ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

Bài tập

TOÁN RỜI RẠC

Nâng cao

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Năm học 2007-2008

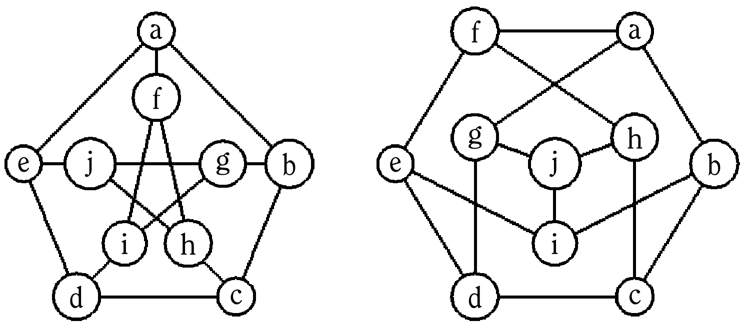
Chương 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

Bài 1.1 Trong một bữa tiệc, mọi người bắt tay nhau. Chứng minh rằng số người bắt tay với 1 số lẻ người khác là số chẵn.

Bài 1.2 Trong 1 giải đấu cờ theo thể đấu vòng tròn 1 lượt, chứng minh rằng tại mọi thời điểm của giải, luôn luôn có 2 đấu thủ có số ván đã thi đấu bằng nhau.

Bài 1.3 Một bữa tiệc có 6 người tham dự. Chứng minh rằng có 3 người quen nhau hoặc có 3 người không quen nhau.

Bài 1.4 Chứng minh 2 đồ thị trong Hình 1.17a và 1.17b đẳng cấu.

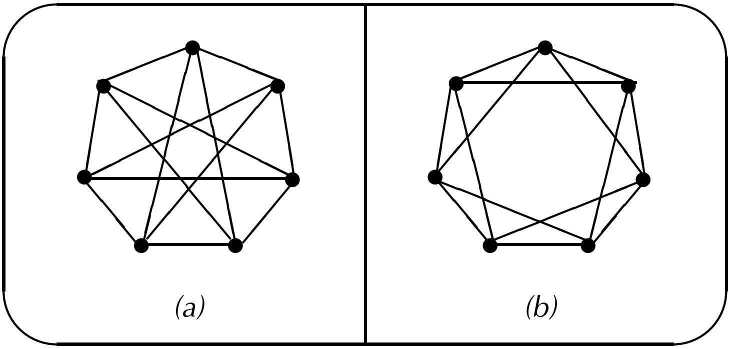


Hình 1.17a Hình 1.17b

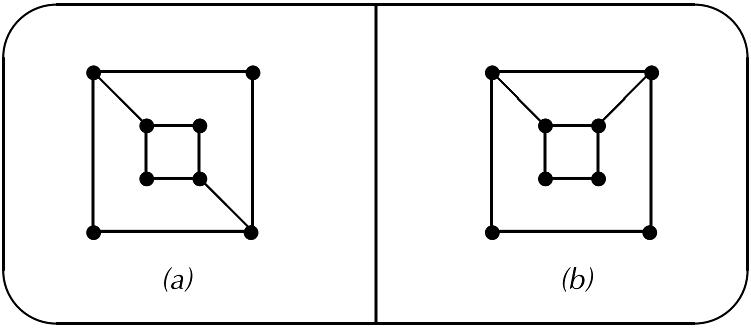
Bài 1.5 Chứng minh 2 đồ thị trong Hình 1.18a và 1.18b đẳng cấu.

Bài 1.6 Hai đồ thị trong Hình 1.19a và 1.19b có đẳng cấu không? Giải thích.

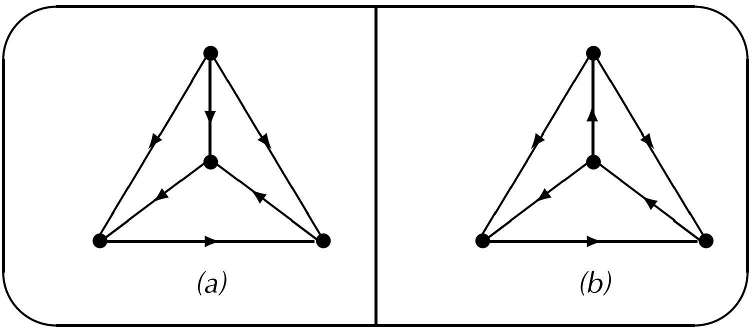
Bài 1.7 Xét tính đẳng cấu của hai đồ thị trong Hình 1.20a và 1.20b.



Hình 1.18



Hình 1.19



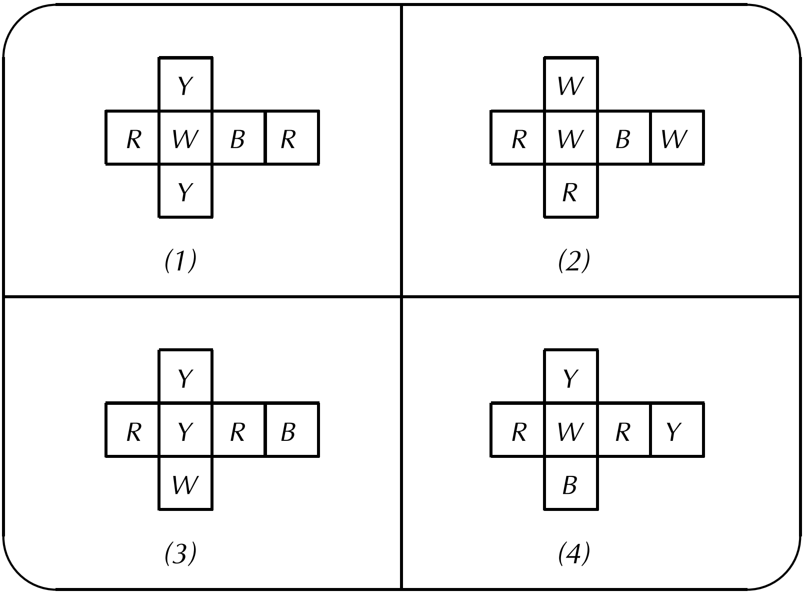
Hình 1.20

Bài 1.8 Một đơn đồ thị G được gọi là *tự bù* nếu $G \simeq \overline{G}$.

a) Chứng minh rằng nếu G tự bù thì số đỉnh của G là $4k$ hay $4k+1$, với k nguyên dương.

b) Tìm tất cả các đồ thị tự bù có 4 đỉnh và 5 đỉnh.

Bài 1.9 Giải bài toán instant insanity trong Hình 1.21.



Hình 1.21

Bài 1.10 Cho G là đồ thị đơn, không hướng. *Đồ thị đường* của G, ký hiệu $L(G)$, được xác định như sau: Mỗi cạnh của G là 1 đỉnh của $L(G)$, hai đỉnh của $L(G)$ kề nhau khi và chỉ khi hai cạnh tương ứng trong G kề nhau.

a) Chứng minh K_3 và $K_{1,3}$ có cùng đồ thị đường.

b) Tìm số cạnh của $L(G)$ theo bậc của các đỉnh trong G.

c) Chứng minh rằng: nếu G là k-đều thì $L(G)$ là $(2k-2)$-đều.

d) Tìm $L(K_5)$.

Bài 1.11 Bốn người bất kỳ trong số n người $(n \geq 4)$ đều có 1 người quen biết với 3 người còn lại. Chứng minh rằng có 1 người quen với tất cả $n-1$ người còn lại.

Bài 1.12 Cho $G = (X, E)$ là một đồ thị và $A \subset X$. Gọi k là số cạnh của G mà mỗi cạnh có đúng 1 đỉnh nằm trong A (1 đỉnh ở ngoài A) và $h$là số đỉnh bậc lẻ trong A. Chứng minh rằng tính chẵn lẻ của k và của h là như nhau.

Bài 1.13 Trong 1 giải thi đấu có n đội tham dự và đã có $n+1$ trận đấu được tiến hành. Chứng minh rằng có 1 đội đã thi đấu ít nhất 3 trận.

Bài 1.14 Cho $G = (X, E)$ là một đồ thị có hướng, cân bằng. Với $A \subset X$, chứng minh rằng số cung đến A bằng số cung rời khỏi A.

Bài 1.15 Cho $G = (X, E)$ là một đồ thị có hướng. Chứng minh rằng k là số chẵn với

$$k = \sum_{i=1}^{n} \left| d^{+}(i) - d^{-}(i) \right|.$$

Bài 1.16 Giả sử rằng, để giải quyết một vấn đề, các lập trình viên đưa ra những chương trình bằng ngôn ngữ Pascal khác nhau. Ta xét sự khác biệt của các chương trình này bằng một số tính chất nào đó. Chẳng hạn các tính chất của chương trình được xét đến là

1. Số dòng lệnh

2. Số lệnh GOTO

3. Số chương trình con

Ta có kết quả sau

Chương trình	Số dòng lệnh	Số lệnh GOTO	Số chương trình con
1	66	20	1
2	41	10	2
3	68	5	8
4	90	34	5
5	75	12	14

Đồ thị tương đồng là đồ thị được xây dựng như sau: Tập đỉnh là tập hợp các bộ thứ tự (p_1, p_2, p_3) với p_i là giá trị của tính chất i. Với $x = (p_1, p_2, p_3)$ và $y = (q_1, q_2, q_3)$, ta đặt

$$f(x, y) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + |p_3 - q_3|.$$

Với s cho trước, ta nối các đỉnh x, y bằng 1 cạnh nếu $f(x, y) < s$. Vẽ đồ thị tương đồng trong các trường hợp sau

a) $s = 25$

b) $s = 35$

c) $s = 50$.

Chương 2. ĐƯỜNG ĐI, CHU TRÌNH VÀ TẬP CẮT

Bài 2.1 Cho đồ thị G có m cạnh và n đỉnh. Chứng minh rằng, nếu $m < n$ thì G có 1 đỉnh treo hoặc đỉnh cô lập.

Bài 2.2 Cho đồ thị $G = (X, E)$ thỏa mãn điều kiện $\delta(G) \geq k \geq 2$, trong đó

$$\delta(G) = \min\{d(i) : \ i \in X\}.$$

Chứng minh rằng, nếu G đơn thì G có 1 chu trình sơ cấp với chiều dài $\geq k + 1$.

Bài 2.3 Cho đồ thị G có m cạnh và n đỉnh. Chứng minh rằng, nếu $m \geq n$ thì G có 1 chu trình.

Bài 2.4 Cho G là đồ thị liên thông. Chứng minh G có 2 đỉnh không là điểm khớp.

Bài 2.5 Cho G là đồ thị đơn gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Chứng minh rằng

$$n - p \leq m \leq \frac{1}{2}(n - p)(n - p + 1)$$

Suy ra rằng, nếu $2m > (n - 1)(n - 2)$ thì G liên thông.

Bài 2.6 Có $2k$ trạm điện thoại ($k > 0$), mỗi trạm nối trực tiếp với ít nhất k trạm khác. Chứng minh rằng bất kỳ 2 trạm nào cũng liên lạc được với nhau.

Bài 2.7 Cho $2k$ điểm trong mặt phẳng nằm trong những đường tròn, mỗi đường tròn chứa ít nhất k điểm. Chứng minh rằng giữa 2 điểm bất kỳ đều tồn tại một đường tròn chứa cả hai điểm đó.

Bài 2.8 Có bao nhiêu đồ thị đơn gồm 5 đỉnh và có 4 hoặc 6 cạnh?

Bài 2.9 Cho G là đồ thị đơn. Chứng minh rằng G hoặc $\overline{G}$ liên thông.

Bài 2.10 Cho G là đồ thị liên thông. Chứng minh rằng 2 đường đi sơ cấp dài nhất trong G có 1 đỉnh chung.

Bài 2.11 Cho G là đồ thị không khuyên và mỗi đỉnh đều có bậc ≥ 3. Chứng minh G có 1 chu trình đơn với độ dài chẵn.

Bài 2.12 Cho G đơn. Chứng minh rằng:

a) G là 2-liên thông nếu và chỉ nếu mọi cặp đỉnh đều ở trên 1 chu trình

b) $e(G) \geq 2$ nếu và chỉ nếu mọi cặp đỉnh đều có 2 đường đi nối chúng với nhau.

Bài 2.13 Chứng minh đồ thị G là lưỡng phân khi và chỉ khi mọi chu trình của G đều có độ dài chẵn.

Bài 2.14 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông và $i \in X$. Chứng minh rằng i là điểm khớp nếu và chỉ nếu có 2 đỉnh x, y sao cho mọi dây chuyền nối x và y đều qua i.

Bài 2.15 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông và $A, B \subset X$. Chứng minh rằng

$$\omega(A \Delta B) = \omega(A) \oplus \omega(B).$$

Bài 2.16 Cho G là đồ thị có hướng có $n = 2k + 1$ đỉnh và là k-đều. Chứng minh rằng:

a) G liên thông mạnh

b) G không tách được.

Bài 2.17 Chứng minh rằng tổng số dây chuyền có chiều dài từ 1 đến n trong đồ thị K_n (với $n > 2$) là

$$\frac{n(n-1)\left[(n-1)^n - 1\right]}{n-2}.$$

Bài 2.18 Chứng minh rằng số dây chuyền sơ cấp nối 2 đỉnh cho sẵn trong K_n là

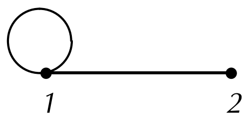
$$(n-2)!\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}.$$

Suy ra số dây chuyền sơ cấp trong K_n?

