 & 0 & 0 \\ 0 & 1230 & 0 \\ 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1{,}197 \\ 1{,}096 \end{Bmatrix} . 0{,}119 . 0{,}05 . 3 = \begin{Bmatrix} 22 \\ -26{,}2 \\ 12{,}3 \end{Bmatrix} . \text{(kN)}$$

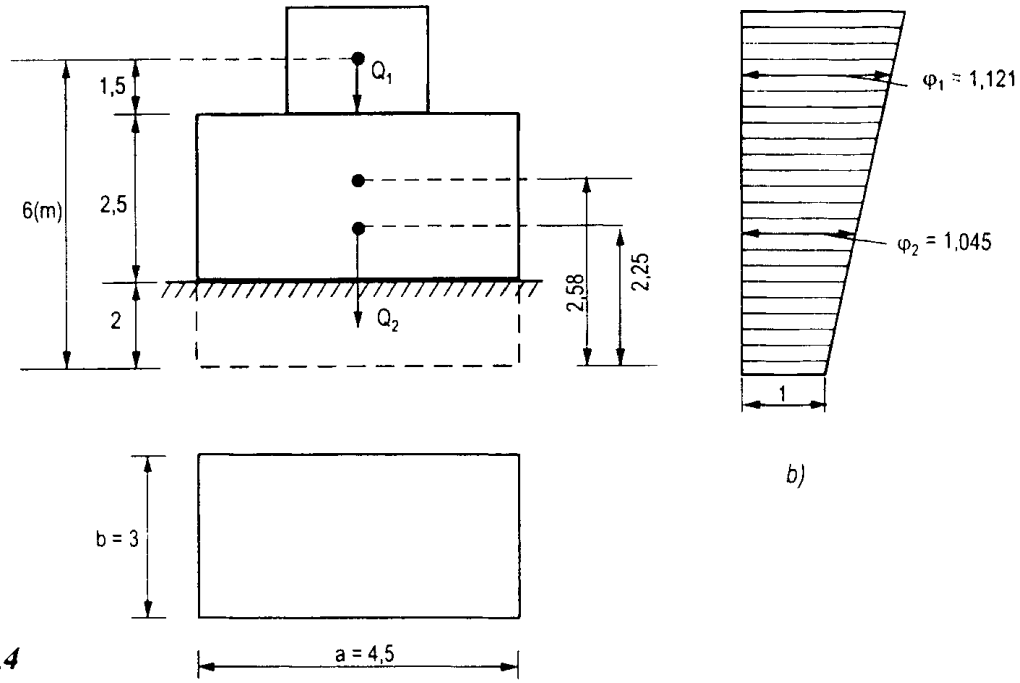
Tải trọng động đất tính toán tác dụng vào kết cấu tại vị trí các tầng được xác định theo công thức (9.5):

$$P_{1d} = \sqrt{P_{11}^2 + P_{12}^2 + P_{13}^2} = \sqrt{38{,}5^3 + 58{,}8^2 + 22^2} = 73{,}6 \text{ (kN)}$$

$$P_{2d} = \sqrt{72{,}8^3 + 13{,}1^2 + (-26{,}2)^2} = 78{,}5 \text{ (kN)}$$

$$P_{3d} = \sqrt{44{,}4^3 + (-37{,}4)^2 + 12{,}3^2} = 59{,}4 \text{ (kN)}$$

Bài 9.4:



Hình 9.4

Đây là công trình dạng khối, khối lượng của cả hệ là:

$$M = \frac{Q_1 + Q_2}{g} = \frac{140 + 1460}{0,8} = 163 \ . (kNS^2/m)$$

Khoảng cách từ trọng tâm của thiết bị và móng đến đáy móng: $h_o = 2,58m$.

