

PHÂN TÍCH KẾT CẤU TẤM PHÂN LỚP CHỨC NĂNG (FGM) CHỊU TẢI TRỌNG CƠ NHIỆT BẰNG PHẦN TỬ CS-MITC3+

ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED MATERIALS (FGM) PLATES UNDER MECHANICAL TEMPERATURE LOADINGS USING CS-MITC3+ ELEMENTS

La Tuấn Minh.

Học viên cao học trường ĐHSPKT TPHCM.

TÓM TẮT

Trong luận văn thạc sĩ này, phương pháp phần tử hữu hạn trơn trên miền phần tử (CS-FEM) được phát triển cho phần tử MITC3+ dùng để phân tích ứng xử của kết cấu tấm vật liệu phân lớp chức năng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Kết cấu được mô phỏng bằng các phần tử tam giác ba nút với bảy bậc tự do cho mỗi nút. Trong phần tử đề xuất CS-MITC3+, biến dạng màng và uốn của ma trận độ cứng được tính toán bởi kỹ thuật trơn hóa trên miền trơn dựa trên miền con của phần tử được định nghĩa bằng cách nối 2 nút đỉnh với nút nổi (bubble node) của phần tử. Để giải quyết hiện tượng khóa cắt “shear locking” khi tấm có chiều dày mỏng dần, kỹ thuật nội suy các thành phần ten xơ (mixed interpolation tensorial components) MITC3+ được sử dụng để xấp xỉ lại biến dạng cắt ngoài mặt phẳng.

Từ khóa: FGM; phần tử CS-MITC3+; lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.

ABSTRACT

In this thesis, the cell-based smoothed finite element method (CS-FEM) has been developed for the MITC3+ elements to analyze static behaviors of functionally graded materials (FGM) plates based on the high order shear deformation theory (HSDT). The plates are modeled by 3-node triangular elements with seven degrees of freedom for each node. In the proposed element CS-MITC3+, the membrane and bending strains of the element stiffness matrix are smoothed on smoothing domains which are the subtriangular domains defined by connecting the element nodes with the bubble node. To remove the shear-locking phenomenon which occurs when the plate thickness becomes thin, the mixed interpolation tensorial components (MITC3+) technique is employed to independently interpolate the transverse shear strains.

Keywords: FGM; element CS-MITC3+; the high order shear deformation theory.

1. GIỚI THIỆU.

Phát triển bền vững, ít ảnh hưởng đến môi trường và các nguồn nguyên liệu hóa thạch đang là thách thức trong nhiều ngành công nghiệp chế tạo nói chung và lĩnh vực xây dựng nói riêng. Các kết cấu có khả năng chịu lực tốt, bền nhẹ và đáp ứng nhu cầu sử dụng nhưng ít tiêu hao

nhiên liệu hay ít ảnh hưởng đến móng công trình đòi hỏi phải có tìm ra những loại vật liệu mới thay thế các vật liệu truyền thống. Những loại vật liệu mới này cần có các đặc tính cơ học bền hơn, dẻo dai hơn và nhẹ hơn. Trong đó, vật liệu composite nhiều lớp là một trong những loại vật liệu đáp ứng tốt các yêu

cầu trên. Tuy nhiên, do được cấu tạo từ những lớp vật liệu composite có hướng sợi khác nhau, tức là các đặc trưng vật liệu trong từng lớp khác nhau, vật liệu composite nhiều lớp thường bị phá hoại do sự tập trung ứng suất tại mặt tiếp xúc giữa các lớp, dẫn tới giảm tuổi thọ hay phá hoại do bong tách giữa các lớp. Để khắc phục những nhược điểm này, khái niệm vật liệu phân lớp chức năng (Functionally Graded Materials - FGM) [1] lần đầu tiên được các nhà khoa học Nhật Bản đề xuất năm 1984 trong một dự án nghiên cứu tàu không gian. Vật liệu FGM là một vật liệu kết hợp giữa hai vật liệu khác nhau là gốm ở mặt trên, kim loại ở mặt dưới và có các đặc tính vật liệu biến thiên liên tục theo phương chiều dày. Nhờ sự thay đổi liên tục các đặc tính vật liệu theo một phương nên vật liệu FGM tránh được sự tập trung ứng suất. Vật liệu FGM kết hợp ưu điểm cách nhiệt, chống hao mòn tốt của gốm với tính bền, dẻo, chống mỏi của kim loại. Chính vì sự kết hợp những đặc tính ưu việt này, vật liệu FGM ngày càng được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Việc tính toán các kết cấu tấm hay vỏ bằng vật liệu FGM tương đối phức tạp, đòi hỏi phải phát triển các lý thuyết phân tích cũng như phương pháp giải thích hợp nhằm đưa ra những kết quả có khả năng dự đoán chính xác các ứng xử của kết cấu làm từ vật liệu này có hình dáng, điều kiện biên và chịu tác dụng của các tải trọng khác nhau.

Ứng xử của tấm FGM có thể áp dụng lý thuyết tấm cổ điển Kirchhoff hoặc lý thuyết tấm biến dạng cắt [2]. Lý thuyết tấm cổ điển Kirchhoff bỏ qua biến dạng cắt ngoài mặt phẳng nên chỉ phù hợp cho các loại tấm mỏng. Lý thuyết tấm biến dạng cắt kể đến biến dạng cắt ngoài mặt phẳng nên phù hợp cho ứng xử của các tấm dày. Reissner [3] và Mindlin [4] đã đề xuất lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc nhất (FSDT). Tuy nhiên, lý thuyết FSDT lại giả

định ứng suất cắt ngoài mặt phẳng bất biến nên cần những hệ số điều chỉnh để thỏa mãn các điều kiện biên tự do tại bề mặt trên và dưới của tấm. Do đó, việc cải thiện lý thuyết FSDT là cần thiết. Từ đó, lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc cao (HSDT) được hình thành và phát triển. Theo các lý thuyết này, yếu tố điều chỉnh biến dạng cắt ngoài mặt phẳng có thể bỏ qua nhưng vẫn cho ra kết quả tính toán ứng suất cắt ngoài mặt phẳng ổn định và chính xác hơn. Đến nay, lý thuyết HSDT vẫn được điều chỉnh và phát triển không ngừng trong các nghiên cứu [5]–[7].

Trong những thập kỷ qua, các phương pháp giải tích và các phương pháp số khác nhau đã được đề xuất nhằm giải quyết bài toán tấm FGM. Trong đó, phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH) được sử dụng nhiều nhất và ưu thế nhất do có thể giải quyết bài toán tấm FGM có hình dáng, điều kiện biên và tải trọng bất kỳ. Phương pháp PTHH được bắt nguồn từ những yêu cầu giải các bài toán phức tạp về lý thuyết đàn hồi, phân tích kết cấu trong xây dựng và kỹ thuật hàng không. Những năm 1940, Hrennikoff, McHenry và Courant là những người khởi đầu sự phát triển của phương pháp PTHH. Sự phát triển chính thức của phương pháp PTHH được bắt đầu vào nửa sau những năm 1950 trong việc phân tích kết cấu khung máy bay và công trình xây dựng [8]. Mặc dù có những ưu điểm nhưng hiệu quả tính toán bằng phương pháp PTHH phụ thuộc vào nhiều yếu tố như mô hình toán học, lưới phần tử, ... Do đó, việc tìm ra các công thức PTHH mới có khả năng tính toán kết cấu với độ chính xác cao và chi phí tính toán thấp luôn là yêu cầu cần thiết và tập trung nhiều sự quan tâm nghiên cứu.

Năm 1970, Ahmad, Irons và Zienkiewicz [9] đã giới thiệu một phần tử tứ giác đẳng tham số có xấp xỉ trường chuyển vị và góc xoay độc lập. Phần tử này có thể giải quyết tốt bài toán tấm vỏ

dày theo lý thuyết FSDT. Tuy nhiên, khi phân tích các kết cấu tấm vỏ mỏng, chuyển vị và góc xoay cần hàm xấp xỉ bậc cao. Điều này dẫn đến số nút của phần tử lớn. Nói cách khác, nếu sử dụng hàm xấp xỉ dạng C^0 thì trường xấp xỉ của chuyển vị và góc xoay không thể biểu diễn được biến dạng cắt ngoài mặt phẳng bằng 0 như trong ứng xử thực tế của kết cấu tấm vỏ mỏng. Điều này dẫn đến năng lượng biến dạng cắt của phần tử này vượt trội năng lượng biến dạng cắt thực tế và biến dạng uốn khi chiều dày tấm mỏng dần. Đây chính là hiện tượng khóa cắt xảy ra khi các phần tử hữu hạn dùng hàm xấp xỉ dạng C^0 để phân tích tấm vỏ mỏng.

Để khắc phục hiện tượng khóa cắt, nhiều phương pháp đã được đề xuất cho các phần tử tấm, vỏ tam giác 3 nút hoặc tứ giác 4 nút như phương pháp tích phân giảm (RI) [10], tích phân chọn lựa (SI) [11], phương pháp giả sử biến dạng tự nhiên (ANS) [12], giả sử biến dạng nâng cao (EAS) [13], phương pháp giả sử biến dạng phần tử tấm Mindlin 3 nút (MIN3) [14], phương pháp khác biệt biến dạng cắt rời rạc (DSG3) [15] hoặc phương pháp nội suy các thành phần ten-xơ hỗn hợp (MITC3, MITC3+, MITC4, MITC4+, ...) [16]–[21].

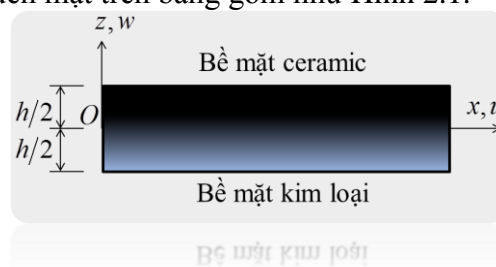
Công thức PTHH tron cho phần tử tấm tam giác 3 nút sử dụng các kỹ thuật khử khóa cắt MIN3, DSG3, MITC3 để phân tích tấm FGM đã phát triển và công bố trong các nghiên cứu [29], [32], [36], [37], [38], [42], [46].