Bài 2.19 Gọi h là số dây chuyền sơ cấp trong K_n. Chứng minh rằng

$$n! \leq h \leq 3n!.$$

Bài 2.20 Xét đồ thị G trong Hình 2.9 sau đây



Hình 2.9

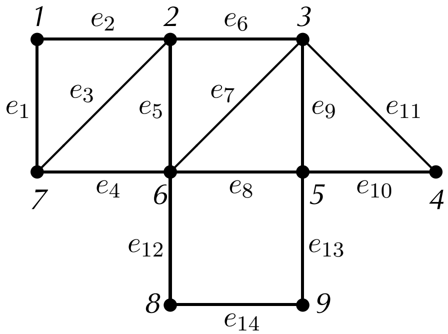
Chứng minh rằng số chu trình có chiều dài k qua đỉnh 1 là số Fibonacci f_k.

Bài 2.21 Cho G là đồ thị được biểu diễn trong Hình 2.10, xét xem trường hợp nào $\omega(A)$ là tập cắt? Nếu $\omega(A)$ không là tập cắt, viết $\omega(A)$ dưới dạng hội các tập cắt rời nhau.

a) $A = \{1, 2\}$.

b) $A = \{3, 6\}$

c) $A = \{3, 5, 6\}$



Hình 2.10

Bài 2.22 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông và $U \subset E$. Giả sử rằng số cạnh chung của U và một tập cắt bất kỳ đều là số chẵn. Chứng minh rằng U là một chu trình.

Chương 3. CÂY

Bài 3.1 Vẽ tất cả các cây (không đẳng cấu) gồm 5 đỉnh.

Bài 3.2 Cho 2 cây $T_1 = (X_1, E_1), AT_2 = (X_2, E_2)$ với $m_i = |E_i|$ và $n_i = |X_i|$. Tính n_1, n_2, m_1 biết $m_1 = 17$ và $n_2 = 2n_1$.

Bài 3.3 Cho G là 1 rừng có 7 cây và 40 cạnh. Tìm số đỉnh của G.

Bài 3.4 Cho G là 1 rừng có 62 đỉnh và 51 cạnh. Tìm số cây của G.

Bài 3.5 Cho một ví dụ về một đồ thị có $m = n - 1$ cạnh nhưng không là cây.

Bài 3.6 Cho G là cây gồm 4 đỉnh bậc 2, 1 đỉnh bậc 3, 2 đỉnh bậc 4, 1 đỉnh bậc 5. Hỏi G có bao nhiêu đỉnh treo?

Bài 3.7 Cho $G = (X, E)$ liên thông. Chứng minh rằng, nếu G là cây thì mọi đỉnh không là đỉnh treo đều là điểm khớp.

Bài 3.8 Cho $T = (X, E)$ là cây với $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Chứng minh rằng, số đỉnh treo của T là

$$2 + \sum_{d(i) \geq 3} \left[d(i) - 2\right].$$

Bài 3.9 Cho $G = (X, E)$ là cây. Đặt $r = \max\{d(i) : \ i \in X\}$ và q_k là số đỉnh bậc k của G $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

a) Chứng minh rằng $q_1 \geq q + 2$ với $q = q_3 + \cdots + q_r$.

b) G có bao nhiêu đỉnh?

Bài 3.10 Cho G là một đồ thị gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Chứng minh rằng $m \geq n - p$.

Bài 3.11 Cho G là một đồ thị gồm n đỉnh, m cạnh và p thành phần liên thông. Chứng minh rằng G là một rừng nếu và chỉ nếu $m - n + p = 0$.

Bài 3.12 Chứng minh cây là một đồ thị lưỡng phân. Những cây nào là đồ thị lưỡng phân đủ?

Bài 3.13 Cho $G = (X, E)$ liên thông và $e \in E$. Ta có thể nói gì về e trong các trường hợp sau

a) $e \in T, \forall T \in \mathrm{Sp}(G)$.

b) $e \notin T, \forall T \in \mathrm{Sp}(G)$.

Bài 3.14 Với $T_1, T_2 \in \mathrm{Sp}(G)$ đặt

$$d(T_1, T_2) = \frac{|T_1 \oplus T_2|}{2}.$$

Chứng minh rằng d là một metric trên $\mathrm{Sp}(G)$.

Bài 3.15 Cho $T_1, T_2 \in \mathrm{Sp}(G)$ với $G = (X, E)$ và $T_1 \neq T_2$.

a) Chứng minh rằng, với $e \in T_1 - T_2$ thì tồn tại $f \in T_2 - T_1$ sao cho $(T_1 - e) + f \in \mathrm{Sp}(G)$.

b) Suy ra rằng có thể biến đổi T_1 thành T_2 bằng cách từng bước thay thế mỗi cạnh của T_1 bằng một cạnh của $T_2 - T_1$.

Bài 3.16 Chứng minh rằng $|\mathrm{Sp}(G)| = 1 \iff G$ là cây.

Bài 3.17 Cho G liên thông và $G' \leq G$ sao cho G' không có chu trình. Chứng minh rằng, tồn tại $T \in \mathrm{Sp}(G)$ sao cho $G' \subset T$.

Bài 3.18 Cho $G' \leq G$. Chứng minh rằng, nếu mọi chu trình C đều có một cạnh trong G' thì G' có ít nhất $m - n + p$ cạnh.

Bài 3.19 Cho $G_1 = (X_1, E_1), G_2 = (X_2, E_2)$ là các đồ thị con liên thông của một cây $T = (X, E)$ với $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Đặt $G_3 = G_1 \cap G_2$. Chứng minh rằng G_3 liên thông.

Bài 3.20 Cho $G = (X, E)$ là một đồ thị liên thông và $H \leq G$. Phần bù của H trong G, ký hiệu $G - H$, là đồ thị con của G tạo bởi những cạnh của G không ở trong H và những đỉnh kề với các cạnh này. Chứng minh rằng

a) Nếu $T \in \mathrm{Sp}(G)$ thì $G - T$ không có đối chu trình.

b) Nếu H là một tập cắt thì $G - H$ không chứa một cây tối đại nào của G.

Bài 3.21 Cho $T = (X, E)$ là cây. Với $x, y \in X$, gọi $d(x, y)$ là số cạnh trên đường đi ngắn nhất giữa x và y. Ta định nghĩa

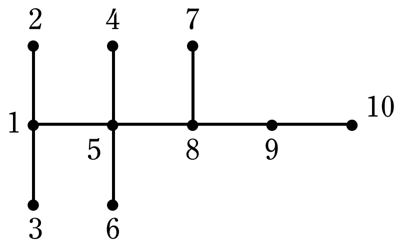
- *Đường kính* của T là $D = \max\{d(x, y) : x, y \in X\}$.

- *Độ lệch tâm* của đỉnh x là $E(x) = \max\{d(x, y) : y \in X\}$.

- *Tâm* của G là đỉnh x_0 thỏa $E(x_0) = \min\{E(x) : x \in X\}$.

- *Bán kính* của T là $R = E(x_0)$ với x_0 là tâm.

a) Tìm tâm, bán kính và đường kính của cây T trong Hình 3.26 sau đây.



Hình 3.26

b) Chứng minh rằng nếu T có 2 tâm thì 2 tâm ấy kề nhau.

c) Chứng minh rằng 1 cây có 1 hoặc 2 tâm.

d) Chứng minh rằng $\frac{D}{2} \leq R \leq D$. Tìm một cây T mà $D \neq 2R$.

Bài 3.22 Tìm cây khung của các đồ thị trong Hình 3.27 bằng cách dùng BFS.

Bài 3.23 Tìm cây khung của các đồ thị trong Hình 3.27 bằng cách dùng DFS.

Bài 3.24 Chứng minh các thuật toán BFS và DFS cho ta cây khung của đồ thị G liên thông.

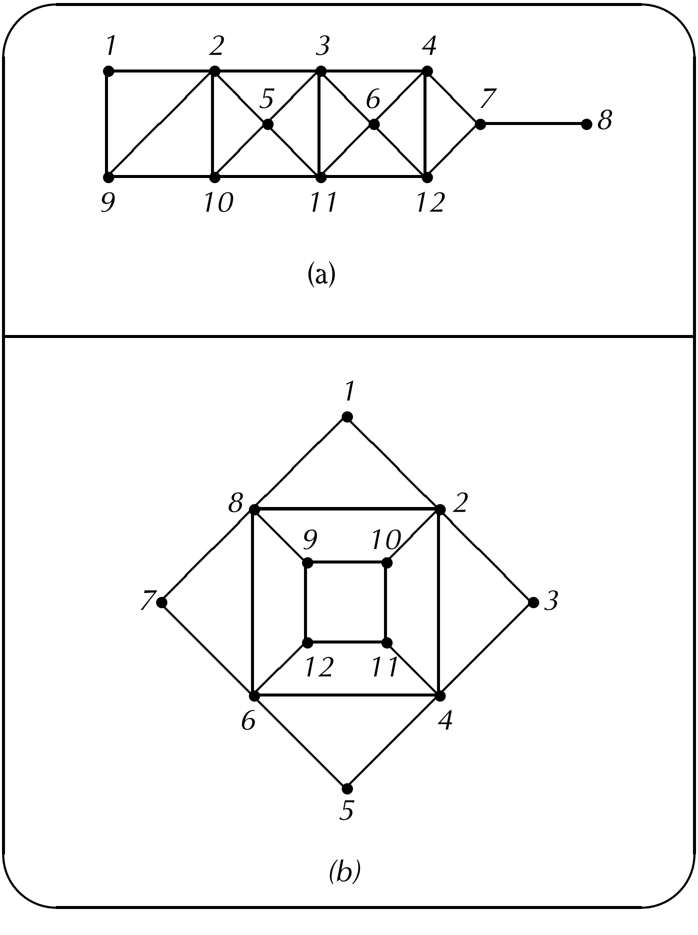
Bài 3.25 Dùng thuật toán "dò ngược" để giải bài toán 4 con hậu trên bàn cờ 4×4 (nghĩa là sắp 4 con hậu trên 1 bàn cờ 4×4 sao cho không có 2 con hậu nào ở cùng hàng, cùng cột hay cùng đường chéo).

Bài 3.26 Cho $G = (X, E)$ liên thông và $T \in \mathrm{Sp}(G)$. Xét xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Có một thứ tự trên X sao cho T là cây khung có được từ thuật toán BFS.

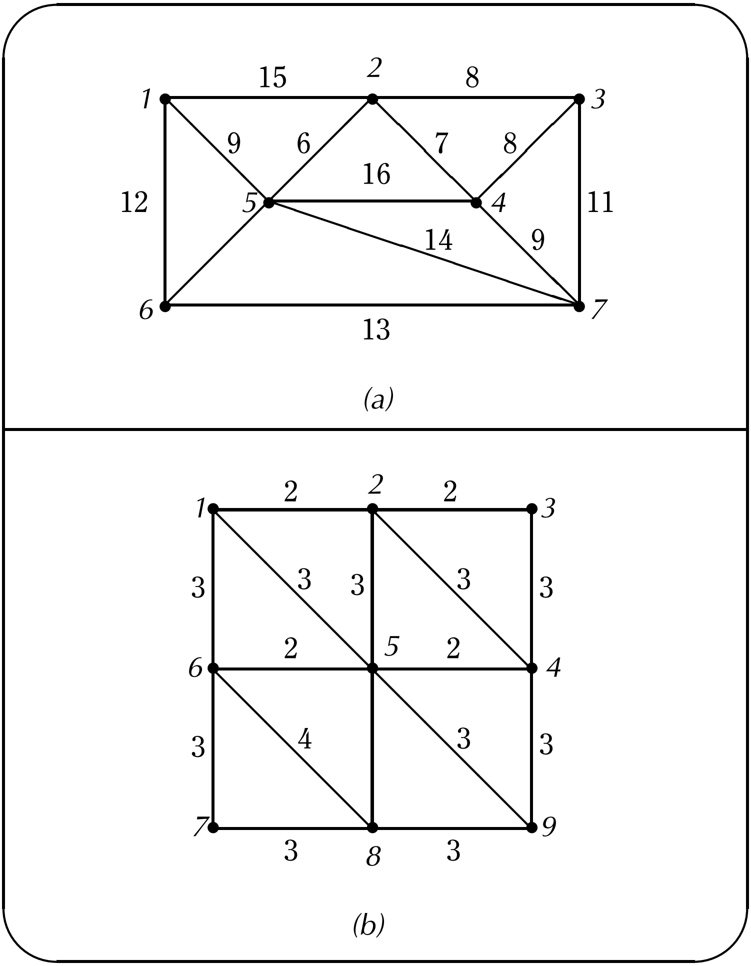
b) Có một thứ tự trên X sao cho T là cây khung có được từ thuật toán DFS.

Bài 3.27 Cho $G = (X, E)$ liên thông. Cho ví dụ chứng tỏ rằng với 2 thứ tự khác nhau trên X, thuật toán BFS có thể cho ta cùng một cây khung của G. Cho ví dụ tương tự với thuật toán DFS.



Hình 3.27

Bài 3.28 Tìm cây khung ngắn nhất của các đồ thị trong Hình 3.28.



Hình 3.28

Bài 3.29 Tìm cây khung ngắn nhất có chứa cạnh 3&4 của các đồ thị trong Hình 3.28.

Bài 3.30 a) Trình bày một thuật toán tìm cây khung dài nhất (lớn nhất).

b) Tìm cây khung dài nhất của đồ thị trong Hình 3.28.

c) Tìm cây khung dài nhất có chứa cạnh 3&4 của đồ thị trong Hình 3.28.

Bài 3.31 Cho $G = (X, E)$ liên thông và các cạnh có trọng lượng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng G có đúng một cây khung ngắn nhất.

Bài 3.32 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông, có trọng lượng. Coi thuật toán xác định cây tối đại sau:

$$T_0 = G, \ T_i = T_{i-1} - e_i,$$

với e_i là cạnh sao cho

$$w(e_i) = \max\big\{w(e) : T_{i-1} - e \text{ liên thông}\big\}.$$

Chứng minh rằng, khi thuật toán kết thúc ở bước thứ k, ta có T_k là cây tối đại ngắn nhất của G.