Độ cứng của nền khi trượt xác định theo (9.9):

$$K_{tr} = C_{tr} . F_d + C_{tr} . F_b + C_n \ F_n = 4 \ . \ 10^4(3 \ . \ 4.5.0,7 + 2.4,5 \ . \ 0,7 + 2.3)$$

$$= 4 \ . \ 10^4 \ . \ 28 = 112 \ . \ 10^4 \ (kN/m).$$

Hệ số tính đến sự quay của công trình được xác định theo (9.8):

$$\nu = 1,12 + 0,41 \cdot \frac{h_o}{b} = 1,12 + 0,41 \cdot \frac{2,58}{4,5} = 1,36$$

Chu kỳ dao động riêng của hệ được xác định theo (9.7):

$$T = 2\pi\nu \sqrt{\frac{M}{K_{tr}}} = 2 \ . \ 3,14 \ . \ 1,36 \sqrt{\frac{163}{112.10^4}} = 0,104 \ . \ (S)$$

Hệ số phụ thuộc chu kỳ dao động riêng:

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,104} > 3, \text{ lấy } \beta = 3.$$

Bấy giờ ta sẽ xác định dạng dao động riêng, đối với công trình dạng khối, dạng dao động có dạng bậc nhất như hình vẽ 9.4b, phù hợp với công thức (9.11), trong đó số 1 chính là tung độ tại vị trí đáy móng, ta xác định tung độ dạng dao động riêng tại vị trí trọng tâm của thiết bị:

$$\varphi_1 = 1 + \frac{h_1}{8,3b + 4,7h_o} = 1 + \frac{6}{8,3 \ . \ 4,5 + 4,7 \ . \ 2,58} = 1,121$$

Tung độ dạng dao động riêng tại vị trí trọng tâm của móng được tính nội suy khi đường thẳng đã biết hai tung độ:

$$\varphi_2 = 1 + \frac{1,121 - 1}{6} \cdot 2,25 = 1,045$$

Hệ số dạng dao động riêng được xác định theo công thức (9.3):

$$\mu = \frac{\{1,121 \quad 1,045\} \begin{bmatrix} 140 & 0 \\ 0 & 1460 \end{bmatrix} \frac{1}{g} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1,121 \quad 1,045\} \begin{bmatrix} 140 & 0 \\ 0 & 1460 \end{bmatrix} \frac{1}{g} \begin{Bmatrix} 1,121 \\ 1,045 \end{Bmatrix}} = 0,96$$

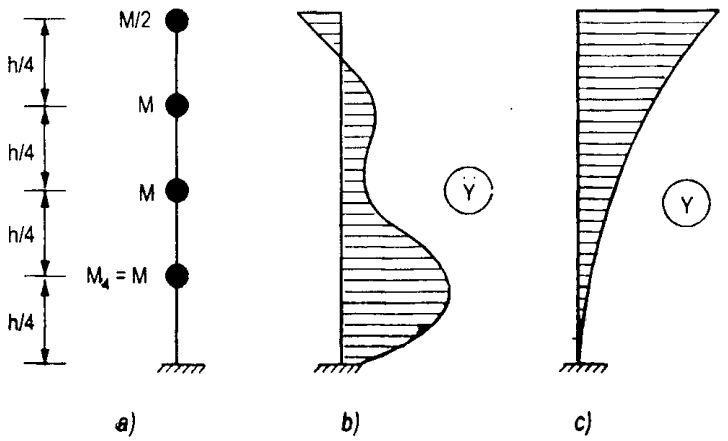
Lực đàn hồi tác dụng lên hệ xác định theo (9.1):

$$\{P_d\} = [Q]\{\varphi_i\}.(\mu_i\beta_i K_c) = \begin{bmatrix} 140 & 0 \\ 0 & 1460 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1,121 \\ 1,045 \end{Bmatrix} . 0,96.3 . 0,1 = \begin{Bmatrix} 4,5 \\ 438 \end{Bmatrix} (kN)$$

Lực ngang tổng quát tác dụng lên công trình là:

$$P = 45 + 438 = 483 \text{ (kN)}$$

Bài 9.5: *a) Xác định tần số và dạng dao động riêng:*



Hình 9.5

Ma trận cứng K của dầm côngxôn. Hình 9.5a có các phần tử như sau:

$$[K] = \frac{EJ}{388a^3} \begin{bmatrix} 624 & -1416 & 1008 & -288 \\ -1416 & 3840 & -3720 & 1728 \\ 1008 & -3720 & 5568 & -4584 \\ -288 & 1728 & -4584 & 7296 \end{bmatrix}$$

Ma trận khối lượng:

$$[M] = \frac{mh}{4} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phương trình tần số:

$$\left| [K] - \omega^2 [M] \right| = 0$$

Thay các ma trận $[K]$ và $[M]$ vào phương trình trên.

Khai triển định thức và giải, ta nhận được:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 3,42 \\ 20,1 \\ 53,2 \\ 92,8 \end{Bmatrix} \frac{1}{h^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \begin{Bmatrix} 3,42 \\ 20,1 \\ 53,2 \\ 92,8 \end{Bmatrix} . \left(\frac{1}{S}\right)$$

Ma trận các dạng dao động riêng:

$$[\Phi] = \left[\{\varphi_1\}, \{\varphi_2\}, \{\varphi_3\}, \{\varphi_4\}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,654 & -0,272 & -1,098 & -1,729 \\ 0,336 & -0,828 & -0,307 & 2,643 \\ 0,096 & -0,454 & 1,198 & -2,68 \end{bmatrix}$$

Chu kỳ dao động riêng thứ nhất:

$$T_1 = \frac{2\,\Pi}{\omega_1} = \frac{6.28}{3,42} = 1,84\ .\ (s)$$

Thời gian duy trì của xung gia tốc:

$$\theta = 0,1\ .\ T_1 = 0,1\ .\ 1,84 = 0,184\ .\ (s)$$

Tốc độ ban đầu của móng được tính theo công thức:

$$v_o = S_o.\theta = 1.g.0,184 = 0,184.g.(m/s)$$

Để xây dựng biểu đồ phân bố chuyển vị, ta sử dụng công thức dạng (9.14) viết cho cả hệ như sau:

$$\{Y\} = [\Phi]\left\{\mu_i \cdot \frac{v_o}{\omega_i}\right\}$$

trong đó: $\left\{\frac{v_o}{\omega_i}\right\}$ là phổ chuyển vị của cả hệ, ta đã xem rằng giá trị phổ vận tốc của hệ là như nhau đối với mọi dạng dao động riêng và bằng tốc độ ban đầu của móng.

Hệ số dạng dao động riêng được xác định theo công thức (9.3):

$$\mu_1 = \frac{\{1\ \ 0,654\ \ 0,336\ \ 0,096\}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{mh}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\{1\ \ 0,654\ \ 0,336\ \ 0,096\}\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{mh}{4}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0,654 \\ 0,336 \\ 0,096 \end{Bmatrix}}$$

$$\mu_1 = \frac{1,586}{2,0998} = 1,51$$

Tương tự ta được:

$$\mu_2 = 0,719$$

$$\mu_3 = 0,28$$

$$\mu_4 = -0,072$$

Đưa các giá trị μ_i, ω_i vào công thức Y, ta được:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,654 & -0,272 & -1,098 & -1,729 \\ 0,336 & -0,828 & -0,307 & 2,643 \\ 0,096 & -0,454 & 1,198 & -2,68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1,51 \,.\, 1,805) : 3,42 \\ (-0,719 . 1,805) : 20,1 \\ (0,28 \,.\, 1,805) : 53,2 \\ (-0,072 \,.\, 1,805) : 92,8 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 73,92 \\ 53,00 \\ 32,02 \\ 12,09 \end{Bmatrix} \text{(m)}$$

Biểu đồ phân bố gia tốc viết cho cả hệ được tính một cách tương tự như trên, ta sử dụng công thức (9.15):

$$\{\ddot{Y}\} = [\Phi]\{\mu_i\, \omega_i\, v_o\}$$

Thay các giá trị đã có ở trên vào, ta sẽ được:

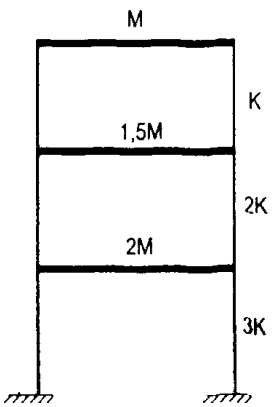
$$\{\ddot{Y}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0,654 & -0,272 & -1,098 & -1,729 \\ 0,336 & -0,828 & -0,307 & 2,643 \\ 0,096 & -0,454 & 1,198 & -2,68 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1,51 \,.\, 0,629g \\ -0,719 \,.\, 3,698g \\ (0,28 \,.\, 9,789g \\ -0,072 \,.\, 17,075g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,189g \\ 0,46g \\ 0,113g \\ 7,877g \end{Bmatrix}$$

Biểu đồ phân bố gia tốc và biểu đồ phân bố chuyển vị lớn nhất theo chiều cao được mô tả trên hình 9.5b và c.

Bài 9.6: Từ ma trận Ω, ta có tần số dao động riêng của hệ:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 4,58 \\ 9,82 \\ 14,59 \end{Bmatrix} . \left(\frac{1}{s}\right), \text{ suy ra :}$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} 1,37 \\ 0,64 \\ 0,431 \end{Bmatrix} . \text{ s}$$



Hình 9.6

Từ các giá trị T_i, (i = 1, 2, 3) ta tra đồ thị phổ vận tốc sẽ được:

$$\{S_v\} = \begin{Bmatrix} 0,529 \\ 0,429 \\ 0,365 \end{Bmatrix} . \text{(m/s)}$$

Xác định các hệ số dạng dao động riêng theo (9.3):

$$\mu_1 = \frac{\{\varphi_1\}^T [M]\{1\}}{\{\varphi_1\}^T [M]\{\varphi_1\}} = \frac{2,566}{1,801} = 1,4248, \text{ tương tự ta có:}$$

$$\mu_2 = -\frac{1,254}{2,455} = -0,511 \quad ,$$

$$\mu_3 = -\frac{2,08}{23,1} = 0.09 \quad .$$

Lực đàn hồi đối với các dạng dao động riêng được xác định theo công thức (9.13):

$$\{P_{d,1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,644 \\ 0,3 \end{Bmatrix} . 1,4248 . 4,58 . 0,529 . M = \begin{Bmatrix} 0,614 \\ 0,593 \\ 0,368 \end{Bmatrix} . 10^3 kN.$$

$$\{P_{d,2}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,601 \\ 0,676 \end{Bmatrix} . (-0,511) . 9,82 . 0,429 . M = \begin{Bmatrix} -0,383 \\ 0,345 \\ 0,518 \end{Bmatrix} . 10^3 kN.$$

$$\{P_{d,3}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,57 \\ 2,47 \end{Bmatrix} . 0,09 . 14,59 . 0,365 . M = \begin{bmatrix} 0,085 \\ -0,329 \\ 0,42 \end{bmatrix} . 10^3 kN.$$

Chuyển vị ứng với các dạng dao động riêng được xác định theo công thức (9.14):

$$\{Y_1\} = \{\varphi_1\}\mu_1 \cdot \frac{S_{v1}}{\omega_1} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,644 \\ 0,3 \end{Bmatrix} . 1,4248 \cdot \frac{0,529}{4,58} = \begin{Bmatrix} 0,165 \\ 0,1056 \\ 0,0495 \end{Bmatrix} . (m)$$

$$\{Y_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,601 \\ -0,676 \end{Bmatrix} . (-0,511) \cdot \frac{0,429}{0,82} = \begin{Bmatrix} -0,022 \\ 0,013 \\ 0,015 \end{Bmatrix} . (m)$$

$$\{Y_3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,57 \\ 2,47 \end{Bmatrix} . 0,9 \cdot \frac{0,365}{14,59} = \begin{Bmatrix} 0,002 \\ -0,005 \\ 0,005 \end{Bmatrix} . (m)$$

Chuyển vị lớn nhất của hệ được tính gần đúng một cách tương tự như xác định lực đàn hồi lớn nhất theo công thức (9.5):

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{y_{11}^2 + y_{12}^2 + y_{13}^2} \\ \sqrt{y_{21}^2 + y_{22}^2 + y_{23}^2} \\ \sqrt{y_{31}^2 + y_{32}^2 + y_{33}^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{0,165^2 + (-0,022)^2 + 0,002^2} \\ \sqrt{0,1056^2 + 0,013^2 + (-0,005)^2} \\ \sqrt{0,0495^2 + 0,015^2 + 0,005^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,166 \\ 0,107 \\ 0,052 \end{Bmatrix} (m)$$

Tải trọng chấn động tác dụng vào các khối lượng được tính theo (9.5) viết cho cả hệ như sau:

$$\{P_d\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{0{,}614^2 + (-0{,}383)^2 + (0{,}085)^2} \\ \sqrt{0{,}593^2 + 0{,}345^2 + (-0{,}329)^2} \\ \sqrt{0{,}368^2 + 0{,}518^2 + 0{,}422^2} \end{Bmatrix} . 10^2 = \begin{Bmatrix} 0{,}72 \\ 0{,}76 \\ 0{,}76 \end{Bmatrix} . 10^3 \text{ kN}$$

Bài 9.7: Hướng dẫn:

Xác định chu kỳ dao động riêng và tham số tắt dần, từ các giá trị đó ta tra đồ thị phổ vận tốc được: $S_v = 0{,}228$ (m/s).