Nghiên cứu này sẽ xây dựng công thức PTHH tron trên miền phần tử cho phần tử MITC3+ dùng để phân tích tấm FGM chịu tải trọng cơ và nhiệt. So sánh đánh giá độ chính xác của phần tử đề xuất với các phần tử cùng loại trong việc phân tích tấm FGM chịu tải trọng cơ và nhiệt.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT.

2.1 Tấm phân lớp chức năng (FGM)

Trong luận văn này, tấm vật liệu phân lớp chức năng (FGM) được cấu tạo từ 2 loại vật liệu kim loại và gốm sao cho đặc tính vật liệu thay đổi liên tục theo chiều dày tấm từ mặt dưới bằng kim loại đến mặt trên bằng gốm như Hình 2.1.



Hình 2.1: Tấm vật liệu FGM (Functionally Graded Materials)

Sự thay đổi liên tục của các đặc trưng vật liệu theo chiều dày tấm được thể hiện qua hàm đặc trưng vật liệu $P(z)$ theo qui luật hàm mũ như sau [32]

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m \quad (2.1)$$

Trong đó, P_c , P_m lần lượt đại diện cho đặc trưng vật liệu của gốm và kim loại; và giả sử hàm phân phối vật liệu

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^n \quad (2.2)$$

Ở đây, z theo phương chiều dày tấm thay đổi từ $-h/2$ đến $h/2$ với h là chiều dày tấm; $n \geq 0$ là số mũ phân phối vật liệu.

Giả sử mặt trên và mặt dưới của tấm chịu nhiệt độ không đổi. Do đó, nhiệt độ $T(z)$ chỉ thay đổi theo chiều dày của tấm thỏa phương trình dẫn nhiệt ở trạng thái ổn định một chiều [32]

$$-\frac{d}{dz} \left(k(z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (2.3)$$

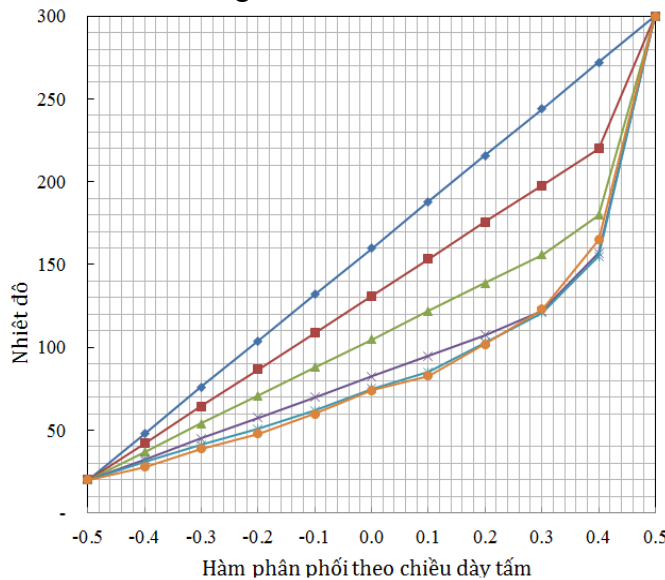
Trong đó, $T(z = -h/2) = T_m$ và $T(z = h/2) = T_c$ lần lượt là nhiệt độ mặt dưới và mặt trên của tấm; $k(z)$ là hệ số dẫn nhiệt có qui luật thay đổi theo chiều dày cho bởi (2.1)

Lời giải (2.3) cho bởi [32] ở dạng đa thức như sau

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \left(\frac{z}{h} + 0,5 \right) \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left[- \left(\frac{z}{t} + 0,5 \right)^n \frac{k_c - k_m}{k_m} \right]^k / (nk + 1)}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(- \frac{k_c - k_m}{k_m} \right)^k / (nk + 1)}$$

Ở đây, k_m, k_c lần lượt là hệ số dẫn nhiệt của kim loại và gốm.

Đồ thị thể hiện sự thay đổi của nhiệt độ theo chiều dày tấm ứng với các giá trị khác nhau của hệ số mũ phân phối n được minh họa trong Hình 2.2.



Hình 2.2: Đồ thị thể hiện hàm phân phối nhiệt độ dọc theo chiều dày tấm

2.2 Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao cho tấm FGM

2.2.1 Trường chuyển vị

Trường chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao được Reddy [47] xây dựng dựa trên hàm xấp xỉ đa thức bậc 3 như sau

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\theta_x + z^2\xi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\ v &= v_0 + z\theta_y + z^2\xi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ w &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Trong đó, u, v, w là các chuyển vị theo phương x, y, z ; u_0, v_0, w_0 là các chuyển vị theo phương x, y, z tại mặt trung bình của tấm; θ_x, θ_y lần lượt là các góc

xoay quanh trục y và trục x ; $\xi_x, \xi_y, \zeta_x, \zeta_y$ là các hàm số được xác định dựa vào điều kiện không có biến dạng cắt ngoài mặt phẳng tại mặt trên và mặt dưới của tấm. (2.4)

của tấm.

Tại mặt trên và mặt dưới của tấm, ta có điều kiện

$$\gamma_{x^2|_{z=\pm h/2}} = 0; \gamma_{y^2|_{z=\pm h/2}} = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \gamma_{x^2|_{z=\pm h/2}} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{z=\pm h/2} = 0 \\ \gamma_{y^2|_{z=\pm h/2}} = \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \Big|_{z=\pm h/2} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Thế trường chuyển vị cho bởi (2.5) vào (2.7), điều kiện (2.6) được viết lại

$$\gamma_{xz|z=h/2} = \theta_x + 2\left(\frac{h}{2}\right)\xi_x + 3\left(\frac{h}{2}\right)^2 \varsigma_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\gamma_{xz|z=-h/2} = \theta_x + 2\left(-\frac{h}{2}\right)\xi_x + 3\left(-\frac{h}{2}\right)^2 \varsigma_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

$$\gamma_{yz|z=h/2} = \theta_y + 2\left(\frac{h}{2}\right)\xi_y + 3\left(\frac{h}{2}\right)^2 \varsigma_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

$$\gamma_{yz|z=-h/2} = \theta_y + 2\left(-\frac{h}{2}\right)\xi_y + 3\left(-\frac{h}{2}\right)^2 \varsigma_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

Lấy (2.8) trừ (2.9), ta được $\xi_x = 0$ (2.12)

Thế (2.12) vào (2.8), suy ra

$$\varsigma_x = -\frac{4}{3h^2}\left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \quad (2.13)$$

Tương tự, lấy (2.10) trừ (2.11), suy ra $\xi_y = 0$ (2.14)

Và thế (2.14) vào (2.10), ta được

$$\varsigma_y = -\frac{4}{3h^2}\left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \quad (2.15)$$

Thay các hàm $\xi_x, \xi_y, \varsigma_x, \varsigma_y$ vừa tìm được ở (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) vào (2.5), xấp xỉ chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 được viết lại

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\theta_x - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v &= v_0 + z\theta_y - \frac{4z^3}{3h^2}\left(\theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$w = w_0(x, y)$$

Để có thể xấp xỉ chuyển vị bằng xấp xỉ PTHH dạng C^0 , lần lượt thay $\partial w_0/\partial x$ và $\partial w_0/\partial y$ bằng các hàm số độc lập β_x và β_y [48]. Do đó, hàm xấp xỉ

chuyển vị theo lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 của Reddy có dạng

$$\begin{aligned} u &= u_0 + z\theta_x - \frac{4z^3}{3h^2}(\theta_x + \beta_x) \\ v &= v_0 + z\theta_y - \frac{4z^3}{3h^2}(\theta_y + \beta_y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$w = w_0$$

Trường chuyển vị (2.17) chứa 7 hàm số độc lập $u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y, \beta_x, \beta_y$ cần xác định. Các hàm số này chỉ phụ thuộc tọa độ x, y , không phụ thuộc tọa độ z . Trong đó, u_0, v_0 là các chuyển vị màng; w_0 là độ võng; θ_x, θ_y là các góc xoay quanh trục y và trục x ; β_x, β_y là các hàm vênh (warping).

2.2.2 Trường biến dạng

Từ trường chuyển vị (2.17), các biến dạng được xác định như sau:

+ Biến dạng trong mặt phẳng

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \partial u/\partial y + \partial v/\partial x \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\mathbf{k}_1 + z^3\mathbf{k}_2 \quad (2.18)$$

Trong đó,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ v_0 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{k}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{\kappa}_2 = c \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

Với $c = -\frac{4}{3h^2}$
+ Biến dạng cắt ngoài mặt phẳng
(biến dạng trượt)

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial z + \partial w / \partial x \\ \partial v / \partial z + \partial w / \partial y \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_s + z^2 \mathbf{\kappa}_s \quad (2.22)$$

Trong đó,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{\kappa}_s = 3c \begin{Bmatrix} \theta_x + \beta_x \\ \theta_y + \beta_y \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

+ Biến dạng trong điều kiện nhiệt độ

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{th} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{th} \\ \varepsilon_y^{th} \\ \gamma_{xy}^{th} \end{Bmatrix} = \alpha_z \Delta T(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Trong đó, $\Delta T(z)$ là chênh lệch nhiệt độ từ bề mặt đến điểm cần tính; α_z là hệ số dẫn nở nhiệt được tính theo qui luật phân phối hàm mũ cho bởi (2.1).