Bài 3.33 Cho $G = (X, E)$ liên thông có trọng lượng. Xét xem các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Nếu trọng lượng của các cạnh đôi một khác nhau thì các cây tối đại khác nhau cũng có trọng lượng khác nhau.

b) Nếu $w(e) < w(f), \forall f \neq e$ thì e ở trong mọi cây tối đại ngắn nhất của G.

Bài 3.34 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông có trọng lượng và $w_0 = \min\{w(e) : e \in E\}$. Giả sử rằng G có một chu trình C gồm s cạnh, mỗi cạnh có trọng lượng là w_0. Chứng minh rằng G có ít nhất s cây tối đại ngắn nhất.

Bài 3.35 Cho $G = (X, E)$ liên thông có trọng lượng. Đặt

$$w_0 = \min\{w(e) : e \in E\} \quad w_1 = \max\{w(e) : e \in E\}.$$

a) Giả sử có duy nhất $a \in E$ sao cho $w(a) = w_0$. Chứng minh rằng mọi cây tối đại ngắn nhất đều chứa a.

b) Giả sử có duy nhất $b \in E$ sao cho $w(b) = w_1$. Chứng minh rằng không có cây tối đại ngắn nhất nào chứa b.

c) Cho ví dụ chứng tỏ kết quả ở (a) và ở (b) đều không đúng nếu a và b không duy nhất.

Bài 3.36 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông không khuyên và $E' = \{e_1, \dots, e_k\}$ là một tập con không có chu trình của E. Điều chỉnh thuật toán Kruskal để tìm cây tối đại ngắn nhất trong số những cây tối đại chứa các cạnh $e_1, \dots, e_k$.

Bài 3.37 Chứng minh Định lý 3.5.2.

Bài 3.38 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị có hướng. Chứng minh rằng G có một gốc nếu và chỉ nếu với mọi cặp đỉnh (x, y), có một đỉnh z sao cho từ z có một đường đi đến x và một đường đi đến y.

Bài 3.39 Cho $T = (X, E)$ là cây có hướng với hệ địa chỉ phổ dụng.

a) Nếu đỉnh x có địa chỉ là 2.1.3.6 thì x có ít nhất là mấy anh em? Tìm địa chỉ của cha của x.

b) Với x như trên thì x có bao nhiêu tổ tiên?

Bài 3.40 Cho $T = (X, E)$ là một cây tam phân đầy đủ có 34 đỉnh trong. Tính số cung và số lá của T.

Bài 3.41 Cho $T = (X, E)$ là một cây ngũ phân đầy đủ có 817 lá. Hỏi T có bao nhiêu đỉnh trong?

Bài 3.42 Cho T là một cây tứ phân đầy đủ có chiều cao 8. Hỏi T có nhiều nhất là bao nhiêu đỉnh trong? Còn nếu T là k-phân đầy đủ có chiều cao h thì số đỉnh trong tối đa của T là bao nhiêu?

Bài 3.43 Một cây k-phân đủ có chiều cao h được gọi là *cây k-phân đầy* nếu tất cả các lá của nó đều ở mức h. Tìm số lá của cây nhị phân đầy trong các trường hợp

a) $h = 3$.

b) $h = 7$.

c) $h = 12$.

Bài 3.44 Cho T là cây nhị phân đầy. Tính số đỉnh trong và số cạnh của T biết chiều cao của T là $h = 5$.

Bài 3.45 Cho T là cây k-phân đầy có chiều cao 7 và 279.936 lá. Hỏi T có bao nhiêu đỉnh trong?

Bài 3.46 Vẽ một cây nhị phân đầy đủ có chiều cao $h = 3$, có 4 đỉnh trong và 5 lá.

Bài 3.47 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị liên thông với các đỉnh được sắp thứ tự $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Gọi T và T' lần lượt là cây khung của G có gốc x_1 có được bằng thuật toán BFS và DFS. Chứng minh rằng chiều cao của T nhỏ hơn hoặc bằng chiều cao của T'.

Bài 3.48 Ta bảo một cây có chiều cao h la *cân bằng* nếu mọi lá đều ở mức h hoặc $h-1$. Gọi n_h là số đỉnh ít nhất của cây nhị phân cân bằng và có chiều cao h.

a) Chứng minh $n_0 = 1, n_1 = 2, n_2 = 4$.

b) Chứng minh $n_h = 1 + n_{h-1} + n_{h-2}$ với $h > 1$.

c) Chứng minh $n_h = f_{h+1} - 1, \forall h \geq 0$, trong đó $f_1, f_2, f_3 \ldots$ là dãy Fibonacci.

Bài 3.49 Vẽ cây quyết định của các bài toán 4 đồng xu và 5 đồng xu.

Bài 3.50 Xây dựng cây tứ phân quyết định cho 12 đồng xu trong đó có đúng một đồng xu nặng hơn 11 đồng xu còn lại.

Bài 3.51 Cho ví dụ chứng tỏ rằng hai cây nhị phân T_1, T_2 khác nhau có cùng tập đỉnh $\{x_1, x_2, x_3\}$ nhưng dãy các đỉnh trong phép duyệt trước của T_1 và của T_2 trùng nhau.

Bài 3.52 Cho ví dụ chứng tỏ rằng hai cây nhị phân T_1, T_2 khác nhau có cùng tập đỉnh $\{x_1, x_2\}$ mà dãy các đỉnh trong phép duyệt trước và phép duyệt sau của T_1 và của T_2 trùng nhau.

Bài 3.53 Tồn tại hay không một cây nhị phân

a) Có tập đỉnh $\{A, B, C, D\}$ sao cho dãy các đỉnh trong phép duyệt trước là $ABCD$ và dãy các đỉnh trong phép duyệt trong là $ADBC$.

b) Có tập đỉnh $\{A, B, C, D, E, F\}$ sao cho dãy các đỉnh trong phép duyệt trước là $ABCEFD$ và dãy các đỉnh trong phép duyệt trong là $ACFEBD$.

Bài 3.54 Liệt kê dãy các đỉnh của các cây trong Hình 3.29 bằng cách dùng phép duyệt trước, phép duyệt trong và phép duyệt sau.

Bài 3.55 Giả sử 1 cây nhị phân có dãy các đỉnh khi duyệt bằng phép duyệt trước là $ABDECFG$ và khi duyệt bằng phép duyệt trong là $DBEAFGC$. Hãy vẽ cây này.

Bài 3.56 Cho $T = (X, E)$ là cây nhị phân sao cho với mọi $x \in X$, ta có $lch(x) < x$, $rch(x) > x$. Hỏi T có là cây nhị phân tìm kiếm không?

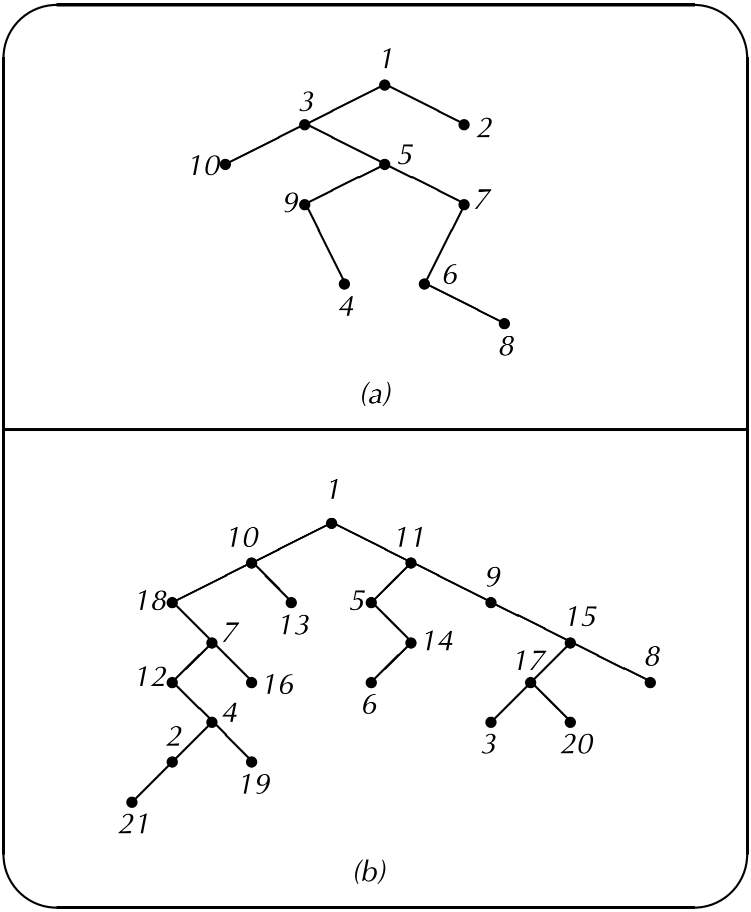
Bài 3.57 Với thứ tự tự-điển, xây dựng 1 cây nhị phân tìm kiếm từ câu sau đây

a) Four score and seven years ago our forefathers brought forth.

b) Em về từng bước chân xiêu, còn ta ngủ đứng dưới chiều mưa bay.

c) Word processing produces clean manuscripts but not necessarily clear prose.

d) Ôi! Ta nghe nghìn giọt lệ rớt xuống thành hồ nước long lanh!



Hình 3.29

Bài 3.58 Viết các biểu thức sau đây bằng ký hiệu Balan và bằng ký hiệu Balan ngược. Vẽ cây nhị phân của biểu thức tương ứng.

a) $\dfrac{w+x-y}{\pi z^3}$.

b) $\big(n^n\big)^n(mn-q)$.

c) $\big(\big((a+b)*c+d\big)*e\big)-\big((a+b)*c+d\big)$.

Bài 3.59 Từ các biểu thức viết bằng ký hiệu Balan ngược, hãy viết các biểu thức này dưới dạng ký hiệu Balan và vẽ cây nhị phân tương ứng.

a) $abc**cde+\div-$

b) $ab+cd*ef\div- \ -a*$

Bài 3.60 Tính giá trị của biểu thức được viết bằng ký hiệu Balan sau đây

a) $+4/*2\ 3+1-9\uparrow 2\ 3$.

b) $/\uparrow a-b\ c+d*e\ f$ biết $a=c=d=e=2, b=f=4$

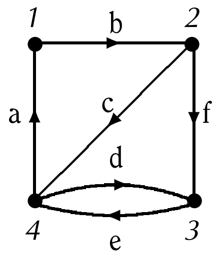
Bài 3.61 Tính giá trị các biểu thức viết bằng ký hiệu Balan ngược sau đây khi $a=1, b=2, c=3, d=4$.

a) $ab+cd*aa\div--b*$

b) $abab*+*d*$

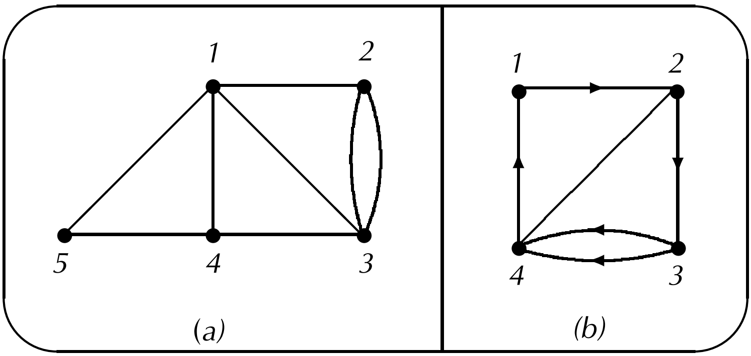
c) $adbcd*-+*$

Bài 3.62 Tìm và vẽ tất cả các cây khung có hướng có gốc là đỉnh 1, hoặc đỉnh 2 của đồ thị trong Hình 3.30



Hình 3.30

Bài 3.63 Tìm số cây khung của các đồ thị trong Hình 3.31.



Hình 3.31

Bài 3.64 Chứng minh rằng $|\mathrm{Sp}(K_n)| = n^{n-2}$ với $n > 1$.

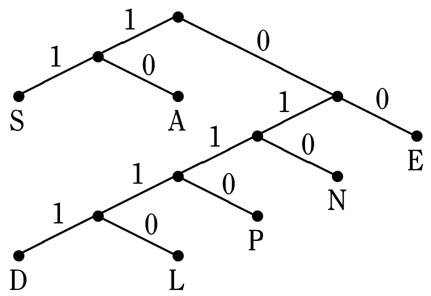
Bài 3.65 Dùng cây mã Huffman trong Hình 3.32 để

a) Giải mã các chuỗi sau đây:

$$0110100110; \quad 01111001001110; \quad 1110011101001111.$$

b) Mã hóa các chuỗi ký tự sau đây:

$$NEED, \quad LEADEN, \quad PENNED.$$



Hình 3.32

Bài 3.66 a) Xây dựng một mã Huffman cho các ký hiệu với tần số xuất hiện cho trong bảng sau

Ký hiệu	I	U	B	S	C	H	M	P
Tần số xuất hiện	$7,5$	20	$2,5$	$27,5$	5	10	$2,5$	25

b) Dùng kết quả câu (a) để mã hóa các chuỗi ký tự sau: BUSCUP, MUSHPUSH.

Bài 3.67 Một mã nhị phân cho $S = \{a, b, c, d, e\}$ được xác định như sau

$$a : 00, b : 01, c : 101, d : x10, e : yz1$$

Tìm x, y, z để mã đã cho là mã tiền tố.

Bài 3.68 Xây dựng một mã tiền tố tối ưu cho các ký hiệu $a, b, \ldots, i, j$ biết tần số xuất hiện cho trong bảng sau

Ký hiệu	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Tần số xuất hiện	78	16	30	35	125	31	20	50	80	3

Bài 3.69 Bằng cách sử dụng các trọng lượng 2, 3, 5, 10, 10 để chứng minh rằng cây Huffman xây dựng từ một tập hợp các trọng lượng cho sẵn không duy nhất. Có thể nào điều chỉnh thuật toán Huffman để có cây duy nhất không?