Sau đó tính chuyển vị lớn nhất và tải trọng chấn động tính toán. Tải trọng chấn động tính toán có thể xác định theo công thức (9.13), hoặc tính theo $P_d = K . Y_{max}$.

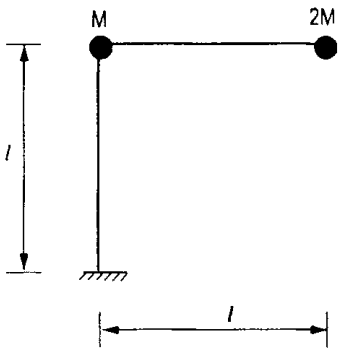
Đáp số: $Y_{max} = 0{,}042$ (m),

$P_d = 450$ (kN)

Bài 9.8: Dạng dao động riêng và tần số dao động riêng được xác định:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} 5{,}49 \\ 16{,}86 \end{Bmatrix} . \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}431 & 1 \\ 1 & -0{,}648 \end{bmatrix}, \text{ Ma trận khối lượng: } [M] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} M$$



Hình 9.7

Ứng với các tần số dao động riêng, ta có chu kỳ dao động riêng: $T_i = \dfrac{2\Pi}{\omega_i}$

$$[T] = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}144 \\ 0{,}373 \end{Bmatrix} . s$$

Các hệ số dạng dao động riêng được xác định tương ứng với các bậc tự do của hệ theo công thức (9.3) có các giá trị sau:

$$\mu = \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5067 \\ 0{,}78125 \end{Bmatrix}$$

Từ các giá trị T_i, (i = 1, 2) và tham số tắt dần $\varepsilon = 0{,}02$ ta nhận được các giá trị của phổ vận tốc theo đồ thị ở bài 9.6:

$$\begin{Bmatrix} S_{v1} \\ S_{v2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}228 \\ 0{,}167 \end{Bmatrix} . \ m/s$$

Lực đàn hồi ứng với các dạng dao động riêng được xác định theo công thức (9.13):

$$\{P_{d,1}\} = [M]\{\varphi_1\}(\mu_1\,\omega_1 S_{v1}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}431 \\ 1 \end{Bmatrix} . \ 0{,}15 \ . \ (0{,}5067 \ . \ 5{,}49 \ . \ 0{,}228)$$

$$\{P_{d,1}\} = \begin{Bmatrix} 0{,}123 \\ 0{,}19 \end{Bmatrix} . \ kN$$

$$\{P_{d,2}\} = M\varphi_2\,(\mu_2\,\omega_2 S_{v2}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}648 \end{Bmatrix} . \ 0{,}15 \ . \ (0{,}78125 \ . \ 16{,}86 \ . \ 0{,}167)$$

$$\{P_{d,2}\} = \begin{Bmatrix} 0{,}99 \\ -0{,}428 \end{Bmatrix} . \ kN$$

Lực chấn động tính toán đối với hệ đã cho được xác định theo công thức (9.5):