2.2.3 Trường ứng suất

+ Ứng suất trong mặt phẳng

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_x & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_p - \boldsymbol{\varepsilon}_{th}) \quad (2.26)$$

$$= \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_0 + z \mathbf{\kappa}_1 + z^3 \mathbf{\kappa}_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_{th})$$

+ Ứng suất cắt ngoài mặt phẳng

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{bmatrix}^T = \mathbf{G}(\boldsymbol{\varepsilon}_s + z^2 \mathbf{\kappa}_s) \quad (2.27)$$

+ Ứng suất do nhiệt độ

$$\boldsymbol{\sigma}_{th} = \begin{bmatrix} \sigma_x^{th} & \sigma_y^{th} & \tau_{xy}^{th} \end{bmatrix}^T = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_{th} \quad (2.28)$$

Trong đó,

$$\mathbf{E} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(z)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{G} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Với $E(z)$ là mô đun đàn hồi và $\nu(z)$ là hệ số Poisson thay đổi theo qui luật hàm phân phối (2.1).

2.2.4 Nội lực trong tấm

Các thành phần nội lực trong tấm được xác định bằng cách lấy tích phân các ứng suất theo chiều dày tấm như sau:

+ Trong mặt phẳng

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.31)$$

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.32)$$

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z^3 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.33)$$

+ Ngoài mặt phẳng

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.34)$$

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.35)$$

Thế các quan hệ giữa ứng suất và biến dạng cho bởi (2.26) và (2.27) vào các phương trình nội lực trên và lấy tích phân theo chiều dày tấm, ta có

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{E}\boldsymbol{\kappa}_2 - \mathbf{N}^{th}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}_2 - \mathbf{M}^{th} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \mathbf{F}\boldsymbol{\kappa}_1 + \mathbf{H}\boldsymbol{\kappa}_2 - \mathbf{P}^{th}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^s \boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{B}^s \boldsymbol{\kappa}_s \quad (2.37)$$

$\mathbf{R} = \mathbf{B}^s \boldsymbol{\varepsilon}_s + \mathbf{D}^s \boldsymbol{\kappa}_s$
Trong đó,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) \mathbf{E} dz \quad (2.38)$$

$$(A_{ij}^s, B_{ij}^s, D_{ij}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z^4) \mathbf{G} dz \quad (2.39)$$

$$\mathbf{N}^{th} = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_z \Delta T(z) \mathbf{E} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dz \quad (2.40)$$

$$\mathbf{M}^{th} = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_z \Delta T(z) \mathbf{E} z \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dz \quad (2.41)$$

$$\mathbf{P}^{th} = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_z \Delta T(z) \mathbf{E} z^3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dz \quad (2.42)$$

Công thức (2.36) và (2.37) được viết lại ở dạng ma trận như sau

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^{th} \\ \mathbf{M}^{th} \\ \mathbf{P}^{th} \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^s & \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\kappa}_s \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

3. CÔNG THỨC PTHH CS-MITC3+CHO TẤM FGM THEO HSDT

3.1 Công thức PTHH tam giác MITC3+ cho tấm FGM

Rời rạc tấm FGM bằng các phần tử tam giác 3 nút. Trường chuyển vị được xấp xỉ thông qua chuyển vị tại nút phần

tử và tại nút nôi có tọa độ tại trọng tâm phần tử như sau [20]

$$u_0 = \sum_{i=1}^4 N_i u_{0i}; \quad v_0 = \sum_{i=1}^4 N_i v_{0i}; \quad w_0 = \sum_{i=1}^3 N_i w_{0i}$$

$$\theta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{xi}; \quad \theta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_{yi} \quad (3.1)$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{xi}; \quad \beta_y = \sum_{i=1}^4 N_i \beta_{yi}$$

Trong đó, $u_{0i}, v_{0i}, w_{0i}, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \beta_{xi}, \beta_{yi}$ là các bậc tự do tại nút i . Chú ý, tại nút 4 (nút nôi) không có giá trị độ võng, tức là $w_{04} = 0$. N_i là các hàm dạng liên tục được định nghĩa trong hệ tọa độ tự nhiên ξ, η với

$$N_1 = 1 - \xi - \eta - \frac{1}{3} N_4$$

$$N_2 = \xi - \frac{1}{3} N_4 \quad (3.2)$$

$$N_3 = \eta - \frac{1}{3} N_4$$

$$N_4 = 27\xi\eta(1 - \xi - \eta)$$

Thế xấp xỉ PTHH (3.1) vào các biến dạng trong mặt phẳng (2.19), (2.20), (2.21) và các biến dạng ngoài mặt phẳng (2.23), (2.24), ta có quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị nút phần tử như sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^m \mathbf{d}_i; \quad \boldsymbol{\kappa}_1 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^{b1} \mathbf{d}_i; \quad \boldsymbol{\kappa}_2 = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^{b2} \mathbf{d}_i \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^{s0} \mathbf{d}_i \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_s = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^{s1} \mathbf{d}_i \quad (3.5)$$

Trong đó, $\mathbf{d}_i = [u_{0i} \ v_{0i} \ w_{0i} \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \beta_{xi} \ \beta_{yi}]^T$, $i = 1, 2, 3, 4$ và $w_{04} = 0$, là chuyển vị nút phần tử và

$$\mathbf{B}_i^m = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{B}_i^{b1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B}_i^{b2} = c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B}_i^{s0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{B}_i^{s1} = 3c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Biến dạng cắt ngoài mặt phẳng $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ ở (3.4) tính trực tiếp từ xấp xỉ (3.1) sẽ không tiến đến 0. Do đó, biến dạng cắt này không thể biểu diễn chính xác ứng xử cắt khi chiều dày tấm mỏng. Ngược lại, khi tấm càng mỏng thì xấp xỉ biến dạng cắt này càng lớn, vượt xa biến dạng uốn, làm cho lời giải chuyển vị bằng PTHH nhỏ hơn rất nhiều so với ứng xử thực tế.

Hiện tượng khi tấm càng mỏng, biến dạng cắt hay năng lượng cắt càng lớn do sử dụng hàm xấp xỉ chuyển vị bậc thấp được gọi là hiện tượng khóa cắt.

Trong luận văn này, để khắc phục hiện tượng khóa cắt của phần tử tam giác 3 nút có 1 nút nổi, phương pháp khử khóa cắt MITC3+ được sử dụng [20]. Theo phương pháp MITC3+, biến dạng cắt ngoài mặt phẳng được xấp xỉ lại thông qua giá trị biến dạng tính từ xấp xỉ chuyển vị (3.1) tại các điểm buộc như sau

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{\xi\xi} &= \frac{2}{3} \left(\gamma_{\xi\xi}^B - \frac{1}{2} \gamma_{\eta\xi}^B \right) + \frac{1}{3} (\gamma_{\xi\xi}^C + \gamma_{\eta\xi}^C) + \frac{1}{3} \hat{c} (3\eta - 1) \\ \hat{\gamma}_{\eta\xi} &= \frac{2}{3} \left(\gamma_{\xi\xi}^A - \frac{1}{2} \gamma_{\eta\xi}^A \right) + \frac{1}{3} (\gamma_{\xi\xi}^C + \gamma_{\eta\xi}^C) + \frac{1}{3} \hat{c} (3\xi - 1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

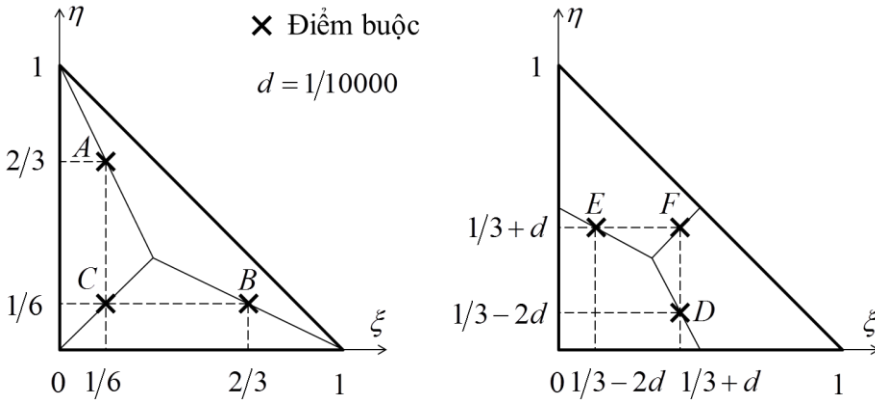
$$\text{Với } \hat{c} = (\gamma_{\xi\xi}^F - \gamma_{\eta\xi}^D) - (\gamma_{\eta\xi}^F + \gamma_{\eta\xi}^E)$$

Trong đó, $\hat{\gamma}_{\xi\xi}, \hat{\gamma}_{\eta\xi}$ là biến dạng cắt ngoài mặt phẳng trong hệ tọa độ tự nhiên và

$\gamma_{\xi\xi}^A, \gamma_{\eta\xi}^A, \gamma_{\xi\xi}^B, \gamma_{\eta\xi}^B, \gamma_{\xi\xi}^C, \gamma_{\eta\xi}^C, \gamma_{\xi\xi}^D, \gamma_{\eta\xi}^D, \gamma_{\xi\xi}^E, \gamma_{\eta\xi}^E, \gamma_{\xi\xi}^F, \gamma_{\eta\xi}^F$ là các biến dạng cắt ngoài mặt phẳng trong hệ tọa độ tự nhiên tính tại các điểm buộc A, B, C, D, E, F có vị trí và tọa độ như Hình 3.1 và Bảng 3.1.