Chương 4. BIỂU DIỄN BẰNG MA TRẬN

Bài 4.1 Viết các ma trận C_f, D_f của đồ thị G đối với cây khung $T = \{a, c, d, f\}$ và kiểm chứng rằng $C_f \times D_f^t = 0$ trong các trường hợp sau:

a) G trong Hình 4.1a b) G trong Hình 4.1b.

c) G trong Hình 4.2.

Bài 4.2 Viết ma trận liên kết và ma trận kề của

a) K_5.

b) $K_{2,3}$.

c) Đồ thị G trong Hình 2.5 (Chương 2).

Bài 4.3 Cho G có hướng và A là ma trận liên kết của G. Chứng minh rằng A unimodular, nghĩa là $\det A_k \in \{-1, 0, 1\}$ với mọi ma trận con loại $k \times k$ của A, $k = 1, \ldots, h$ với $h = \min\{m, n\}$.

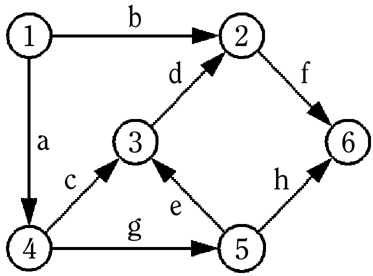
Bài 4.4 Cho ma trận

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Chứng minh rằng ta có thể sắp xếp các dòng, các cột của B sao cho B là ma trận kề của một đồ thị G không hướng. Khi ấy tìm số cạnh của G.

b) Chứng minh có thể sắp xếp các đỉnh sao cho G là đồ thị lưỡng phân.

Bài 4.5 Xét đồ thị G trong Hình 4.5.



Hình 4.5

a) Viết ma trận liên kết và ma trận kề của G.

b) Viết các ma trận C_f, D_f đối với cây $T = \{a, c, d, f, h\}$

Bài 4.6 Cho đồ thị G có hướng với ma trận kề

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Tìm số cung và số thành phần liên thông của G.

b) Sắp xếp các cung của G sao cho ma trận liên kết của G có dạng

$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right)$ với A_i là ma trận liên kết của thành phần liên thông

X_i và $|X_1| < |X_2|$. Viết A, A_1, A_2.

c) Chứng minh X_1 liên thông mạnh, X_2 không liên thông mạnh.

d) Tìm một cơ sở của W_c và một cơ sở của W_d.

Bài 4.7 Gọi B là ma trận kề của đồ thị K_5 và B_{ij}^k là phần tử ở dòng i

cột j của B^k.

a) Chứng minh rằng các phần tử trên đường chéo chính của B^k đều bằng nhau và các phần tử ở ngoài đường chéo chính của B^k cũng bằng nhau.

b) Đặt $B_{ii}^k = d_k$ và $B_{ij}^k = b_k$ với $i \neq j$. Chứng minh rằng

$$d_{k+1} = 4b_k, \quad b_{k+1} = d_k + 3b_k = 3b_k + 4b_{k-1}, \forall k > 1.$$

c) Chứng minh rằng

$$b_k = \frac{1}{5}\left[4^k + (-1)^{k+1}\right] \quad \text{và} \quad d_k = \frac{4}{5}\left[4^{k-1} + (-1)^k\right].$$

Bài 4.8 Chứng minh những kết quả tương tự như trong Bài 7 cho đồ thị K_n.

Bài 4.9 Cho B là ma trận kề của $K_{r,s}$. Tìm B^k.

Bài 4.10 Cho G là đồ thị có hướng và B là ma trận kề của G. Đặt $S = B + B^2 + \cdots + B^n$. Chứng minh rằng G liên thông mạnh nếu và chỉ nếu $S_{ij} \neq 0, \forall i, j$.

Bài 4.11 Cho G có hướng và B là ma trận kề của G. Chứng minh rằng G không có mạch nếu và chỉ nếu $\det(I-B) \neq 0$ với I là ma trận đơn vị cấp n.

Bài 4.12 Cho $G=(X,E)$ liên thông và $x, y \in X$. Giả sử có các đường đi khác nhau $P_1, P_2, \ldots, P_s$ từ x đến y. Ta định nghĩa ma trận $P=(P_{ij})$ với

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } e_j \in P_i, \\ 0 & \text{nếu} e_j \notin P_i. \end{cases}$$

a) Viết ma trận P của đồ thị trong Hình 4.1a với $x=1$ và $y=3$

b) Biết thứ tự các cạnh trong A và trong P là như nhau, chứng minh rằng $A \times P = M$, trong đó $M_{xj} = M_{yj} = 1, \forall j$ và $M_{ij} = 0, \forall i \neq x, y, \forall j$.

Bài 4.13 Chứng minh rằng $|\mathrm{Sp}(G)| = \det\big(A_f \times A_f^t\big)$.

Bài 4.14 Cho G không hướng với không gian các chu trình của G sinh bởi các vectơ 01111001, 01110110, 01001010, 01000101, 10101101, 10100010, 10011110, 10010001. Hãy vẽ đồ thị G.

Bài 4.15 Cho G không tách được. Chứng minh rằng $\dim W_c = 1$ nếu và chỉ nếu G là một chu trình.

Bài 4.16 Chứng minh Định lý 4.4.2 và Định lý 4.4.8

Bài 4.17 Giả sử $\mathrm{Sp}(G)$ gồm các cây sau $\{a,b,e\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,e\}$, $\{a,c,d\}$ $\{a,d,e\}$, $\{b,c,d\}$, $\{b,c,e\}$, $\{b,d,e\}$. Hãy vẽ đồ thị G.

Bài 4.18 Cho G là đồ thị không hướng và r là hạng của G. Chứng minh rằng số cơ sở của W_d là

$$\frac{1}{r!}(2^r - 2^0)(2^r - 2^1)(2^r - 2^2)\dots(2^r - 2^{r-1}).$$

Bài 4.19 Cho G liên thông và $k = \dim W_c$. Chứng minh rằng

$$|\mathrm{Sp}(G)| \leq \frac{1}{k!}(2^k - 2^0)(2^k - 2^1)(2^k - 2^2)\dots(2^k - 2^{k-1}).$$

Bài 4.20 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị có hướng. *Ma trận khả liên* của G là ma trận $R = (r_{ij})$ được định nghĩa như sau: $r_{ij} = 1$ nếu có một đường đi có chiều dài ≥ 1 từ i đến j và $r_{ij} = 0$ nếu ngược lại.

a) Chứng minh rằng R^2_{ii} bằng số đỉnh của thành phần liên thông mạnh chứa đỉnh i.

b) Giả sử các đỉnh của G được sắp xếp sao cho

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} r_{kj}, \forall i < k.$$

Chứng minh rằng G không có mạch nếu và chỉ nếu R là ma trận tam giác trên.

Bài 4.21 Cho $G = (X, E)$ với $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Đặt $M = (M_{ij})$ là ma trận Bool xác định bởi

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (i, j) \in E \\ 0 & \text{nếu } ij \notin E \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $M_{ij}^{k} = 1$nếu và chỉ nếu có 1 đường đi với chiều

dài k từ i đến j.

b) Đặt $S = I + M + \cdots + M^{n-1}$. Chứng minh rằng G liên thông nếu và chỉ nếu $S_{ij} = 1, \forall i, j$.

c) Ta xây dựng dãy các ma trận $W_0, \ldots, W_n$ với $W_0 = M$ và

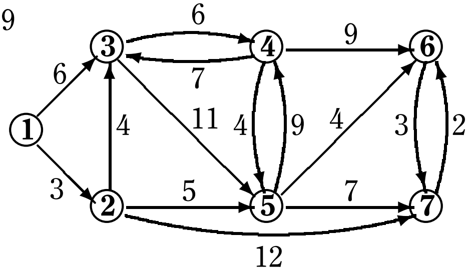
$$W_k[i,j] = W_{k-1}[i,j] + W_{k-1}[i,k] + W_{k-1}[k,j].$$

Chứng minh rằng $W_n = R$ với $R = M + M^2 + \cdots + M^n$.

Chương 5. CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐƯỜNG ĐI

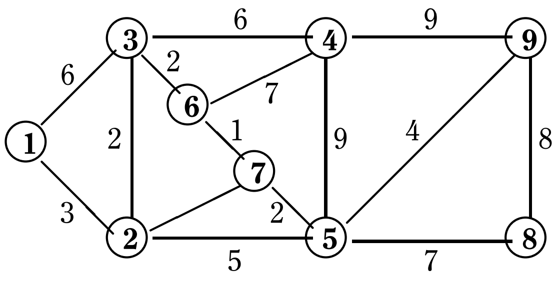
Bài 5.1 Chứng minh Bổ đề 5.2.1.

Bài 5.2 Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến những đỉnh khác của các đồ thị trong Hình 5.19



Hình 5.19

Bài 5.3 Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến những đỉnh khác của các đồ thị trong Hình 5.20



Hình 5.20

Bài 5.4 Xét đồ thị G xác định bởi ma trận khoảng cách

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 9 & 10 & 12 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 15 & 5 & 16 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 0 & \infty & 1 & 10 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 & \infty & 10 \\ \infty & 12 & \infty & \infty & \infty & 0 & 7 \\ \infty & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh 7 biết rằng

a) Không có điều kiện gì thêm.

b) Không qua đỉnh 5.

c) Qua đỉnh 4.

d) Qua cung $(5, 4)$.

Bài 5.5 Tìm một ví dụ chứng tỏ rằng thuật toán Dijsktra không thể áp dụng cho đồ thị có trọng lượng âm.

Bài 5.6 Trong các trường hợp sau đây, xét đồ thị G xác định bởi ma trận khoảng cách D. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến những đỉnh khác và vẽ cây đường đi hoặc chỉ ra rằng đồ thị có một mạch âm.

a) $$D = \begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & \infty & 2 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & -3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & \infty & 0 & \infty & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & 0 & 8 \\ 7 & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & \infty & 4 \\ \infty & 0 & -4 & \infty & 2 & \infty \\ 8 & \infty & 0 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 5 & 3 & 0 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & -9 & 0 & \infty \\ \infty & -2 & \infty & \infty & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

Bài 5.7 Tìm đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh hay chỉ ra rằng có một mạch âm trong đồ thị G xác định bởi ma trận khoảng cách D:

a) $D = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 0 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 6 & 3 & -2 & 0 & \infty \\ 7 & 5 & \infty & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & \infty & 5 \\ \infty & 0 & -9 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 3 & 3 \\ 3 & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 4 & \infty & -4 & 0 \end{pmatrix}.$

Bài 5.8 Gọi $d(x, y)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh x đến đỉnh y.

a) Cho $d(x, y) \geq 2$. Chứng minh rằng tồn tại đỉnh z sao cho

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$$

b) Chứng minh rằng trong đồ thị Petersen ta có

$$d(x, y) \in \{1, 2\}, \forall x, y.$$

Bài 5.9 Cho $G = (X, E)$ có trọng lượng và e_1 là cạnh sao cho $w(e_1) < w(e), \forall e \neq e_1$. Chứng minh hay phản chứng minh mệnh đề sau:

"Áp dụng thuật toán Dijsktra, ta có một đỉnh j sao cho e_1 ở trên một đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến đỉnh j".

Bài 5.10 Chứng minh hay phản chứng minh thuật toán sau đây mà khi thuật toán kết thúc, ta sẽ có độ dài π của đường đi ngắn nhất từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị $G = (X, E)$.

Bước 1. $\pi := 0; i := a, T = X$.

Bước 2. Nếu $i = b$ thì dừng. Ngược lại thì $T := T - \{i\}$.

Tìm $j \in T$ sao cho $w(i, j)$ bé nhất và $\pi := \pi + w(i, j)$

Bước 3. $i := j$ và trở lại Bước 2.

Bài 5.11 Chứng minh hay phản chứng minh thuật toán "*Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến những đỉnh khác trong đồ thị $G = (X, E)$ không có mạch và 1 là đỉnh duy nhất có nửa bậc trong bằng 0*" sau đây:

Bước 1. $\pi(1) = 0; S = \{1\}, \overline{S} = X - S$.

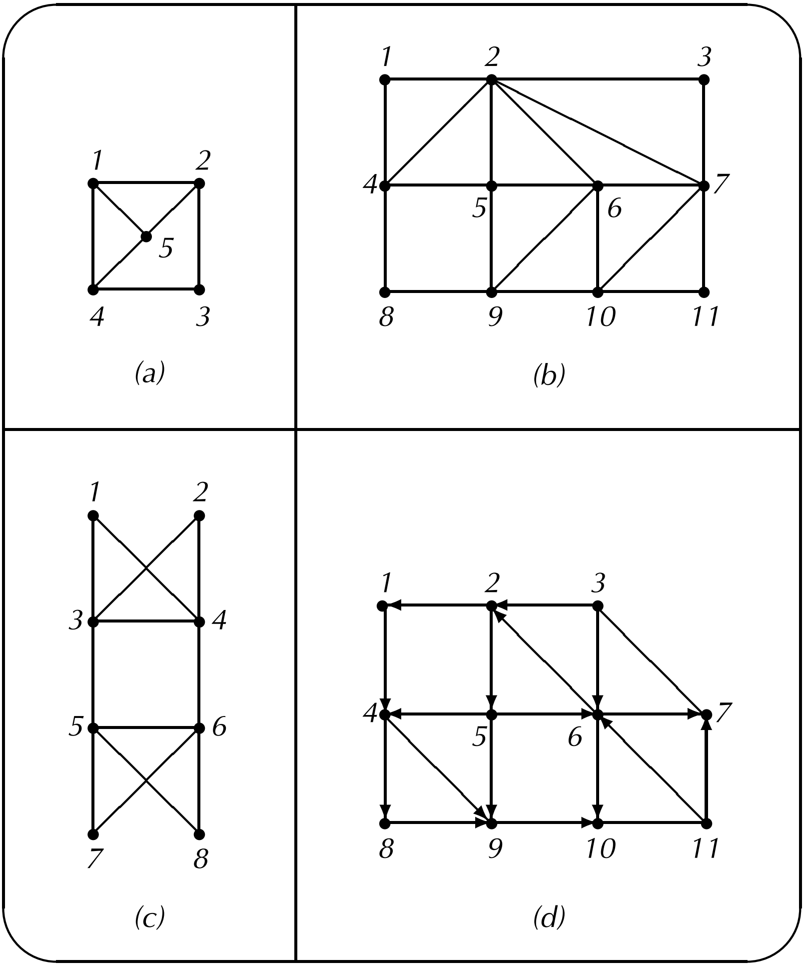
Bước 2. Tìm $j \in \overline{S}$ sao cho $\Gamma^{-1}(j) \subset S$.