$$\{P_d\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{0{,}123^2 + 0{,}99^2} \\ \sqrt{0{,}19^2 + (-0{,}428)^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}998 \\ 0{,}468 \end{Bmatrix} . \ kN$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lều Thọ Trình, Phạm Khắc Hùng, Lê Văn Quý, Đào Trọng Long. *Ổn định và Động lực học công trình*. Hà Nội, 1974.
2. Phan Văn Cúc, Nguyễn Lê Ninh. *Tính toán và cấu tạo kháng chấn các công trình nhiều tầng*. Hà Nội, 1994.
3. Phạm Gia Lộc. *Cơ sở động đất và tính toán công trình chịu tải trọng động đất*. Nhà xuất bản Xây dựng, 1985.
4. Nguyễn Tài Trung, Nguyễn Xuân Ngọc. *Ổn định và Động lực học công trình*. Nhà xuất bản Xây dựng, 1997.
5. Nguyễn Văn Tỉnh. *Cơ sở tính dao động công trình*. Nhà xuất bản Xây dựng, 1987.
6. Phạm Đình Ba, Nguyễn Thanh Bình. *Động lực học công trình*. Hà Nội, 1995.
7. Rayw-Clough, Joseph Penzien. *Dynamics of structures*. Mc Graw - Hill Inc, 1993.
8. Самарин В.В., Орлиенко А.Н. *Механика военно - инженерных сооружений в примерах и задачах. Часть III. Динамика военноинженерных сооружений*. Москва, 1986.
9. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В., *Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах*. Москва, 1969.
10. Рабинович И.М., Синицын А.П., *Расчет сооружений на импульсивные воздействия*. Москва, 1970.
11. Клаф Р., Пензиен Д. Ж. *Динамика сооружений*. Москва, 1979.
12. Бате К., Винсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. Москва, 1982.
6. Киселев В.А. *Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений*. Москва, 1980.
13. *Динамический расчет зданий и сооружений. Справочник проектировщика*. Москва, 1984.
14. Бигера И.А., Пановсо Я.И. *Прочность - Устойчивость - Колебания. Том 2*. Москва, 1968.
15. Смирнов А.Ф., Шапошников Н.Н.,.. *Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений*. Москва, 1984.
16. Синицын А.П. *Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки*. Москва, 1967.
17. Бабаков И. М. *Теория колебаний*. Москва, 1968.

MỤC LỤC

Trang

Lời nói đầu 3

Phần I

PHẦN ĐỀ BÀI

Chương 1. Dao động của hệ một bậc tự do 5

Chương 2. Dao động hệ hữu hạn bậc tự do 21

Chương 3. Dao động của hệ vô hạn bậc tự do 34

Chương 4. Dao động đàn dẻo hệ một bậc tự do 37

Chương 5. Dao động của khung 39

Chương 6. Dao động của vòm 43

Chương 7. Dao động của dàn 46

Chương 8. Tính công trình chịu tác dụng của va chạm 49

Chương 9. Tính công trình chịu tải trọng chấn động 52

Phần II

PHẦN ĐÁP SỐ VÀ LỜI GIẢI

Chương 1. Dao động hệ một bậc tự do 56

1. Công thức xác định tần số dao động riêng, chu kỳ dao động riêng 56

2. Hệ số động, tải trọng tĩnh tương đương 57

3. Chuyển vị và nội lực của hệ 58

Chương 2. Dao động hệ hữu hạn bậc tự do 95

Tính dao động của hệ hữu hạn bậc tự do theo phương pháp tích phân trực tiếp 102

A. Tính các số liệu ban đầu 102

B. Tính toán đối với mỗi bước thời gian 103

Chương 3. Dao động của hệ vô hạn bậc tự do 162

Chương 4. Dao động đàn dẻo hệ một bậc tự do 178

1. Tính trong giai đoạn đàn hồi 178

2. Tính trong giai đoạn dẻo 179

Chương 5. Dao động của khung 183
Chương 6. Dao động của vòm 200
1. Vòm tròn ba khớp 200
2. Vòm tròn hai khớp 202
3. Vòm tròn không khớp 203
4. Vành tròn 203
5. Vòm parabol 3 khớp 203
6. Vòm parabol 2 khớp 204
Chương 7. Dao động của dàn 210
Chương 8. Tính công trình chịu tác dụng của va chạm 220
Chương 9. Tính công trình chịu tải trọng chấn động 228
Tài liệu tham khảo 242

BÀI TẬP
ĐỘNG LỰC HỌC CÔNG TRÌNH

(Tái bản)

Chịu trách nhiệm xuất bản :
TRỊNH XUÂN SƠN

Biên tập : NGUYỄN THU DUNG
Chế bản : PHẠM HỒNG LÊ
Trình bày bìa : NGUYỄN HỮU TÙNG
Sửa bản in : NGUYỄN THU DUNG

In 300 cuốn khổ 19 x 227cm tại Xưởng in Nhà xuất bản Xây dựng. Giấy chấp nhận đăng ký kế hoạch xuất bản số 46-2011/CXB/49-01/XD ngày 05-01-2011. Quyết định xuất bản số 440/QĐ-XBXD ngày 1-12-2011. In xong nộp lưu chiểu tháng 12 -2011.