Từ quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị tính tại các điểm buộc vào (3.11) và chuyển giá trị biến dạng từ hệ tọa độ tự nhiên (ξ, η, ζ) sang hệ tọa độ (x, y, z) , ta có thể rút ra quan hệ giữa biến dạng cắt ngoài mặt phẳng và tọa độ nút phần tử như sau

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s = \begin{bmatrix} \hat{\gamma}_{xz} & \hat{\gamma}_{yz} \end{bmatrix}^T = \sum_{i=1}^4 \hat{\mathbf{B}}_i^{s0} \mathbf{d}_i \quad (3.12)$$



Hình 3.1: Vị trí các điểm buộc của phần tử MITC3+ [20]

Bảng 3.1: Tọa độ các điểm buộc của phần tử MITC3+ với $d = 1/10000$ [20]

Điểm buộc	ξ	η
A	1/6	2/3
B	2/3	1/6
C	1/6	1/6
D	$1/3 + d$	$1/3 - 2d$
E	$1/3 - 2d$	$1/3 + d$
F	$1/3 + d$	$1/3 + d$

Dạng yếu của điều kiện cân bằng trên mặt trung bình tấm FGM chịu tác dụng của tải trọng phân bố p và nhiệt độ được viết [49]

$$\int_{\Omega} \delta \left[\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \quad \boldsymbol{\kappa}_1^T \quad \boldsymbol{\kappa}_2^T \right] \bar{\mathbf{D}} \left[\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \quad \boldsymbol{\kappa}_1^T \quad \boldsymbol{\kappa}_2^T \right]^T d\Omega + \int_{\Omega} \delta \left[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^T \quad \boldsymbol{\kappa}_s^T \right] \bar{\mathbf{D}}^s \left[\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^T \quad \boldsymbol{\kappa}_s^T \right]^T d\Omega = \int_{\Omega} \delta w p d\Omega + \int_{\Omega} \delta \left[\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \quad \boldsymbol{\kappa}_1^T \quad \boldsymbol{\kappa}_2^T \right] \left[\mathbf{N}^{thT} \quad \mathbf{M}^{thT} \quad \mathbf{P}^{thT} \right]^T d\Omega \quad (3.13)$$

Trong đó, $\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} \end{bmatrix}$ (3.14)

$$\bar{\mathbf{D}}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^s & \mathbf{B}^s \\ \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Và Ω là diện tích mặt trung bình của tấm.

Thế các quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị vào phương trình dạng yếu (3.13), ta được phương trình cân bằng rời rạc

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F} \quad (3.16)$$

Trong đó, \mathbf{K} là ma trận độ cứng kết cấu được lắp ghép từ các ma trận độ cứng phần tử

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^T \bar{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^{sT} \bar{\mathbf{D}}^s \mathbf{B}_j^s d\Omega \quad (3.17)$$

Với Ω_e là diện tích phần tử và

$$\mathbf{B}_i = \left[\mathbf{B}_i^{mT} \quad \mathbf{B}_i^{b1T} \quad \mathbf{B}_i^{b2T} \right]^T; \quad \mathbf{B}_i^s = \left[\hat{\mathbf{B}}_i^{s0T} \quad \hat{\mathbf{B}}_i^{s1T} \right]^T \quad (3.18)$$

\mathbf{F} là véc-tơ lực do tải trọng của kết cấu được lắp ghép từ véc-tơ tải trọng của phần tử

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Omega_e} \left[0 \quad 0 \quad N_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T p d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^T \left[\mathbf{N}^{thT} \quad \mathbf{M}^{thT} \quad \mathbf{P}^{thT} \right]^T d\Omega \quad (3.19)$$

\mathbf{d} là véc-tơ nút của toàn bộ kết cấu. Nếu nút i là đỉnh tam giác của phần tử thì $\mathbf{d}_i = [u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]^T$ và nếu nút i là nút nội ở trọng tâm tam giác phần tử thì $\mathbf{d}_i = [u_{0i} \quad v_{0i} \quad 0 \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]^T$.

3.2 Công thức phần tử hữu hạn tron (CS-MITC3+ cho tấm FGM

Trong phần này, biến dạng trong mặt phẳng của phần tử MITC3+ được làm tron trên miền làm tron Ω_c . Miền làm tron Ω_c là các miền con $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ của phần tử được tạo ra bằng cách nối các nút đỉnh với nút nội của phần tử như Hình 3.2.

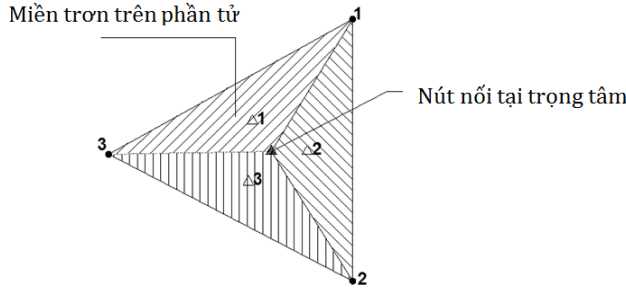
Theo phương pháp PTHH tron trên miền phần tử (CS), các trường biến dạng được làm tron như sau [22]

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d\Omega; \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_1 = \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\kappa}_1 d\Omega; \quad (3.20)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_2 = \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\kappa}_2 d\Omega$$

Trong đó, A_c là diện tích của miền làm tròn Ω_c .

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{B}_i^{b2} d\Omega = \sum_{k=1}^3 c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & 0 & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma \\ 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{b2} \int_{\Omega_c} \mathbf{B}_i^{b1} d\Omega = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{b1} \quad (3.23)$$



Hình 3.2: Miền làm tròn là các miền con ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$) của phần tử được tạo ra bằng cách nối 2 nút đỉnh và nút nối tại trọng tâm của phần tử tam giác

Thế các quan hệ giữa biên dạng và chuyển vị cho bởi (3.3) vào biên dạng tron (3.20), ta được

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 &= \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^m \mathbf{d}_i d\Omega = \frac{1}{A_c} \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_c} \mathbf{B}_i^m d\Omega \mathbf{d}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_1 &= \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^{b1} \mathbf{d}_i d\Omega = \frac{1}{A_c} \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_c} \mathbf{B}_i^{b1} d\Omega \mathbf{d}_i \\ \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_2 &= \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^{b2} \mathbf{d}_i d\Omega = \frac{1}{A_c} \sum_{i=1}^4 \int_{\Omega_c} \mathbf{B}_i^{b2} d\Omega \mathbf{d}_i \end{aligned} \quad (3.21)$$

Theo định lý Green, ta có

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma_c} N_i n_x d\Gamma; \quad \int_{\Omega_c} \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma_c} N_i n_y d\Gamma \quad (3.22)$$

Trong đó, Γ_c là biên của miền làm tròn Ω_c ; n_x và n_y lần lượt là hình chiếu

theo phương x và y của véc-tơ \mathbf{n} pháp tuyến với biên Γ_c .

Áp dụng (3.22) vào (3.6), (3.7) và (3.8), ta được

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{B}_i^m d\Omega = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^m \quad (3.23)$$

$$\int_{\Omega_c} \mathbf{B}_i^{b1} d\Omega = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_x d\Gamma & \int_{l_k} N_i n_y d\Gamma & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{b1} \quad (3.24)$$

Các tích phân trong (3.23), (3.24) và (3.25) được xác định chính xác bằng cách dùng tích phân Gauss 2 điểm Gauss.

Thế (3.23), (3.24) và (3.25) vào (3.21), quan hệ giữa biên dạng tron và chuyển vị nút phần tử được viết lại

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \frac{1}{A_c} \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^m \mathbf{d}_i; \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_1 = \frac{1}{A_c} \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{b1} \mathbf{d}_i; \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_2 = \frac{1}{A_c} \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{b2} \mathbf{d}_i \quad (3.26)$$

Do đó, dạng yếu của phương trình cân bằng (3.13) được viết dưới dạng biên dạng tron như sau

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^T \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_1^T \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_2^T] \bar{\mathbf{D}} [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0^T \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_1^T \quad \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_2^T]^T d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \delta [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^T \quad \boldsymbol{\kappa}_s^T] \bar{\mathbf{D}}^s [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^T \quad \boldsymbol{\kappa}_s^T]^T d\Omega \\ & = \int_{\Omega} \delta w p d\Omega + \int_{\Omega} \delta [\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \quad \boldsymbol{\kappa}_1^T \quad \boldsymbol{\kappa}_2^T] [\mathbf{N}^{thT} \quad \mathbf{M}^{thT} \quad \mathbf{P}^{thT}]^T d\Omega \end{aligned} \quad (3.27)$$

Hoặc phương trình cân bằng rời rạc PTHH có dạng

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (3.28)$$

Trong đó, $\tilde{\mathbf{K}}$ là ma trận độ cứng kết cấu xác định từ ma trận độ cứng phần tử được làm trơn

$$\tilde{\mathbf{k}}_{ij} = A_e \sum_{SC=1}^3 \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^T \bar{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{B}}_{j,SC} + \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^{sT} \bar{\mathbf{D}}^s \mathbf{B}_j^s d\Omega \quad (3.29)$$

Trong đó,

$$\tilde{\mathbf{B}}_{i,SC} = \left[\tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{mT} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{b1T} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{i,SC}^{b2T} \right]^T \quad (3.30)$$

Ma trận độ cứng phần tử cho bởi (3.29) liên quan các bậc tự do của nút đỉnh và nút nổi phần tử, trong đó độ võng tại nút nổi $w_{04} = 0$. Để thuận tiện cho việc lắp ghép ma trận độ cứng phần tử vào ma trận độ cứng kết cấu, các chuyển vị của nút nổi sẽ được tính theo các chuyển vị của nút đỉnh bằng phương pháp nén tĩnh như sau

$$\tilde{\mathbf{k}}_e \mathbf{d}_e = \mathbf{f}_e \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{k}}_e^{11} & \tilde{\mathbf{k}}_e^{12} \\ \tilde{\mathbf{k}}_e^{21} & \tilde{\mathbf{k}}_e^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}_e \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{k}}_e^{11} \bar{\mathbf{d}}_e + \tilde{\mathbf{k}}_e^{12} \mathbf{d}_4 = \bar{\mathbf{f}}_e \quad (*) \\ \tilde{\mathbf{k}}_e^{21} \bar{\mathbf{d}}_e + \tilde{\mathbf{k}}_e^{22} \mathbf{d}_4 = \mathbf{0} \quad (**) \end{cases}$$

$$\text{Từ (**)} \text{ suy ra } \mathbf{d}_4 = -(\tilde{\mathbf{k}}_e^{22})^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_e^{21} \bar{\mathbf{d}}_e \quad (3.32)$$