Bước 3. $\pi(j) := \min\{\pi(i) + w(i, j) : i \in \Gamma^{-1}(j)\}$.

Đánh dấu j bằng $(\pi(j), i)$; $S := S \cup \{j\}$.

- Nếu $|S| = |X|$ thì dừng. Nếu $|S| \neq |X|$ thì trở lại Bước 2.

Bài 5.12 Xét xem G có là đồ thị Euler hay không. Nếu không, G có thể vẽ được bằng mấy nét?



Hình 5.21

Bài 5.13 Khi nào K_n là đồ thị Euler? Cùng câu hỏi với các đồ thị $K_{r,s}, W_n$ và Q_k.

Bài 5.14 Xác định chu trình Euler nếu có của các đồ thị cho bởi ma trận kề sau đây:

a) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 5.15 Cho 10 con domino $(1;2)$, $(1;3)$, $(1;4)$, $(1;5)$, $(2;3)$, $(2;4)$, $(2;5)$, $(3;4)$, $(3;5)$, $(4;5)$. Có thể nào sắp xếp các con domino này trên 1 vòng tròn theo luật domino không?

Bài 5.16 Chứng minh rằng nếu G là đồ thị Euler thì $L(G)$ (đồ thị đường của G) cũng thế. Đảo lại có đúng không?

Bài 5.17 Có thể nào thực hiện tất cả các nước đi của một con mã trên một bàn cờ vua và trở về ô xuất phát không?

Bài 5.18 Tìm mạch Euler (nếu có) của đồ thị có hướng xác định bởi ma trận kề sau đây

$$a)B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$b)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bài 5.19 Chứng minh rằng một đồ thị Euler có hướng thì liên thông mạnh. Đảo lại có đúng không?

Bài 5.20 Cho $G = (X, E)$ là đồ thị có hướng. Chứng minh rằng G có một đường đi Euler nếu và chỉ nếu G thỏa các điều kiện sau

i) G liên thông.

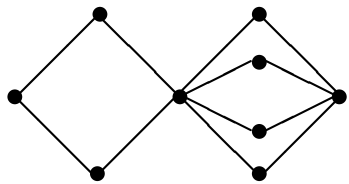
ii) Có 2 đỉnh x và y sao cho

$$d^+(x) = d^-(x) + 1, d^+(y) = d^-(y) - 1.$$

iii) $d^+(i) = d^-(i), \forall i \neq x, y$.

Bài 5.21 Một đồ thị Euler gọi là *vẽ được một cách ngẫu nhiên* hay *Euler một cách ngẫu nhiên* nếu có đỉnh x sao cho bắt đầu từ x, tại mỗi đỉnh, ta đi theo một cạnh chưa đi qua bất kỳ nào thì cuối cùng ta cũng có chu trình Euler. Khi ấy ta bảo G vẽ được một cách ngẫu nhiên từ x.

a) Chứng minh đồ thị sau đây là vẽ được 1 cách ngẫu nhiên



Hình 5.22

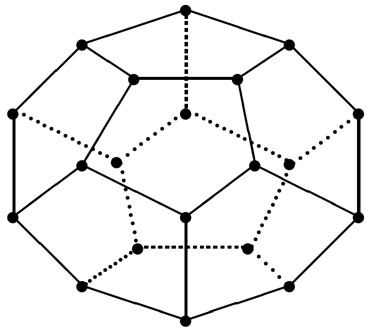
b) Tìm một đồ thị Euler nhưng không vẽ được một cách ngẫu nhiên.

Bài 5.22 Cho G là đồ thị Euler vẽ được một cách ngẫu nhiên từ một đỉnh x và G_1 là đồ thị con của G chứa x, $G_1 \neq G$ và G_1 Euler. Gọi G_2 là đồ thị con của G có được bằng cách xóa các cạnh của G_1 và các đỉnh cô lập (do việc xóa các cạnh của G_1) nếu có. Chứng minh G_1, G_2 đều vẽ được một cách ngẫu nhiên từ x.

Bài 5.23 Cho G là đồ thị Euler. Chứng minh rằng G vẽ được một cách ngẫu nhiên từ x nếu và chỉ nếu x ở trên mọi chu trình của G.

Bài 5.24 Xét xem các đồ thị trong Bài 3 có là đồ thị Hamilton hay không?

Bài 5.25 Coi khối 12 mặt đều trong hình sau đây. Hỏi có thể nào đi qua tất cả các đỉnh của khối này, mỗi đỉnh một lần và trở về đỉnh xuất phát không? (Bài toán này gọi là *dodecahedron-game* hoặc *trip around the world* do William Hamilton đề xuất năm 1860).



Hình 5.23

Bài 5.26 Cho ví dụ về một đồ thị Euler nhưng không là đồ thị Hamilton.

Bài 5.27 Cho ví dụ về một đồ thị Hamilton nhưng không là đồ thị Euler.

Bài 5.28 Cho ví dụ về một đồ thị Euler đồng thời là đồ thị Hamilton.

Bài 5.29 Khi nào $K_{r,s}$ là đồ thị Hamilton?

Bài 5.30 Cho $G = (X, E)$ đơn, liên thông và $Y \subset X, |Y| = k$.

a) Chứng minh rằng nếu $G - Y$ có nhiều hơn k thành phần liên thông thì G không có chu trình Hamilton.

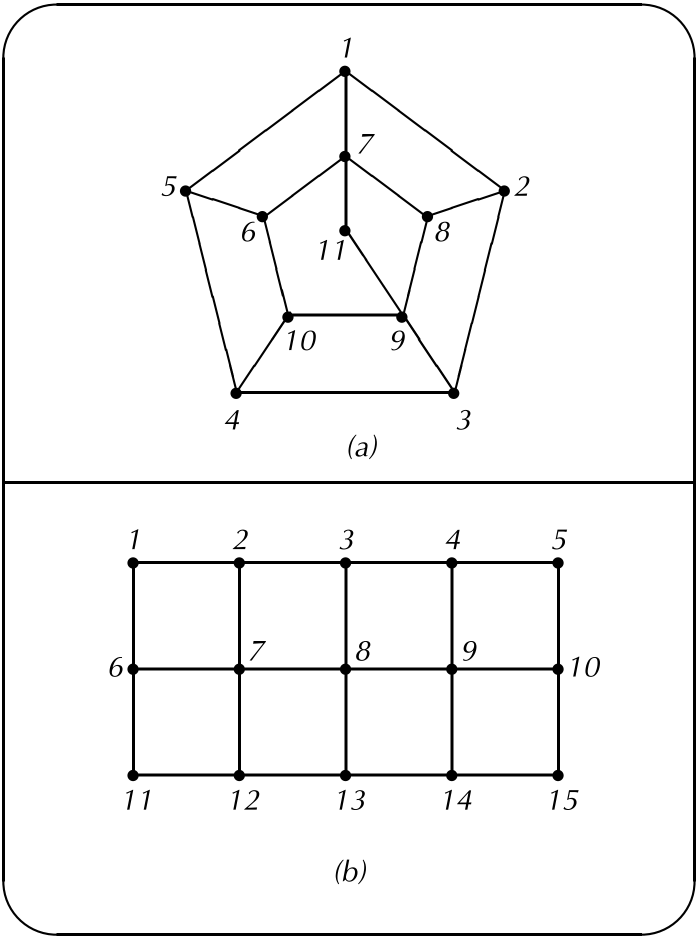
b) Nếu $G-Y$ có nhiều hơn $k+1$ thành phần liên thông thì G không có đường đi Hamilton.

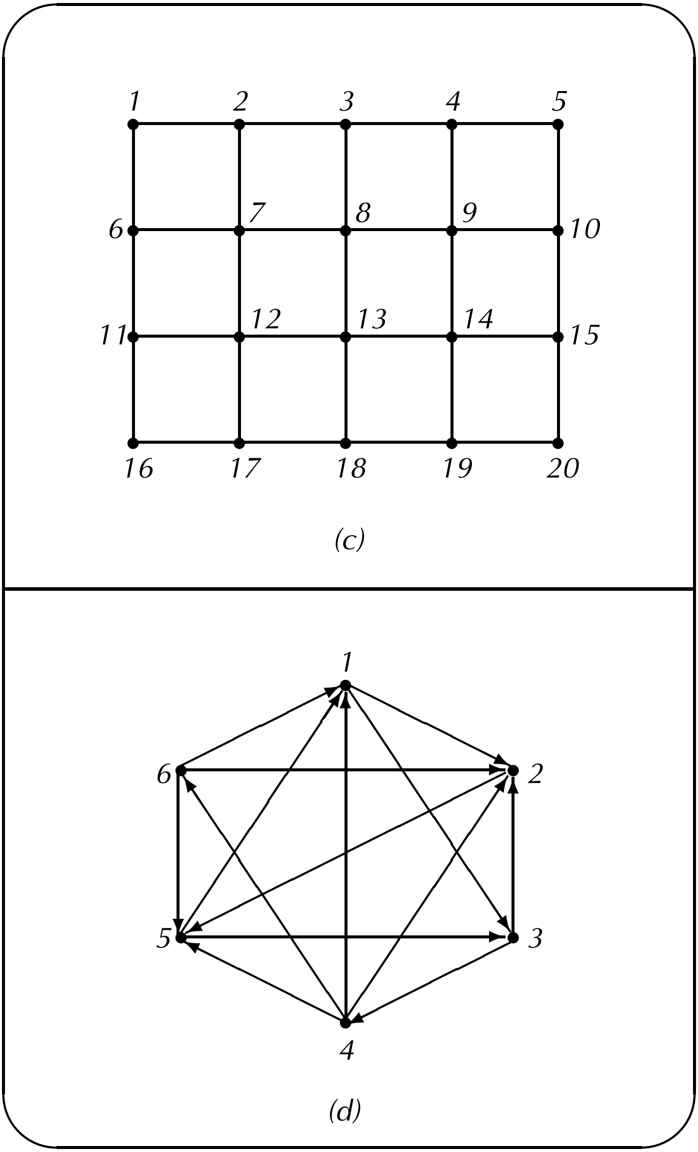
Bài 5.31 Cho $G = (X, E)$ liên thông và U là một chu trình của G. Giả sử rằng với e là một cạnh bất kỳ trong U thì $U - e$ là đường đi dài nhất trong G. Chứng minh U là một chu trình Hamilton.

Bài 5.32 Cho $G = (X_1, X_2)$ là đồ thị lưỡng phân. Chứng minh rằng nếu G là đồ thị Hamilton thì $|X_2| = |X_2|$.

Bài 5.33 Có thể nào di chuyển con mã trên một bàn cờ 4×4 đi qua tất cả các ô của bàn cờ và trở về ô xuất phát không?

Bài 5.34 Xét xem đồ thị nào là Hamilton (Hình 5.24).





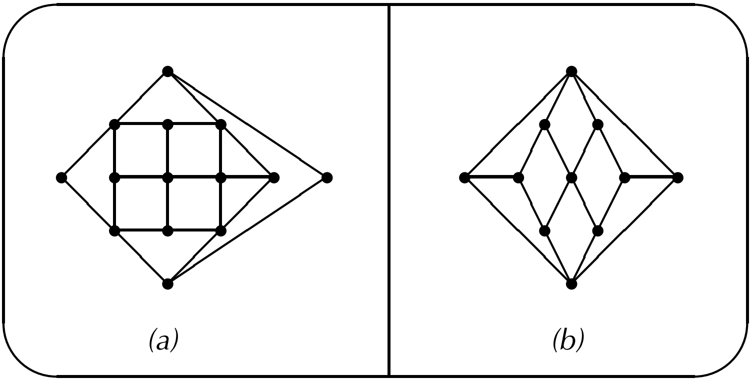
Hình 5.24

Bài 5.35 Cho $G = (X, E)$ đơn và $Y \subset X$ sao cho $|Y| = k$ và 2 đỉnh bất kỳ của Y đều không kề nhau. Đặt $m' = \sum_{x \in Y} d(x) - 2k$.

a) Chứng minh rằng nếu $m - m' < n$ thì G không Hamilton.

b) Nếu trong Y có các đỉnh kề nhau thì kết quả ở Câu a) có còn đúng không?

c) Bằng cách chọn Y một cách thích hợp, chứng minh các đồ thị sau đây không Hamilton (Hình 5.25).



Hình 5.25

Bài 5.36 Xét B^k là tập hợp tất cả các từ nhị phân có chiều dài k. Nếu các phần tử của B^k được sắp thành 1 dãy vòng $(s_1, s_2 \ldots, s_r)$ với $r = 2^k$ sao cho mỗi phần tử xuất hiện 1 lần và s_i và s_{i+1} chỉ khác nhau một bit, $i = 1, 2, \ldots, r$ (với $s_{r+1} = s_1$). Khi ấy, dãy $(s_1, s_2 \ldots, s_r)$ được gọi là *mã Gray*.

Cho dãy $G_k : (y_1, y_2, \ldots, y_r)$ thì dãy các dãy $(y_r, y_{r-1} \ldots, y_1)$, $(0y_1, 0y_2, \ldots, 0y_r)$, $(1y_r, 1y_{r-1}, \ldots, 1y_1)$ lần lượt được ký hiệu là G_k^R, $0G_k$, $1G_k^R$.

Ta xây dựng dãy G_k như sau:

i) G_1 là dãy: 0, 1.

ii) Giả sử $k > 1$ và đã có G_{k-1} thì G_k là dãy $0G_{k-1}, 1G_{k-1}^R$.

a) Chứng minh dãy G_k xây dựng như trên là mã Gray với mọi $k > 0$.

b) Chứng minh rằng Q_k là đồ thị Hamilton với mọi $k > 1$.

c) Cho $1 \leq h \leq 2^k$. Chứng minh rằng Q_k có 1 chu trình sơ cấp với chiều dài h nếu và chỉ nếu $h \geq 4$ và h chẵn.

Bài 5.37 Xét xem các đồ thị trong Bài 18 có là đồ thị Hamilton không?

Bài 5.38 Trong một cuộc tranh giải, có n đấu thủ tham gia thi đấu theo thể thức đấu vòng tròn một lượt và không có trận hòa. Giả sử mỗi đấu thủ đã thi đấu với $n-1$ đấu thủ khác. Chứng minh rằng ta có thể liệt kê các đấu thủ thành một dãy sao cho mỗi đấu thủ thắng người kế tiếp trong danh sách đó.

Bài 5.39 Cho $G = (X, E)$ là đơn đồ thị có hướng sao cho với mọi $i, j \in X$, ta có $d(i) + d(j) \geq n - 1$. Chứng minh G có một đường đi Hamilton.

Bài 5.40 Cho $G = (X, E)$ không hướng liên thông và $G \neq K_n$. Chứng minh rằng có thể định hướng các cạnh của G sao cho đồ thị có hướng có được không là đồ thị Hamilton.

Chương 6. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Bài 6.1 Cho $X = \{0, 1, 2\}$. Có bao nhiêu dãy số $x_1 x_2 \ldots x_n$ với $x_i \in X$ sao cho tồn tại $i, 1 \leq i < n$ thỏa $x_i = x_{i+1}$.

Bài 6.2 Một lớp học có 100 sinh viên, trong đó có 40 sinh viên biết tiếng Anh, 40 sinh viên biết tiếng Pháp, 40 sinh viên biết tiếng Hoa, 20 sinh viên biết 2 trong 3 ngoại ngữ kể trên và 10 sinh viên biết cả 3 ngoại ngữ ấy. Hỏi có bao nhiêu sinh viên không biết ngoại ngữ nào?

Bài 6.3 Cho $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, r, s, t\}$. Có bao nhiêu hoán vị của X sao cho không có từ nào trong số các từ sau đây xuất hiện: bad, den, gift, nomad.

Bài 6.4 Cho 2 tập hợp A và B với $|A| = m \geq |B| = n$. Tìm số toàn ánh từ A vào B.

Bài 6.5 Tìm số các số nguyên n với $1 \leq n \leq 2000$ và

a) n không là bội số của 2, 3 hay 5.

b) n không là bội số của 2, 3, 5 hay 7.

c) n không là bội số của 2, 3, hay 5 nhưng n là bội số của 7.

Bài 6.6 Tìm số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$ biết rằng

a) $0 \leq x_i < 8, \forall i, 1 \leq i \leq 4$.

b) $0 \leq x_1 \leq 5, 0 \leq x_2 \leq 6, 3 \leq x_3 \leq 7, 3 \leq x_3 \leq 8$.

c) $-5 \leq x_i \leq 10, \forall i, 1 \leq i \leq 4$.

Bài 6.7 Xét từ INFORMATION. Có bao nhiêu hoán vị của từ này sao cho không có 2 mẫu tự liên tiếp nào xuất hiện quá 1 lần (chẳng hạn ta không tính hoán vị **IN**FOR**IN**MOTA vì **IN** xuất hiện 2 lần.)

Bài 6.8 Tìm số các số nguyên dương n sao cho $1 \leq n \leq 9.999.999$ và tổng các chữ số của n bằng 31.

Bài 6.9 Một bài thi có 10 câu hỏi với tổng số điểm là 100. Có bao nhiêu cách phân phối điểm cho 10 câu hỏi ấy biết rằng:

a) Số điểm của mỗi câu ít nhất là 5 và nhiều nhất là 15 điểm.

b) Số điểm của mỗi câu ít nhất là 5, nhiều nhất là 15 điểm và là bội số của 5.

Bài 6.10 Tung 8 hạt xí ngầu khác nhau. Tìm xác suất để cả 8 hạt xí ngầu này đều xuất hiện số 6.

Bài 6.11 Tung một hạt xí ngầu 5 lần. Tìm xác suất để tổng các số xuất hiện trong 5 lần là 20.

Bài 6.12 Với n là số nguyên dương, gọi $\varphi(n)$ là số các số nguyên $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $gcd(m, n) = 1$ (Hàm φ-Euler). Tìm $\varphi(n)$ với

a) $n = 50$.

b) $n = 420$.

c) $n = 12.300$.

d) $n = 5187$.

e) $n = 5188$.

Bài 6.13 Có bao nhiêu cách sắp xếp 3 mẫu tự a, 3 mẫu tự b, 3 mẫu tự c thành một dãy sao cho không có mẫu tự nào xuất hiện trong 3 số hạng liên tiếp của dãy (như *aaa*bccbcb).

Bài 6.14 Người ta muốn cắm 15 đóa hoa vào 5 bình. Có bao nhiêu cách biết rằng mỗi bình có ít nhất 1 và nhiều nhất là 4 đóa hoa.

Bài 6.15 Trong dãy $x_1 x_2 \ldots x_n$, ta bảo x_i đứng trước x_j nếu $i < j$. Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ TAMELY sao cho T đứng trước A, hoặc A đứng trước M, hoặc M đứng trước E?

Bài 6.16 Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ MATHEMATICS sao cho 2 chữ T đứng trước 2 chữ A, hoặc 2 chữ A đứng trước 2 chữ M, hoặc 2 chữ M đứng trước E?

Bài 6.17 Tìm số cách sắp xếp các mẫu tự của từ CORRESPONDENTS biết rằng

a) Hai mẫu tự kề nhau thì khác nhau.

b) Có đúng 2 cặp mẫu tự dạng XX xuất hiện (như trong CO**RR**EOT**SS**PNDEN).

c) Có ít nhất 3 cặp mẫu tự dạng XX xuất hiện (như trong CO**RR**EOT**SS**PDE**NN**)

Bài 6.18 Cho $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ và $B = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Có bao nhiêu ánh xạ f từ A vào B thỏa:

a) $|f(A)| = 4$.

b) $|f(A)| \leq 4$.

Bài 6.19 Có bao nhiêu cách phân phối 10 cuốn sách cho 4 sinh viên sao cho:

a) Có đúng 2 sinh viên không nhận được cuốn sách nào.

b) Có ít nhất 2 sinh viên không nhận được cuốn sách nào.

Bài 6.20 Chọn 13 lá bài từ 1 bộ bài 52 lá. Tìm xác suất để trong 13 lá bài này có

a) Đủ 4 nước cơ, rô, chuồn, bích.

b) Có đúng 1 nước không xuất hiện (chẳng hạn không có nước cơ).

c) Có đúng 2 nước xuất hiện (chẳng hạn chỉ có cơ và rô).

Bài 6.21 Cho $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Có bao nhiêu song ánh f từ A vào A sao cho f có ít nhất 1 điểm cố định.

Bài 6.22 Cho d_k là số xáo trộn của $1, 2, \ldots, k$ với $d_0 = 1$. Chứng minh rằng

$$n! = \mathbf{C}_n^0 d_0 + \mathbf{C}_n^1 d_1 + \mathbf{C}_n^2 d_2 + \cdots + \mathbf{C}_n^n d_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}_n^k d_k.$$

Bài 6.23 a) Có bao nhiêu cách sắp xếp các số $1, 2, \ldots, n$ sao cho không có số nào trong các số sau đây không xuất hiện: 12, 23, 34, ..., $(n-1)n$.

b) Chứng minh rằng kết quả ở câu (a) bằng $d_{n-1} + d_n$ với d_k là số xáo trộn của $1, 2, \ldots, k$.

Bài 6.24 Có n bài thi được trả lại cho n sinh viên trong lớp. Tính xác suất để không có sinh viên nào nhận lại đúng bài của mình.

Bài 6.25 Cho $X = \{a, b, c\}$. Có bao nhiêu từ có chiều dài 4 trên X sao cho

a) Mỗi chữ cái a, b, c xuất hiện ít nhất một lần.

b) a xuất hiện đúng 2 lần.

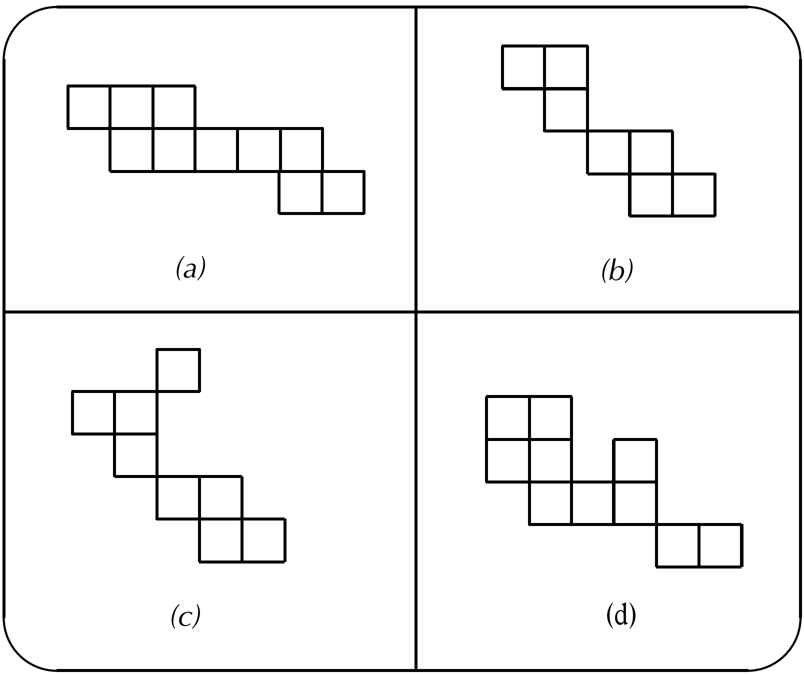
c) a xuất hiện ít nhất 2 lần.

Bài 6.26 Trong 1 cuộc thăm dò dư luận, trong số 3 ca sĩ A, B, C thì có 45% thích A, 50% thích B, 60% thích C. Giả sử có 35% thích 2 ca sĩ bất kỳ trong số 3 ca sĩ và 25% thích cả ba. Hỏi có bao nhiêu phần trăm số người được hỏi

a) Chỉ thích ca sĩ A.

b) Thích đúng 2 trong 3 ca sĩ.

Bài 6.27 Tìm đa thức quân xe của các bàn cờ trong Hình 6.12



Hình 6.12

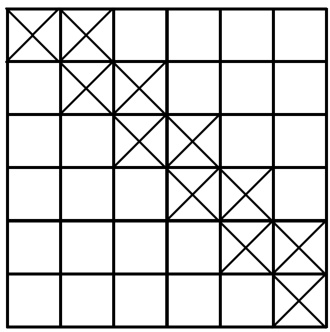
Bài 6.28 Gọi $R_{m,n}(x)$ là đa thức quân xe của bàn cờ bàn cờ chữ nhật $m \times n$. Chứng minh rằng

a) $R_{m,n}(x) = R_{m-1,n}(x) + nxR_{m-1,n-1}(x)$.

b) $\dfrac{d(R_{m,n}(x))}{dx} = mnR_{m-1,n-1}(x)$.

Bài 6.29 Cho khối vuông Latinh 5×5 có 2 dòng đầu là 1, 2, 3, 4, 5 và 2, 3, 4, 5, 1. Có bao nhiêu cách thêm dòng thứ 3?

Bài 6.30 Coi các ô gạch chéo trong bàn cờ $n \times n$ tương tự như trong Hình 6.11



Hình 6.13

Gọi $L_k(x)$ là đa thức quân xe của bàn cờ tạo bởi k ô gạch chéo đầu tiên (từ trên xuống dưới và trái sang phải).

a) Chứng minh rằng $L_0(x) = 1, L_1(x) = 1 + x$ và với $k > 1$ thì

$$L_k(x) = L_{k-1}(x) + xL_{k-2}(x).$$

Suy ra rằng đa thức quân xe bàn cờ tạo bởi tất cả các ô bị cấm là

$$L_{2n-1}(x) = \sum_r \mathbf{C}_{2n-r}^r x^r.$$

b) Trong bàn cờ trên, ta thêm một ô gạch chéo là ô ngay bên trái của ô cuối cùng và gọi $R_n(x)$ là đa thức quân xe của bàn cờ gồm các ô gạch chéo. Chứng minh rằng

$$R_n(x) = L_{2n-1}(x) + xL_{2n-3}(x) = \sum_r \frac{2n}{2n-r}\mathbf{C}_{2n-r}^r x^r.$$

Bài 6.31 Gọi a_n là số cách sắp n cặp vợ chồng ngồi quanh một bàn tròn sao cho nam nữ xen kẽ nhau và không có ông chồng nào ngồi cạnh vợ mình. Chứng minh rằng $a_n = (n-1)!b_n$ với b_n là số cách đặt 5 con xe trên bàn cờ tạo bởi các ô không bị gạch chéo trong Bài 30. Suy ra rằng

$$b_n = \sum_k (-1)^k \frac{2n}{2n-k}\mathbf{C}_{2n-k}^k (n-k)!$$

Kiểm chứng hệ thức này khi $n = 5$.