Và thế vào (*), ta có

$$\left(\tilde{\mathbf{k}}_e^{11} - \tilde{\mathbf{k}}_e^{12} (\tilde{\mathbf{k}}_e^{22})^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_e^{21} \right) \bar{\mathbf{d}}_e = \bar{\mathbf{f}}_e \Leftrightarrow \bar{\mathbf{k}}_e \bar{\mathbf{d}}_e = \bar{\mathbf{f}}_e \quad (3.33)$$

$$\text{Trong đó, } \bar{\mathbf{k}}_e = \tilde{\mathbf{k}}_e^{11} - \tilde{\mathbf{k}}_e^{12} (\tilde{\mathbf{k}}_e^{22})^{-1} \tilde{\mathbf{k}}_e^{21} \quad (3.34)$$

Với $\tilde{\mathbf{k}}_e^{11}$ là các thành phần của ma trận \mathbf{k}_e liên quan bậc tự do tại nút đỉnh tam giác của phần tử $\bar{\mathbf{d}}_e = [\mathbf{d}_1^T \quad \mathbf{d}_2^T \quad \mathbf{d}_3^T]^T$ với $\mathbf{d}_i = [u_{0i} \quad v_{0i} \quad w_{0i} \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]^T$, $i = 1, 2, 3$; $\tilde{\mathbf{k}}_e^{22}$ liên quan các bậc tự do của nút nổi $\mathbf{d}_4 = [u_{04} \quad v_{04} \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \quad \beta_{x4} \quad \beta_{y4}]^T$ sau khi đã loại bỏ hàng và cột ứng với bậc tự do w_{04} ; $\tilde{\mathbf{k}}_e^{12} = (\tilde{\mathbf{k}}_e^{21})^T$ là các thành phần độ cứng liên quan tương tác giữa bậc tự do nút ở đỉnh và nút nổi.

$$\bar{\mathbf{f}}_i = \int_{\Omega_e} [0 \quad 0 \quad N_i \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T p d\Omega$$

Và

$$+ \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^T \left[\mathbf{N}^{thT} \quad \mathbf{M}^{thT} \quad \mathbf{P}^{thT} \right]^T d\Omega, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.35)$$

Vậy ma trận độ cứng $\bar{\mathbf{k}}_e$ của phần tử CS-MITC3+ cho bởi công thức (3.34) có kích thước 21x21 chỉ liên quan đến các bậc tự do tại nút đỉnh tam giác của phần tử.

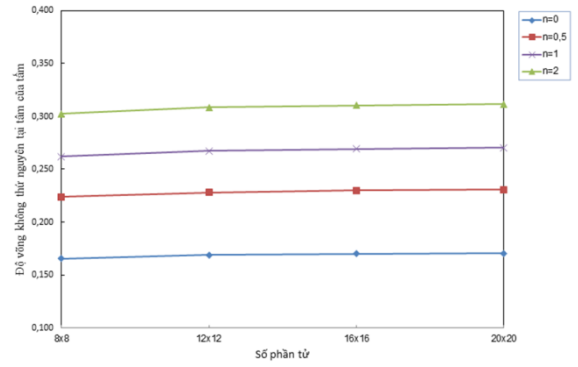
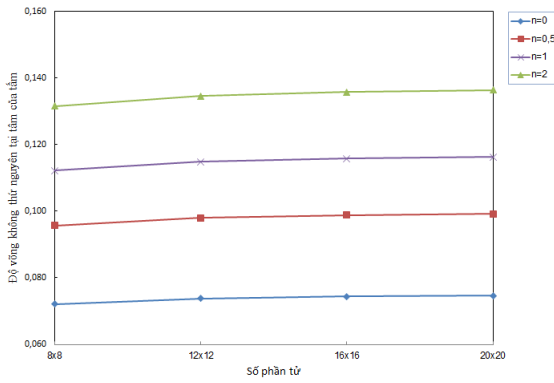
4. CÁC VÍ DỤ SỐ

Phần tử đề xuất CS-MITC3+ được sử dụng để tìm độ võng và ứng suất của một số bài toán tấm phân lớp chức năng chịu tải trọng cơ nhiệt. Các đặc tính vật liệu thành phần của vật liệu FGM được cho trong **Bảng 4.1**, với giả thiết là đặc tính vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ.

4.1 Tấm vuông Al/ZrO₂-1 chịu tải trọng phân bố đều

Xét tấm vuông Al/ZrO₂-1 có chiều dài cạnh L , dày h . Tấm chịu tải trọng phân bố đều p và có 4 biên tựa đơn hoặc ngàm. Khảo sát ứng xử của tấm với giá trị chỉ số phân bố vật liệu $n = 0, 0,5, 1, 2$.

Tấm được rời rạc bằng $2 \times N \times N$ phần tử tam giác CS-MITC3+ với N là số phần tử trên mỗi cạnh của tấm. Khi tỉ số $L/h = 5$, kết quả độ võng không thứ nguyên $\bar{w}_c = 100 w_c E_m h^3 / 12(1-\nu^2) p L^4$ tại tâm tấm ứng với $N = 8, 12, 16$ và 20 được cho trong **Bảng 4.2** và **Hình 4.1** ứng với các chỉ số phân bố vật liệu n khác nhau.



(a) Biên tựa đơn

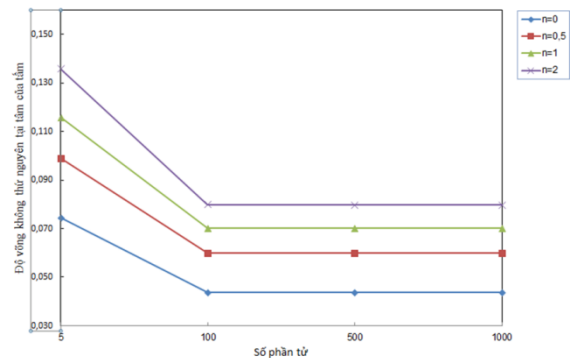
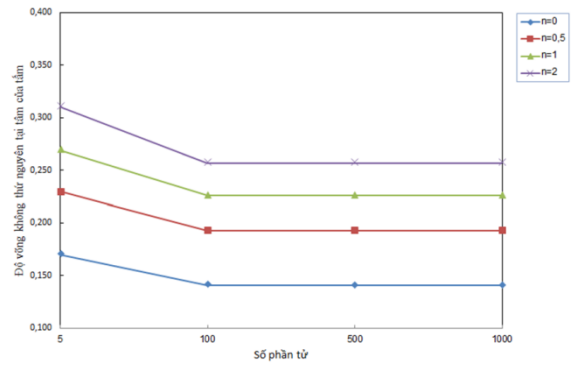
(b) Biên ngàm

Hình 4.1: Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm Al/ZrO₂-1 khi $L/h = 5$ với các cách chia lưới và n khác nhau

Từ Bảng 4.2, ta nhận thấy rằng, kết quả độ võng tại tâm tấm đối với bài toán tấm vuông FGM Al/ZrO₂-1 chịu tải trọng phân bố đều khi $L/h = 5$ của phần tử CS-MITC3+ cũng tương tự với kết quả tham khảo cho bởi các phần tử hoặc phương pháp khác, tuy nhiên không tốt bằng phần tử ES-MITC3. Từ Hình 4.1 cho thấy độ võng tại tâm tấm thay đổi khá nhiều khi chỉ số phân bố vật liệu n thay đổi.

Để đánh giá khả năng khắc phục hiện tượng khóa cắt của phần tử CS-MITC3+, chúng ta sẽ giải bài toán với chiều dày của tấm giảm dần ứng với $L/h = 5, 100, 500$ và 1000 . Kết quả thu được trình bày trong Bảng 4.1 và Hình 4.2 với hệ lưới $2 \times N \times N = 2 \times 16 \times 16$.

Bảng 4.1: Độ võng không thứ nguyên $\bar{w}_c = 100w_c E_m h^3 / 12(1-\nu^2) pL^4$ tại tâm tấm Al/ZrO₂-1 khi $L/h = 5, 100, 500$ và 1000



(a) Biên tựa đơn

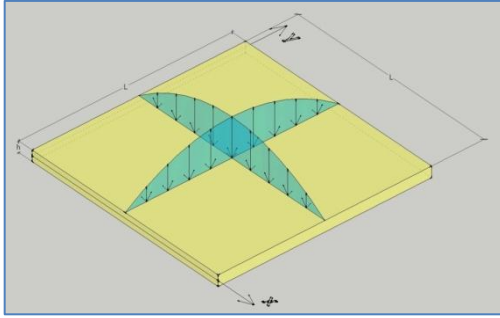
(b) Biên ngàm

Hình 4.2: Độ võng không thứ nguyên tại tâm tấm Al/ZrO₂-1 khi $L/h = 5, 100, 500$ và 1000 ứng với các cách chia lưới và n khác nhau

Từ Bảng 4.1 và Hình 4.2, ta thấy kết quả về độ võng tương đối tại tâm tấm không có sự thay đổi đột biến giảm dần khi chiều dày của tấm mỏng dần. Điều này chứng tỏ phần tử CS-MITC3+ đã khắc phục hiện tượng khóa cắt.

4.2 Tấm vuông Al/Al₂O₃ chịu tải trọng hình sin

Trong ví dụ này, ta xét tấm vuông vật liệu FGM loại Al/Al₂O₃ với luật phân bố vật liệu $n = 1, 2, 4, 8$. Tấm có kích thước cạnh L , bề dày tấm h với tỉ số $L/h = 10$. Tấm tựa đơn 4 cạnh và chịu tải trọng hình sin với dạng $p \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L)$ với $p = 1$ tác dụng ở mặt trên của tấm như Hình 4.3.