Bài 6.32 Có 7 công nhân A, B, C, D, E, F, G mà mỗi người được giao một việc trong số 7 việc a, b, c, d, e, e, f, g. Hỏi có bao nhiêu cách phân công thích hợp, biết rằng A không thể làm các việc b và c; B không thể làm các việc a và e; D không thể làm các việc c và f; E không thể làm các việc b và g; G không thể làm việc d.

Bài 6.33 Một đội bóng có 6 cầu thủ A, B, C, D, E, F chơi ở 6 vị trí 1, 2, 3, 4, 5, 6. Cầu thủ A không thích hợp ở vị trí 1 hay 2, B không thích hợp ở vị trí 4, C không thích hợp ở vị trí 1 hay 5, D không thích hợp ở vị trí 2, E không thích hợp ở vị trí 4, F không thích hợp ở vị trí 4 hay 6. Hỏi có bao nhiêu cách bố trí đội hình thích hợp?

Bài 6.34 Trong một bữa tiệc, người ta muốn sắp 4 người khách R_1, R_2, R_3, R_4 vào các bàn $T_j, j = 1, \ldots, 5$. Hỏi có bao nhiêu cách sắp thỏa các điều kiện sau: R_1 không ngồi ở bàn T_1 hay ở T_2; R_2 không ngồi ở bàn T_2; R_3 không ngồi ở bàn T_3 hay ở T_4; R_4 không ngồi ở bàn T_4 hay ở T_5.

Bài 6.35 Một văn phòng môi giới hôn nhân muốn ghép đôi 1 nam với 1 nữ trong số 5 nam A, B, C, D, E và 4 nữ a, b, c, d. Tìm số cách ghép đôi thích hợp biết rằng a không thích hợp với B và C, b không thích hợp với C, c không thích hợp với A và E, d không thích hợp với B.

Bài 6.36 Có hai hạt xí ngầu gồm một hạt đỏ và một hạt đen. Người ta cùng lúc tung 2 hạt xí ngầu này và tung sáu lần và biết rằng các cặp số sau đây không xuất hiện: (1,2), (2,1), (2,5), (3,4), (4,1), (4,5), (6,6), trong đó cặp (x, y) chỉ số x xuất hiện ở hạt đỏ và số y xuất hiện ở hạt đen. Tính xác suất để tất cả 6 số 1, 2, 3, 4, 5, 6 đều xuất hiện ở mỗi hạt.

Bài 6.37 Người ta muốn phân phối 5 món quà A, B, C, D cho 5 người a, b, ,c, d, e sao cho A không nhận a hay c; B không nhận d; C không nhận b hay e; D không nhận b; E không nhận a hay c. Tính xác suất để:

a) A nhận e.

b) B hoặc E nhận e.

Chương 7. BÀI TOÁN GHÉP ĐÔI

Bài 7.1 Tìm một SDR nếu có của $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ trong những trường hợp sau

a) $A_1 = \{2, 3, 4\}$, $A_2 = \{3, 4\}$, $A_3 = \{1\}$, $A_4 = \{2, 3\}$.

b) $A_1 = A_2 = A_3 = \{2, 4, 5\}$, $A_4 = A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3, 4\}$, $A_3 = \{2, 3\}$, $A_4 = \{1, 3\}$, $A_5 = \{2, 4\}$.

d) $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{a, b, c\}$, $A_3 = \{c, d\}$, $A_4 = \{b, d, e\}$, $A_5 = \{c, f\}$, $A_6 = \{a, d, g\}$, $A_7 = \{f\}$.

Bài 7.2 a) Cho $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_4\}$ với $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{3, 4\}$, $A_4 = \{4, 1\}$. Tìm tất cả các SDR của $\mathcal{A}$.

b) Cho $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ với $A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{3, 4\}$, $\ldots$, $A_n = \{n, 1\}$. $\mathcal{A}$ có bao nhiêu SDR?

Bài 7.3 Cho $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = \{1, \ldots, t\}$ và $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_k\}$.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ có một SDR nếu và chỉ nếu $t \leq k$.

b) Nếu $t \geq k$ thì $\mathcal{A}$ có bao nhiêu SDR khác nhau?

Bài 7.4 Cho $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ có một SDR và $A_i \geq t, \forall i$. Gọi s là số SDR của $\mathcal{A}$. Chứng minh rằng $s \geq t!$ nếu $t < k$ và $s \geq \mathbf{A}_t^k$ nếu $t \geq k$ ($\mathbf{A}_t^k$ là số chỉnh hợp t chập k).

Bài 7.5 Cho $\mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_k\}$ có một SDR. Chứng minh rằng có j sao cho với mọi $a \in A_j$, tồn tại một SDR sao cho a là đại diện của A_j.

Bài 7.6 Cho khối chữ nhật Latinh loại $r \times n$ với $r < n$. Chứng minh rằng có ít nhất $(n-r)!$ cách thêm vào dòng thứ $r+1$ để có khối chữ nhật Latinh loại $(r+1) \times n$.

Bài 7.7 Cho $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ với $A_i = \{1, \ldots, n\} - \{i\}$, $i = 1, \ldots, n$. $\mathcal{A}$ có bao nhiêu SDR khác nhau?

Bài 7.8 Cho $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ với A_i có $i+1$ phần tử, $i = 1, \ldots, k$. Chứng minh $\mathcal{A}$ có ít nhất là 2^k SDR khác nhau. Cho 1 ví dụ sao cho $\mathcal{A}$ có đúng 2^k SDR.

Bài 7.9 Cho $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ có SDR và $1 \leq h < k$. Nếu $A_1, \ldots, A_h$ có SDR là $a_1, \ldots, a_h$ thì $\mathcal{A}$ có một SDR sao cho $a_1, \ldots, a_h$ là những đại diện (không bắt buộc là đại diện của $A_1, \ldots, A_h$). Cho 1 ví dụ để chứng tỏ rằng $a_1, \ldots, a_h$ là những đại diện của $\mathcal{A}$ nhưng không bắt buộc là đại diện của $A_1, \ldots, A_h$.

Bài 7.10 Cho S là một tập hợp có nk phần tử được phân hoạch thành n tập hợp, mỗi tập hợp có k phần tử bằng 2 cách

$$S = A_1 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup \cdots \cup B_n.$$

Đặt $C_i = \{j : B_j \cap A_i \neq \emptyset\}$. Chứng minh rằng $C_1, \ldots, C_n$ có SDR và suy ra rằng $B_1, \ldots, B_n$ có thể được đánh số lại sao cho $A_i \cap B_i \neq \emptyset$

Bài 7.11 Giả sử có nk phóng viên, mỗi phóng viên chuyên trách một trong n môn thể thao tại một trong n điểm thi đấu sao cho có k phóng viên cho mỗi môn và k phóng viên ở mỗi điểm. Chứng minh rằng có thể phân công các phóng viên cho k tờ báo, mỗi tờ báo có n phóng viên sao cho mỗi môn và mỗi điểm thi đấu đều có phóng viên của mỗi tờ báo.

Bài 7.12 Công ty muốn phân công 5 người đang ở 5 địa điểm khác nhau A, B, C, D, E đến 5 thành phố khác nhau a, b, c, d, e, mỗi người

1 thành phố. Khoảng cách giữa các địa điểm và các thành phố cho bởi bảng sau đây

	A	B	C	D	E
a	50	41	50	85	42
b	110	122	54	147	57
c	127	78	151	99	172
d	109	67	144	73	160
e	52	102	117	89	49

Phí di chuyển tỉ lệ thuận với khoảng cách. Hỏi phải phân công như thế nào để tổng phí di chuyển là bé nhất.

Bài 7.13 Một văn phòng môi giới hôn nhân muốn ghép 4 nam và 4 nữ thành 4 cặp, máy tính đưa ra mức độ thích hợp của mỗi cặp trong bảng sau đây, tính bằng phần trăm

	B_1	B_2	B_3	B_4
G_1	40	65	70	45
G_2	70	90	45	70
G_3	60	40	85	65
G_4	75	85	60	60

Tìm phương án ghép đôi thích hợp nhất.

Bài 7.14 Khoa Toán-Tin học cần phân công 6 giảng viên $L_1, \ldots, L_6$ để giảng dạy 5 lớp $C_1, \ldots, C_5$. Mức độ thích hợp của mỗi giảng viên đối với các lớp cho bởi bảng điểm sau đây, điểm càng cao càng không thích hợp

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
C_1	70	20	50	20	45	30
C_2	55	25	40	30	40	15
C_3	50	20	45	10	45	25
C_4	35	30	35	40	30	20
C_5	45	15	40	25	35	40

Tìm phương án phân công tốt nhất.

Bài 7.15 Chứng minh Định lý Hall bằng cách dùng Định lý König-Egervary.

Bài 7.16 Cho các công việc $J_1, \ldots, J_8$ với $J_i < J_k \iff i < k$. Danh sách ứng viên của các công việc này cho trong bảng sau

Công việc	Ứng viên
J_1	A, C, D, E
J_2	A, E
J_3	B, G
J_4	A, B, D, E
J_5	B, C, G
J_6	E, F
J_7	G
J_8	D, E

Tìm phương án phân công tối ưu, tức là tìm OAS.

Bài 7.17 Cho biết a, b, c, d, e, f, g là thành viên của 6 ủy ban A, B,

C, D, E, F như trong bảng sau

Ủy ban	Thành viên
A	a, e, f
B	b, c
C	a, b
D	b, d, e, g
E	a, e, f
F	a, b, d

a) Có thể nào thành lập một ủy ban G gồm 6 người sao cho mỗi ủy ban A, B, C, D, E, F đều có một đại diện trong G, biết rằng a đại diện cho F?

b) Tình hình tài chánh 6 ủy ban sẽ được xem xét bởi 6 người khác nhau và không thuộc ủy ban được xem xét. Hỏi điều này có thực hiện được không?

Bài 7.18 Một nhóm có 10 người. Có bao nhiêu cách ghép 10 người này thành 5 đôi?

Bài 7.19 Có 20 công nhân và 5 kỹ sư. Có bao nhiêu cách phân chia 20 công nhân thành 5 nhóm, mỗi nhóm 4 người và mỗi kỹ sư quản lý 1 nhóm.

Bài 7.20 Có bao nhiêu cách chia bộ bài 52 lá cho 4 người, mỗi người có 12 lá?

Bài 7.21 Có bao nhiêu cách phân chia 16 đội bóng thành 4 nhóm, mỗi nhóm 4 đội sao cho 2 đội A và đội B ở trong cùng một nhóm?

Bài 7.22 Cho biết tất cả các cặp ghép có thể của $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ là $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$, $(4, 6)$, $(5, 7)$, $(5, 8)$, $(7, 8)$. Tìm một cặp ghép đủ.

Bài 7.23 Vẽ một đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc ≥ 5 và tìm một cặp ghép đủ.

Bài 7.24 Vẽ một đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc ≥ 4 mà không có cặp ghép đủ.

Bài 7.25 Cho $G = (X, Y, E)$ và $d = \max\{d(x) : x \in X\}$. Chứng minh rằng nếu $d \leq d(y), \forall y \in Y$ thì G có 1 cặp ghép đủ. Đảo lại có đúng không?

Bài 7.26 Xét xem $K_{r,s}$ có bao nhiêu cặp ghép đủ trong các trường hợp sau:

a) $r = 2, s = 4$.

b) $r = 4, s = 4$.

c) $r = 5, s = 9$.

d) $r \leq s$.

Bài 7.27 Người ta muốn phân phối 25 công việc cho 25 người qua 1 cuộc thi. Mỗi ứng viên thi ít nhất là 4 việc nhưng mỗi việc có không quá 3 người đáp ứng yêu cầu. Hỏi có thể nào phân phối cho mỗi người một việc trong số các việc mà họ đã thi?

Bài 7.28 a) Chứng minh rằng nếu $G = (X, E)$ có 1 cặp ghép đủ thì $n = |X|$ là số chẵn.

b) Đồ thị Petersen có một cặp ghép đủ không?

c) K_4 có bao nhiêu cặp ghép đủ? Còn K_6?

d) Gọi a_n là số cặp ghép đủ của K_{2n}. Tìm a_n.

Bài 7.29 Cho $G = (X, Y, E)$ với $|X| \leq 10$ và $d(x) \geq 4, \forall x \in X$, $d(y) \leq 5, \forall y \in Y$. Chứng minh rằng $\delta(G) \leq 2$.

Bài 7.30 Cho $G = (X, Y, E)$ với $|X| \leq 50$ và $d(x) \geq 3, \forall x \in X$, $d(y) \leq 7, \forall y \in Y$. Tìm chặn trên nhỏ nhất của $\delta(G)$.

Bài 7.31 Cho $G = (X, E)$ và $A \subset X$. Ta bảo A là *độc lập* nếu không có cặp đỉnh nào của A là kề nhau. Đặt

$$\beta(G) = \max\{|A| : A \subset X \text{ và } A \text{ độc lập}\}.$$

và ta gọi $\beta(G)$ là*số độc lập* của G.

Với $X = \{x_1, \ldots, x_5\}, Y = \{y_1, \ldots, y_4\}$, ta xét đồ thị lưỡng phân $G = (X, Y, E)$ xác định bởi

$$B_{12} = \begin{array}{|cccc|} \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

a) Tìm $\beta(G)$.

b) Tìm $\delta(G)$ và một cặp ghép lớn nhất của G.

c) Chứng minh rằng $|Y| = \beta(G) - \delta(G)$. Đẳng thức này có đúng cho $G = (X, Y, E)$ bất kỳ không?