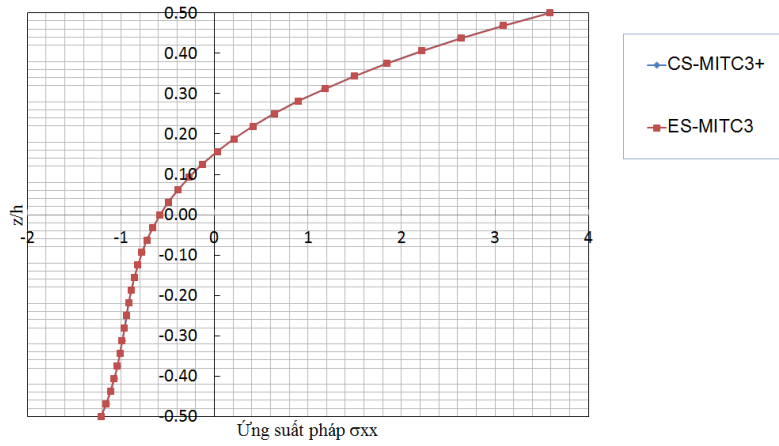
Hình 4.3: Tấm vuông Al/Al₂O₃ tựa đơn 4 cạnh và chịu tải trọng hình sin $p \sin(\pi x/L) \sin(\pi y/L)$

Để so sánh kết quả cho bởi phần tử CS-MITC3+ với các kết quả nghiên cứu khác, các giá trị về độ võng và ứng suất không thứ nguyên sau được sử dụng

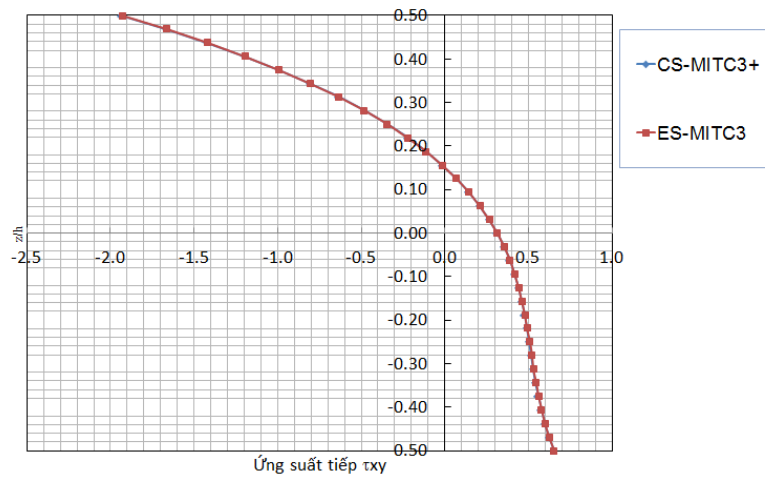
$$\bar{w}_c = \frac{100w_c E_m h^3}{12(1-\nu^2)pL^4}$$

$$\bar{\sigma}_x(z) = \frac{h}{pL} \sigma_x\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2}, z\right); \quad \bar{\tau}_{xy}(z) = \frac{h}{pL} \tau_{xy}(0, 0, z);$$

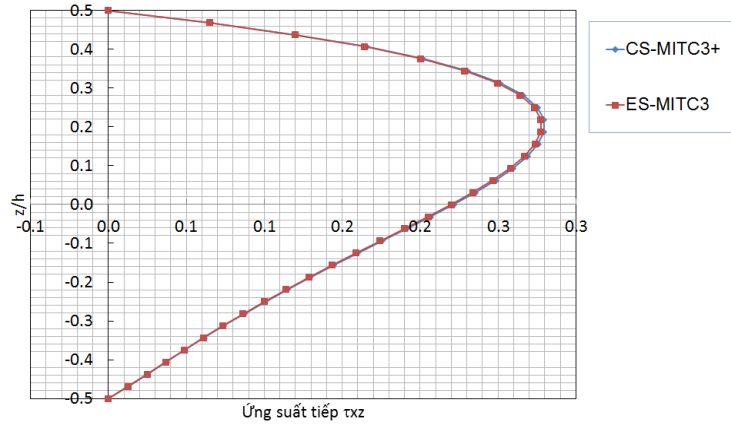
$$\bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{pL} \tau_{xz}\left(0, \frac{L}{2}, z\right)$$



(a) $\bar{\sigma}_x$



(b) $\bar{\tau}_{xy}$



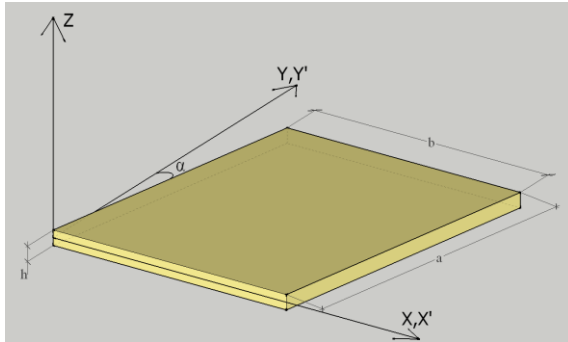
(c) $\bar{\tau}_{xz}$

Hình 4.4: So sánh sự phân bố các thành phần ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày tấm Al/Al₂O₃ tựa đơn chịu tải trọng hình sin khi $L/h = 10$ cho bởi phần tử CS-MITC3+ và ES-MITC3

Sử dụng lưới $2 \times N \times N$ với $N = 24$, ta được kết quả về độ võng tại tâm tấm và các thành phần ứng suất không thứ nguyên cho trong Bảng 4.4, Bảng 4.5 và Hình 4.4 trình bày kết quả sự phân bố các thành phần ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{xz}$ cho bởi phần tử CS-MITC3+ và phần tử ES-MITC3 [46].

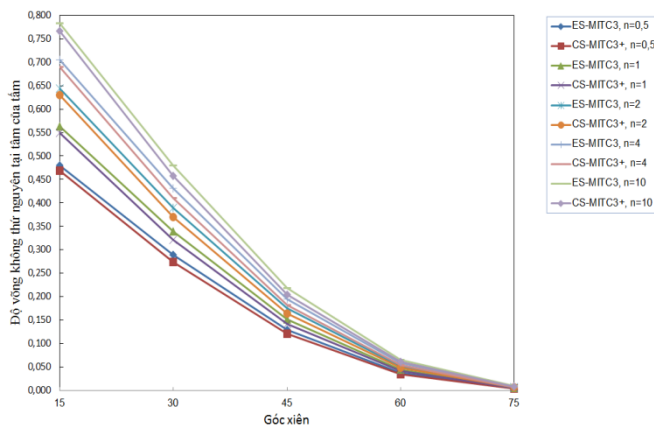
Trong ví dụ này, ta thấy kết quả thu được của phần tử CS-MITC3+ cũng tiệm cận với các phần tử khác. Mặt khác, qua biểu đồ ứng suất cho thấy sự liên tục xuyên suốt chiều dày tấm, điều đó cho thấy không có hiện tượng tập trung ứng suất, đây là ưu điểm của tấm FGM so với vật liệu composite thông thường.

4.3 Tấm xiên Al/ZrO₂-1 liên kết góitựa đơn chịu tải phân bố đều



Hình 4.5: Tấm xiên Al/ZrO₂-1 tựa đơn 4 cạnh và chịu tải trọng phân bố đều

Xét tấm xiên hình bình hành Al/ZrO₂-1 có cạnh $a = b = L$, liên kết góitựa đơn 4 cạnh và chịu tải trọng phân bố đều $p = 1$. Tấm có 2 cạnh song song trục x , 2 cạnh còn lại tạo với trục y một góc xiên α như Hình 4.5. Tấm có chiều dày h với tỉ số $L/h = 10$.

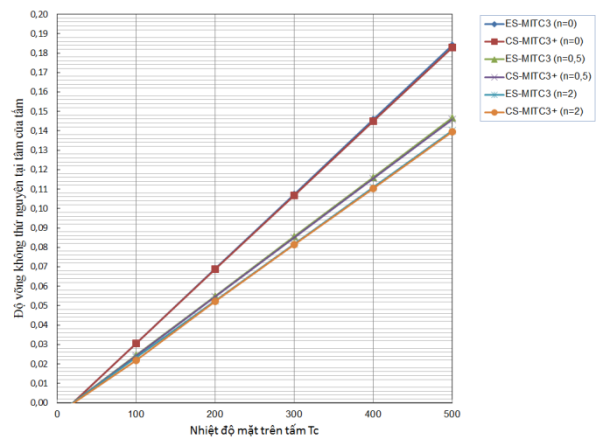


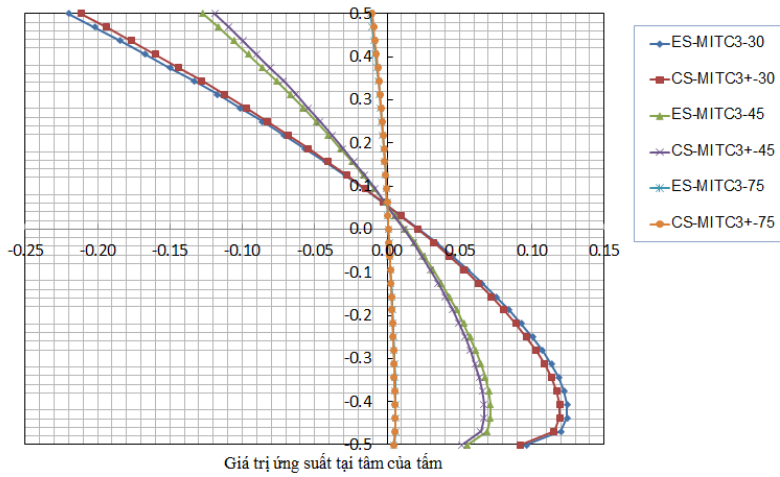
Sử dụng lưới tam giác 3 nút $2 \times 12 \times 12$ phần tử, kết quả về độ võng không thứ nguyên $\bar{w}_c = 100w_c E_m h^3 / 12(1-\nu^2) p L^4$ tại tâm ứng với góc xiên $\alpha = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ và hệ số $n = 0,5, 1, 2, 4, 10$ được trình bày trong **Error! Reference source not found.** và **Error! Reference source not found.** Hình 4.6 biểu diễn sự phân bố ứng suất pháp không thứ nguyên $\bar{\sigma}_x(z) = (h/pL)\sigma_x(L/2, L/2, z)$ theo chiều dày tấm cho bởi phần tử CS-MITC3+ và ES-MITC3 [46].

Trong bài toán tấm xiên Al/ZrO₂-1 liên kết góitựa đơn chịu tải phân bố đều, phần tử CS-MITC3+ cho kết quả về độ võng và ứng suất tuy không tốt bằng nhưng cũng khá tiệm cận kết quả cho bởi phần tử ES-MITC3 [46]. Ngoài ra, khi góc xiên α của tấm tăng dần thì các thành phần phân độ võng và ứng suất trong tấm giảm đáng kể.

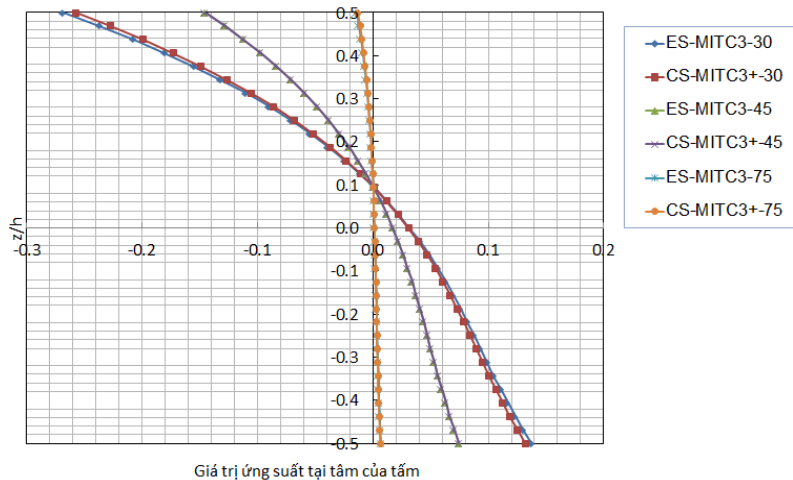
4.4 Tấm vuông Al/ZrO₂-1 chịu tải trọng nhiệt

Xét tấm vuông Al/ZrO₂-1 với kích thước cạnh $L = 0,2$ m và chiều dày $h = 0,01$ m. Tấm tựa đơn 4 cạnh và chịu tác dụng của tải trọng nhiệt độ có nhiệt độ mặt dưới $T_m = 20^\circ\text{C}$ (nhiệt độ phòng) và nhiệt độ mặt trên tấm T_c biến thiên từ $0^\circ\text{C} \div 500^\circ\text{C}$.





(a) $n = 0,5$



(b) $n = 2$

Hình 4.6: Sự phân bố ứng suất không thứ nguyên $\bar{\sigma}_x(z) = (h/pL)\sigma_x(L/2, L/2, z)$ theo chiều dày tấm xiên Al/ZrO₂-1 với $\alpha = 30^\circ, 45^\circ, 75^\circ$ và (a) $n = 0,5$ và (b) $n = 2$

Với lưới tam giác đều mỗi cạnh tấm chia 12 phần tử, kết quả về độ võng tại tâm tấm chịu tác dụng nhiệt độ tại mặt trên tấm thay đổi $T_c = 0^\circ, 100^\circ, 200^\circ, 300^\circ, 400^\circ, 500^\circ$ với các hệ số $n = 0, 0,5, 2$ cho bởi phần tử CS-MITC3+ và ES-MITC3 [46] được trình bày trong Bảng 4.7 và **Error! Reference source not found.** Kết quả tính toán số cũng cho thấy phần tử CS-MITC3+ và phần tử ES-MITC3 cho kết quả về độ võng của tấm FGM chịu tải trọng nhiệt là gần như nhau. Ngoài ra, ta thấy rõ ràng tấm FGM có khả năng kháng nhiệt độ rất tốt, độ võng lên của tấm biến thiên một cách đều khi nhiệt độ mặt trên của tấm tăng dần.

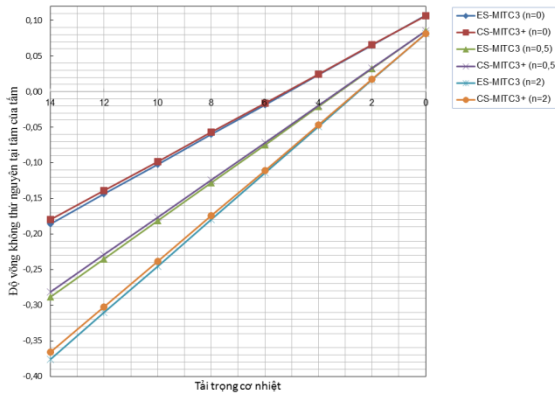
4.5 Tấm vuông Al/ZrO₂-1 chịu tải trọng cơ nhiệt

Xét tấm vuông vật liệu FGM Al/ZrO₂-1 với kích thước cạnh $L = 0,2$ m và chiều dày $h = 0,01$ m. Tấm tựa đơn 4 cạnh và nhiệt độ mặt dưới của tấm $T_m = 20^\circ\text{C}$ (nhiệt độ phòng) và nhiệt độ mặt trên tấm $T_c = 300^\circ\text{C}$. Ngoài ra, tấm còn chịu tác dụng của tải trọng phân bố đều $\bar{P} = pL^4 / (E_m h^4)$.

Với lưới $2 \times 12 \times 12$ phần tử, kết quả về độ võng không thứ nguyên w_c/h tại tâm tấm khi tấm chịu tác dụng của tải trọng cơ p thay đổi từ -14 đến 0 được thể hiện trong Bảng 4.8 và Hình 4.9. So sánh với kết quả cho bởi phần tử ES-MITC3 [46], Bảng 4.8 và Hình 4.9 cho thấy phần tử CS-MITC3+ cho kết quả không tốt bằng phần tử ES-MITC3 nhưng nhìn

chung cũng khá tiệm cận. Qua kết quả phân tích chuyển vị của tấm FGM chịu tải trọng cơ nhiệt, ta thấy tấm FGM là sự kết hợp tốt về khả năng chịu lực tải trọng cơ của kim loại cùng khả năng chịu tải trọng nhiệt độ của ceramic.

Bảng 4.2: Độ võng tương đối w_c/h tại tâm tấm vuông Al/ZrO₂-1 tựa đơn 4 cạnh chịu tải nhiệt độ $T_m = 20^\circ\text{C}$, $T_c = 300^\circ\text{C}$ và tải trọng cơ p thay đổi



Hình 4.7: Sự thay đổi của độ võng tương đối w_c/h tại tâm tấm vuông Al/ZrO₂-1 tựa đơn 4 cạnh chịu tải trọng nhiệt và tải trọng cơ p thay đổi ứng với $n = 0, 0,5, 2$

5. KẾT LUẬN

Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc cao kết hợp kỹ thuật khử khóa cắt của phần tử MITC3+, cùng kỹ thuật làm trơn trên cạnh ES-FEM luận văn đã xây dựng phần tử CS-MITC3+ dùng phân tích tĩnh cho tấm FGM.

Kết quả số cho thấy phần tử đề xuất có khả năng hội tụ đến lời giải chính xác khi số phần tử tăng dần. Phần tử đề xuất có khả năng khử hiện tượng khóa cắt tốt. Do sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc 3, phần tử CS-MITC3+ có khả năng biểu diễn sự liên tục của các thành phần ứng suất theo chiều dày tấm phù hợp với ứng xử thực tế của tấm FGM. Kết quả số cũng cho thấy phần tử đề xuất cho kết quả tương tự với các phương pháp tham khảo khi phân tích

các bài toán tấm FGM chịu tải trọng cơ, tải trọng nhiệt hay tải trọng cơ nhiệt kết hợp.

Kết quả phân tích một số bài toán cơ nhiệt cho thấy được tính hiệu quả của vật liệu FGM khi sử dụng trong các kết cấu chịu nhiệt độ và tải trọng cao.

Phần tử đề xuất CS-MITC3+ có thể phát triển để phân tích các bài toán động lực học của tấm phân lớp chức năng. Ngoài ra, bên cạnh lý thuyết biến dạng cắt bậc 3, phần tử CS-MITC3+ cũng có thể phát triển cho các lý thuyết

biến dạng cắt bậc cao khác nhằm đánh giá hiệu quả về độ chính xác và chi phí tính toán khi phân tích các bài toán tấm phân lớp chức năng khác nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. Koizumi, “FGM activities in Japan,” *Composites Part B: Engineering*, vol. 28, no. 1, pp. 1–4, Jan. 1997.
- [2] S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition. McGraw-Hill, 1959.
- [3] E. Reissner, “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, pp. A68–A77, 1945.
- [4] R. D. Mindlin, “Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates,” *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pp. 31–38, 1951.
- [5] J. N. Reddy, “A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates,” *J. Appl. Mech.*, vol. 51, no. 4, pp. 745–752, Dec. 1984.
- [6] V.-H. Nguyen, T.-K. Nguyen, H.-T. Thai, and T. P. Vo, “A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates,” *Composites Part B: Engineering*, vol. 66, pp. 233–246, Nov. 2014.
- [7] T. N. Nguyen, C. H. Thai, and H. Nguyen-Xuan, “On the general framework of high order shear deformation theories for laminated composite plate structures: A novel unified approach,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 110, pp. 242–255, May 2016.
- [8] D. L. Logan, *A first course in the Finite Element Method*, Fourth. Thomson.
- [9] S. Ahmad, B. M. Irons, and O. C. Zienkiewicz, “Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 2, no. 3, pp. 419–451, Jul. 1970.
- [10] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. M. Too, “Reduced integration technique in general analysis of plates and shells,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 3, no. 2, pp. 275–290, Apr. 1971.
- [11] T. J. R. Hughes, M. Cohen, and M. Haroun, “Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 46, no. 1, pp. 203–222, Mar. 1978.
- [12] T. Belytschko, B. L. Wong, and H. Stolarski, “Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 28, no. 2, pp. 385–414, Feb. 1989.
- [13] U. Andelfinger and E. Ramm, “EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 36, no. 8, pp. 1311–1337, Apr. 1993.
- [14] A. Tessler and T. J. R. Hughes, “A three-node Mindlin plate element with improved transverse shear,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 50, no. 1, pp. 71–101, Jul. 1985.
- [15] K.-U. Bletzinger, M. Bischoff, and E. Ramm, “A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements,” *Computers & Structures*, vol. 75, no. 3, pp. 321–334, Apr. 2000.
- [16] K.-J. Bathe and E. N. Dvorkin, “A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 21, no. 2, pp. 367–383, Feb. 1985.
- [17] K.-J. Bathe, F. Brezzi, and S. W. Cho, “The MITC7 and MITC9 Plate bending elements,” *Computers & Structures*, vol. 32, no. 3, pp. 797–814, Jan. 1989.
- [18] M. L. Buclelem and K.-J. Bathe, “Higher-order MITC general shell elements,” *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 36, no. 21, pp. 3729–3754, Nov. 1993.