Bài 7.32 Cho $G = (X, Y, E)$ và $E' \subset E, E'$ xác định 1 cặp ghép đủ từ X vào Y. Tập hợp các đỉnh trong $L(G)$ (đồ thị đường của G) ứng với E' có tính chất gì?

Bài 7.33 Trường Đại học Khoa học Tự nhiên có 6 khoa có sinh viên tốt nghiệp thạc sĩ, mỗi khoa 5 sinh viên. Có 5 cơ quan muốn tuyển những sinh viên này với số lượng là: 7, 7, 6, 6, 5 người, và mỗi khoa có không quá 1 người được tuyển ở mỗi cơ quan. Hỏi tất cả các sinh viên có được tuyển không?

Bài 7.34 Một ma trận vuông cấp n trên $\{0, 1\}$ gọi là *ma trận hoán vị* nếu có đúng một số 1 trên mỗi dòng và trên mỗi cột. Một ma trận vuông trên $\mathbb{R}^+$ gọi là *doubly stochastic* nếu mỗi dòng và tổng mỗi cột đều bằng 1. Ta muốn chứng minh Định lý Birkhoff-von Neumann: *Nếu M là một ma trận doubly stochastic thì có các số thực dương $c_1, \ldots, c_k$ và các ma trận hoán vị $P_1, \ldots, P_k$ sao cho $\sum_{i=1}^{k} c_i = 1$ và $M = \sum_{i=1}^{k} c_k P_k$.*

a) Với $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, ta xét đồ thị $G = (X, Y, E)$ trong đó $x_i y_j \in E \iff M_{ij} > 0$. Chứng minh rằng G có 1 cặp ghép đủ.

b) Suy từ (a) trong M có n phần tử khác không ở trên các dòng và các cột khác nhau của M. Gọi c_1 là số nhỏ nhất trong các phần tử này và P_1 là ma trận hoán vị với các số 1 tương ứng các vị trí khác không đó của M. Chứng minh rằng ta có thể viết $M = c_1 P_1 + M_1$. Tính tổng các dòng và tổng các cột của M_1.

c) Chứng minh Định lý Birkhoff-von Neumann.

Chương 8. LÝ THUYẾT MÃ

Bài 8.1 Giả sử những từ mã nhị phân sau đây $\{000, 100, 111\}$ được truyền đi qua một kênh nhị phân đối xứng với xác xuất truyền sai $p = 0.03$. Dùng qui tắc MLD để giải mã các từ nhận được sau đây

a) 010. b) 011. c) 001.

Bài 8.2 Giả sử những từ mã nhị phân sau đây $\{000, 100, 111\}$ được truyền đi qua một kênh nhị phân không có bộ nhớ với các xác xuất truyền như sau: $\mathcal{P}$(nhận 0/truyền 0)$= 0.7$, $\mathcal{P}$(nhận 1/truyền 1) $= 0.8$. Dùng qui tắc MLD để giải mã các từ nhận được sau đây:

a) 010. b) 011. c) 001.

Bài 8.3 Cho mã nhị phân $C = \{001, 011\}$

a) Giả sử ta có một kênh nhị phân không có bộ nhớ với các xác xuất truyền như sau: $\mathcal{P}$(nhận 0/truyền 0)$= 0.1$, $\mathcal{P}$(nhận 1/truyền 1) $= 0.5$. Dùng qui tắc MLD để giải mã các từ nhận được 000.

b) Giải mã 000 bằng cách dùng MDD.

Bài 8.4 Cho mã nhị phân $C = \{01101, 00011, 10110, 11000\}$. Dùng MDD để giải mã các từ nhận được sau đây

a) 00000 b) 01111 c) 10110

d) 10011 e) 11011.

Bài 8.5 Cho mã $C = \{00122, 12201, 20110, 22000\}$. Dùng MDD để giải mã các từ nhận được sau đây

a) 01122 b) 10021 c) 22022 d) 20120.

Bài 8.6 Xây dựng bảng IMLD cho các mã sau đây

a) $C = \{101, 111, 011\}$.

b) $C = \{000, 001, 010, 011\}$.

Bài 8.7 Trường hợp nào C là mã tuyến tính trên F_q

a) $q = 2, C = \{1101, 1110, 1011, 1111\}$.

b) $q = 2, C = \{00000, 11110, 01111, 10001\}$.

c) $q = 3, C = \{0000, 1001, 0110, 2002, 1111, 0220, 1221, 2112, 2222\}$.

Bài 8.8 a) Cho $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in F_2^n$. Chứng minh rằng $\mathbf{wt}(\mathbf{x})$ và $\mathbf{wt}(\mathbf{y})$ cùng chẵn hay cùng lẻ nếu và chỉ nếu $\mathbf{wt}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ chẵn.

b) Chứng minh rằng với C là mã tuyến tính thì hoặc là $\mathbf{wt}(\mathbf{x})$ chẵn $\forall \mathbf{x} \in C$ hoặc có đúng một nửa phần tử của C có trọng lượng là số chẵn.

Bài 8.9 Cho C là mã nhị phân tuyến tính với các tham số $[n, k, d]$ và C có ít nhất một từ mã với trọng lượng lẻ. Gọi C' là tập con của C gồm tất cả các từ mã có trọng lượng chẵn. Chứng minh rằng C' là mã tuyến tính với các tham số $[n, k-1, d']$ với $d' > d$ nếu d lẻ và $d' = d$ nếu d chẵn.

Bài 8.10 Cho C là mã tuyến tính tự trực giao trên F_q.

a) Với $q = 2$, chứng minh rằng $\mathbf{wt}(\mathbf{x})$ là số chẵn $\forall \mathbf{x} \in C$. Nếu $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$ với $\mathbf{wt}(\mathbf{x}), \mathbf{wt}(\mathbf{y})$ là bội số của 4, chứng minh rằng $\mathbf{wt}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ cũng là bội số của 4.

b) Với $q = 3$, chứng minh rằng $\mathbf{wt}(\mathbf{x})$ là bội số của 3 $\forall \mathbf{x} \in C$.

c) Với $q = 5$, tìm C sao cho có $\mathbf{x} \in C$ với $\mathbf{wt}(\mathbf{x})$ không là bội số của 5.

Bài 8.11 Cho C là mã nhị phân tuyến tính tự đối ngẫu với các tham số $[n, k, d]$.

a) Chứng minh rằng $(1, 1, \ldots, 1) \in C$.

b) Chứng minh rằng hoặc là $\mathbf{wt}(\mathbf{x})$ là bội số của 4 $\forall \mathbf{x} \in C$ hoặc là có đúng một nửa phần tử của C là có trọng lượng là bội số của 4, nửa còn lại có trọng lượng không là bội số của 4.

c) Cho $n = 6$. Tìm d.

Bài 8.12 Xác định ma trận kiểm tra của một mã nhị phân tự đối ngẫu với chiều dài 10.

Bài 8.13 Chứng minh rằng không tồn tại mã nhị phân tuyến tính với các tham số $[10, 5, 4]$.

Bài 8.14 Cho n lẻ và C là mã nhị phân tự trực giao loại $[n, \dfrac{n-1}{2}]$ và

$\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$. Chứng minh rằng $C^{\perp} = C \cup (\mathbf{1} + C)$.

Bài 8.15 Cho C là mã tuyến tính có chiều dài n trên F_q. Với $1 \leq i \leq n$, chứng minh rằng ta có hoặc $x_i = 0$ với mọi $\mathbf{x} = x_1x_2 \ldots x_n \in C$ hoặc

mỗi phần tử $\alpha \in F_q$ xuất hiện ở vị trí thứ i trong đúng $\dfrac{1}{q}$ từ mã trong C.

Bài 8.16 Cho C là mã tuyến tính trên F_q với các tham số $[n, k, d]$ và giả sử rằng với $1 \leq i \leq n$, có ít nhất một từ mã $\mathbf{x} = x_1x_2 \ldots x_n$ mà $x_i \neq 0$. Chứng minh rằng

a) $\displaystyle\sum_{\mathbf{x} \in C} \mathbf{wt}(\mathbf{x}) = n(q-1)q^{k-1}$.

b) $d \leq \dfrac{n(q-1)q^{k-1}}{q^k - 1}$.

c) Không có mã nhị phân tuyến tính với các tham số $[15, 7, d]$ với $d \geq 8$.

Bài 8.17 Tìm ma trận sinh, ma trận kiểm tra và cho biết các tham số của các mã tuyến tính sinh bởi S trong các trường hợp sau:

a) $S = \{1000, 0110, 0010, 0001, 1001\}$ với $q = 2$.

b) $S = \{11000, 01100, 001100, 000110, 000011\}$ với $q = 3$.

c) $S = \{10101010, 11001100, 11110000, 01100110, 00111100\}$ với $q = 2$.

Bài 8.18 Tìm ma trận sinh G' ở dạng chuẩn của mã C' tương đương với mã C cho bởi ma trận sinh G trong các trường hợp sau:

a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Bài 8.19 Tìm ma trận sinh G' ở dạng chuẩn của mã C' tương đương với mã C cho bởi ma trận kiểm tra H trong các trường hợp sau:

a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 8.20 Cho $C \subset F_2^6$ gồm các từ $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ thỏa

$$x_4 = x_1 + x_2 + x_3, x_5 = x_1 + x_3, x_6 = x_2 + x_3.$$

a) Chứng minh rằng C là mã tuyến tính.

b) Tìm ma trận sinh G và ma trận kiểm tra H của C.

Bài 8.21 Cho $C \subset F_2^8$ gồm các từ $x_1x_2 \ldots x_8$ thỏa

$$\begin{aligned} x_5 &= x_1 + x_2 + x_3,\ x_6 = x_1 + x_2 + x_4, \\ x_7 &= x_1 + x_3 + x_4,\ x_8 = x_2 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

a) Chứng minh rằng C là mã tuyến tính.

b) Tìm ma trận sinh G và ma trận kiểm tra H của C.

c) Chứng minh rằng C tự đối ngẫu.

d) Chứng minh rằng C phát hiện được 3 lỗi và hiệu chỉnh được 1 lỗi.

Bài 8.22 Chứng minh rằng, nếu 2 mã C vàC' tương đương thì $C^{\perp}$ và $(C')^{\perp}$ cũng tương đương.

Bài 8.23 Cho H là ma trận loại $(n-k) \times n$ và M là ma trận vuông cấp $n-k$ trên F_q. Giả sử H là ma trận kiểm tra của mã C và M khả nghịch. Chứng minh rằng MH cũng là ma trận kiểm tra của C.

Bài 8.24 Tìm khoảng cách của mã nhị phân tuyến tính C cho bởi ma trận kiểm tra H trong các trường hợp sau:

a) $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 8.25 Cho $n \geq 4$ và H là ma trận kiểm tra của mã nhị phân tuyến tính C có chiều dài n. Giả sử rằng các cột của H đều khác nhau và trọng lượng của mỗi cột của H đều là số lẻ. Chứng minh rằng khoảng cách của C lớn hơn hoặc bằng 4.

Bài 8.26 Cho H là ma trận kiểm tra của mã tuyến tính C. Chứng minh rằng tập kề $\overline{\mathbf{x}}$ có $Sd(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}$ chứa một vectơ có trọng lượng t nếu và chỉ nếu $\mathbf{y}$ là tổ hợp tuyến tính t cột của H.

Bài 8.27 Cho C là mã nhị phân tuyến tính loại $[n, n-m]$ với $2^{m-1} \leq n < 2^m$ và H là ma trận kiểm tra của C. Giả sử rằng cột thứ i của H là biểu diễn nhị phân của i. Chứng minh rằng mỗi tập kề của C chứa một vectơ có trọng lượng ≤ 2.

Bài 8.28 Cho C là mã nhị phân tuyến tính trên F_q với khoảng cách d.

Chứng minh rằng nếu $\mathbf{wt}(\mathbf{x}) \leq [\dfrac{d-1}{2}]$ thì $\mathbf{x}$ là phần tử trội duy nhất

của $\overline{\mathbf{x}}$.

Bài 8.29 Cho C là mã tuyến tính có khoảng cách d với d chẵn. Chứng minh rằng tồn tại $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{x} + C$ sao cho $\overline{\mathbf{x}}$ chứa 2 vectơ có trọng lượng

$k+1$ với $k=[\frac{d-1}{2}]$.

Bài 8.30 Cho C là mã tuyến tính trên F_3

$$C=\{0000,1010,2020,0101,0202,1111,1212,2121,2222\}$$

Chứng minh ma trận kiểm tra H của C là $H=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dùng H và CLMD, xây dựng SDA của C.

Bài 8.31 Cho C là mã nhị phân tuyến tính có ma trận kiểm tra

$$H=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Viết ma trận sinh và liệt kê tất cả các từ mã của C. Giải mã các từ sau đây

a) 110110 b) 011011 c) 101010.

Bài 8.32 Viết ma trận kiểm tra H của mã nhị phân tuyến tính Hamming có độ dài 15 với cột thứ j của H là biểu diễn nhị phân của j. Dùng H để xây dựng SDA và giải mã các từ sau:

a) 010100101001000.

b) 111000111000111.

c) 110011100111000.

Bài 8.33 Cho $C = Ham(7,4)$ với ma trận kiểm tra

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Mã hóa các bản tin sau đây:

$$1000, 1100, 1011, 1110, 1001, 1111.$$

b) Giải mã các từ nhận được sau đây:

$$1100001, 1110111, 0010001, 0011100.$$

c) Xây dựng SA và SDA của C.

d) Dùng kết quả ở c) để giải mã các từ trong b).

Bài 8.34 Cho $C = Ham(2,3)$.

a) Chứng minh rằng C là tự đối ngẫu.

b) Xác định trọng lượng của các phần tử của C.