- [19]P.-S. Lee and K.-J. Bathe, “Development of MITC isotropic triangular shell finite elements,” *Computers & Structures*, vol. 82, no. 11–12, pp. 945–962, May 2004.
- [20]Y. Lee, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, “The MITC3+ shell element and its performance,” *Computers & Structures*, vol. 138, pp. 12–23, Jul. 2014.
- [21]Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, “A new MITC4+ shell element,” *Computers & Structures*, vol. 182, pp. 404–418, Apr. 2017.
- [22]G. R. Liu and T. Nguyen-Thoi, *Smoothed Finite Element Methods*. CRC Press, 2010.
- [23]G. R. Liu, K. Y. Dai, and T. T. Nguyen, “A Smoothed Finite Element Method for Mechanics Problems,” *Comput Mech*, vol. 39, no. 6, pp. 859–877, May 2007.
- [24]N. Nguyen-Thanh, T. Rabczuk, H. Nguyen-Xuan, and S. P. A. Bordas, “A smoothed finite element method for shell analysis,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 198, no. 2, pp. 165–177, Dec. 2008.
- [25]H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, S. Bordas, and J. F. Deboonnie, “A smoothed finite element method for plate analysis,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, no. 13–16, pp. 1184–1203, Feb. 2008.
- [26]X. Y. Cui, G. R. Liu, G. Y. Li, G. Y. Zhang, and G. Y. Sun, “Analysis of elastic–plastic problems using edge-based smoothed finite element method,” *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 86, no. 10, pp. 711–718, Oct. 2009.
- [27]H. Nguyen-Xuan, G. R. Liu, C. Thai-Hoang, and T. Nguyen-Thoi, “An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 9–12, pp. 471–489, Jan. 2010.
- [28]H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, N. Nguyen-Thanh, T. Nguyen-Thoi, and S. Bordas, “A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates,” *Comput Mech*, vol. 46, no. 5, pp. 679–701, Oct. 2010.
- [29]H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. C. Vu-Do, “Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method,” *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 3019–3039, Oct. 2011.
- [30]C. Thai-Hoang, N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, and S. Bordas, “A cell — based smoothed finite element method for free vibration and buckling analysis of shells,” *KSCCE J Civ Eng*, vol. 15, no. 2, pp. 347–361, Jan. 2011.
- [31]T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and C. Thai-Hoang, “A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates,” *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 91, no. 7, pp. 705–741, Aug. 2012.
- [32]H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, C. H. Thai, and T. Nguyen-Thoi, “Analysis of functionally graded plates by an efficient finite element method with node-based strain smoothing,” *Thin-Walled Structures*, vol. 54, pp. 1–18, May 2012.
- [33]C. H. Thai, L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. Nguyen-Xuan, “Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 11, pp. 5657–5677, Nov. 2012.
- [34]T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, C. Thai-Hoang, and H. Nguyen-Xuan, “A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) using triangular elements for static and free vibration analyses of shell structures,” *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 74, pp. 32–45, Sep. 2013.

- [35]H. Nguyen-Xuan and G. R. Liu, “An edge-based smoothed finite element method softened with a bubble function (bES-FEM) for solid mechanics problems,” *Computers & Structures*, vol. 128, pp. 14–30, Nov. 2013.
- [36]P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, L. V. Tran, and H. Nguyen-Xuan, “A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) based on the C0-type higher-order shear deformation theory for static and free vibration analyses of functionally graded plates,” *Computational Materials Science*, vol. 79, pp. 857–872, Nov. 2013.
- [37]S. Natarajan, A. J. M. Ferreira, S. Bordas, E. Carrera, M. Cinefra, and A. M. Zenkour, “Analysis of Functionally Graded Material Plates Using Triangular Elements with Cell-Based Smoothed Discrete Shear Gap Method,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2014, pp. 1–13, Apr. 2014.
- [38]P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, H. Luong-Van, and Q. Lieu-Xuan, “Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using a cell-based smoothed three-node plate element (CS-MIN3) based on the C0-HSDT,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 270, pp. 15–36, Mar. 2014.
- [39]P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, and Q. Lieu-Xuan, “A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) based on the C0-type higher-order shear deformation for geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates,” *Computational Materials Science*, vol. 96, Part B, pp. 549–558, Jan. 2015.
- [40]L. V. Tran, T. Nguyen-Thoi, C. H. Thai, and H. Nguyen-Xuan, “An edge-based smoothed discrete shear gap method using the C0-type higher-order shear deformation theory for analysis of laminated composite plates,” *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 22, no. 4, pp. 248–268, Apr. 2015.
- [41]T. Châu Đình and D. Nguyễn Văn, “Phân tích tĩnh và dao động riêng tấm composite nhiều lớp bằng phần tử MITC3 có biến dạng được trung bình trên miền nút phần tử (NS-MITC3),” in *Tuyển tập công trình Hội nghị khoa học toàn quốc “Vật liệu và Kết cấu Composite: Cơ học, Công nghệ và Ứng dụng,”* Nha Trang, Vietnam, 2016, pp. 613–620.
- [42]T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, T. Chau-Dinh, T. P. Vo, and H. Nguyen-Xuan, “Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements,” *Composites Part B: Engineering*, vol. 107, pp. 162–173, Dec. 2016.
- [43]T. Chau-Dinh, Q. Nguyen-Duy, and H. Nguyen-Xuan, “Improvement on MITC3 plate finite element using edge-based strain smoothing enhancement for plate analysis,” *Acta Mech*, vol. 228, no. 6, pp. 2141–2163, Jun. 2017.
- [44]T. Chau-Dinh, T. Vo-Ngoc, and P. Nguyen-Hoang, “A cell-based smoothed three-node plate finite element with a bubble node for static analyses of both thin and thick plates,” *Vietnam Journal of Mechanics*, vol. 39, no. 3, pp. 229–243, Sep. 2017.
- [45]T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, and T. Chau-Dinh, “Cell- and node-based smoothing MITC3-finite elements for static and free vibration analysis of laminated composite and functionally graded plates,” *Int. J. Comput. Methods*, Apr. 2018.
- [46]H. Nguyen-Van, “Phân tích kết cấu tấm vật liệu phân lớp chức năng (FGMs) theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao dùng phần tử MITC3 được làm trơn trên cạnh,” Luận văn Thạc sĩ, Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM, 2017.
- [47]J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells - Theory and Analysis*, Second. CRC Press, 2004.

- [48]C. A. Shankara and N. G. R. Iyengar, “A C0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, no. 5, pp. 721–738, Apr. 1996.
- [49]K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*. Prentice Hall International, Inc., 1996.
- [50]D. F. Gilhooley, R. C. Batra, J. R. Xiao, M. A. McCarthy, and J. W. Gillespie Jr., “Analysis of thick functionally graded plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and MLPG method with radial basis functions,” *Composite Structures*, vol. 80, no. 4, pp. 539–552, Oct. 2007.
- [51]C.-P. Wu, K.-H. Chiu, and Y.-M. Wang, “RMVT-based meshless collocation and element-free Galerkin methods for the quasi-3D analysis of multilayered composite and FGM plates,” *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 923–943, Jan. 2011.
- [52]J. L. Mantari, A. S. Oktem, and C. Guedes Soares, “Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory,” *Composite Structures*, vol. 94, no. 2, pp. 714–723, Jan. 2012.
- [53]C.-P. Wu and H.-Y. Li, “An RMVT-based third-order shear deformation theory of multilayered functionally graded material plates,” *Composite Structures*, vol. 92, no. 10, pp. 2591–2605, Sep. 2010.
- [54]H.-T. Thai and S.-E. Kim, “A simple higher-order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates,” *Composite Structures*, vol. 96, pp. 165–173, Feb. 2013.

Thông tin liên hệ tác giả:

Họ tên: La Tuấn Minh

Đơn vị: Học viên cao học trường ĐHSPKT TPHCM

Điện thoại: (+84) 0913761474

Email: tuanminhbuild@gmail.com

BÀI BÁO KHOA HỌC

THỰC HIỆN CÔNG BỐ THEO QUY CHẾ ĐÀO TẠO THẠC SĨ

Bài báo khoa học của học viên

có xác nhận và đề xuất cho đăng của Giảng viên hướng dẫn



Bản tiếng Việt ©, TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HỒ CHÍ MINH và TÁC GIẢ

Bản quyền tác phẩm đã được bảo hộ bởi Luật xuất bản và Luật Sở hữu trí tuệ Việt Nam. Nghiêm cấm mọi hình thức xuất bản, sao chụp, phát tán nội dung khi chưa có sự đồng ý của tác giả và Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP. Hồ Chí Minh.

ĐỂ CÓ BÀI BÁO KHOA HỌC TỐT, CẦN CHUNG TAY BẢO VỆ TÁC QUYỀN!

Thực hiện theo MTCL & KHTHMTCL Năm học 2018-2019 của Thư viện Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh.