Bài tập toán cao cấp
Tập 2

Nguyễn Thủy Thanh

NXB Đại học quốc gia Hà Nội 2007, 158 Tr.

Từ khoá: Bài tập toán cao cấp, Giới hạn dãy số, Giới hạn hàm số, Tính liên tục của hàm số, Hàm liên tục, Phép tính vi phân hàm một biến,
Đạo hàm, Vi phân, Công thức Taylor, Đạo hàm riêng, Vi phân của hàm nhiều biến, Cực trị của hàm nhiều biến.

NGUYỄN THUỶ THANH

BÀI TẬP TOÁN CAO CẤP

Tập 2

Phép tính vi phân các hàm

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Mục lục

Chương 7

Giới hạn và liên tục của hàm số

7.1 Giới hạn của dãy số

Hàm số xác định trên tập hợp $\mathbb{N}$ được gọi là dãy số vô hạn. Dãy số thường được viết dưới dạng:

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \tag{7.1}$$

hoặc $\{a_n\}$, trong đó $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$ được gọi là số hạng tổng quát của dãy, n là số hiệu của số hạng trong dãy.

Ta cần lưu ý các khái niệm sau đây:

i) Dãy (7.1) được gọi là bị chặn nếu $\exists\, M \in \mathbb{R}^+ : \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| \leqslant M$; và gọi là không bị chặn nếu: $\forall\, M \in \mathbb{R}^+ : \exists\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_n| > M$.

ii) Số a được gọi là giới hạn của dãy (7.1) nếu:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) : \forall\, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon. \tag{7.2}$$

iii) Số a không phải là giới hạn của dãy (7.1) nếu:

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, N : \exists\, n \geqslant N \Rightarrow |a_n - a| \geqslant \varepsilon. \tag{7.3}$$

iv) Dãy có giới hạn được gọi là dãy hội tụ, trong trường hợp ngược lại dãy (7.1) gọi là dãy phân kỳ.

v) Dãy (7.1) gọi là dãy vô cùng bé nếu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ và gọi là dãy vô cùng lớn nếu $\forall\, A > 0$, $\exists\, N$ sao cho $\forall\, n > N \Rightarrow |a_n| > A$ và viết $\lim a_n = \infty$.

vi) Điều kiện cần để dãy hội tụ là dãy đó phải bị chặn.

Chú ý: i) Hệ thức (7.2) tương đương với:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \tag{7.4}$$

Hệ thức (7.4) chứng tỏ rằng mọi số hạng với chỉ số $n > N$ của dãy hội tụ đều nằm trong khoảng $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, khoảng này gọi là ε-lân cận của điểm a.

Như vậy, nếu dãy (7.1) hội tụ đến số a thì mọi số hạng của nó trừ ra một số hữu hạn số hạng đều nằm trong ε-lân cận bất kỳ bé bao nhiêu tùy ý của điểm a.

ii) Ta lưu ý rằng dãy số vô cùng lớn không hội tụ và ký hiệu $\lim a_n = \infty$ $(-\infty)$ chỉ có nghĩa là dãy a_n là vô cùng lớn và ký hiệu đó hoàn toàn không có nghĩa là dãy có giới hạn.

7.1.1 Các bài toán liên quan tới định nghĩa giới hạn

Để chứng minh $\lim a_n = a$ bằng cách sử dụng định nghĩa, ta cần tiến hành theo các bước sau đây:

i) Lập biểu thức $|a_n - a|$

ii) Chọn dãy b_n (nếu điều đó có lợi) sao cho $|a_n - a| \leqslant b_n$ $\forall n$ và với ε đủ bé bất kỳ bất phương trình đối với n:

$$b_n < \varepsilon \tag{7.5}$$

có thể giải một cách dễ dàng. Giả sử (7.5) có nghiệm là $n > f(\varepsilon)$, $f(\varepsilon) > 0$. Khi đó ta có thể lấy n là $[f(\varepsilon)]$, trong đó $[f(\varepsilon)]$ là phần nguyên của $f(\varepsilon)$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử $a_n = n^{(-1)^n}$. Chứng minh rằng:

i) Dãy a_n không bị chặn.

ii) Dãy a_n không phải là vô cùng lớn.

Giải. i) Ta chứng minh rằng a_n thỏa mãn định nghĩa dãy không bị chặn. Thật vậy, $\forall M > 0$ số hạng với số hiệu $n = 2([M] + 1)$ bằng n và lớn hơn M. Điều đó có nghĩa là dãy a_n không bị chặn.

ii) Ta chứng minh rằng a_n không phải là vô cùng lớn. Thật vậy, ta xét khoảng $(-2, 2)$. Hiển nhiên mọi số hạng của dãy với số hiệu lẻ đều thuộc khoảng $(-2, 2)$ vì khi n lẻ thì ta có:

$$n^{(-1)^n} = n^{-1} = 1/n \in (-2, 2).$$

Như vậy trong khỏng $(-2, 2)$ có vô số số hạng của dãy. Từ đó, theo định nghĩa suy ra a_n không phải là vô cùng lớn. ▲

Ví dụ 2. Dùng định nghĩa giới hạn dãy số để chứng minh rằng:

$$1) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0. \qquad 2) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Giải. Để chứng minh dãy a_n có giới hạn là a, ta cần chứng minh rằng đối với mỗi số $\varepsilon > 0$ cho trước có thể tìm được số N (N phụ thuộc ε) sao cho khi $n > N$ thì suy ra $|a_n - a| < \varepsilon$. Thông thường ta có thể chỉ ra công thức tường minh biểu diễn N qua ε.

1) Ta có:

$$|a_n - 0| = \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n}\cdot$$

Giả sử ε là số dương cho trước tùy ý. Khi đó:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}\cdot$$

Vì thế ta có thể lấy N là số tự nhiên nào đó thỏa mãn điều kiện:

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(Chẳng hạn, ta có thể lấy $N = [1/\varepsilon]$, trong đó $[1/\varepsilon]$ là phần nguyên của $1/\varepsilon$).

Khi đó $\forall\, n \geqslant N$ thì:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Điều đó có nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

2) Ta lấy số $\varepsilon > 0$ bất kỳ và tìm số tự nhiên $N(\varepsilon)$ sao cho $\forall\, n > N(\varepsilon)$ thì:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Bất đẳng thức

$$|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Do đó ta có thể lấy số $N(\varepsilon)$ là phần nguyên của $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1$, tức là:

$$N(\varepsilon) = E((1/\varepsilon) - 1).$$

Khi đó với mọi $n \geqslant N$ ta có:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{N+1} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1. \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Chứng minh rằng các dãy sau đây phân kỳ:

1) $$a_n = n, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (7.6)$$

2) $$a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (7.7)$$

3) $$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}\cdot \qquad (7.8)$$

Giải. 1) Giả sử dãy (7.6) hội tụ và có giới hạn là a. Ta lấy $\varepsilon = 1$. Khi đó theo định nghĩa giới hạn tồn tại số hiệu N sao cho $\forall\, n > N$ thì ta có $|a_n - a| < 1$ nghĩa là $|n - a| < 1$ $\forall\, n > N$. Từ đó $-1 < n - a < 1$ $\forall\, n > N \Leftrightarrow a - 1 < n < a + 1$ $\forall\, n > N$.

Nhưng bất đẳng thức $n < a + 1$, $\forall\, n > N$ là vô lý vì tập hợp các số tự nhiên không bị chặn.

2) *Cách 1.* Giả sử dãy a_n hội tụ và có giới hạn là a. Ta lấy lân cận $\left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right)$ của điểm a. Ta viết dãy đã cho dưới dạng:

$$\{a_n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots. \qquad (7.9)$$

Vì độ dài của khoảng $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ là bằng 1 nên hai điểm -1 và $+1$ không thể đồng thời thuộc lân cận $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ của điểm a, vì khoảng cách giữa -1 và $+1$ bằng 2. Điều đó có nghĩa là ở ngoài lân cận $\left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right)$ có vô số số hạng của dãy và vì thế (xem chú ý ở trên) số a không thể là giới hạn của dãy.

Cách 2. Giả sử $a_n \to a$. Khi đó $\forall \varepsilon > 0$ (lấy $\varepsilon = \frac{1}{2}$) ta có

$$|a_n - a| < \frac{1}{2} \quad \forall n \geqslant N.$$

Vì $a_n = \pm 1$ nên

$$\begin{aligned}
&|1 - a| < \frac{1}{2}, \quad |-1 - a| < \frac{1}{2} \\
\Rightarrow &2 = |(1 - a) + (1 + a)| \leqslant |1 - a| + |a + 1| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
\Rightarrow &2 < 1, \quad \text{vô lý.}
\end{aligned}$$

3) Lưu ý rằng với $n = 2m \Rightarrow a_{2m} = 1 + \frac{1}{2m}$. Số hạng kề với nó có số hiệu lẻ $2m + 1$ (hay $2m - 1$) và

$$a_{2m+1} = -1 + \frac{1}{2m+1} < 0 \quad (\text{hay } a_{2m-1} = -1 + \frac{1}{2m-1} \leqslant 0).$$

Từ đó suy rằng

$$|a_n - a_{n-1}| > 1.$$

Nếu số a nào đó là giới hạn của dãy (a_n) thì bắt đầu từ số hiệu nào đó (a_n) thỏa mãn bất đẳng thức $|a_n - a| < \frac{1}{2}$. Khi đó

$$|a_n - a_{n+1}| \leqslant |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Nhưng hiệu giữa hai số hạng kề nhau bất kỳ của dãy đã cho luôn luôn lớn hơn 1. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ rằng không một số thực nào có thể là giới hạn của dãy đã cho. ▲

BÀI TẬP

Hãy sử dụng định nghĩa giới hạn để chứng minh rằng

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ nếu $a_n = \dfrac{2n-1}{2n+2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3}{5}$ nếu $a_n = \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$

Bắt đầu từ số hiệu N nào thì:

$$|a_n - 3/5| < 0,01 \qquad (\text{ĐS. } N = 5)$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ nếu $a_n = \dfrac{3^n+1}{3^n}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 5\cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0$.

7. Chứng minh rằng số $a = 0$ không phải là giới hạn của dãy $a_n = \dfrac{n^2-2}{2n^2-9}$.

8. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1+\sin n}{n^2+n+1} = 1.$$

9. Chứng minh rằng dãy: $a_n = (-1)^n + 1/n$ phân kỳ.

10. Chứng minh rằng dãy; $a_n = \sin n^0$ phân kỳ.

11. Tìm giới hạn của dãy: $0,2; 0,22; 0,222; \dots, 0,\underbrace{22\dots2}_{n}, \dots$

Chỉ dẫn. Biểu diễn a_n dưới dạng

$$a_n = 0,22\dots2 = \frac{2}{10} + \frac{2}{10}^{2} + \cdots + \frac{2}{10^n} \quad (\text{ĐS. } \lim a_n = 2/9)$$

12. Tìm giới hạn của dãy số: $0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; \dots, 0,2\underbrace{33\dots3}_{n}, \dots$

Chỉ dẫn. Biểu diễn a_n dưới dạng

$$a_n = \frac{2}{10} + \left(\frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n}\right) \quad \text{(ĐS. 7/30)}$$

13. Chứng minh rằng nếu dãy a_n hội tụ đến a, còn dãy b_n dần đến ∞ thì dãy a_n/b_n dần đến 0.

14. Chứng minh rằng

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0.$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$

Chỉ dẫn. i) Sử dụng hệ thức:

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1 > n + \frac{n(n-1)}{2} > \frac{n^2}{2}\cdot$$

và ước lượng $|a_n - 0|$.

ii) Tương tự như i). Sử dụng hệ thức:

$$a^n = [1 + (a-1)]^n > \frac{n(n-1)}{2}(a-1).$$

15. Chứng minh rằng

$$\lim a_n = 2 \text{ nếu } a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

Chỉ dẫn. Áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân để tính a_n rồi ước lượng $|a_n - 2|$.

16. Biết rằng dãy a_n có giới hạn, còn dãy b_n không có giới hạn. Có thể nói gì về giới hạn của dãy:

i) $\{a_n + b_n\}$.

ii) $\{a_n b_n\}$.

(ĐS. i) $\lim\{a_n + b_n\}$ không tồn tại. Hãy chứng minh.

ii) Có thể gặp cả hai trường hợp có giới hạn và không có giới hạn, ví dụ:

$$a_n = \frac{n-1}{n},\ b_n = (-1)^n; \quad a_n = \frac{1}{n},\ b_n = (-1)^n.$$

7.1.2 Chứng minh sự hội tụ của dãy số dựa trên các định lý về giới hạn

Để tính giới hạn của dãy số, người ta thường sử dụng các định lý và khái niệm sau đây:

Giả sử $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

i) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$.

ii) $\lim a_n b_n = \lim a_n \cdot \lim b_n = a \cdot b$.

iii) Nếu $b \neq 0$ thì bắt đầu từ một số hiệu nào đó dãy a_n/b_n xác định (nghĩa là $\exists\, N : \forall\, n \geqslant N \Rightarrow b_n \neq 0$) và:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}\cdot$$

iv) Nếu $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ và bắt đầu từ một số hiệu nào đó $a_n \leqslant z_n \leqslant b_n$ thì $\lim z_n = a$ (Nguyên lý bị chặn hai phiá).

v) Tích của dãy vô cùng bé với dãy bị chặn là dãy vô cùng bé.

vi) Nếu (a_n) là dãy vô cùng lớn và $a_n \neq 0$ thì dãy $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ là dãy vô cùng bé; ngược lại, nếu α_n là dãy vô cùng bé và $\alpha_n \neq 0$ thì dãy $\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$ là vô cùng lớn.

Nhận xét. Để áp dụng đúng đắn các định lý trên ta cần lưu ý một số nhận xét sau đây:

i) Định lý (iii) về giới hạn của thương sẽ không áp dụng được nếu tử số và mẫu số không có giới hạn hữu hạn hoặc mẫu số có giới hạn bằng 0. Trong những trường hợp đó nên biến đổi sơ bộ dãy thương, chẳng hạn bằng cách chia hoặc nhân tử số và mẫu số với cùng một biểu thức.

ii) Đối với định lý (i) và (ii) cũng cần phải thận trọng khi áp dụng. Trong trường hợp này ta cần phải biến đổi các biểu thức $a_n \pm b_n$ và $a_n \cdot b_n$ trước khi tính giới hạn (xem ví dụ 1, iii).

iii) Nếu $a_n = a \equiv \text{const}\ \forall\, n$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm $\lim a_n$ nếu:

1) $a_n = (1 + 7^{n+2})/(3 - 7^n)$

2) $a_n = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2n)/[1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1)]$

3) $a_n = n^3/(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$

Giải. Để giải các bài toán này ta dùng lý thuyết cấp số

1) Nhân tử số và mẫu số phân thức với 7^{-n} ta có:

$$a_n = \frac{1 + 7^{n+2}}{3 - 7^n} = \frac{7^{-n} + 7^2}{3 \cdot 7^{-n} - 1}$$

Do đó

$$\lim a_n = \lim \frac{7^{-n} + 7^2}{3 \cdot 7^{-n} - 1} = -49 \text{ vì } \lim 7^{-n} = 0, n \to \infty.$$

2) Tử số và mẫu số đều là cấp số cộng nên ta có:

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = \frac{2 + 2n}{2} \cdot n;$$
$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = \frac{1 + (2n + 2)}{2}(n + 1).$$

Do đó

$$a_n = \frac{n}{n + 1} \Rightarrow \lim a_n = 1.$$

3) Như ta biết:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

và do đó:

$$\begin{aligned}\lim a_n &= \lim \frac{6n^3}{n(n+1)(2n+1)}\\ &= \lim \frac{6}{(1+1/n)(2+1/n)} = 3. \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tìm giới hạn

$$\lim \frac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$$

Giải. Tử số và mẫu số đều là cấp số nhân nên

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n} &= \frac{2(2^n-1)}{2^n},\\ 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^n} &= \frac{3(3^n-1)}{2\cdot 3^n}\end{aligned}$$

và do đó:

$$\begin{aligned}\lim a_n &= \lim \frac{2(2^n-1)}{2^n}\cdot\frac{2\cdot 3^n}{3(3^n-1)} = 2\lim\frac{2^n-1}{2^n}\cdot\frac{2}{3}\lim\frac{3^n}{3^n-1}\\ &= 2\lim[1-(1/2)^n]\cdot\frac{2}{3}\lim\frac{1}{1-(1/3)^n} = 2\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{4}{3}\cdot \ \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 3.

1) $a_n = \sqrt{n^2+n}-n$

2) $a_n = \sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}$

3) $a_n = \sqrt[3]{n^2-n^3}+n$

Giải.

1) Ta biến đổi a_n bằng cách nhân và chia cho đại lượng liên hợp

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}$$

Do đó

$$\lim a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+1/n}+1)} = \frac{1}{2}\cdot$$

2) Biến đổi a_n tương tự như 1) ta có:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2 + \sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2}$$
$$a_n = \frac{2}{\left(\sqrt[3]{n+2}\right)^2 + \sqrt[3]{n+2}\cdot\sqrt[3]{n} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2}$$

Biểu thức mẫu số bằng:

$$n^{2/3}\left[\left(\sqrt[3]{1+2/n}\right)^2 + \sqrt[3]{1+2/n} + 1\right] \to \infty$$

khi $n \to \infty$ và do đó $\lim a_n = 0$.

3) Ta có thể viết $n = \sqrt[3]{n^3}$ và áp dụng công thức:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

suy ra

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\left(\sqrt[3]{n^2-n^3} + n\right)\left[\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}\right)^2 - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2\right]}{\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}\right)^2 - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} \\ &= \frac{n^2}{\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}\right)^2 - n\sqrt[3]{n^2-n^3} + n^2} \\ &= \frac{1}{[1/n-1]^{2/3} - [1/n-1]^{1/3} + 1} \end{aligned}$$

suy ra $\lim a_n = \dfrac{1}{3}\cdot$ ▲

Ví dụ 4. Tìm giới hạn của các dãy sau

$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}, \quad b_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$
$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\cdot$$

Giải. Đầu tiên ta chứng minh $\lim a_n = 1$. Thật vậy:

$$\lim a_n = \lim\frac{n}{n\sqrt{1+1/n}} = \lim\frac{1}{\sqrt{1+1/n}} = 1.$$

Tương tự $\lim b_n = 1$.

Để tìm giới hạn của c_n ta sẽ áp dụng Nguyên lý bị chặn hai phía. Một mặt ta có:

$$c_n < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = b_n$$

nhưng mặt khác:

$$c_n > \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = a_n.$$

Như vậy $a_n < c_n < b_n$ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$. Từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$. ▲

Ví dụ 5. Chứng minh rằng dãy (q^n) là: 1) dãy vô cùng lớn nếu $|q| > 1$; 2) dãy vô cùng bé khi $|q| < 1$.

Giải. 1) Giả sử $|q| > 1$. Ta lấy số $A > 0$ bất kỳ. Từ đẳng thức $|q|^n > A$ ta thu được $n > \log_{|q|} A$. Nếu ta lấy $N = [\log_{|q|} A]$ thì $\forall n > N$ ta có $|q|^n > A$. Do đó dãy (q^n) là dãy vô cùng lớn.

2) Giả sử $|q| < 1$, $q \neq 0$. Khi đó $q^n = \left[\left(\dfrac{1}{q}\right)^n\right]^{-1}$. Vì $\left|\dfrac{1}{q}\right| > 1$ nên dãy $\left((\dfrac{1}{q})^n\right)$ là dãy vô cùng lớn và do đó dãy $\left(\left[(\dfrac{1}{q})^n\right]^{-1}\right)$ là vô cùng bé, tức là dãy (q^n) là dãy vô cùng bé khi $|q| < 1$.

3) Nếu $q = 0$ thì $q^n = 0$, $|q|^n < \varepsilon\ \forall n$ và do đó (q^n) là vô cùng bé. ▲

BÀI TẬP

Tìm giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nếu

1. $a_n = \dfrac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}}$. (ĐS. ∞)

2. $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$. (ĐS. $-\infty$)

3. $a_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$. (ĐS. 1/6)

4. $a_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}$. (ĐS. 0)

5. $a_n = \dfrac{5n}{n+1} + \dfrac{\sin n}{n}$. (ĐS. 5)

6. $a_n = \dfrac{n^3}{n^2+1} - \dfrac{3n^2}{3n+1}$. (ĐS. 1/3)

7. $a_n = \dfrac{n}{n+11} - \dfrac{\cos n}{10n}$. (ĐS. 1)

8. $a_n = \dfrac{n^3+1}{n^2-1}$ (ĐS. ∞)

9. $a_n = \dfrac{\cos n^3}{n} - \dfrac{3n}{6n+1}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{2}$)

10. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{5\sqrt{n}+1}$. (ĐS. 0)

11. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt{n}}$. (ĐS. $+\infty$)

12. $a_n = \sqrt[3]{1-n^3}+n$. (ĐS. 0)

13. $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{n^3-3n^2}}$. (ĐS. 1)

14. $a_n = \dfrac{(n+3)!}{2(n+1)!-(n+2)!}$. (ĐS. $-\infty$)

15. $a_n = \dfrac{2+4+\cdots+2n}{n+2} - 2$. (ĐS. -1)

16. $a_n = n - \sqrt[3]{n^3-n^2}$. (ĐS. $\dfrac{1}{3}$)

17. $a_n = \dfrac{1-2+3-4+5-\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2+1}}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{3}$)

18. $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Chỉ dẫn. Áp dụng $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ (ĐS. 1)

19. $a_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{27} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$. (ĐS. $\dfrac{3}{4}$)

20. $a_n = \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$. (ĐS. 3)

21. $a_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$. (ĐS. 1)

22. $a_n = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big(\dfrac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}$

Chỉ dẫn. Trục căn thức ở mẫu số các biểu thức trong dấu ngoặc. (ĐS. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

23. $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Chỉ dẫn. Trước hết ta chứng minh rằng

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\Big] \qquad \text{(ĐS. } \frac{1}{4})$$

24. $a_n = \dfrac{1}{a_1a_2} + \dfrac{1}{a_2a_3} + \cdots + \dfrac{1}{a_na_{n+1}}$. (ĐS. $\dfrac{1}{a_1d}$)

trong đó $\{a_n\}$ là cấp số cộng với công sai $d \neq 0$, $a_n \neq 0$.

25. $a_n = (1 - 1/4)(1 - 1/9) \cdots (1 - 1/(n+1)^2)$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}$)

Chỉ dẫn. Bằng quy nạp toán học chứng tỏ rằng $a_n = \dfrac{n+2}{2n+2}$.

7.1.3 Chứng minh sự hội tụ của dãy số dựa trên điều kiện đủ để dãy hội tụ (nguyên lý Bolzano-Weierstrass)

Dãy số a_n được gọi là:

i) Dãy tăng nếu $a_{n+1} > a_n \ \forall n$

ii) Dãy giảm nếu $a_{n+1} < a_n \ \forall n$

Các dãy tăng hoặc giảm còn được gọi là dãy đơn điệu. Ta lưu ý rằng dãy đơn điệu bao giờ cũng bị chặn ít nhất là một phía. Nếu dãy đơn điệu tăng thì nó bị chặn dưới bởi số hạng đầu tiên của nó, dãy đơn điệu giảm thì bị chặn trên bởi số hạng đầu. Ta có định lý sau đây thường được sử dụng để tính giới hạn của dãy đơn điệu.

Định lý Bolzano-Weierstrass. *Dãy đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.*

Định lý này khẳng định về sự tồn tại của giới hạn mà không chỉ ra được phương pháp tìm giới hạn đó. Tuy vậy, trong nhiều trường hợp khi biết giới hạn của dãy tồn tại, có thể chỉ ra phương pháp tính nó. Việc tính toán thường dựa trên đẳng thức đúng với mọi dãy hội tụ:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Khi tính giới hạn dựa trên đẳng thức vừa nêu tiện lợi hơn cả là sử dụng cách cho dãy bằng công thức truy hồi.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứnh minh rằng dãy:

$$a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \cdots + \frac{1}{5^n+1} \quad \text{hội tụ.}$$

Giải. Dãy đã cho đơn điệu tăng. Thật vậy vì:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^{n+1}+1} \quad \text{nên} \quad a_{n+1} > a_n.$$

Dãy đã cho bị chặn trên. Thật vậy:

$$a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \cdots + \frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n}$$
$$= \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\Big(1 - \frac{1}{5^n}\Big) < \frac{1}{4}\,.$$

Như vậy dãy a_n đã cho đơn điệu tăng và bị chặn trên nên nó hội tụ. ▲

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. Dãy đã cho có dạng $\dfrac{2}{1}, \dfrac{2^2}{2}, \dots, \dfrac{2^n}{n!}, \dots$

Dãy a_n đơn điệu giảm. Thật vậy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{n+1} < 1 \quad \forall\, n > 1.$$

Do đó $a_{n+1} < a_n$ và dãy bị chặn trên bởi phần tử a_1. Ngoài ra $a_n > 0$, $\forall\, n$ nên dãy bị chặn dưới. Do đó dãy đơn điệu giảm và bị chặn. Nó hội tụ theo định lý Weierstrass. Giả sử a là giới hạn của nó. Ta có:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n.$$

Từ đó

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{2a_n}{n+1} = \lim \frac{2}{n+1} \lim a_n$$

và như vậy: $a = 0 \cdot a \to a = 0$. Vậy: $\lim \dfrac{2^n}{n!} = 0$. ▲

Ví dụ 3. Cho dãy $a_n = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Chứng minh rằng dãy hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. Hiển nhiên rằng: $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots <$. Đó là dãy đơn điệu tăng và bị chặn dưới bởi số $\sqrt{2}$. Ta chứng minh rằng nó bị chặn trên bởi số 2.

Thật vậy

$$a_1 = \sqrt{2};\ a_2 = \sqrt{2a_1} < \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Giả sử đã chứng minh được rằng $a_n \leqslant 2$.

Khi đó:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \leqslant \sqrt{2 \cdot 2} = 2.$$

Vậy theo tiên đề quy nạp ta có $a_n \leqslant 2\ \forall\, n$.

Như thế dãy a_n đơn điệu tăng và bị chặn nên nó có giới hạn đó là a.

Ta có:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \Rightarrow a_{n+1}^2 = 2a_n.$$

Do đó:

$$\lim a_{n+1}^2 = 2 \lim a_n$$

hay $a^2 - 2a = 0$ và thu được $a_1 = 0$, $a_2 = 2$.

Vì dãy đơn điệu tăng $\forall\, n$ nên giới hạn $a = 2$. ▲

Ví dụ 4. Chứng minh tính hội tụ và tìm giới hạn của dãy

$$\begin{aligned} &x_1 = \sqrt{a};\ x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \dots, \\ &x_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}, a > 0, n \text{ dấu căn.} \end{aligned}$$

Giải. i) Rõ ràng: $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \dots$ nghĩa là dãy đã cho là dãy tăng.

ii) Ta chứng minh dãy x_n là dãy bị chặn. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} &x_1 = \sqrt{a} < \sqrt{a} + 1 \\ &x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{a} + 1. \end{aligned}$$

Giả sử đã chứng minh được rằng: $x_n < \sqrt{a} + 1$.

Ta cần chứng minh $x_{n+1} < \sqrt{a} + 1$. Thật vậy, ta có:

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + \sqrt{a} + 1} < \sqrt{a + 2\sqrt{a} + 1} = \sqrt{a} + 1.$$

Do đó nhờ phép quy nạp toán học ta đã chứng minh rằng dãy đã cho bị chặn trên bởi $\sqrt{a} + 1$.

iii) Để tìm giới hạn ta xét hệ thức $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$ hay

$$x_n^2 = a + x_{n-1}.$$

Từ đó:

$$\lim x_n^2 = \lim(a + x_{n-1}) = a + \lim x_{n-1}$$

hay nếu giả thiết $\lim x_n = A$ thì: $A^2 = a + A \to A^2 - A - a = 0$ và

$$A_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}, \quad A_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}\cdot$$

Vì $A_2 < 0$ nên giá trị A_2 bị loại vì $x_n > 0$.

Do đó;

$$\lim x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\cdot \ \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Tìm giới hạn của dãy a_n được xác định như sau: a_1 là số tùy ý mà

$$0 < a_1 < 1, \quad a_{n+1} = a_n(2 - a_n) \quad \forall n \geqslant 1. \tag{7.10}$$

Giải. i) Đầu tiên chứng minh rằng a_n bị chặn, mà cụ thể là bằng phép quy nạp toán học ta chứng minh rằng

$$0 < a_n < 1. \tag{7.11}$$

Ta có $0 < a_1 < 1$. Giả sử (7.11) đã được chứng minh với n và ta sẽ chứng minh (7.11) đúng với $n + 1$.

Từ (7.10) ta có; $a_{n+1} = 1 - (1 - a_n)^2$.

Từ hệ thức này suy ra $0 < (1 - a_n)^2 < 1$, vì $0 < a_n < 1$.

Từ đó suy ra: $0 < a_{n+1} < 1 \ \ \forall n$.

ii) Bây giờ ta chứng minh rằng a_n là dãy tăng.

Thật vậy, vì $a_n < 1$ nên $2 - a_n > 1$. Chia (7.10) cho a_n ta thu được:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - a_n > 1.$$

Từ đó $a_{n+1} > a_n \; \forall n$. Như vậy dãy a_n đơn điệu tăng và bị chặn. Do đó theo định lý Weierstrass, $\lim A_n$ tồn tại và ta ký hiệu nó là a.

iii) Từ (7.10) ta có:

$$\lim a_{n+1} = \lim a_n \cdot \lim(2 - a_n)$$

hay $a = a(2-a)$.

Từ đó $a = 0$ và $a = 1$. Vì $x_1 > 0$ và dãy a_n tăng nên

$$a = 1 = \lim a_n. \; \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Chứng minh rằng dãy $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.

Giải. i) Ta chứng minh rằng dãy a_n đơn điệu giảm, thật vậy:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} a_n$$

vì

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} < 1 \quad \text{nên} \quad a_{n+1} < a_n.$$

Vì $a_n > 0$ nên nó bị chặn dưới và do đó $\lim a_n$ tồn tại, ký hiệu $\lim a_n = a$ và rõ ràng là $a = \lim a_n \geqslant 0$.

ii) Ta chứng minh $a = 0$. Thật vậy ta có:

$$\frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{n} = 2.$$

Do đó:

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} < \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n.$$

Chuyển qua giới hạn ta được $a \leqslant \dfrac{a}{2} \Rightarrow a = 0$. $\blacktriangle$

BÀI TẬP

1. Cho các dãy số:

1) $a_n = \dfrac{5n^2}{n^2+3}\cdot$ 2) $b_n = (-1)^n \dfrac{2n}{n+1}\sin n.$ 3) $c_n = n\cos \pi n.$

Hãy chỉ ra dãy nào bị chặn và dãy nào không bị chặn.
(ĐS. 1) và 2) bị chặn; 3) không bị chặn)

2. Chứng minh rằng dãy:

$$a_1 = \frac{a_0}{a+a_0},\ a_2 = \frac{a_1}{a+a_1},\ a_3 = \frac{a_2}{a+a_2},\dots,$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{a+a_{n-1}},\dots \quad (a > 1, a_0 > 0)$$

hội tụ.

3. Chứng minh các dãy sau đây hội tụ

1) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}$

2) $a_n = 2 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

Chỉ dẫn. Tính bị chặn được suy từ $n! \geqslant 2^{n-1}$ và do đó

$$a_n \leqslant 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

4. Chứng minh các dãy sau đây hội tụ và tìm giới hạn a của chúng

1) $a_1 = \sqrt[k]{5},\ \ a_{n+1} = \sqrt[k]{5a_n},\ \ k \in \mathbb{N}.$ (ĐS. $\sqrt[k-1]{5}$)

2) $a_n = \dfrac{2^n}{(n+2)!}$

Chỉ dẫn. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2}{n+3} < 1.$ (ĐS. $a = 0$)

3) $a_n = \dfrac{E(nx)}{n}$ trong đó $E(nx)$ là phần nguyên của nx.

Chỉ dẫn. Sử dụng hệ thức: $nx - 1 < E(nx) \leqslant nx.$ (ĐS. $a = x$)

5. Chứng minh rằng dãy: $a_n = a^{1/2^n}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó $(a > 1)$.

(ĐS. $a = 1$. *Chỉ dẫn.* Chứng minh rằng a_n là dãy đơn điệu giảm vì

$$a_{n+1} = a^{1/2^{n+1}} = a^{1/(2^n \cdot 2)} = \sqrt{a_n},\ a_n > 1)$$

6. Chứng minh rằng dãy

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

hội tụ.

Chỉ dẫn. Chứng tỏ rằng dãy đơn điệu tăng, tính bị chặn của nó được xác lập bằng cách sử dụng các bất đẳng thức:

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad n \geqslant 2.$$

7. Chứng minh rằng dãy

$$a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \cdots + \frac{1}{3^n+n}$$

có giới hạn hữu hạn.

Chỉ dẫn. Tính bị chặn của a_n được xác lập bằng cách so sánh a_n với tổng một cấp số nhân nào đó.

8. Chứng minh rằng dãy $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ đơn điệu giảm và

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

9. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, nếu

1) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n+k}\right)^n$, $k \in \mathbb{N}$. (ĐS. e)

2) $a_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$. (ĐS. $\dfrac{1}{e}$)

3) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$. (ĐS. $\sqrt{e}$)

4) $a_n = \left(\dfrac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$. (ĐS. e)

7.1.4 Chứng minh sự hội tụ của dãy số dựa trên điều kiện cần và đủ để dãy hội tụ (nguyên lý hội tụ Bolzano-Cauchy)

Trên đây ta đã nêu hai phương pháp chứng minh sự hội tụ của dãy. Hai phương pháp này không áp dụng được đối với các *dãy không đơn điệu* được cho không bằng phương pháp giải tích mà được cho bằng phương pháp khác (chẳng hạn bằng phương pháp truy hồi). Mặt khác, trong nhiều trường hợp người ta chỉ quan tâm đến sự hội tụ hay phân kỳ của dãy mà thôi. Sau đây ta phát biểu một *tiêu chuẩn* có tính chất "nội tại" cho phép kết luận sự hội tụ của dãy *chỉ dựa trên giá trị của các số hạng* của dãy:

Nguyên lý hội tụ. Dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{aligned}\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall\,n > N_0 \text{ và } \forall\,p \in \mathbb{N}\\ \Rightarrow |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Từ nguyên lý hội tụ rút ra: *Dãy (a_n) không có giới hạn khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện*:

$$\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\,N \in \mathbb{N}\ \exists\,n \geqslant N\ \exists\,m \geqslant N \to |a_n - a_m| \geqslant \varepsilon.$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng dãy

$$a_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \cdots + \frac{\cos n}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

hội tụ.

Giải. Ta ước lượng hiệu

$$
\begin{aligned}
|a_{n+p}-a_n| &= \Big|\frac{\cos(n+1)}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{\cos(n+p)}{3^{n+p}}\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{3^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{3^{n+p}} \\
&= \frac{1}{3^{n+1}}\frac{1-\dfrac{1}{3^p}}{1-\dfrac{1}{3}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} < \frac{1}{3^n}\cdot
\end{aligned}
$$

Giả sử ε là số dương tùy ý. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$ nên với số $\varepsilon>0$ đó, tồn tại số $N\in\mathbb{N}$ sao cho $\forall\, n\geqslant N$ ta có $\dfrac{1}{3^n}<\varepsilon$. Nghĩa là nếu $n\geqslant N$, còn p là số tự nhiên tùy ý thì

$$|a_{n+p}-a_n| < \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Do đó theo tiêu chuẩn hội tụ dãy đã cho hội tụ. ▲

Ví dụ 2. Chứng minh rằng dãy

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

phân kỳ.

Giải. Ta ước lượng hiệu

$$
\begin{aligned}
|a_n-a_{n+p}| &= \Big|\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+p}}\Big| \\
&\geqslant \frac{p}{\sqrt{n+p}} \quad \forall\, n,p\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Đặc biệt với $p=n$ ta có

$$|a_n-a_{2n}| \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall\, n. \qquad (*)$$

Ta lấy $\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Khi đó $\forall\, N\in\mathbb{N}$ tồn tại những giá trị $n>N$ và $\exists\, p\in\mathbb{N}$ sao cho $|a_n-a_{n+p}|\geqslant\varepsilon$. Thật vậy, theo bất đẳng thức (*) ta chỉ cần lấy số $n > N$ bất kỳ và $p = n$. Từ đó theo mệnh đề phủ định nguyên lý hội tụ ta có dãy đã cho phân kỳ. ▲

BÀI TẬP

Sử dụng tiêu chuẩn hội tụ để chứng minh sự hội tụ của dãy (a_n) nếu

1. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k q^k$, $|q| < 1$, $|a_k| < M\ \forall\, k, M > 0$.

3. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}\cdot$

4. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}\cdot$

5. $a_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{n\text{chữ số}}$.

6. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k + k}\cdot$

Chứng minh rằng các dãy sau đây phân kỳ:

7. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

8. $a_n = \dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{\ln n}$, $n = 2, \ldots$

7.2 Giới hạn hàm một biến

7.2.1 Các khái niệm và định lý cơ bản về giới hạn

Định nghĩa giới hạn của các hàm đối với năm trường hợp: $x \to a$, $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$ được phát biểu như sau.

1) Số A được gọi là giới hạn của hàm $f(x)$ tại điểm a (khi $x \to a$) nếu $\forall\,\varepsilon > 0$ bé bao nhiêu tùy ý tìm được số $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ($\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$) sao cho $\forall\,x$ mà

$$x \in D_f \cap \{x; 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)\}$$

thì

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ký hiệu: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

2) Số A được gọi là giới hạn bên phải (bên trái) của hàm $f(x)$ tại điểm $x = a$ nếu $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi x thỏa mãn điều kiện

$$x \in D_f \cap \{x : a < x < a + \delta\} \quad (x \in D_f \cap \{x : a - \delta < x < a\})$$

thì

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Ký hiệu:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \quad \Big(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)\Big).$$

Tương tự:

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\Delta > 0 : \forall\,x \in D_f \cap \{x : x > \Delta\}$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Định nghĩa giới hạn khi $x \to -\infty$ được phát biểu tương tự.

4) Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ thì người ta viết

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Trường hợp đặc biệt nếu $A = 0$ thì hàm $f(x)$ được gọi là hàm vô cùng bé khi $x \to a$ ($x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$).

Khái niệm hàm vô cùng lớn tại điểm a cũng được phát biểu đối với cả năm trường hợp.

Chẳng hạn, hàm $f(x)$ được gọi là hàm vô cùng lớn tại điểm a nếu

$$\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0 : \forall x \in D_f \cap \{x : 0 < |x - a| < \delta\}$$
$$\Rightarrow |f(x)| > M.$$

Ngoài ra, nếu $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in D_f \cap \{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ thì ta viết

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \quad \Big(\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\Big).$$

Ta lưu ý rằng các ký hiệu vừa nêu chỉ chứng tỏ $f(x)$ là vô cùng lớn chứ hoàn toàn không có nghĩa rằng f có giới hạn.

Khi tính giới hạn ta thường sử dụng các điều khẳng định sau đây.

Định lý 7.2.1. *Nếu các giới hạn $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ tồn tại hữu hạn thì*

1) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

2) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

3) *Nếu* $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$ *thì* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$

4) *Nếu trong lân cận $\mathcal{U}(a;\delta) = \{x : 0 < |x - a| < \delta\}$ ta có $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$ và $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$ thì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (nguyên lý bị chặn hai phía).*

Định nghĩa giới hạn hàm số có thể phát biểu dưới dạng ngôn ngữ dãy như sau.

Định lý 7.2.2. *Giả sử $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ là điểm tụ của nó; $A \in \overline{\mathbb{R}}$, $f : D \to \mathbb{R}$. Khi đó*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

khi và chỉ khi $\forall(a_n)$, $a_n \in D \setminus \{a\}$, $a_n \to a$

$$f(a_n) \to A$$

Từ đó để chứng minh một hàm nào đó không có giới hạn khi $x \to a$, ta chỉ cần chứng minh rằng $\exists(a_n)$, $\exists(a'_n)$ đều hội tụ đến a nhưng

$$\lim_{x\to a} f(a_n) \neq \lim_{x\to a} f'(a_n).$$

Các định lý cơ bản về giới hạn đã phát biểu trên đây không áp dụng được đối với các giới hạn sau đây khi $x \to a$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]$; f, g là các vô cùng lớn (vô định dạng "$\infty \pm \infty$").

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$; f, g hoặc đồng thời là hai vô cùng bé, hoặc đồng thời là hai vô cùng lớn (vô định dạng "0/0" hoặc "∞/∞").

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$; f là vô cùng bé, còn g là vô cùng lớn hoặc ngược lại (vô định dạng "$0 \cdot \infty$").

4) $\lim\limits_{x\to a} \big[f(x)\big]^{g(x)}$:

a) khi $f(x) \to 1$, $g(x) \to \infty$ (vô định dạng "1^∞")

b) khi $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ (vô định dạng "0^0")

c) khi $f(x) \to \infty$, $g(x) \to 0$ (vô định dạng "∞^0")

Việc tính giới hạn trong các trường hợp này thường được gọi là *khử dạng vô định*. Trong nhiều trường hợp khi tính giới hạn ta thường sử dụng các giới hạn quan trọng sau đây:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{7.12}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{7.13}$$

và các hệ quả của (7.13)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e, \tag{7.14}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad 0 < a \neq 1, \tag{7.15}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad 0 < a \neq 1. \tag{7.16}$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Sử dụng $(\varepsilon - \delta)$ - định nghĩa giới hạn để chứng minh rằng

$$\lim_{x\to -3} x^2 = 9.$$

Giải. Ta cần chứng minh rằng $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ sao cho với $|x+3| < \delta$ thì ta có $|x^2-9| < \varepsilon$.

Ta cần ước lượng hiệu $|x^2-9|$. ta có

$$|x^2-9| = |x-3||x+3|.$$

Do thừa số $|x-3|$ không bị chặn trên toàn trục số nên để ước lượng tích đơn giản hơn ta trích ra 1 - lân cận của điểm $a = -3$ tức là khoảng $(-4;-2)$. Với mọi $x \in (-4;-2)$ ta có $|x-3| < 7$ và do đó

$$|x^2-9| < 7|x+3|.$$

Vì δ-lân cận điểm $a = -3$ [tức là khoảng $(-3-\delta; -3+\delta)$] không được vượt ra khỏi ranh giới của 1-lân cận nên ta lấy $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{7}\right)$. Khi đó với $0 < |x+3| < \delta \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon$. Do vậy $\lim\limits_{x\to -3} x^2 = 9$. ▲

Ví dụ 2. Chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11-x} = 3$.

Giải. Giả sử $\varepsilon > 0$ là số dương cho trước bé bao nhiêu tùy ý. Ta xét bất phương trình

$$|\sqrt{11-x}-3| < \varepsilon. \tag{7.17}$$

Ta có

$$(7.17) \Leftrightarrow -\varepsilon < \sqrt{11-x} - 3 < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{11-x} - 3 > -\varepsilon \\ \sqrt{11-x} - 3 < \varepsilon \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 11 < -(3-\varepsilon)^2 \\ x - 11 > -(3+\varepsilon)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 < 6\varepsilon - \varepsilon^3 \\ x - 2 > -(6\varepsilon + \varepsilon^2). \end{cases}$$

Vì $6\varepsilon - \varepsilon^2 < |-(6\varepsilon + \varepsilon)^2| = 6\varepsilon + \varepsilon^2$ nên ta có thể lấy $\delta(\varepsilon)$ là số $\delta \leqslant 6\varepsilon - \varepsilon^2$. Với số δ đó ta thấy rằng khi x thỏa mãn bất đẳng thức $0 < |x-2| < \delta$ thì $|\sqrt{11-x} - 3| < \varepsilon$ và

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{11-x} = 3. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x - x^2}{x-2}$ (vô định dạng $\dfrac{0}{0}$);

2) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \text{cotg}2x \cdot \text{cotg}\Big(\dfrac{\pi}{4} - x\Big)$ (vô định dạng $0 \cdot \infty$);

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x}\Big)^x$ (vô định dạng 1^∞).

Giải

1) Ta có

$$\frac{2^x - x^2}{x-2} = \frac{2^x - 2^2 - (x^2 - 2^2)}{x-2} = 4 \cdot \frac{2^{x-2} - 1}{x-2} - \frac{x^2-4}{x-2}\cdot$$

Từ đó suy rằng

$$\lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2} = 4 \lim_{x\to 2} \frac{2^{x-2}-1}{x-2} - \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4\ln 2 - 4.$$

2) Đặt $y = \dfrac{\pi}{4} - x$. Khi đó

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \text{cotg}2x \cdot \text{cotg}\Big(\frac{\pi}{4} - x\Big) = \lim_{y\to 0} \text{cotg}\Big(\frac{\pi}{2} - 2y\Big)\text{cotg}y$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\sin 2y}{\sin y} \cdot \frac{\cos y}{\cos 2y} = 2.$$

3) Đặt $y = \dfrac{1}{x}$. Khi đó

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(e^y + y)^{\frac{1}{y}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(e^y+y)}{y}};$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(e^y + y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln[1 + (e^y + y - 1)]}{e^y + y - 1}\cdot\frac{e^y + y - 1}{y}$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}\cdot\lim_{y\to 0}\left(1 + \frac{e^y - 1}{y}\right) = 2.$$

Từ đó suy rằng

$$\lim_{y\to 0}\left(e^y + y\right)^{\frac{1}{y}} = e^2. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Chứng tỏ rằng hàm $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Giải. Ta lưu ý mệnh đề phủ định đối với định nghĩa giới hạn:

$$\lim_{x\to a} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\,\varepsilon_0 > 0\ \forall\,\delta > 0\ \exists\,x_\delta\ (0 < |x_\delta - a| < \delta)$$
$$\to |f(x_0) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

Nếu $A = 0$ ta lấy $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$ và $x_k = \dfrac{2}{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi}$. Khi đó $\forall\,\delta > 0$, $\exists\,k \in N : 0 < x_k < \delta$ và

$$|f(x_k) - 0| = |f(x_k)| = 1 > \varepsilon_0$$

và như vậy $A = 0$ không phải là giới hạn của hàm đã cho khi $x \to 0$.

Nếu $A \neq 0$ thì ta lấy $\varepsilon_0 = \dfrac{|A|}{2}$ và $x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$. Khi đó $\forall\,\delta > 0$, $\exists\,k \in N : 0 < x_k < \delta$ thì $|f(x_k) - A| = |A| > \varepsilon$. Như vậy mọi số $A \neq 0$ đều không là giới hạn của hàm $\sin\dfrac{1}{x}$ khi $x \to 0$. $\blacktriangle$

Ví dụ 5. Hàm Dirichlet $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

không có giới hạn tại $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Giải. Ta chứng minh rằng tại mọi điểm $a \in \mathbb{R}$ hàm $D(x)$ không thỏa mãn Định lý 2. Để làm việc đó, ta chỉ cần chỉ ra hai dãy (a_n) và (a'_n) cùng hội tụ đến a sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} D(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(a'_n)$.

Đầu tiên ta xét dãy các điểm hữu tỷ (a_n) hội tụ đến a. Ta có $D(a_n) = 1\ \forall\, n$ và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} D(a_n) = 1$. Bây giờ ta xét dãy (a'_n) - dãy các điểm vô tỷ hội tụ đến a. Ta có $D(a'_n) = 0\ \forall\, n$ và do vậy $\lim\limits_{n\to\infty} D(a'_n) = 0$.

Như vậy $\lim\limits_{n\to\infty} D(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} D(a'_n)$. Từ đó suy ra rằng tại điểm a hàm $D(x)$ không có giới hạn . ▲

Ví dụ 6. Giả sử $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Giải. Ta cần chứng minh rằng $\forall\, M > 0$, $\exists\, \delta > 0$ sao cho $\forall\, x : 0 < |x - a| < \delta$ thì $f(x) + g(x) > M$.

Vì $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ nên tồn tại δ_1-lân cận $\mathcal{U}(a, \delta_1)$ của điểm a sao cho

$$|f(x)| < C, \quad x \neq a \tag{7.18}$$

trong đó C là hằng số dương nào đó.

Giả sử $M > 0$ là số cho trước tùy ý. Vì $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ nên đối với số $M + C$, $\exists\, \delta > 0$ $(\delta \leqslant \delta_1)$ sao cho $\forall\, x : 0 < |x - a| < \delta$ thì

$$g(x) > M + C \tag{7.19}$$

Từ các bất đẳng thức (7.18) và(7.19) ta thu được là: với x thỏa mãn điều kiện $0 < |x - a| < \delta \leqslant \delta_1$ thì

$$f(x) + g(x) \geqslant g(x) - |f(x)| > M + C - C = M. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

1. Sử dụng định nghĩa giới hạn hàm số để chứng minh các đẳng thức sau đây:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sin x = \dfrac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$; 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{arctg}x = \dfrac{\pi}{2}$.

Chỉ dẫn. Dùng hệ thức $\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x < \mathrm{tg}\Big(\dfrac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}x\Big) = \dfrac{1}{x}$)

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{3x+2} = \dfrac{1}{3}$; 6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(\sqrt{x^2+1} - x\big) = 0$; 8) $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x^2+2x-15}{x+5} = -8$;

9) $\lim\limits_{x\to 1}(5x^2 - 7x + 6) = 4$; 10) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{5}$;

11) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2 - 100x + 3000} = 0$.

2. Chứng minh các giới hạn sau đây không tồn tại:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \sin\dfrac{1}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$; 3) $\lim\limits_{x\to o} 2^{\frac{1}{x}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$.

Nếu tử số và mẫu số của phân thức hữu tỷ đều triệt tiêu tại điểm $x = a$ thì có thể giản ước phân thức cho $x - a$ $(\neq 0)$ một hoặc một số lần.

Sử dụng phương pháp giản ước đó, hãy tính các giới hạn sau đây (3-10).

3. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}$ (ĐS. $\dfrac{17}{5}$)

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ (ĐS. 2)

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$ (ĐS. -8)

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$; $m, n \in \mathbb{Z}$ (ĐS. $\dfrac{m}{n}$)

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ (ĐS. -1)

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x^a}-\dfrac{b}{1-x^b}\right)$; $a, b \in \mathbb{N}$ (ĐS. $\dfrac{a-b}{2}$)

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\cdots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^k-1)}$ (ĐS. C_n^k)

10. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$, $n \in N$ (ĐS. $\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-1}$)

Chỉ dẫn. Đổi biến $x - a = t$.

Các bài toán sau đây có thể đưa về dạng trên nhờ phép đổi biến (11-14)

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{\frac{p}{q}}-1}{x^{\frac{r}{s}}-1}$ (ĐS. $\dfrac{ps}{qr}$)

12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$ (ĐS. $\dfrac{5}{3}$)

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1+x}+x}$ (ĐS. $\dfrac{1}{6}$)

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (ĐS. $\dfrac{1}{n}$)

Một trong các phương pháp tính giới hạn của các biểu thức vô tỷ là chuyển vô tỷ từ mẫu số lên tử số hoặc ngược lại (15-26)

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}$)

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}$)

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$ (ĐS. $\dfrac{15}{2}$)

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x}}{x+x^2}$ (ĐS. 2)

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ (ĐS. 0)

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\big(\sqrt[3]{1-x^3}+x\big)$ (ĐS. 0)

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+5x}+x\big)$ (ĐS. $+\infty$)

22. $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2+5x}+x\big)$ (ĐS. $-\dfrac{5}{2}$)

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\sqrt{x^2+2x}-x\big)$ (ĐS. 1)

24. $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(\sqrt{x^2+2x}-x\big)$. (ĐS. $+\infty$)

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\Big[(x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big]$ (ĐS. 0)

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\big[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\big]$
(ĐS. $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$)

Khi giải các bài toán sau đây ta thường sử dụng hệ thức

$$\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{t}=\alpha \quad (27\text{-}34)$$

27. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$ (ĐS. -6)

28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $n\in\mathbb{N}$ (ĐS. $\dfrac{2}{n}a^{\frac{1}{n}-1}$)

29. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$ (ĐS. $\dfrac{313}{280}$)

30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ (ĐS. $\dfrac{3}{2}a^{\frac{1}{6}}$)

31. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\big(\sqrt{1+x^2}+x\big)^n-\big(\sqrt{1+x^2}-x\big)^n}{x}$ (ĐS. $2n$)

32. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{a+x}-\sqrt[n]{a-x}}{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $a>0$ (ĐS. $\dfrac{2\sqrt[n]{a}}{na}$)

33. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-\sqrt[k]{1+bx}}{x}$, $n\in\mathbb{N}$, $a>0$ (ĐS. $\dfrac{ak-bn}{nk}$)

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\big(\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)\cdots(n+x^2)}-x^2\big)$ (ĐS. $\dfrac{n+1}{2}$)

Khi tính giới hạn các biểu thức lượng giác ta thường sử dụng công thức cơ bản

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

cùng với sự kết hợp các phương pháp tìm giới hạn đã nêu ở trên (35-56).

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{2}}{x}$ (ĐS. 0)

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\text{arctg}x}{2x}$ (ĐS. 0)

37. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\text{arctg}(x+2)}$ (ĐS. -4)

38. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}$)

39. $\lim\limits_{x\to 0}x\text{cotg}5x$ (ĐS. $\dfrac{1}{5}$)

40. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\text{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ (ĐS. $\dfrac{2}{\pi}$)

41. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$ (ĐS. $\dfrac{2}{\pi}$)

42. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$ (ĐS. $\dfrac{1}{2\pi}$)

43. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$ (ĐS. $\dfrac{1}{2}(n^2-m^2)$)

44. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\Big[\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\Big]$ (ĐS. 4)

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)+\sin(a-x)-2\sin a}{x^2}$ (ĐS. $-\sin a$)

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+x)+\cos(a-x)-2\cos a}{1-\cos x}$ (ĐS. $-2\cos a$)

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\big(\sin\sqrt{x^2+1}-\sin\sqrt{x^2-1}\big)$ (ĐS. 0)

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$ (ĐS. $-\dfrac{1}{4}$)

49. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos x}$ (ĐS. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$)

50. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ (ĐS. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$)

51. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\mathrm{tg}^2 x}$ (ĐS. $\dfrac{1}{4}$)

52. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}{\sin x}$ (ĐS. 1)

53. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{x^2}$ (ĐS. $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2m}$)

54. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ (ĐS. $-\dfrac{1}{3}$)

55. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{\mathrm{tg}x^2}$ (ĐS. $\dfrac{3}{2}$)

56. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{\sin^2\dfrac{x}{2}}$ (ĐS. 4)

Để tính giới hạn $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$, trong đó $f(x)\to 1$, $\varphi(x)\to\infty$ khi $x\to a$ ta có thể biến đổi biểu thức $[f(x)]^{\varphi(x)}$ như sau:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} &= \lim_{x\to a}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\varphi(x)[f(x)-1]}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)[f(x)-1]}\end{aligned}$$

ở đây $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)[f(x)-1]$ được tính theo các phương pháp đã nêu trên đây. Nếu $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)[f(x)-1]=A$ thì

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = e^A \qquad (57\text{-}68).$$

57. $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2x+3}{2x+1}\Big)^{x+1}$ (ĐS. e)

58. $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{x^2-1}{x^2}\Big)^{x^4}$ (ĐS. 0)

59. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}x)^{\mathrm{cotg}x}$ (ĐS. e)

60. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\mathrm{tg}^2x)^{\mathrm{cotg}^2x}$ (ĐS. e^3)

61. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\Big)^{\frac{1}{x^2}}$ (ĐS. $e^{\frac{3}{2}}$)

62. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\mathrm{cotg}x}}$ (ĐS. -1)

63. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$ (ĐS. e^{-1})

64. $\lim\limits_{x\to 0}\Big[\mathrm{tg}\Big(\dfrac{\pi}{4}+x\Big)\Big]^{\mathrm{cotg}2x}$ (ĐS. e)

65. $\lim\limits_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\frac{1}{x^2}}$ (ĐS. $e^{-\frac{1}{2}}$)

66. $\lim\limits_{x\to 0}\big(\cos 3x\big)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ (ĐS. $e^{-\frac{9}{2}}$)

67. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1+\sin x}\Big)^{\frac{1}{\sin x}}$ (ĐS. 1)

68. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\big(\sin 2x\big)^{\mathrm{tg}^2 2x}$ (ĐS. $e^{-\frac{1}{2}}$)

Khi tính giới hạn các biểu thức có chứa hàm lôdarit và hàm mũ ta thường sử dụng các công thức (7.15) và (7.16) và các phương pháp tính giới hạn đã nêu ở trên (69-76).

69. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ (ĐS. e^{-1})

70. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\lg x-1}{x-10}$ (ĐS. $\dfrac{1}{10\ln 10}$)

71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\sqrt{1+\sin^2 x}-1}$ (ĐS. 2)

72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{\sin^2 x}$ (ĐS. $\dfrac{3}{2}$)

73. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin\alpha x - \sin\beta x}$ (ĐS. 1)

74. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$ (ĐS. 2)

75. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2} - b^{x^2}}{\ln\cos 2x}$, $a > 0$, $b > 0$ (ĐS. $-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a}{b}$)

76. $\lim\limits_{x\to 0} \Big[\dfrac{a^{\sin x} + b^{\sin x}}{2}\Big]^{\frac{1}{x}}$, $a > 0$, $b > 0$ (ĐS. $\sqrt{ab}$)

7.3 Hàm liên tục

Định nghĩa 7.3.1. Hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 được gọi là liên tục tại điểm đó nếu

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Định nghĩa 7.3.1 tương đương với

Định nghĩa 7.3.1*. Hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,x \in D_f : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Hiệu $x - x_0 = \Delta x$ được gọi là *số gia của đối số*, còn hiệu $f(x) - f(x_0) = \Delta f$ được gọi là *số gia của hàm số tại* x_0 tương ứng với số gia Δx, tức là

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Với ngôn ngữ số gia định nghĩa 7.3.1 có dạng

Định nghĩa 7.3.1.** Hàm $f(x)$ xác định trong lân cận của điểm x_0 được gọi là liên tục tại x_0 nếu

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0.$$

Bằng "ngôn ngữ dãy" ta có định nghĩa tương đương

Định nghĩa 7.3.1***. Hàm $f(x)$ xác định trong lân cận điểm $x_0 \in D_f$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu

$$\forall (x_n) \in D_f : x_n \to x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Định lý 7.3.1. *Điều kiện cần và đủ để hàm $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 là hàm $f(x)$ thỏa mãc các điều kiện sau đây:*

i) *Hàm phải xác định tại một lân cận nào đó của điểm x_0.*

ii) *Hàm có các giới hạn một phía như nhau*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0-0} = \lim\limits_{x\to x_0+0} = f(x_0)$.

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trong nửa lân cận bên phải (bên trái) của điểm x_0, nghĩa là trên nửa khoảng $[x_0, x_0+\delta)$ (tương ứng: trên $(x_0-\delta, x_0]$) nào đó.

Hàm $f(x)$ được gọi là *liên tục bên phải (bên trái)* tại điểm x_0 nếu $f(x_0+0) = f(x_0)$ (tương ứng: $f(x_0-0) = f(x_0)$).

Định lý 7.3.2. *Hàm $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 \in D_f$ khi và chỉ khi nó liên tục bên phải và bên trái tại điểm x_0.*

Hàm liên tục tại một điểm có các tính chất sau.

I) Nếu các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục tại điểm x_0 thì $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ liên tục tại x_0, và $f(x)/g(x)$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

II) Giả sử hàm $y = \varphi(x)$ liên tục tại x_0, còn hàm $u = f(y)$ liên tục tại $y_0 = \varphi(x_0)$. Khi đó hàm hợp $u = f[\varphi(x)]$ liên tục tại x_0.

Từ đó suy ra rằng

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f\big[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)\big].$$

Hàm $f(x)$ gọi là gián đoạn tại điểm x_0 nếu nó xác định tại những điểm gần x_0 bao nhiêu tùy ý nhưng tại chính x_0 hàm không thỏa mãn ít nhất một trong các điều kiện liên tục ở trên.

Điểm x_0 được gọi là

1) *Điểm gián đoạn khử được* của hàm $f(x)$ nếu tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ nhưng hoặc $f(x)$ không xác định tại điểm x_0 hoặc $f(x_0) \neq b$. Nếu bổ sung giá trị $f(x_0) = b$ thì hàm $f(x)$ trở nên liên tục tại x_0, tức là gián đoạn có thể khử được.

2) *Điểm gián đoạn kiểu I* của hàm $f(x)$ nếu $\exists\, f(x_0+0)$ và $\exists\, f(x_0-0)$ nhưng $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$.

3) *Điểm gián đoạn kiểu II* của hàm $f(x)$ nếu tại điểm x_0 một trong các giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ hoặc $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(c)$ không tồn tại.

Hàm $f(x)$ được gọi là *hàm sơ cấp* nếu nó được cho bởi một biểu thức giải tích lập nên nhờ một số hữu hạn phép tính số học và các phép hợp hàm thực hiện trên các hàm sơ cấp cơ bản.

Mọi hàm sơ cấp xác định trong lân cận của một điểm nào đó là liên tục tại điểm đó.

Lưu ý rằng hàm không sơ cấp có thể có gián đoạn tại những điểm nó không xác định cũng như tại những điểm mà nó xác định. Đặc biệt là nếu hàm được cho bởi nhiều biểu thức giải tích khác nhau trên các khoảng khác nhau thì nó có thể có gián đoạn tại những điểm thay đổi biểu thức giải tích.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm $f(x) = \sin(2x-3)$ liên tục $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Giải. Ta lấy điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ tùy ý. Xét hiệu

$$\sin(2x-3) - \sin(2x_0-3) = 2\cos(x+x_0-3)\sin(x-x_0) = \alpha(x).$$

Vì $|\cos(x+x_0-3)| \leqslant 1$ và $\sin(x-x_0)| < |x-x_0|$ nên khi $x \to x_0$ hàm $\sin(x-x_0)$ là hàm vô cùng bé. Từ đó suy rằng $\alpha(x)$ là tích của hàm bị chặn với vô cùng bé và

$$\lim_{x \to x_0} \sin(2x-3) = \sin(2x_0-3). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm $f(x) = \sqrt{x+4}$ liên tục tại điểm $x_0 = 5$.

Giải. Ta có $f(5) = 3$. Cho trước số $\varepsilon > 0$. Theo định nghĩa 1^* ta lập hiệu $f(x) - f(5) = \sqrt{x+4} - 3$ và ước lượng môđun của nó. Ta có

$$|\sqrt{x+4} - 3| = \frac{|x-5|}{|\sqrt{x+4}+3|} < \frac{|x-5|}{3} \qquad (*)$$

Nếu ta chọn $\delta = 3\varepsilon$ thì với những giá trị x mà $|x-5| < \delta = 3\varepsilon$ ta sẽ có $|\sqrt{x+4} - 3| < \varepsilon$. Từ đó suy rằng hàm $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 5$. ▲

Ví dụ 3. Chứng minh rằng hàm $f(x) = \sqrt{x}$ liên tục bên phải tại điểm $x_0 = 0$.

Giải. Giả sử cho trước số $\varepsilon > 0$ tùy ý. Bất đẳng thức $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ tương đương với bất đẳng thức $0 \leqslant x < \varepsilon^2$. Ta lấy $\delta = \varepsilon^2$. Khi đó từ bất đẳng thức $0 \leqslant x < \delta$ suy rằng $\sqrt{x} < \varepsilon$. Điều đó có nghĩa rằng $\lim\limits_{x\to 0+0} \sqrt{x} = 0$. ▲

Ví dụ 4. Chứng minh rằng hàm $y = x^2$ liên tục trên toàn trục số.

Giải. Giả sử $x_0 \in \mathbb{R}$ là điểm tùy ý trên trục số và $\varepsilon > 0$ là số cho trước tùy ý. Ta xét hiệu

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0|$$

và cần ước lượng nó. Vì $|x + x_0|$ không bị chặn trên $\mathbb{R}$ nên để ước lượng hiệu trên ta xét một lân cận nào đó của x_0, chẳng hạn $\mathcal{U}(x_0; 1) = (x_0 - 1; x_0 + 1)$. Với $x \in \mathcal{U}(x_0; 1)$ ta có

$$|x + x_0| = |x - x_0 + 2x_0| \leqslant |x - x_0| + 2|x_0| < 1 + 2|x_0|$$

và do đó

$$|x^2 - x_0^2| < (1 + 2|x_0|)|x - x_0|.$$

Vì δ-lân cận của điểm x_0 cần phải nằm trong $\mathcal{U}(x_0; 1)$ nên ta lấy $\delta = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}; 1\right)$ và với $|x - x_0| < \delta = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}; 1\right)$ ta sẽ có

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Xác định và phân loại điểm gián đoạn của hàm

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}\cdot$$

Giải. Hàm đã cho xác định $\forall\, x \neq 1$. Như vậy điểm gián đoạn là điểm $x_0 = 1$.

Nếu (x_n) là dãy hội tụ đến 1 và $x_n > 1$ thì $\left(\dfrac{1}{x_n - 1}\right)$ là dãy vô cùng lớn với mọi số hạng đều dương. Do đó $\left(1 + 2^{\frac{1}{x_n-1}}\right)$ là dãy vô cùng lớn. Từ đó suy rằng $f(x_n) = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x_n-1}}}$ là dãy vô cùng bé, tức là $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ và $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 0$.

Nếu $(x_n) \to 1$ và $x_n < 1$ thì $\left(\dfrac{1}{x_n - 1}\right)$ là dãy vô cùng lớn với các số hạng đều âm. Do vậy $\left(2^{\frac{1}{x_n-1}}\right) \to 0$ $(n \to \infty)$ và

$$f(x_n) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x_n-1}}} \to 1 \quad (n \to \infty),$$

tức là $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = 1$. Do đó điểm $x_0 = 1$ là điểm gián đoạn kiểu I. $\blacktriangle$

Ví dụ 6. Xác định và phân loại điểm gián đoạn của hàm

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x < 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \cos\dfrac{1}{x} & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

Giải. Điểm gián đoạn có thể có của hàm là $x_0 = 0$. Ta xét các giới hạn một phía tại điểm $x_0 = 0$.

i) Ta chứng minh rằng $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$. Thật vậy, nếu dãy (x_n) hội tụ đến 0 và $x_n < 0\ \forall\, n$ thì

$$0 \leqslant |f(x_n)| = |x_n|\left|\cos\frac{1}{x_n}\right| \leqslant |x_n|.$$

Vì $|x_n| \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

ii) Hàm đã cho không có giới hạn bên phải tại điểm $x_0 = 0$. Để chứng minh điều đó ta xét hai dãy hội tụ đến 0 lập nên từ các dãy số dương $x_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + n\pi}$ và $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n}$. Nếu như hàm f có giới hạn bên phải tại điểm $x_0 = 0$ thì hai dãy $f(x_n)$ và $f(x'_n)$ phải hội tụ đến cùng một giới hạn. Thế nhưng $f(x'_n) = \cos 2\pi n = 1$ hội tụ đến 1, còn $f(x_n) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$ hội tụ đến 0.

Từ đó suy rằng hàm có gián đoạn kiểu II tại điểm $x_0 = 0$. ▲

Ví dụ 7. Tìm và phân loại các điểm gián đoạn của các hàm:

$$1)\quad y = (\mathrm{sign}x)^2; \qquad 2)\quad y = [x]$$

Giải

1) Từ định nghĩa hàm $\mathrm{sign}x$ suy rằng

$$(\mathrm{sign}x)^2 = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Từ đó suy rằng hàm $y = (\mathrm{sign}x)^2$ liên tục $\forall\, x \neq 0$ (hãy dựng đồ thị của hàm) và tại điểm $x_0 = 0$ ta có $y(0-0) = y(0+0) \neq y(0)$. Điều đó có nghĩa rằng $x_0 = 0$ là điểm gián đoạn khử được.

2) Giả sử $n \in \mathbb{Z}$. Nếu $n - 1 \leqslant x < n$ thì $[x] = n - 1$, nếu $n \leqslant x < n + 1$ thì $[x] = n$ (hãy dựng đồ thị của hàm phần nguyên $[x]$). Nếu $x_0 \notin \mathbb{Z}$ thì tồn tại lân cận của điểm x_0 (không chứa các số

nguyên) sao cho tại đó hàm bằng hằng số. Do vậy nó liên tục tại x_0. Nếu $x_0 = n$ là số nguyên thì $[n-0] = n-1$, $[n+0] = n$. Từ đó suy rằng $x_0 = n$ là điểm gián đoạn kiểu I. ▲

Ví dụ 8. Khảo sát sự liên tục và phân loại điểm gián đoạn của các hàm

$$1)\quad f(x) = \frac{x^2}{x},\quad 2)\quad f(x) = e^{-\frac{1}{x}},\quad 3)\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \leqslant 1 \\ \ln x & \text{nếu } x > 1. \end{cases}$$

Giải

1) Hàm $f(x) = x$ nếu $x \neq 0$ và không xác định khi $x = 0$. Vì $\forall\, a$ ta có $\lim\limits_{x\to a} x = a$ nên khi $a \neq 0$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = a = f(a)$$

và do vậy hàm $f(x)$ liên tục $\forall\, x \neq 0$. Tại điểm $x = 0$ ta có gián đoạn khử được vì tồn tại

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

2) Hàm $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ là hàm sơ cấp vì nó là hợp của các hàm $y = -x^{-1}$ và $f = e^y$. Hiển nhiên là hàm $f(x)$ xác định $\forall\, x \neq 0$ và do đó nó liên tục $\forall\, x \neq 0$. Vì hàm $f(x)$ xác định trong lân cận điểm $x = 0$ và không xác định tại chính điểm $x = 0$ nên điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn. Ta tính $f(0+0)$ và $f(0-0)$.

Ta xét dãy vô cùng bé tùy ý (x_n) sao cho $x_n > 0\ \forall\, n$. Vì $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x_n}\right) = -\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x_n}} = 0$. Từ đó suy rằng $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}} = 0$. Bây giờ ta xét dãy vô cùng bé bất kỳ (x'_n) sao cho $x'_0 < 0\ \forall\, n$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x'_n}\right) = +\infty$ nên $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x'_n}} = +\infty$. Do đó $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ tức là $f(0-0) = +\infty$.

Như vậy giới hạn bên trái của hàm $f(x)$ tại điểm $x = 0$ không tồn tại do đó điểm $x = 0$ là điểm gián đoạn kiểu II.

3) Ta chứng minh rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x = a \neq 1$. Ta lấy $\varepsilon < |a-1|$, $\varepsilon > 0$. Khi đó ε-lân cận của điểm $x = a$ không chứa điểm $x = 1$ nếu $\varepsilon < |a-1|$. Trong ε-lân cận này hàm $f(x)$ hoặc trùng với hàm $\varphi(x) = x$ nếu $a < 1$ hoặc trùng với hàm $\varphi(x) = \ln x$ nếu $a > 1$. Vì các hàm sơ cấp cơ bản này liên tục tại điểm $x = a$ nên hàm $f(x)$ liên tục tại điểm $x = a \neq 1$.

Ta khảo sát tính liên tục của hàm $f(x)$ tại điểm $x = a = 1$. Để làm việc đó ta cần tính các giới hạn một phía của $f(x)$ tại điểm $x = a = 1$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(1+0) &= \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \ln x = 0, \\ f(1-0) &= \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x = \lim_{x\to 1} x = 1. \end{aligned}$$

Như vậy $f(1+0) \neq f(1-0)$ và do đó hàm $f(x)$ có gián đoạn kiểu I tại $x = a = 1$.

BÀI TẬP

Khảo sát tính liên tục và phân loại điểm gián đoạn của hàm

1. $f(x) = \dfrac{|2x-3|}{2x-3}$ (ĐS. Hàm xác định và liên tục $\forall\, x \neq \dfrac{3}{2}$; tại $x_0 = \dfrac{3}{2}$ hàm có gián đoạn kiểu I)

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$

(ĐS. Hàm liên tục $\forall\, x \in \mathbb{R}$)

3. Có tồn tại hay không giá trị a để hàm $f(x)$ liên tục tại x_0 nếu:

1) $f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 3^x & \text{nếu } x < 0 \\ 2a + x & \text{khi } x \geqslant 0. \end{cases}$

(ĐS. Hàm f liên tục $\forall\, x \in \mathbb{R}$ nếu $a = 2$)

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0; \\ a, x = 0, x_0 = 0. \end{cases}$.

(ĐS. $a = 0$)

3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1, x_0 = -1. \end{cases}$

(ĐS. $a = \dfrac{1}{3}$)

4) $f(x) = \begin{cases} \cos x, x \leqslant 0; \\ a(x-1), x > 0; x_0 = 0. \end{cases}$

(ĐS. $a = -1$)

4. $f(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$

(ĐS. Hàm có gián đoạn tại $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ vì:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \sin x > 0 \\ -1 & \text{nếu } \sin x < 0) \end{cases}$$

5. $f(x) = E(x) - E(-x)$

(ĐS. Hàm có gián đoạn khử được tại $x = n$, $x \in \mathbb{Z}$ vì:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x = n \\ 0 & \text{nếu } x \neq n.) \end{cases}$$

6. $f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$

(ĐS. Tại điểm $x = 0$ hàm có gián đoạn kiểu II; $f(-0) = 0$, $f(+0) = \infty$)

Tìm điểm gián đoạn và tính bước nhảy của các hàm:

7. $f(x) = x + \dfrac{x+2}{|x+2|}$

(ĐS. $x = -2$ là điểm gián đoạn kiểu I, $\delta(-2) = 2$)

8. $f(x) = \dfrac{2|x-1|}{x^2 - x^3}$

(ĐS. $x = 0$ là điểm gián đoạn kiểu II, $x = 1$ là điểm gián đoạn kiểu I, $\delta(1) = -4$)

Hãy bổ sung các hàm sau đây tại điểm $x = 0$ để chúng trở thành liên tục

9. $f(x) = \dfrac{\text{tg}x}{x}$ (ĐS. $f(0) = 1$)

10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (ĐS. $f(0) = \dfrac{1}{2}$)

11. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ (ĐS. $f(0) = 2$)

12. Hiệu của các giới hạn một phía của hàm $f(x)$:

$$d = \lim_{x\to x_0+0} f(x) - \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

được gọi là *bước nhảy* của hàm $f(x)$ tại điểm x_0. Tìm điểm gián đoạn và *bước nhảy* của hàm $f(x)$ nếu:

1) $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{nếu } x \leqslant 2, \\ x & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$

(ĐS. $x_0 = 2$ là điểm gián đoạn kiểu I; $d = 4$)

2) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 4 - 2x & \text{nếu } 1 < x \leqslant 2,5; \\ 2x - 7 & \text{nếu } 2,5 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$

(ĐS. $x_0 = 2,5$ là điểm gián đoạn kiểu I; $d = -1$)

3) $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{nếu } -\infty < x < -1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{nếu } -1 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$

(ĐS. $x_0 = 0$ là điểm gián đoạn kiểu II; điểm $x_0 = -1$ là điểm gián đoạn kiểu I, $d = -4$)

7.4 Giới hạn và liên tục của hàm nhiều biến

1. Giả sử $u = f(M) = f(x, y)$ xác định trên tập hợp D. Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cố định nào đó của mặt phẳng và $x \to x_0$, $y \to y_0$, khi đó điểm $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$. Điều này tương đương với khoảng cách $\rho(M, M_0)$ giữa hai điểm M và M_0 dần đến 0. Ta lưu ý rằng

$$\rho(M, M_0) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}.$$

Ta có các định nghĩa sau đây:

i) Định nghĩa giới hạn (theo Cauchy)

Số b được gọi là giới hạn của hàm $f(M)$ khi $M \to M_0$ (hay tại điểm M_0) nếu

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\, M \in \{D : 0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)\} \\ &\qquad\qquad \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon. \end{aligned}$$

ii) Định nghĩa giới hạn (theo Heine)

Số b được gọi là giới hạn của hàm $f(M)$ tại điểm M_0 nếu đối với dãy điểm $\{M_n\}$ bất kỳ hội tụ đến M_0 sao cho $M_n \in D$, $M_n \neq M_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ thì dãy các giá trị tương ứng của hàm $\{f(M_n)\}$ hội tụ đến b.

Ký hiệu:

i) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$, hoặc

ii) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$

Hai định nghĩa giới hạn trên đây tương đương với nhau.

Chú ý. Ta nhấn mạnh rằng theo định nghĩa, giới hạn của hàm không phụ thuộc vào phương M dần tới M_0. Do đó nếu $M \to M_0$ theo các hướng khác nhau mà $f(M)$ dần đến các giá trị khác nhau thì khi $M \to M_0$ hàm $f(M)$ không có giới hạn.

iii) Số b được gọi là giới hạn của hàm $f(M)$ khi $M \to \infty$ nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R > 0 : \forall M \in \{D : \rho(M, 0) > R\} \Rightarrow |f(M) - b| < \varepsilon.$$

Đối với hàm nhiều biến, cùng với giới hạn thông thường đã nêu ở trên (*giới hạn kép !*), người ta còn xét giới hạn lặp. Ta sẽ xét khái niệm này cho hàm hai biến $u = f(M) = f(x, y)$.

Giả sử $u = f(x, y)$ xác định trong hình chữ nhật

$$Q = \{(x, y) : |x - x_0| < d_1, |y - y_0| < d_2\}$$

có thể trừ ra chính các điểm $x = x_0$, $y = y_0$. Khi cố định một giá trị y thì hàm $f(x, y)$ trở thành hàm một biến. Giả sử đối với giá trị cố định y bất kỳ thỏa mãn điều kiện $0 < |y - y_0| < d_2$ tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \text{ cố định}}} f(x, y) = \varphi(y).$$

Tiếp theo, giả sử $\lim\limits_{y \to y_0} \varphi(y) = b$ tồn tại. Khi đó người ta nói rằng tồn tại *giới hạn lặp* của hàm $f(x, y)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ và viết

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = b,$$

trong đó giới hạn $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \text{ cố định} \\ 0 < |y - y_0| < d_2}} f(x, y)$ gọi là giới hạn trong. Tương tự, ta có thể phát biểu định nghĩa giới hạn lặp khác $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ trong đó giới hạn

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ x \text{ cố định} \\ 0 < |x - x_0| < d_1}} f(x, y)$$

là giới hạn trong.

Mối quan hệ giữa giới hạn kép và các giới hạn lặp được thể hiện trong định lý sau đây:

Giả sử tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ giới hạn kép và các giới hạn trong của các giới hạn lặp của hàm tồn tại. Khi đó các giới hạn lặp tồn tại và

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Từ định lý này ta thấy rằng việc thay đổi thứ tự trong các giới hạn không phải bao giờ cũng được phép.

Đối với hàm nhiều biến ta cũng có những định lý về các tính chất số học của giới hạn tương tự các định lý về giới hạn của hàm một biến.

2. Từ khái niệm giới hạn ta sẽ trình bày khái niệm về tính liên tục của hàm nhiều biến.

Hàm $u = f(M)$ được gọi là *liên tục* tại điểm M_0 nếu:

i) $f(M)$ xác định tại chính điểm M_0 cũng như trong một lân cận nào đó của điểm M_0.

ii) Giới hạn $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ tồn tại.

iii) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Sự liên tục vừa được định nghĩa gọi là sự liên tục theo tập hợp biến số.

Hàm $f(M)$ liên tục trong miền D nếu nó liên tục tại mọi điểm của miền đó.

Điểm M_0 được gọi là *điểm gián đoạn* của hàm $f(M)$ nếu đối với điểm M_0 có ít nhất một trong ba điều kiện trong định nghĩa liên tục không thỏa mãn. Điểm gián đoạn của hàm nhiều biến có thể là những điểm cô lập, và cũng có thể là cả một đường (đường gián đoạn).

Nếu hàm $f(x, y)$ liên tục tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ theo tập hợp biến số thì nó liên tục theo từng biến số. Điều khẳng định ngược lại là không đúng.

Cũng như đối với hàm một biến, tổng, hiệu và tích các hàm liên tục hai biến tại điểm M_0 là hàm liên tục tại điểm đó; thương của hai hàm liên tục tại M_0 cũng là hàm liên tục tại M_0 nếu tại điểm M_0 hàm mẫu số khác 0. Ngoài ra, định lý về tính liên tục của hàm hợp vẫn đúng trong trường hợp này.

Nhận xét. Tương tự như trên ta có thể trình bày các khái niệm cơ bản liên quan đến giới hạn và liên tục của hàm ba biến,...

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng hàm
$f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ là vô cùng bé tại điểm $O(0,0)$.

Giải. Theo định nghĩa vô cùng bé (tương tự như đối với hàm một biến) ta cần chứng minh rằng

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

Ta áp dụng định nghĩa giới hạn theo Cauchy. Ta cho số $\varepsilon > 0$ tùy ý và đặt $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Khi đó nếu

$$\rho\big[M(x,y), O(0,0)\big] = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \text{ thì } |x| < \delta, |y| < \delta.$$

Do đó

$$|f(x,y) - 0| = \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| \leqslant |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon.$$

Điều đó chứng tỏ rằng

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau đây:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1+xy)^{\frac{2}{x^2+xy}}$, 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sqrt{x^2+(y-x)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}$,

3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

Giải. 1) Ta biểu diễn hàm dưới dấu giới hạn dưới dạng

$$\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{\frac{2y}{x+y}}.$$

Vì $t = xy \to 0$ khi $\begin{pmatrix} x \to 0 \\ y \to 0 \end{pmatrix}$ nên

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e.$$

Tiếp theo vì $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{2}{x+y} = 2$ (theo định lý thông thường về giới hạn của thương), do đó giới hạn cần tìm bằng e^2.

2) Ta tìm giới hạn với điều kiện $M(x,y) \to M_0(0,2)$. Khoảng cách giữa hai điểm M và M_0 bằng

$$\rho = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}\,.$$

Do đó

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\sqrt{\rho^2+1}-1}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{(\rho^2+1)-1}{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}$$
$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+1}+1} = \frac{1}{2}\cdot$$

3) Chuyển sang tọa độ cực ta có $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Ta có

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{\rho^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)}{\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \rho^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi).$$

Vì $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi \leqslant 2$ nên

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0}\rho^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = 0.$$

Ví dụ 3. 1) Chứng minh rằng hàm

$$f_1(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

không có giới hạn tại điểm $(0,0)$.

2) Hàm

$$f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

có giới hạn tại điểm $(0,0)$ hay không ?

Giải. 1) Hàm $f_1(x,y)$ xác định khắp nơi ngoại trừ đường thẳng $x+y=0$. Ta chứng minh rằng hàm không có giới hạn tại $(0,0)$. Ta lấy hai dãy điểm hội tụ đến điểm $(0,0)$:

$$M_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \to (0,0), \quad n \to \infty,$$
$$M'_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \to (0,0), \quad n \to \infty.$$

Khi đó thu được

$$\lim_{n\to\infty} f_1(M_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n} - 0}{\dfrac{1}{n} + 0} = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} f_1(M'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - \dfrac{1}{n}}{0 + \dfrac{1}{n}} = -1.$$

Như vậy hai dãy điểm khác nhau cùng hội tụ đến điểm $(0,0)$ nhưng hai dãy giá trị tương ứng của hàm không có cùng giới hạn. Do đó theo định nghĩa hàm không có giới hạn tại $(0,0)$.

2) Giả sử điểm $M(x,y)$ dần đến điểm $(0,0)$ theo đường thẳng $y=kx$ qua gốc tọa độ. Khi đó ta có

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (y=kx)}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}\,\cdot$$

Như vậy khi dần đến điểm $(0,0)$ theo các đường thẳng khác nhau (tương ứng với các giá trị k khác nhau) ta thu được các giá trị giới hạn khác nhau, tức là hàm đã cho không có giới hạn tại $(0,0)$. ▲

Ví dụ 4. Khảo sát tính liên tục của các hàm

1) $f(x,y) = \dfrac{x^2+2xy+5}{y^2-2x+1}$

2) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-z}$

3) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^3+y^3}$

Giải. 1) Điều kiện liên tục của hàm đã cho bị vi phạm tại những điểm của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ mà tọa độ của chúng thỏa mãn phương trình $y^2-2x+1=0$. Đó là phương trình đường parabôn với đỉnh tại điểm $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. Như vậy các điểm của parabôn này là những điểm gián đoạn - đó là đường gián đoạn của hàm. Những điểm của mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ không thuộc parabôn đó là những điểm liên tục.

2) Hàm đã cho liên tục tại mọi điểm của không gian $\mathbb{R}^3$ mà tọa độ của chúng thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2-z\neq 0$. Đó là phương trình mặt paraboloit tròn xoay. Trong trường hợp này mặt paraboloit là mặt gián đoạn của hàm.

3) Vì tử số và mẫu số là những hàm liên tục nên thương là hàm liên tục tại những điểm mà mẫu số $x^3+y^3\neq 0$. Hàm có gián đoạn tại những điểm mà $x^3+y^3=0$ hay $y=-x$. Nghĩa là hàm có gián đoạn trên đường thẳng $y=-x$.

Giả sử $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$. Khi đó

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}\cdot$$

Từ đó suy ra rằng các điểm của đường thẳng $y=x$ $(x\neq 0)$ là nhựng điểm gián đoạn khử được. Vì

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = +\infty$$

nên điểm $O(0,0)$ là điểm gián đoạn vô cùng.

BÀI TẬP

Trong các bài toán sau đây (1-10) hãy tìm miền xác định của các hàm nếu:

1. $w = \sqrt{x^2-y^2}$. (ĐS. $|y| \leqslant |x|$)

2. $w = \sqrt{xy}$. (ĐS. $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ hoặc $x \leqslant 0, y \leqslant 0$)

3. $w = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. (ĐS. $x^2+y^2 \leqslant a^2$)

4. $w = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$. (ĐS. $x^2+y^2 > a^2$)

5. $w = \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$. (ĐS. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$)

6. $w = \ln(z^2-x^2-y^2-1)$. (ĐS. $x^2+y^2-z^2 < -1$)

7. $w = \arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{xy}$. (ĐS. Hai nửa băng vô hạn thẳng đứng $\{0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y < +\infty\}$ và $\{-2 \leqslant x \leqslant 0, -\infty < y \leqslant 0\}$)

8. $w = \sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$.
(ĐS. Vành tròn $1 \leqslant x^2+y^2 < 4$)

9. $w = \sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$. (ĐS. Tập hợp các vành đồng tâm $0 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1;\ 2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 3; \dots$)

10. $w = \sqrt{\ln(1+z-x^2-y^2)}$.
(ĐS. Phần trong của mặt paraboloid $z = x^2+y^2-1$).

Trong các bài toán sau đây (11-18) hãy tính các giới hạn của hàm

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{xy}$. (ĐS. 1)

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{x}$. (ĐS. 0)

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$. (ĐS. 2)

14. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. (ĐS. 2)

Chỉ dẫn. Sử dụng khoảng cách $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ hoặc nhân - chia với đại lượng liên hợp với mẫu số.

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \big(1+xy^2\big)^{\dfrac{y}{x^2y+xy^2}}$. (ĐS. e^3)

16. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. (ĐS. 0)

17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}} \dfrac{\sqrt{(x^2+(y-5)^2+1}-1}{x^2+(y-5)^2}$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}$)

18. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{\mathrm{tg}(2xy)}{x^2y}$. (ĐS. 2).

Chương 8

Phép tính vi phân hàm một biến

8.1 Đạo hàm

8.1.1 Đạo hàm cấp 1

Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong δ-lân cận của điểm x_0 ($\mathcal{U}(x_0;\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta)$ và $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia của nó tại điểm x_0 tương ứng với số gia $\Delta x = x - x_0$ của đối số.

Theo định nghĩa: Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

khi $\Delta x \to 0$ thì giới hạn đó được gọi là *đạo hàm* của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 và được chỉ bởi một trong các ký hiệu:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv f'(x) \equiv y'.$$

Đại lượng

$$f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

và

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

được gọi là *đạo hàm bên phải* và *đạo hàm bên trái* của hàm $y = f(x)$ tại điểm x_0 nếu các giới hạn đã nêu tồn tại.

Sử dụng khái niệm giới hạn một phía ta có:

Định lý 8.1.1. *Hàm $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x khi và chỉ khi các đạo hàm một phía tồn tại và bằng nhau:*

$$f'(x + 0) = f'(x - 0) = f'(x).$$

Hàm $f(x)$ *khả vi* nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ hữu hạn. Hàm $f(x)$ *khả vi liên tục* nếu đạo hàm $f'(x)$ tồn tại và liên tục. Nếu hàm $f(x)$ khả vi thì nó liên tục. Điều khẳng định ngược lại là không đúng.

8.1.2 Đạo hàm cấp cao

Đạo hàm $f'(x)$ được gọi là *đạo hàm cấp 1* (hay *đạo hàm bậc nhất*). Đạo hàm của $f'(x)$ được gọi là *đạo hàm cấp hai* (hay *đạo hàm thứ hai*) của hàm $f(x)$ và được ký hiệu là y'' hay $f''(x)$. Đạo hàm của $f''(x)$ được gọi là *đạo hàm cấp 3* (hay *đạo hàm thứ ba*) của hàm $f(x)$ và được ký hiệu y''' hay $f'''(x)$ (hay $y^{(3)}$, $f^{(3)}(x)$ v.v...

Ta có bảng đạo hàm của các hàm sơ cấp cơ bản

$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^a	ax^{a-1}	$a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1)x^{a-n}$, $x>0$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x\ln a$	$a^x(\ln a)^n$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{x^n},\ \ x>0$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x\ln a}$	$(-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{1}{x^n\ln a},\ \ x>0$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$f(x)$	$f'(x)$	$f^{(n)}(x)$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$
$\mathrm{tg}x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\mathrm{cotg}x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\|x\|<1$	
$\mathrm{arccos}x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\|x\|<1$	
$\mathrm{arctg}x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\mathrm{arccotg}x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	

Việc tính đạo hàm được dựa trên các quy tắc sau đây.

1^+ $\dfrac{d}{dx}[u+v]=\dfrac{d}{dx}u+\dfrac{d}{dx}v.$

2^+ $\dfrac{d}{dx}(\alpha u)=\alpha\dfrac{du}{dx},\ \ \alpha\in\mathbb{R}.$

3^+ $\dfrac{d}{dx}(uv)=v\dfrac{du}{dx}+u\dfrac{dv}{dx}.$

4^+ $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{1}{v^2}\left(v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}\right),\ \ v\neq 0.$

5^+ $\dfrac{d}{dx}f[u(x)]=\dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ (đạo hàm của hàm hợp).

6^+ Nếu hàm $y=y(x)$ có hàm ngược $x=x(y)$ và $\dfrac{dy}{dx}\equiv y'_x\neq 0$ thì

$$\frac{dx}{dy}\equiv x'_y=\frac{1}{y'_x}\cdot$$

7^+ Nếu hàm $y = y(x)$ được cho dưới dạng ẩn bởi hệ thức khả vi $F(x, y) = 0$ và $F'_y \neq 0$ thì

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

trong đó F'_x và F'_y là đạo hàm theo biến tương ứng của hàm $F(x, y)$ khi xem biến kia không đổi.

8^+ Nếu hàm $y = y(x)$ được cho dưới dạng tham số $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(x'(t) \neq 0)$ thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}\cdot$$

9^+ $\dfrac{d^n}{dx^n}(\alpha u + \beta v) = \alpha\dfrac{d^n u}{dx^n} + \beta\dfrac{d^n v}{dx^n}$;

$$\frac{d^n}{dx^n}uv = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}u\frac{d^k}{dx^k}v \quad \text{(quy tắc Leibniz).}$$

Nhận xét. 1) Khi tính đạo hàm của một biểu thức đã cho ta có thể biến đổi sơ bộ biểu thức đó sao cho quá trình tính đạo hàm đơn giản hơn. Chẳng hạn nếu biểu thức đó là logarit thì có thể sử dụng các tính chất của logarit để biến đổi... rồi tính đạo hàm. Trong nhiều trường hợp khi tính đạo hàm ta nên lấy logarit hàm đã cho rồi áp dụng công thức đạo hàm loga

$$\frac{d}{dx}\ln y(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}\cdot$$

2) Nếu hàm khả vi trên một khoảng được cho bởi phương trình $F(x, y) = 0$ thì đạo hàm $y'(x)$ có thể tìm từ phương trình

$$\frac{d}{dx}F(x, y) = 0.$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm y' nếu:

1) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{e^x}{1+\cos x}}$; $x \neq \pi(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$

2) $y = \dfrac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\sin^7 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{N}$.

Giải. 1) Trước hết ta đơn giản biểu thức của hàm y bằng cách dựa vào các tính chất của logarit. Ta có

$$y = \frac{1}{3}\ln e^x - \frac{1}{3}\ln(1+\cos x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\ln(1+\cos x).$$

Do đó

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\frac{(\cos x)'}{1+\cos x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{\sin x}{1+cosx} = \frac{1+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{3}\cdot$$

2) Ở đây tiện lợi hơn cả là xét hàm $z = \ln|y|$. Ta có

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\frac{dz}{dx}\cdot \tag{*}$$

Viết hàm z dưới dạng

$$x = \ln|y| = \ln(1+x^2) - \frac{4}{3}\ln|x| - 7\ln|\sin x|$$
$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7\frac{\cos x}{\sin x}\cdot$$

Thế biểu thức vừa thu được vào $(*)$ ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{\sqrt[3]{x^4}\sin^7 x}\Big(\frac{2x}{1+x^2} - \frac{4}{3x} - 7\frac{\cos x}{\sin x}\Big). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm y' nếu: 1) $y = (2+\cos x)^x$, $x \in \mathbb{R}$; 2) $y = x^{2^x}$, $x > 0$.

Giải. 1) Theo định nghĩa ta có

$$y = e^{x\ln(2+\cos x)}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} y' &= e^{x\ln(2+\cos x)}\big[x\ln(2+\cos x)\big]' \\ &= e^{x\ln(2+\cos x)}\Big[\ln(2+\cos x) - x\frac{\sin x}{2+\cos x}\Big], \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Vì $y = e^{2^x\ln x}$ nên với $x > 0$ ta có

$$\begin{aligned} y' = e^{2^x\ln x}[2^x\ln x]' &= e^{2^x\ln x}\Big[\frac{1}{x}2^x + 2^x\ln 2\cdot\ln x\Big] \\ &= 2^x x^{2^x}\Big(\frac{1}{x} + \ln 2\cdot\ln x\Big). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm cấp 2 của hàm ngược với hàm $y = x + x^5$, $x \in \mathbb{R}$.

Giải. Hàm đã cho liên tục và đơn điệu khắp nơi, đạo hàm $y' = 1 + 5x^4$ không triệt tiêu tại bất cứ điểm nào. Do đó

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+5x^4}\cdot$$

Lấy đạo hàm đẳng thức này theo y ta thu được

$$x''_{yy} = \Big(\frac{1}{1+5x^4}\Big)'_x\cdot x'_y = \frac{-20x^3}{(1+5x^4)^3}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Giả sử hàm $y = f(x)$ được cho dưới dạng tham số bởi các công thức $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (a;b)$ và giả sử $x(t)$, $y(t)$ khả vi cấp 2 và $x'(t) \neq 0$ $t \in (a,b)$. Tìm y''_{xx}.

Giải. Ta có

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}\cdot$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức này ta có

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \Big(\frac{y'_t}{x'_t}\Big)'_t\cdot t'_x = \Big(\frac{y'_t}{x'_t}\Big)'_t\cdot\frac{1}{x'_t} \\ &= \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{x'^3_t}\cdot \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Giả sử $y = y(x)$, $|x| > a$ là hàm giá trị dương cho dưới dạng ẩn bởi phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Tính y''_{xx}.

Giải. Để tìm y' ta áp dụng công thức

$$\frac{d}{dx}F(x,y) = 0.$$

Trong trường hợp này ta có

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\Big) = 0.$$

Lấy đạo hàm ta có

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}y'_x = 0, \tag{8.1}$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{b^2x}{a^2y}, \quad |x| > 0, y > 0. \tag{8.2}$$

Lấy đạo hàm (8.1) theo x ta thu được

$$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\big(y'_x\big)^2 - \frac{y}{b^2}y''_{xx} = 0$$

và từ (8.2) ta thu được y''_x:

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{1}{y}\Big[\frac{b^2}{a^2} - \big(y'_x\big)^2\Big] = \frac{1}{y}\Big[\frac{b^2}{a^2} - \frac{b^4}{a^4}\frac{x^2}{y^2}\Big] \\ &= -\frac{b^4}{a^2y^3}\Big[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\Big] = -\frac{b^4}{a^2y^3}, \quad y > 0. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tính $y^{(n)}$ nếu: 1) $y = \dfrac{1}{x^2-4}$; 2) $y = x^2\cos 2x$.

Giải. 1) Biểu diễn hàm đã cho dưới dạng tổng các phân thức cơ bản

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\Big[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\Big]$$

và khi đó

$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)} = \frac{1}{4}\Big[\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}\Big].$$

Do

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x\pm 2}\right)^{(n)} &= (-1)(-2)\cdots(-1-n+1)(x\pm 2)^{-1-n}\\ &= (-1)^n n!\frac{1}{(x\pm 2)^{n+1}}\end{aligned}$$

nên

$$\left(\frac{1}{x^2-4}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4}\Big[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\Big].$$

2) Ta áp dụng công thức Leibniz đối với đạo hàm của tích

$$\begin{aligned}(x^2\cos 2x) &= C_n^0 x^2(\cos 2x)^{(n)} + C_n^1(x^2)'(\cos 2x)^{n-1}\\ &\quad + C_n^2(x^2)'(\cos 2x)^{n-2}.\end{aligned}$$

Các số hạng còn lại đều $= 0$ vì

$$\big(x^2\big)^{(k)} = 0 \quad \forall\, k > 2.$$

Áp dụng công thức

$$(\cos 2x)^{(n)} = 2^n\cos\Big(2x + \frac{n\pi}{2}\Big)$$

ta thu được

$$\begin{aligned}(x^2\cos 2x)^{(n)} &= 2^n\Big(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\Big)\cos\Big(2x+\frac{n\pi}{2}\Big)\\ &\quad + 2^n nx\sin\Big(2x+\frac{n\pi}{2}\Big). \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 7. Với giá trị nào của a và b thì hàm

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0,\\ x^2 + ax + b, & x > 0\end{cases}$$

có đạo hàm trên toàn trục số.

Giải. Rõ ràng là hàm $f(x)$ có đạo hàm $\forall\, x > 0$ và $\forall\, x < 0$. Ta chỉ cần xét điểm $x_0 = 0$.

Vì hàm $f(x)$ phải liên tục tại điểm $x_0 = 0$ nên

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

tức là

$$\lim_{x\to 0+0}(x^2 + ax + b) = b = e^0 = 1 \Rightarrow b = 1.$$

Tiếp đó, $f'_+(0) = (x' + ax + b)'\big|_{x_0=0} = a$ và $f'_-(0) = e^x\big|_{x_0=0} = 1$. Do đó $f'(0)$ tồn tại nếu $a = 1$ và $b = 1$. Như vậy với $a = 1$, $b = 1$ hàm đã cho có đạo hàm $\forall\, x \in \mathbb{R}$. ▲

BÀI TẬP

Tính đạo hàm y' của hàm $y = f(x)$ nếu:

1. $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + 2.$ (ĐS. $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - \dfrac{10}{x^3} + \dfrac{9}{x^4}$)

2. $y = \log_2 x + 3\log_3 x.$ (ĐS. $\dfrac{\ln 24}{x\ln 2\cdot\ln 3}$)

3. $y = 5^x + 6^x + \left(\dfrac{1}{7}\right)^x.$ (ĐS. $5^x\ln 5 + 6^x\ln 6 - 7^{-x}\ln 7$)

4. $y = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}).$ (ĐS. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$)

5. $y = \mathrm{tg}5x.$ (ĐS. $\dfrac{10}{\sin 10x}$)

6. $y = \ln(\ln\sqrt{x}).$ (ĐS. $\dfrac{1}{2x\ln\sqrt{x}}$)

7. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}.$ (ĐS. $\dfrac{2}{1-4x^2}$)

8. $y = x\text{arctg}\sqrt{2x-1} - \dfrac{\sqrt{2x-1}}{2}$. (ĐS. $\text{arctg}\sqrt{2x-1}$)

9. $y = \sin^2 x^3$. (ĐS. $3x^2\sin 2x^3$)

10. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. (ĐS. $-\sin 4x$)

11. $y = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}$. (ĐS. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$)

12. $y = e^{\frac{1}{\cos x}}$. (ĐS. $e^{\frac{1}{\cos x}}\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$)

13. $y = e^{\frac{1}{\ln x}}$. (ĐS. $\dfrac{-e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$)

14. $y = \ln\big(e^{2x} + \sqrt{e^{4x}+1}$. (ĐS. $\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+1}}$)

15. $y = \ln\sqrt{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$. (ĐS. $\dfrac{2}{e^{4x}+1}$)

16. $y = \log_5 \cos 7x$. (ĐS. $-\dfrac{7\text{tg}7x}{\ln 5}$)

17. $y = \log_7 \cos\sqrt{1+x}$. (ĐS. $-\dfrac{\text{tg}\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\ln 7}$)

18. $y = \arccos\big(e^{-\frac{x^2}{2}}\big)$. (ĐS. $\dfrac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$)

19. $y = \text{tg}\sin\cos x$. (ĐS. $\dfrac{-\sin\cos(\cos x)}{\cos^2(\sin\cos x)}$)

20. $y = e^{x^2\text{cotg}3x}$. (ĐS. $\dfrac{xe^{c^2\text{cotg}3x}}{\sin^2 3x}(\sin 6x - 3x)$)

21. $y = e^{\sqrt{1+\ln x}}$. (ĐS. $\dfrac{e^{\sqrt{1+\ln x}}}{2x\sqrt{1+\ln x}}$)

22. $y = x^{\frac{1}{x}}$. (ĐS. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$)

23. $y = e^x$. (ĐS. $x^x(1+\ln x)$)

24. $y = x^{\sin x}$. (ĐS. $x^{\sin x}\cos x \cdot \ln x + x^{\sin x - 1}\sin x$)

25. $y = (\mathrm{tg}x)^{\sin x}$. (ĐS. $(\mathrm{tg}x)^{\sin x}\Big[\cos x \ln \mathrm{tg}x + \dfrac{1}{\cos x}\Big]$)

26. $y = x^{\sin x}$. (ĐS. $x^{\sin x}\Big[\dfrac{\sin x}{x} + \ln x \cdot \cos x\Big]$)

27. $y = x^{x^2}$. (ĐS. $x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$)

28. $y = x^{e^x}$. (ĐS. $e^x x^{e^x}\Big(\frac{1}{x} + \ln x\Big)$)

29. $y = \log_x 7$. (ĐS. $-\dfrac{1}{x\ln x \log_7 x}$)

30. $y = \dfrac{1}{2a}\ln\Big|\dfrac{x-a}{x+a}\Big|$. (ĐS. $\dfrac{1}{x^2 - a^2}$)

31. $y = \sin \ln|x|$. (ĐS. $\dfrac{\cos \ln|x|}{x}$)

32. $y = \ln|\sin x|$. (ĐS. $\mathrm{cotg}x$)

33. $y = \ln|x + \sqrt{x^2+1}|$. (ĐS. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$).

Trong các bài toán sau đây (34-40) tính đạo hàm của hàm y được cho dưới dạng tham số.

34. $x = a\cos t$, $a\sin t$, $t \in (0, \pi)$. y''_{xx} ? (ĐS. $-\dfrac{1}{a\sin^3 t}$)

35. $x = t^3$, $y = t^2$. y''_{xx} ? (ĐS. $-\dfrac{2}{9t^4}$)

36. $x = 1 + e^{at}$, $y = at + e^{-at}$. y''_{xx} ? (ĐS. $2e^{-3at} - e^{-2at}$)

37. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. y''_{xx} ? (ĐS. $\dfrac{1}{3a\sin t\cos^4 t}$)

38. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$. y''_{xx} ? (ĐS. $\dfrac{2}{e^t(\cos t - \sin t)^3}$)

39. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$. y''_{xx} ? (ĐS. $-\dfrac{1}{4\sin^4 \dfrac{t}{2}}$)

40. $x = t^2 + 2t$, $y = \ln(1+t)$. y''_{xx} ? (ĐS. $\dfrac{-1}{4(1+t)^4}$).

Trong các bài toán sau đây (41-47) tính đạo hàm y' hoặc y'' của hàm ẩn được xác định bởi các phương trình đã cho

41. $x + \sqrt{xy} + y = a.$ y' ? (ĐS. $\dfrac{2a - 2x - y}{x + 2y - a}$)

42. $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}.$ y' ? (ĐS. $\dfrac{x + y}{x - y}$)

43. $e^x \sin y - e^{-y}\cos x = 0.$ y' ? (ĐS. $-\dfrac{e^x \sin y + e^{-y}\sin x}{e^x\cos y + e^{-y}\cos x}$)

44. $x^2 y + \mathrm{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) = 0.$ y' ? (ĐS. $\dfrac{-2x^3y - 2xy^3 + y}{x^4 + x^2y^2 + x}$)

45. $e^x - e^y = y - x.$ y'' ? (ĐS. $\dfrac{(e^y - e^x)(e^{x+y} - 1)}{(e^y + 1)^3}$)

46. $x + y = e^{x-y}.$ y'' ? (ĐS. $\dfrac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$)

47. $y = x + \mathrm{arctg}y.$ y'' ? (ĐS. $\dfrac{-(2y^2+2)}{y^5}$).

Trong các bài toán sau đây (48-52) tính đạo hàm của hàm ngược với hàm đã cho.

48. $y = x + x^3$, $x \in \mathbb{R}$. x'_y ? (ĐS. $x'_y = \dfrac{1}{1 + 3x^2}$)

49. $y = x + \ln x$, $x > 0$. x'_y ? (ĐS. $x'_y = \dfrac{x}{x+1}$, $y > 0$)

50. $y = x + e^x$. x'_y ? (ĐS. $x'_y = \dfrac{1}{1 + y - x}$, $y \in \mathbb{R}$)

51. $y = \mathrm{ch}x$, $x > 0$. x'_y ? (ĐS. $x'_y = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$)

52. $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$, $x < 0$. x'_y ? (ĐS. $x'_y = \dfrac{x^3}{2y^2}$, $y \in (0, 1)$).

53. Với giá trị nào của a và b thì hàm

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \leqslant x_0, \\ ax + b & \text{nếu } x > x_0 \end{cases}$$

liên tục và khả vi tại điểm $x = x_0$?

(ĐS. $a = 3x_0^2$, $b = -2x_0^3$).

54. Xác định α và β để các hàm sau: a) liên tục khắp nơi; b) khả vi khắp nơi nếu

$$1) \qquad f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & \text{nếu } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

$$2) \qquad f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2 & \text{nếu } |x| < 1, \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{nếu } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

(ĐS. 1) a) $\alpha + \beta = 1$, b) $\alpha = 2, \beta = -1$; 2) a) $\alpha + \beta = 1$, b) $\alpha = \dfrac{3}{2}, \beta = -\dfrac{1}{2}$).

55. Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trên tia $(-\infty, x_0)$ và khả vi bên trái tại điểm $x = x_0$. Với giá trị nào của a và b thì hàm

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{nếu } x \leqslant x_0, \\ ax^2 + b & \text{nếu } x > x_0 \end{cases}$$

khả vi tại điểm $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$?

(ĐS. $a = \dfrac{f'(x_0 - 0)}{2x_0}$, $b = f(x_0) - \dfrac{x_0}{2} f'(x_0 - 0)$).

Trong các bài toán (56-62) tính đạo hàm y'' nếu

56. $y = e^{-x^2}$. (ĐS. $2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$)

57. $y = \mathrm{tg}x$. (ĐS. $\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$)

58. $y = \sqrt{1 + x^2}$. (ĐS. $\dfrac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$)

59. $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$. (ĐS. $\dfrac{x}{(4 - x^2)^{3/2}}$)

60. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$. (ĐS. $\dfrac{2x}{(1 + x^2)^2}$)

61. $y = x\,\mathrm{arcsin}x$. (ĐS. $\dfrac{2-x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$)

62. $y = f(e^x)$. (ĐS. $e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$).

Trong các bài toán (63-69) tính đạo hàm cấp 3 của y nếu:

63. $y = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}$. (ĐS. $\dfrac{4(3x-4)}{(4+x^2)^3}$)

64. $y = xe^{-x}$. (ĐS. $e^{-x}(3-x)$)

65. $y = e^x \cos x$. (ĐS. $-2e^x(\cos x + \sin x)$)

66. $y = x^2 \sin x$. (ĐS. $-2e^x(\cos x + \sin x)$)

67. $y = x^3 2^x$. (ĐS. $2^x(x^3\mathrm{ln}^3 2 + 9x^2\mathrm{ln}^2 x + 18x\mathrm{ln}2 + 6)$)

68. $y = x^2 \sin 2x$. (ĐS. $-4(2x^2\cos 2x + 6x\sin 2x - 3\cos 2x)$)

69. $y = (f(x^2)$. (ĐS. $12xf''(x^2) + 8x^3 f'''(x^2)$).

Trong các bài toán (70-84) tính đạo hàm $y^{(n)}$ nếu

70. $y = \sin 3x$. (ĐS. $3^n \sin\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$)

72. $y = e^{\frac{x}{2}}$. (ĐS. $e^{\frac{x}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$)

73. $y = 2^{3x}$. (ĐS. $2^{3x}(3\mathrm{ln}2)^n$)

74. $y = \cos^2 x$. (ĐS. $2^{n-1}\cos\left(2x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$)

75. $y = (4x+1)^n$. (ĐS. $4^n n!$)

76. $y = \ln(ax+b)$. (ĐS. $(-1)^{n-1}(n-1)!\dfrac{a^n}{(ax+b)^n}$)

77. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. (ĐS. $4^{n-1}\cos\left(4x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$)

Chỉ dẫn. Chứng minh rằng $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$.

78. $y = \sin^3 x$. (ĐS. $\dfrac{3}{4}\sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) - \dfrac{3^n}{4}\sin\left(3x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$)

Chỉ dẫn. Dùng công thức $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

79. $y = \sin\alpha x \sin\beta x$.

(ĐS. $\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^n\cos[(\alpha-\beta)x+n\frac{\pi}{2}]-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^n\cos[(\alpha+\beta)x+n\frac{\pi}{2}]$)

Chỉ dẫn. Biến đổi tích thành tổng.

80. $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

(ĐS. $e^{\alpha x}\Big\{\sin\beta x\Big[\alpha^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha^{n-2}\beta^2+\dots\Big]+$

$+\cos\beta x\Big[n\alpha^{n-1}\beta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\alpha^{n-3}\beta^3+\dots\Big]$)

Chỉ dẫn. Dùng quy tắc Leibniz.

81. $y = e^x(3x^2-4)$. (ĐS. $e^x[3x^2+6nx+3n(n-1)-4]$)

82. $y = \ln\frac{ax+b}{ax-b}$ $\Big(\frac{ax+b}{ax-b}>0\Big)$

(ĐS. $(-1)^{n-1}a^n(n-1)!\Big[\frac{1}{(ax+b)^n}-\frac{1}{ax-b)^n}\Big]$)

83. $y = \frac{x}{x^2-4x-12}$. (ĐS. $\frac{(-1)^n n!}{4}\Big[\frac{3}{(x-6)^{n+1}}+\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\Big]$)

84. $y = \frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$. (ĐS. $(-1)^n n!\Big[\frac{2^n}{(2x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\Big]$)

Chỉ dẫn. Để giải bài 83 và 84 cần biểu diễn hàm đã cho dưới dạng tổng các phân thức đơn giản.

8.2 Vi phân

8.2.1 Vi phân cấp 1

Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trong lân cận nào đó của điểm x_0 và $\Delta x = x - x_0$ là số gia của biến độc lập. Hàm $y = f(x)$ có *vi phân cấp 1* (*vi phân thứ nhất*) tại điểm x_0 nếu khi đối số dịch chuyển từ giá trị $x = x_0$ đến giá trị $x = x_0 + \Delta x$ số gia tương ứng của hàm $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f(x_0) \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = D(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \tag{8.3}$$

trong đó $D(x_0)$ *không phụ thuộc* Δx và $\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Tích $D(x_0)\Delta x$ được gọi là *vi phân cấp 1* của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 và được ký hiệu

$$dy \equiv df \equiv \frac{dy}{dx}dx.$$

Số gia Δx của biến độc lập x được gọi là *vi phân của biến độc lập*, tức là theo định nghĩa: $dx = \Delta x$.

Định lý 8.2.1. *Hàm $y = f(x)$ có vi phân cấp 1 tại điểm x_0 khi và chỉ khi hàm đó có đạo hàm hữu hạn tại đó và $D(x_0) = f'(x_0)$.*

Vi phân $df(x_0)$ của hàm f tại điểm x_0 biểu diễn qua đạo hàm $f'(x_0)$ bởi công thức

$$\boxed{df(x_0) = f'(x_0)dx} \tag{8.4}$$

Công thức (8.4) cho phép tính vi phân của các hàm, nếu biết đạo hàm của chúng.

Từ (8.3) suy ra

$$y(x_0 + \Delta x) = y(x_0) + df(x_0) + o(dx), \quad dx \to 0.$$

Nếu $df(x_0) \neq 0$ thì để tính giá trị gần đúng của hàm $f(x)$ tại điểm $x_0 + \Delta x$ ta có thể áp dụng công thức

$$\boxed{y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + df(x_0)} \tag{8.5}$$

Vi phân cấp 1 có các tính chất sau.

1^+

$$\begin{aligned} d(\alpha u + \beta v) &= \alpha du + \beta dv, \\ d(uv) &= udv + vdu, \\ d\Big(\frac{u}{v}\Big) &= \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0. \end{aligned}$$

2^+ Công thức vi phân $dy = f'(x)dx$ luôn luôn thỏa mãn bất luận x là biến độc lập hay là hàm của biến độc lập khác. Tính chất này được gọi là *tính bất biến về dạng của vi phân* cấp 1.

8.2.2 Vi phân cấp cao

Giả sử x là biến độc lập và hàm $y = f(x)$ khả vi trong lân cận nào đó của điểm x_0. Vi phân thứ nhất $df = f'(x)dx$ là hàm của hai biến x và dx, trong đó dx là số tùy ý không phụ thuộc vào x và do đó

$$(dx)' = 0.$$

Vi phân cấp hai (hay vi phân thứ hai) d^2f của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 được định nghĩa như là vi phân của hàm $df = f'(x)dx$ tại điểm x_0 với các điều kiện sau đây:

1) df phải được xem là hàm của chỉ một biến độc lập x (nói cách khác: khi tính vi phân của $f'(x)dx$ ta cần tính vi phân của $f'(x)$, còn dx được xem là hằng số);

2) Số gia của biến độc lập x xuất hiện khi tính vi phân của $f'(x)$ được xem là bằng số gia đầu tiên, tức là bằng dx.

Như vậy theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d(f'(x)dx) = (df'(x))dx = f''(x)dxdx \\ &= f''(x)(dx)^2 \end{aligned}$$

hay là

$$\boxed{d^2f = f''(x)dx^2}, \quad dx^2 = (dx)^2. \tag{8.6}$$

Bằng phương pháp quy nạp, đối với vi phân cấp n ta thu được công thức

$$\boxed{d^nf = f^{(n)}(x)dx^n} \tag{8.7}$$

Vi phân cấp n $(n > 1)$ của biến độc lập x được xem là bằng 0, tức là

$$d^n x = 0 \quad \text{với} \quad n > 1. \tag{8.8}$$

Nếu $\exists\, d^n f$ và $\exists\, d^n g$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ thì

$$d^n(\alpha f + \beta g) = \alpha d^n f + \beta d^n g \tag{8.9}$$

$$d^n fg = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} f \cdot d^k g. \tag{8.10}$$

Chú ý. 1) Khi $n > 1$, các công thức (8.6) và (8.7) chỉ đúng khi x là biến độc lập. Đối với hàm hợp $y = y(x(t))$ công thức (8.6) được khái quát như sau:

$$d^2 y = d(dy) = d(y'_x dx) = d(y'_x)dx + y'_x d(dx)$$

và do đó

$$d^2 y = y''_{xx} dx^2 + y'_x d^2 x. \tag{8.11}$$

Trong trường hợp khi x là biến độc lập thì $d^2 x = 0$ (xem (8.8)) và công thức (8.11) trùng với (8.6).

2) Khi tính vi phân cấp n ta có thể biến đổi sơ bộ hàm đã cho. Chẳng hạn nếu $f(x)$ là hàm hữu tỷ thì cần khai triển nó thành tổng hữu hạn các phân thức hữu tỷ cơ bản; nếu $f(x)$ là hàm lượng giác thì cần hạ bậc nhờ các công thức hạ bậc,...

3) Từ công thức (8.7) suy ra rằng

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

tức là đạo hàm cấp n của hàm $y = f(x)$ tại một điểm nào đó bằng tỷ số giữa vi phân cấp n của hàm $f(x)$ chia cho lũy thừa bậc n của vi phân của đối số.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính vi phân df nếu

1) $f(x) = \ln(\mathrm{arctg}(\sin x))$; 2) $f(x) = x\sqrt{64 - x^2} + 64\arcsin\dfrac{x}{8}$.

Giải. 1) Áp dụng các tính chất của vi phân ta có

$$\begin{aligned} df &= \frac{d[\mathrm{arctg}(\sin x)]}{\mathrm{arctg}(\sin x)} = \frac{d(\sin x)}{(1+\sin^2 x)\mathrm{arctg}(\sin x)} \\ &= \frac{\cos x dx}{(1+\sin^2 x)\mathrm{arctg}(\sin x)}\cdot \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} df &= d[x\sqrt{64-x^2}] + d\Big[64\arcsin\frac{x}{8}\Big] \\ &= xd\sqrt{64-x^2} + \sqrt{64-x^2}dx + 64d\Big(\arcsin\frac{x}{8}\Big) \\ &= x\frac{d(64-x^2)}{2\sqrt{64-x^2}} + \sqrt{64-x^2}dx + 64\cdot\frac{d\Big(\dfrac{x}{8}\Big)}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{64}}} \\ &= \frac{-x^2dx}{\sqrt{64-x^2}} + \sqrt{64-x^2}dx + 64\frac{dx}{\sqrt{64-x^2}} \\ &= 2\sqrt{64-x^2}dx, \quad |x| < 8. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính vi phân cấp 2 của các hàm

1) $f(x) = xe^{-x}$, nếu x là biến độc lập;

2) $f(x) = \sin x^2$ nếu

a) x là biến độc lập,

b) x là hàm của một biến độc lập nào đó.

Giải. 1) *Phương pháp I.* Theo định nghĩa vi phân cấp 2 ta có

$$\begin{aligned} d^2f &= d[df] = d[xde^{-x} + e^{-x}dx] \\ &= d(-xe^{-x}dx + e^{-x}dx) = -d(xe^{-x})dx + d(e^{-x})dx \\ &= -(xde^{-x} + e^{-x}dx)dx - e^{-x}dx^2 \\ &= xe^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 - e^{-x}dx^2 = (x-2)e^{-x}dx^2. \end{aligned}$$

Phương pháp II. Tính đạo hàm cấp hai $f''(x)$ ta có

$$f''(x) = (xe^{-x})'' = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (x-2)e^{-x}$$

và theo công thức (8.6) ta có

$$d^2 f = (x-2)e^{-x}dx^2.$$

2) a) *Phương pháp I.* Theo định nghĩa vi phân cấp hai ta có

$$\begin{aligned} d^2 f &= d[d\sin x^2] = d[2x\cos x^2 dx] = d[2x\cos x^2]dx \\ &= \big(2\cos x^2 dx + 2x(-\sin x^2)2xdx\big)dx \\ &= (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2)dx^2. \end{aligned}$$

Phương pháp II. Tính đạo hàm cấp hai f''_{xx} ta có

$$f'_x = 2x\cos x^2, \quad f''_{xx} = 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2$$

và theo (8.6) ta thu được

$$d^2 f = (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2)dx^2.$$

b) Nếu x là biến trung gian thì nói chung $d^2x \neq 0$ và do đó ta có

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(2x\cos x^2 dx) = (2x\cos x^2)d^2x + [d(2x\cos x^2)]dx \\ &= 2x\cos x^2 d^2x + (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2)dx^2. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Áp dụng vi phân để tính gần đúng các giá trị:

1) $\sqrt[5]{\dfrac{2-0,15}{2+0,15}}$; 2) $\arcsin 0,51$; 3) $\sin 29^\circ$.

Giải. Công thức cơ bản để ứng dụng vi phân để tính gần đúng là

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) \approx df(x_0) &\Rightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \\ &\Rightarrow \boxed{f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x} \end{aligned}$$

Từ đó, để tính gần đúng các giá trị ta cần thực hiện như sau:

1^+ Chỉ ra biểu thức giải tích đối với hàm mà giá trị gần đúng của nó cần phải tính.

2^+ Chọn điểm $M_0(x_0)$ sao cho giá trị của hàm và của đạo hàm cấp 1 của nó tại điểm ấy có thể tính mà không dùng bảng.

3^+ Tiếp đến là áp dụng công thức vừa nêu.

1) Tính gần đúng $\sqrt[5]{\dfrac{2-0,15}{2+0,15}}$

Số đã cho là giá trị của hàm

$$y = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$$

tại điểm $x = 0,15$. Ta đặt $x_0 = 0$; $\Delta x = 0,15$. Ta có

$$y' = \frac{-4\sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}}{5(4-x^2)} = -\frac{4y}{5(4-x^2)} \Rightarrow y'(x_0) = y'(0) = -\frac{1}{5}\cdot$$

Do đó vì $y(0) = 1$ nên

$$\begin{aligned} y(0,15) &\approx y(0) + y'(0)\Delta x \\ &= 1 - \frac{1}{5}\cdot(0,15) = 1 - 0,03 = 0,97. \end{aligned}$$

2) Tính gần đúng $\arcsin 0,51$.

Xét hàm $y = \arcsin x$. Số cần tính là giá trị của hàm tại điểm $0,51$; tức là $y(0,51)$.

Đặt $x_0 = 0,5$; $\Delta x = 0,01$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &\arcsin(x_0 + \Delta x \approx \arcsin x_0 + (\arcsin x)'_{x=x_0}\Delta x \\ &\Rightarrow \arcsin(0,5+0,01) \approx \arcsin 0,5 + (\arcsin x)'\Big|_{x=0,5}\cdot 0,01 \\ &\qquad = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}} \times (0,01). \end{aligned}$$

Có thể tính gần đúng $\sqrt{1-(0,5)^2} = \sqrt{0,75} \approx 0,88$ và do đó

$$\text{arcsin}0,51 \approx \frac{\pi}{6} + 0,011 \approx 0,513.$$

3) Số $\sin 29°$ là giá trị của hàm $y = \sin x$ khi $x = \dfrac{\pi}{180} \times 29$. Ta đặt

$$x_0 = \frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi}{6}; \quad y\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{1}{2}, \quad y = \cos x \Rightarrow y'\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$$

Đặt $\Delta x = x - x_0 = \dfrac{29\pi}{180} - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{180}$. Do đó

$$\sin 29° \approx y\Big(\frac{\pi}{6}\Big) + y'\Big(\frac{\pi}{6}\Big)\cdot \Delta x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(-\frac{\pi}{180}\Big) \approx 0,48. \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính vi phân df nếu:

1. $f(x) = \text{arctg}\dfrac{1}{x}$. (ĐS. $df = \dfrac{-dx}{1+x^2}$)

2. $f(x) = 2^{\text{tg}^2 x}$. (ĐS. $2^{\text{tg}^2 x}\ln 2 \cdot 2\text{tg}x \cdot \dfrac{dx}{\cos^2 x}$)

3. $f(x) = \arccos(2^x)$. (ĐS. $-\dfrac{2^x \ln 2 dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$)

4. $f(x) = x^3 \ln x$. (ĐS. $x^2(1+3\ln x)dx$)

5. $f(x) = \cos^2(\sqrt{x})$. (ĐS. $-2\cos\sqrt{x}\cdot\sin\sqrt{x}\cdot\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$)

6. $f(x) = (1+x^2)\text{arcotg}x$. (ĐS. $(2x\text{arccotg}x - 1)dx$)

7. $f(x) = \dfrac{\text{arctg}x}{\sqrt{1+x^2}}$. (ĐS. $\dfrac{1-x\text{arctg}x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$)

8. $f(x) = \sin^3 2x$. (ĐS. $3\sin 2x \sin 4x dx$)

9. $f(x) = \ln(\sin\sqrt{x})$. (ĐS. $\dfrac{\text{cotg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}dx$)

10. $f(x) = e^{-\frac{1}{\cos x}}$. (ĐS. $\dfrac{-\text{tg}x \cdot e^{-\frac{1}{\cos x}}}{\cos x}dx$)

11. $f(x) = 2^{-x^2}$. (ĐS. $-2xe^{-x^2}\ln 2dx$)

12. $f(x) = \text{arctg}\sqrt{x^2+1}$. (ĐS. $\dfrac{2xdx}{2+x^2}$)

13. $f(x) = \sqrt{x}\text{arctg}\sqrt{x}$. (ĐS. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big(\text{arctg}\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\Big)dx$)

14. $f(x) = \dfrac{x^2}{\text{arcsin}x}$. (ĐS. $\dfrac{x\Big[2\text{arcsin}x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big]}{(\text{arcsin}x)^2}dx$).

Tính vi phân cấp tương ứng của các hàm sau

15. $f(x) = 4^{-x^2}$; d^2f ? (ĐS. $4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4 - 1)(dx)^2$)

16. $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 4}$. d^2f ? (ĐS. $\dfrac{4\ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2\sqrt{(\ln x - 4)^3}}(dx)^2$)

17. $f(x) = \sin^2 x$. d^3f ? (ĐS. $-4\sin 2x(dx)^3$)

18. $f(x) = \sqrt{x-1}$, d^4f ? (ĐS. $\dfrac{-15}{16(x-1)^{7/2}}(dx)^4$)

19. $f(x) = x\ln x$, d^5f ? (ĐS. $-\dfrac{6}{x^4}(dx)^5$, $x > 0$)

20. $f(x) = x\sin x$; $d^{10}f$? (ĐS. $(10\cos x - x\sin x)(dx)^{10}$)

Sử dụng công thức gần đúng

$$\Delta f \approx df$$

(khi $f'(x) \neq 0$) để tính gần đúng các giá trị sau

21. $y = \sqrt{3,98}$. (ĐS. 1,955)

22. $y = \sqrt[3]{26,19}$. (ĐS. 2,97)

23. $y = \sqrt{\dfrac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$. (ĐS. 0,35)

24. $y = \cos 31°$. (ĐS. 0,85)

25. $y = \mathrm{tg}45°10'$. (ĐS. 0,99)

26. $y = \ln(10,21)$. (ĐS. 1,009)

27. $y = \sin 31°$. (ĐS. 0,51)

28. $y = \mathrm{arcsin}0,54$. (ĐS. 0,57)

29. $y = \mathrm{arctg}(1,05)$. (ĐS. 0,81)

30. $y = (1,03)^5$. (ĐS. 1,15)

8.3 Các định lý cơ bản về hàm khả vi. Quy tắc l'Hospital. Công thức Taylor

8.3.1 Các định lý cơ bản về hàm khả vi

Định lý Rôn (Rolle). *Giả sử:*
i) $f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a,b]$.
ii) $f(x)$ *có đạo hàm hữu hạn trong* (a,b).
iii) $f(a) = f(b)$.
Khi đó tồn tại điểm $\xi : a < \xi < b$ *sao cho* $f(\xi) = 0$.

Định lý Lagrăng (Lagrange). *Giả sử:*
i) $f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a,b]$.
ii) $f(x)$ *có đạo hàm hữu hạn trong* (a,b).
Khi đó tìm được ít nhất một điểm $\xi \in (a,b)$ *sao cho*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \tag{8.12}$$

hay là

$$f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a). \tag{8.13}$$

Công thức (8.12) gọi là công thức số gia hữu hạn.

Định lý Côsi (Cauchy). *Giả sử:*

i) $f(x)$ *và* $\varphi(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a, b]$.

ii) $f(x)$ *và* $\varphi(x)$ *có đạo hàm hữu hạn trong* (a, b).

iii) $[f'(x)]^2 + [\varphi'(x)]^2 \neq 0$, *nghĩa là các đạo hàm không đồng thời bằng 0.*

iv) $\varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Khi đó tìm được điểm $\xi \in (a, b)$ *sao cho:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \cdot \tag{8.14}$$

Định lý Lagrange là trường hợp riêng của định lý Cauchy vì khi $\varphi(x) = x$ thì từ (8.14) thu được (8.13). Định lý Rôn cũng là trường hợp riêng của định lý Lagrange với điều kiện $f(a) = f(b)$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giả sử $P(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 1)$.

Chứng minh rằng trong khoảng $(-3, 1)$ tồn tại nghiệm của phương trình $P''(\xi) = 0$.

Giải. Đa thức $P(x)$ có nghiệm tại các điểm $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$. Trong các khoảng $(-3, -2)$ và $(-2, 1)$ hàm $P(x)$ khả vi và thỏa mãn các điều kiện của định lý Rôn và:

$$P(-3) = P(-2) = 0,$$
$$P(-2) = P(1) = 0.$$

Do đó theo định lý Rôn, tìm được điểm $\xi_1 \in (-3, -2)$; $\xi_2 \in (-2, 1)$ sao cho:

$$P'(\xi_1) = P'(\xi_2) = 0.$$

Bây giờ lại áp dụng định lý Rôn cho đoạn $[\xi_1, \xi_2]$ và hàm $P'(x)$, ta lại tìm được điểm $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (-3, 1)$ sao cho $P''(\xi) = 0$.

Ví dụ 2. Hãy xét xem hàm $f(x) = \text{arcsin}x$ trên đoạn $[-1,+1]$ có thỏa mãn định lý Lagrange không? Nếu thỏa mãn thì hãy tìm điểm ξ (xem (8.12)).

Giải. Hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-1,+1]$. Ta tìm $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \to f'(x) < \infty, \quad x \in (-1,1)$$

(Lưu ý rằng khi $x = \pm 1$ đạo hàm không tồn tại nhưng điều đó không ảnh hưởng đến sự thỏa mãn điều kiện của định lý Lagrange !). Như vậy hàm f thỏa mãn định lý Lagrange.

Ta tìm điểm ξ. Ta có:

$$\frac{\text{arcsin}1 - \text{arcsin}(-1)}{1-(-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\xi^2} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow \xi_{1,2} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$$

Như vậy trong trường hợp này công thức (8.12) thỏa mãn đối với hai điểm.

Ví dụ 3. Hãy khảo sát xem các hàm $f(x) = x^2 - 2x + 3$ và $\varphi(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ có thỏa mãn điều kiện định lý Cauchy trên đoạn $[1,4]$ không ? Nếu chúng thỏa mãn định lý Cauchy thì hãy tìm điểm ξ.

Giải. i) Hiển nhiên cả $f(x)$ và $\varphi(x)$ liên tục khi $x \in [1,4]$.

ii) $f(x)$ và $\varphi(x)$ có đạo hàm hữu hạn trong $(1,4)$.

iii) Điều kiện thứ iii) cũng thỏa mãn vì:

$$g'(x) = 3x^2 - 14x + 20 > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

iv) Hiển nhiên $\varphi(1) \neq \varphi(4)$.

Do đó $f(x)$ và $\varphi(x)$ thỏa mãn định lý Cauchy và ta có

$$\frac{f(4)-f(1)}{\varphi(4)-\varphi(1)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \quad \text{hay} \quad \frac{11-2}{27-9} = \frac{2\xi - 2}{3\xi^2 - 14\xi + 20}, \quad \xi \in (1,4).$$

Từ đó thu được $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 4$ và ở đây chỉ có $\xi_1 = 2$ là điểm trong của $(1,4)$. Do đó: $\xi = 2$.

Ví dụ 4. Định lý Cauchy có áp dụng được cho các hàm $f(x) = \cos x$, $\varphi(x) = x^3$ trên đoạn $[-\pi/2, \pi/2]$ hay không ?

Giải. Hiển nhiên $f(x)$ và $\varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện i), ii) và iv) của định lý Cauchy. Tiếp theo ta có: $f'(x) = -\sin x$; $\varphi'(x) = 3x^2$ và tại $x = 0$ ta có: $f'(0) = -\sin 0 = 0$; $\varphi'(0) = 0$ và như vậy $[\varphi'(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 0$. Do đó điều kiện iii) không được thỏa mãn. Ta xét vế trái của (8.14):

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{\cos(\pi/2) - \cos(-\pi/2)}{(\pi/2)^3 - (-\pi/2)^3} = 0.$$

Bây giờ ta xét vế phải của (8.14). Ta có:

$$\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = -\frac{\sin\xi}{3\xi^2}\cdot$$

Nhưng đối với vế phải này ta có:

$$\lim_{\xi\to 0}\Big(-\frac{\sin\xi}{3\xi^2}\Big) = \lim_{\xi\to 0}\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot\lim_{\xi\to 0}\Big(-\frac{1}{3\xi}\Big) = \infty.$$

Điều đó chứng tỏ rằng các hàm đã cho không thỏa mãn định lý Cauchy.

BÀI TẬP

1. Hàm $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ trên đoạn $[-1,1]$ có thỏa mãn điều kiện của định lý Rôn không ? Tại sao ? (Trả lời: Không)

2. Hàm $y = 3x^2 - 5$ có thỏa mãn định lý Lagrange trên đoạn $[-2, 0]$ không ? Nếu nó thỏa mãn, hãy tìm giá trị trung gian ξ. (Trả lời: Có)

3. Chứng minh rằng hàm $f(x) = x + 1/x$ thỏa mãn định lý Lagrange trên đoạn $[1/2, 2]$. Tìm ξ. (ĐS. $\xi = 1$)

4. Chứng minh rằng các hàm $f(x) = \cos x$, $\varphi(x) = \sin x$ thỏa mãn định lý Cauchy trên đoạn $[0, \pi/2]$. Tìm ξ ? (ĐS. $\xi = \pi/4$)

5. Chứng minh rằng hàm $f(x) = e^x$ và $\varphi(x) = x^2/(1 + x^2)$ không thỏa mãn định lý Cauchy trên đoạn $[-3, 3]$.

6. Trên đường cong $y = x^3$ hãy tìm điểm mà tại đó tiếp tuyến với đường cong song song với dây cung nối điểm $A(-1, -1)$ với $B(2, 8)$. (ĐS. $M(1, 1)$)

Chỉ dẫn. Dựa vào ý nghĩa hình học của công thức số gia hữu hạn.

8.3.2 Khử các dạng vô định. Quy tắc Lôpitan (L'Hospitale)

Trong chương II ta đã đề cập đến việc khử các dạng vô định. Bây giờ ta trình bày quy tắc Lôpitan - công cụ cơ bản để khử các dạng vô định

Dạng vô định $0/0$

Giả sử hai hàm $f(x)$ và $\varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện

i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$.

ii) $f(x)$ và $\varphi(x)$ khả vi trong lân cận nào đó của điểm $x = a$ và $\varphi'(x) \neq 0$ trong lân cận đó, có thể trừ ra chính điểm $x = a$.

iii) Tồn tại giới hạn (hữu hạn hoặc vô cùng)

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k.$$

Khi đó

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\cdot$$

Dạng vô định ∞/∞

Giả sử $f(x)$ và $\varphi(x)$ thỏa mãn các điều kiện ii) và iii) của định lý trên đây còn điều kiện i) được thay bởi điều kiện:

i)* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$.

Khi đó:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Chú ý. Nếu thương $f'(x)/\varphi'(x)$ lại có dạng vô định $0/0$ (hoặc ∞/∞) tại điểm $x = a$ và f', φ' thỏa mãn các điều kiện i), ii) và iii) (tương ứng i)*, ii) và iii)) thì ta có thể chuyển sang đạo hàm cấp hai,...

Các dạng vô định khác

a) Để khử dạng vô định $0\cdot\infty$ $\big(\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty\big)$ ta biến đổi tích $f(x)\cdot\varphi(x)$ thành:

i) $\dfrac{f(x)}{1/\varphi(x)}$ (dạng $0/0$)

ii) $\dfrac{\varphi(x)}{1/f(x)}$ (dạng ∞/∞).

b) Để khử dạng vô định $\infty - \infty$

Ta biến đổi $f(x) - \varphi(x)$ (trong đó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$) thành tích

$$f(x) - \varphi(x) = f(x)\varphi(x)\Big[\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}\Big]$$

hoặc thành tích dạng

$$f(x) - \varphi(x) = f(x)\Big[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\Big]$$

hoặc

$$f(x)-\varphi(x)=\varphi(x)\Big[\frac{f(x)}{\varphi(x)}-1\Big].$$

c) Dạng vô định 0^0, ∞^0, 1^∞

Khi tính giới hạn của hàm dạng $F(x)=[f(x)]^{\varphi(x)}$ thông thường ta gặp các dạng vô định 0^0, ∞^0 hoặc 1^∞. Trong những trường hợp này ta có thể biến đổi $F(x)$ để đưa về dạng vô định $0\cdot\infty$ đã nói trong 1) nhờ phép biến đổi

$$F(x)=[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\ln[f(x)]^{\varphi(x)}}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

và do tính liên tục của hàm mũ ta sé có:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}=e^{\lim[\varphi(x)\cdot\ln f(x)]}$$

Chú ý. Ta lưu ý rằng mặc dù quy tắc Lôpitan là một công cụ mạnh đẻ tính giới hạn nhưng nó không thể thay toàn bộ các phương pháp tính giới hạn đã xét trong chương II. Điều đó được chứng tỏ trong ví dụ 7 sau đây.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$

Giải. Ta có vô định dạng "0/0". Áp dụng quy tắc L'Hospital ta thu được

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1+\ln x)'}{(e^x-e)'}=\lim_{x\to1}\frac{2x+\dfrac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.\quad\blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}$

Giải. Ta có vô định dạng "∞/∞". Áp dụng quy tắc L'Hospital n lần ta thu được

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to 1}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to 1}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to 1}\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{e^x}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{n!}{e^x}=0.\quad\blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính $\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x$.

Giải. Ta có vô định dạng "$0\cdot\infty$". Nhưng

$$x\ln x=\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}$$

và ta thu được vô định dạng "∞/∞". Do đó

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+0} x=0.\ \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Tính $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$.

Giải. Ở đây ta có vô định dạng "0^0". Nhưng

$$x^x=e^{x\ln x}$$

và ta thu được vô định dạng $0\cdot\infty$ ở số mũ. Trong ví dụ 3 ta đã thu được

$$\lim_{x\to 0+0}(x\ln x)=0,$$

do đó

$$\lim_{x\to 0+0} x^x=\lim_{x\to 0+0} e^{x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x}=e^0=1.\ \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}}$

Giải. Ở đây ta có vô định dạng 1^∞. Nhưng

$$\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{e^x-1-x}} = e^{\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x}}$$

và ở số mũ của lũy thừa ta thu được vô định dạng "0/0". Áp dụng quy tắc L'Hospital ta thu được

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{e^x-1-x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{(e^x-1)(1+x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{e^x(1+x^2)+(e^x-1)2x} = \frac{2}{1} = 2. \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

Ví dụ 6. Tính $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x\right)^{2\cos x}$.

Giải. Ta có vô định dạng "∞^0". Nhưng

$$\left(\mathrm{tg}x\right)^{2\cos x} = e^{2\cos x \ln\,\mathrm{tg}x} = e^{\frac{2\ln\,\mathrm{tg}x}{1/\cos x}}$$

và ở số mũ của lũy thừa ta thu được vô định dạng "∞/∞". Áp dụng quy tắc L'Hospital ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\ln\,\mathrm{tg}x}{\dfrac{1}{\cos x}} &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x\cdot\mathrm{tg}x}}{\dfrac{+\sin x}{\cos^2 x}} = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{1}{\cos x}}{\mathrm{tg}^2 x}\\ &= 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}}{2\mathrm{tg}x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x = 0.\end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x\right)^{2\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2\cos x\cdot\ln\,\mathrm{tg}x} = e^0 = 1. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Chứng minh rằng giới hạn

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin(1/x)}{\sin x} = 0$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$

không thể tìm được theo quy tắc L'Hospital. Hãy tính các giới hạn đó.

Giải. 1) Quy tắc L'Hospital không áp dụng được vì tỷ số các đạo hàm $[2x\sin(1/x) - \cos(1/x)]/\cos x$ không có giới hạn khi $x \to 0$.

Ta tính trực tiếp giới hạn này.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(1/x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0.$$

2) Quy tắc L'Hospital không áp dụng được vì tỷ số các đạo hàm

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \mathrm{tg}^2(x/2)$$

không có giới hạn khi $x\to\infty$.

Ta tính trực tiếp giới hạn này

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{[1-(\sin x)/x]}{[1+(\sin x)/x]} = 1 \text{ vì } |\sin x| \leqslant 1.$$

Như ở phần đầu của tiết này đã nói, quy tắc L'Hospital là một công cụ mạnh để tìm giới hạn nhưng điều đó không có nghĩa là nó có thể thay cho toàn bộ các phương pháp tìm giới hạn. Cần lưu ý rằng quy tắc L'Hospital chỉ là điều kiện đủ để tồn tại giới hạn: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ chứ không phải là điều kiện cần.

BÀI TẬP

Áp dụng quy tắc L'Hospital để tính giới hạn:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16}$. (ĐS. $\dfrac{16}{13}$)

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$. (ĐS. $\dfrac{m}{n}a^{m-n}$)

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin x}$. (ĐS. 2)

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{1+\cos bx}$. (ĐS. $\dfrac{a^2}{b^2}$)

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. (ĐS. 2)

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$. (ĐS. 0)

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{2\mathrm{arctg}x^2-\pi}$. (Đs. $-\dfrac{1}{2}$)

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+x-1}$. (ĐS. 0)

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln[(\pi/2)-\mathrm{arctg}x]}$. (ĐS. -2)

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. (ĐS. -1)

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$. (ĐS. $+\infty$)

12. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$. (ĐS. 1)

13. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\mathrm{cotg}(x-a)$. (ĐS. $1/a$)

14. $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\mathrm{arctg}x)\ln x$. (ĐS. 0)

15. $\lim\limits_{x\to\infty}(a^{1/x}-1)x,\ \ a>0$. (ĐS. $\ln a$)

16. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}}$. (ĐS. $e^{2/\pi}$)

17. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right]$. (ĐS. -1)

18. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+1/x))$. (Đs. $1/2$)

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{cotg}^2x\right)$. (ĐS. $2/3$)

20. $\lim\limits_{x\to 0}x^{1/\ln(e^x-1)}$. (ĐS. e)

21. $\lim\limits_{x\to 0+0}\big(\text{cotg}x\big)^{\text{tg}x}$. (ĐS. 1)

22. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\Big)^{1/\sin x}$. (ĐS. $e^{-1/30}$)

23. $\lim\limits_{x\to 0}\big(\cos x\big)^{\text{cotg}^2 x}$. (ĐS. $e^{-1/2}$)

24. $\lim\limits_{x\to 0+0}\big(\ln 2x\big)^{1/\ln x}$. (ĐS. 1)

25. $\lim\limits_{x\to 0}\big(1+\sin^2 x\big)^{1/\text{tg}^2 x}$. (ĐS. e)

26. $\lim\limits_{x\to 0+0}\big(\text{cotg}x\big)^{1/\ln x}$. (ĐS. e^{-1})

27. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\big(\sin x\big)^{\text{tg}x}$. (ĐS. 1)

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{+x}-e^{-x}-2x}{\sin x - x}$. (ĐS. -2)

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1+x-\dfrac{x^2}{2}}{e^{x^3}-1}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{6}$)

30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1+x^4}{\sin 2x}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{2}$)

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1-x\ln 2}{(1-x)^m-1+mx}$. (ĐS. $\dfrac{\ln^2 2}{m(m-1)}$)

32. $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{2}{\pi}\text{arccos}x\Big)^{1/x}$. (ĐS. $e^{-\frac{2}{\pi}}$)

33. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}$, $\alpha>0$. (ĐS. 0)

34. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^m}{a^x}$, $0<a\neq 1$. (ĐS. 0)

35. $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln(1-\cos x)}$. (ĐS. $\dfrac{1}{2}$)

36. $\lim\limits_{x\to 0}\Big[\dfrac{1}{x^2}-\text{cotg}^2 x\Big]$. (ĐS. $\dfrac{2}{3}$)

37. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\big(\text{tg}x\big)^{\text{tg}2x}$. (ĐS. e^{-1})

38. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\big(\text{tg}x\big)^{\text{cotg}x}$. (ĐS. 1)

8.3.3 Công thức Taylor

Giả sử hàm $f(x)$ xác định trong lân cận nào đó của điểm x_0 và n lần khả vi tại điểm x_0 thì

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

khi $x \to x_0$ hay:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0. \tag{8.15}$$

Đa thức

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{8.16}$$

được gọi là đa thức Taylor của hàm $f(x)$ tại điểm x_0, còn hàm:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

được gọi là số hạng dư hay phần dư thứ n của công thức Taylor.

Công thức (8.15) được gọi là công thức Taylor cấp n đối với hàm $f(x)$ tại lân cận của điểm x_0 với phần dư dạng Peano (nó cũng còn được gọi là công thức Taylor địa phương). Nếu hàm $f(x)$ có đạo hàm đến cấp n thì nó có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0$$

với các hệ số a_k được tính theo công thức:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Nếu $x_0 = 0$ thì (8.15) có dạng

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \to 0 \tag{8.17}$$

và gọi là công thức Macloranh (Maclaurin).

Sau đây là công thức Taylor tại lân cận điểm $x_0 = 0$ của một số hàm sơ cấp

I. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$

II.
$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

III. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k!)} + o(x^{2n+1})$

IV.
$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n)\end{aligned}$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} = \begin{cases} \dbinom{\alpha}{k} & \text{nếu } \alpha \in \mathbb{R}, \\ C_\alpha^k & \text{nếu } \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Trường hợp riêng:

IV$_1$. $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$,

IV$_2$. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$.

V. $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n).$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Phương pháp khai triển theo công thức Taylor

Như vậy, để khai triển hàm $f(x)$ theo công thức Taylor ta phải áp dụng công thức

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k,$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot \tag{8.18}$$

1) Phương pháp trực tiếp: dựa vào công thức (8.18). Việc sử dụng công thức (8.18) dẫn đến những tính toán rất cồng kềnh mặc dù nó cho ta khả năng nguyên tắc để khai triển.

2) Phương pháp gián tiếp: dựa vào các khai triển có sẵn I-V sau khi đã biến đổi sơ bộ hàm đã cho và lưu ý đến các quy tắc thực hiện các phép toán trên các khai triển Taylor.

Nếu

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

thì

a) $f(x) + g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (a_k + b_k)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$;

b) $f(x)g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$

$$c_k = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p}$$

c) $F(x) = f[g(x)] = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \Big[\sum\limits_{k=0}^{n} (b_k(x-x_0)^k - x_0\Big]^j$

$+o\Big(\big(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k - x_0\big)^n \Big)$

3) Để khai triển các phân thức hữu tỷ theo công thức Taylor thông thường ta biểu diễn phân thức đó dưới dạng tổng của đa thức và các phân thức cơ bản (tối giản !) rồi áp dụng VI_1, IV_2.

4) Để khai triển tích các hàm lượng giác thông thường biến đổi tích thành tổng các hàm.

5) Nếu cho trước khai triển đạo hàm $f'(x)$ theo công thức Taylor thì việc tìm khai triển Taylor của hàm $f(x)$ được thực hiện như sau.

Giả sử cho biết khai triển

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n),$$
$$b_k = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\cdot$$

Khi đó tồn tại $f^{(n+1)}(x_0)$ và do đó hàm $f(x)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^{n+1}) \\ &= f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} a_{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1}) \end{aligned}$$

trong đó

$$a_{k+1} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!} = \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}\cdot\frac{1}{k+1} = \frac{b_k}{k+1}\cdot$$

Do đó

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1}(x-x_0)^{k+1} + o((x-x_0)^{n+1}) \qquad (8.19)$$

trong đó b_k là hệ số của đa thức Taylor đối với hàm $f'(x)$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Khai triển hàm $f(x)$ theo công thức Maclaurin đến số hạng $o(x^n)$, nếu

$$1)\quad f(x) = (x+5)e^{2x}; \qquad 2)\quad f(x) = \ln\frac{3+x}{2-x}$$

Giải 1) Ta có $f(x) = xe^{2x} + 5e^{2x}$. Áp dụng I ta thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= x\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k x^k}{k!} + o(x^{n-1})\Big) + 5\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^k}{k!} + o(x^n)\Big) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{5\cdot 2^k}{k!} x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Vì $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2^k x^{k+1}}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{k-1}}{(k-1)!} x^k$ nên ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 + \sum_{k=1}^{n} \Big[\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{5\cdot 2^k}{k!}\Big] x^k + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{k!}(k+10)x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

2) Từ đẳng thức

$$f(x) = \ln\frac{3}{2} + \ln\Big(1 + \frac{x}{3}\Big) - \ln\Big(1 - \frac{x}{2}\Big)$$

và V ta thu được

$$f(x) = \ln\frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big(\frac{1}{2^k} + \frac{(-1)^{k-1}}{3^k}\Big)x^k + o(x^n). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Khai triển hàm $f(x)$ theo công thức Taylor tại lân cận điểm $x_0 = -1$ đến số hạng $o((x+1)^{2n})$ nếu

$$f(x) = \frac{3x+3}{\sqrt{3-2x-x^2}}\cdot$$

Giải. Ta có

$$f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{4-(x+1)^2}} = \frac{3}{2}(x+1)\Big(1 - \frac{(x+1)^2}{4}\Big)^{-\frac{1}{2}}.$$

Áp dụng công thức IV ta thu được

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \frac{3}{2}(x+1)\sum_{k=1}^{n-1}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ k\end{pmatrix}(-1)^k\frac{(x+1)^{2k}}{4^k} + o((x+1)^{2n})$$

trong đó

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ k\end{pmatrix}(-1)^k &= (-1)^k\frac{\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}-1\Big)\ldots\Big(-\frac{1}{2}-(k-1)\Big)}{k!}\\ &= \frac{(2k-1)!!}{2^k k!}\cdot\end{aligned}$$

Do đó

$$f(x) = \frac{3}{2}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{3(2k-1)!!}{2^{3k+1}k!}(x+1)^{2k+1} + o((x+1)^{2n}). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Khai triển hàm $f(x)$ theo công thức Taylor tại lân cận điểm $x_0 = 2$ đến số hạng $o((x-2)^n)$, nếu

$$f(x) = \ln(2x - x^2 + 3).$$

Giải. Ta biểu diễn

$$\begin{aligned}2x - x^2 + 3 &= (3-x)(x+1) = [1-(x-2)][3+(x-2)]\\ &= 3[1-(x-2)]\Big[1 + \frac{x-2}{3}\Big].\end{aligned}$$

Từ đó suy ra rằng

$$f(x) = \ln 3 + \ln[1-(x-2)] + \ln\Big[1+\frac{x-2}{3}\Big]$$

và áp dụng công thức V ta thu được

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln 3 - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(x-2)^k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{k3^k} + o((x-2)^n) \\ &= \ln 3 + \sum_{k=1}^{n}\Big[\frac{(-1)^{k-1}}{3^k} - 1\Big]\frac{(x-2)^k}{k} + o((x-2)^n). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Khai triển hàm $f(x) = \ln\cos x$ theo công thức Maclaurin đến số hạng chứa x^4.

Giải. Áp dụng III ta thu được

$$\ln(\cos x) = \ln\Big[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\Big] = \ln(1+t),$$

trong đó ta đặt

$$t = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

Tiếp theo ta áp dụng khai triển V

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \\ &= \Big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\big)^2\Big) \\ &\quad + o\Big(\big(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\big)^2\Big) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 5. Khai triển hàm $f(x) = e^{x\cos x}$ theo công thức Maclaurin đến số hạng chứa x^3.

Giải. Khai triển cần tìm phải có dạng

$$e^{x\cos x} = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k + o(x^3).$$

Vì $x\cos x = x + 0(x)$, $(x\cos x)^k = x^k + o(x^k)$, $k = 1, 2, \dots$ nên trong công thức

$$e^w = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^k}{k!} + o(w^n), \quad w = x\cos x$$

ta cần lấy $n = 3$. Ta có

$$w = x\cos x = x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4)$$

$$w^2 = x^2 + o(x^3), \quad w^3 = x^3 + o(x^3)$$

và do đó

$$\begin{aligned} e^{x\cos x} &= \sum_{k=0}^{3} \frac{w^k}{k!} + o(w^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{2!} + o(x^4) + \frac{1}{2}\big(x^2 + 0(x^3)\big) + \frac{1}{3!}\big(x^3 + o(x^3)\big) + 0(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3). \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 6. Khai triển theo công thức Maclaurin đến $o(x^{2n+1})$ đối với các hàm

1) $\mathrm{arctg} x$, 2) $\arcsin x$.

Giải. 1) Vì

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1})$$

nên theo công thức (8.19) ta có

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} + o(x^{2n+2}).$$

Với $n = 2$ ta thu được

$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$

2) Ta có

$$(\text{arcsin}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} x^{2k} + o(x^{2n+1})$$
$$= 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

Từ đó áp dụng công thức (8.19) ta có

$$\arcsin x = x + \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Với $n = 2$ ta thu được

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Khai triển hàm $f(x) = \text{tg}x$ theo công thức Maclaurin đến $o(x^5)$.

Giải. Ta sẽ dùng phương pháp hệ số bất định mà nội dung được thể hiện trong lời giải sau đây.

Vì $\text{tg}x$ là hàm lẻ và $\text{tg}x = x + o(x)$ nên

$$\text{tg}x = x + a_3x^3 + a_sx^5 + o(x^6).$$

Ta sử dụng công thức $\sin x = \text{tg}x \cdot \cos x$ và các khai triển II và III ta có

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6) = \big(x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^6)\big)\Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + 0(x^5)\Big)$$

Cân bằng các hệ số của x^3 và x^5 ở hai vế ta thu được

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{2} + a_3 \\ \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{4!} - \dfrac{a_3}{2!} + a_5 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $a_3 = \dfrac{1}{3}$, $a_5 = \dfrac{2}{15}$. Do đó

$$\mathrm{tg}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6). \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 8. Áp dụng công thức Maclaurin để tính các giới hạn sau:

$$1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}, \qquad 2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3\sin x}\cdot$$

Giải. 1) Áp dụng khai triển đối với hàm $\sin x$ với $n = 2$ ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3}\\ &= -\frac{1}{3!} + \lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + 0 = -\frac{1}{3!}\cdot\end{aligned}$$

2) Áp dụng các khai triển bảng đối với e^t, $\cos t$, $\sin t$ cho trường hợp này ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} + o(x^4) - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{24} + 0(x^4)}{x^3(x + 0(x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^4}{24} + 0(x^4)}{x^4 + 0(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{24} + \dfrac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \dfrac{0(x^4)}{x^4}}\\ &= \frac{\dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{24} + 0}{1 + 0} = \frac{1}{12}\cdot \quad \blacktriangle\end{aligned}$$

BÀI TẬP

Khai triển các hàm theo công thức Maclaurin đến $o(x^n)$ (1-8)

1. $f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$. (ĐS. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{3^k}{4^{k+1}}x^k + o(x^n)$)

2. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+4x}}$. (ĐS. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{2^k(2k-1)!!}{k!}x^k + o(x^n)$)

3. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. (ĐS. $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)x^k + o(x^n)$)

4. $f(x) = \ln\dfrac{2-3x}{2+3x}$. (ĐS. $\ln\dfrac{2}{3} + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-4)^k - 9^k}{k6^k}x^k + o(x^n)$)

5. $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$.
(ĐS. $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}(1+2^{-k})x^k + o(x^n)$)

6. $f(x) = \ln(2+x-x^2)$. (ĐS. $\ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1} - 2^{-k}}{k}x^k + o(x^n)$)

7. $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{2+x-x^2}$.
(ĐS. $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1} - 7\cdot 2^{-(k+1)}}{3}x^k + o(x^n)$)

8. $f(x) = \dfrac{3x^2+5x-5}{x^2+x-2}$. (ĐS. $\dfrac{5}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n}\big[(-1)^k 2^{-(k+1)} - 1\big]x^k + o(x^n)$).

Khai trển hàm theo công thức Maclaurin đến $0(x^{2n+1})$ (9-13)

9. $f(x) = \sin^2 x\cos^2 x$. (ĐS. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}2^{4k-3}}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$)

10. $f(x) = \cos^3 x$. (ĐS. $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{3(-1)^k}{4(2k)!}(3^{2k-1}+1)x^{2k} + o(x^{2n+1})$)

Chỉ dẫn. $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}\cos 3x + \dfrac{3}{4}\cos x$.

11. $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$.
(ĐS. $1 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\dfrac{4^{2k}}{(2k)!}x^{2k} + 0(x^{2k+1})$)

Chỉ dẫn. Chứng minh rằng $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4x$.

12. $f(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$.
(ĐS. $1 + \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3(-1)^k 4^{2k-1}}{2(2k)!}x^{2k} + o(x^{2n+1})$)

13. $f(x) = \sin x \sin 3x$.

(ĐS. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k 2^{2k-1}}{(2k)!}(1-2^{2k})x^{2k} + o(x^{2n+1})$).

Khai triển hàm theo công thức Taylor trong lân cận điểm x_0 đến $o((x-x_0)^n)$ (14-20)

14. $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$. (ĐS. $\sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ k \end{pmatrix} (x-1)^k + o((x-1)^n)$)

15. $f(x) = (x^2-1)e^{2x}$, $x_0 = -1$.

(ĐS. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{-2}2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k + o((x+1)^n)$)

16. $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 12)$, $x_0 = 1$.

(ĐS. $\ln 6 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{-k}+3^{-k}}{k}(x-1)^k + o(x-1)^n)$)

17. $f(x) = \ln\dfrac{(x-1)^{x-2}}{3-x}$, $x_0 = 2$.

(ĐS. $(x-2) + \sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{(-1)^k}{k-1}\right)(x-2)^k + o((x-2)^n)$)

18. $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{3-x}$, $x_0 = 2$. (ĐS. $\sum\limits_{k=2}^{n}(x-2)^k + o((x-2)^n)$)

19. $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$, $x = 3$.

(ĐS. $3 + \sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k(x-3)^k + o((x-3)^n)$)

20. $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+10x+25}$, $x_0 = 2$.

(ĐS. $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{(-1)^k(k-1)}{3^k}(x+2)^k + o((x+2)^n)$).

Áp dụng công thức Maclaurin để tính giới hạn

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. (ĐS. 2)

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x + 2\sin x - 3x}{x^4}$. (ĐS. 0)

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2}{x^2}$. (ĐS. 1)

24. $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\Big)$. (ĐS. 0)

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{12}$)

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1+x^2}\cos x}{x^4}$. (ĐS. $\dfrac{1}{3}$)

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\Big(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\Big)}{x(\sin x - x)}$. (ĐS. $-\dfrac{1}{4}$)

28. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$. (ĐS. $\dfrac{19}{90}$)

Chương 9

Phép tính vi phân hàm nhiều biến

9.1 Đạo hàm riêng

9.1.1 Đạo hàm riêng cấp 1

Giả sử $w = f(M)$, $M = (x, y)$ xác định trong lân cận nào đó của điểm $M(x, y)$. Tại điểm M ta cho biến x số gia tùy ý Δx trong khi vẫn giữ giá trị của biến y không đổi. Khi đó hàm $f(x, y)$ nhận số gia tương ứng là

$$\Delta_x w = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

gọi là *số gia riêng* của hàm $f(x, y)$ theo biến x tại điểm $M(x, y)$.

Tương tự đại lượng

$$\Delta_y w = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

gọi là *số gia riêng* của hàm $f(x, y)$ theo biến y tại điểm $M(x, y)$.

Định nghĩa 9.1.1

1. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ theo biến x tại điểm (x, y) và được chỉ bởi một trong các ký hiệu

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad f'_x(x, y), \quad w'_x.$$

2. Tương tự: nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y w}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm riêng của hàm $f(x, y)$ theo biến y tại điểm $M(x, y)$ và được chỉ bởi một trong các ký hiệu

$$\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad f'_y(x, y), \quad w'_y.$$

Từ định nghĩa suy rằng đạo hàm riêng của hàm hai biến theo biến x là đạo hàm thông thường của hàm một biến x khi cố định giá trị của biến y. Do đó các *đạo hàm riêng được tính theo các quy tắc và công thức tính đạo hàm thông thường của hàm một biến.*

Nhận xét. Hoàn toàn tương tự ta có thể định nghĩa đạo hàm riêng của hàm ba (hoặc nhiều hơn ba) biến số.

9.1.2 Đạo hàm của hàm hợp

Nếu hàm $w = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ thì biểu thức $w = f[x(t), y(t)]$ là hàm hợp của t. Khi đó

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{9.1}$$

Nếu $w = f(x, y)$, trong đó $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ thì

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \tag{9.2}$$

9.1.3 Hàm khả vi

Giả sử hàm $w = f(M)$ xác định trong một lân cận nào đó của điểm $M(x, y)$. Hàm f được gọi là hàm khả vi tại điểm $M(x, y)$ nếu số gia

$\Delta f(M) = f(x + \Delta, y + \Delta y) - f(x, y)$ của hàm khi chuyển từ điểm $M(x, y)$ đến điể$N(x + \Delta, y + \Delta y)$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\Delta f(M) = D_1\Delta x + D_2\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0$$

trong đó $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại điểm $M(x, y)$ thì

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = D_1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(M) = D_2$$

và khi đó

$$\Delta f(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0. \tag{9.3}$$

9.1.4 Đạo hàm theo hướng

Giả sử:

(1) $w = f(M)$ là hàm xác định trong lân cận nào đó của điểm $M(x, y)$;

(2) $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ là vectơ đơn vị trên đường thẳng có hướng $\mathcal{L}$ qua điểm $M(x, y)$;

(3) $N = N(x + \Delta x, y + \Delta y)$ là điểm thuộc $\mathcal{L}$ và Δe là độ dài của đoạn thẳng MN.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{\substack{\Delta\ell \to 0 \\ (N \to M)}} \frac{\Delta w}{\Delta\ell}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm tại điểm $M(x, y)$ theo hướng của vectơ $\vec{e}$ và được ký hiệu là $\dfrac{\partial w}{\partial\vec{e}}$, tức là

$$\frac{\partial w}{\partial\vec{e}} = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta\ell}\cdot$$

Đạo hàm theo hướng của vectơ $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ được tính theo công thức

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\cos\beta. \tag{9.4}$$

trong đó $\cos\alpha$ và $\cos\beta$ là các cosin chỉ phương của vectơ $\vec{e}$.

Vectơ với các tọa độ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ (tức là vectơ $\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)$) được gọi là vectơ gradiên của hàm $f(M)$ tại điểm $M(x, y)$ và được ký hiệu là $\mathrm{grad} f(M)$.

Từ đó đạo hàm theo hướng $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ có biểu thức là

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \big\langle \mathrm{grad} f, \vec{e} \big\rangle.$$

Ta lưu ý rằng: 1) *Nếu hàm $w = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M(x, y)$ thì nó liên tục tại M và có các đạo hàm riêng cấp 1 tại đó*;

2) *Néu hàm $w = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp 1 theo mọi biến trong lân cận nào đó của điểm $M(x, y)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại điểm $M(x, y)$ thì nó khả vi tại điểm M.*

Nếu hàm $f(x, y)$ khả vi tại điểm $M(x, y)$ thì nó có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm đó.

Chú ý. Nếu hàm $f(x, y)$ có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm M_0 thì không có gì đảm bảo là hàm $f(x, y)$ khả vi tại điểm M_0 (xem ví dụ 4).

9.1.5 Đạo hàm riêng cấp cao

Giả sử miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và

$$f : D \to \mathbb{R}$$

là hàm hai biến $f(x,y)$ được cho trên D. Ta đặt

$$D_x = \Big\{(x,y) \in D : \exists \frac{\partial f}{\partial x} \neq \pm\infty\Big\},$$
$$D_y = \Big\{(x,y) \in D : \exists \frac{\partial f}{\partial y} \neq \pm\infty\Big\}.$$

$$D^* = D_x \cap D_y$$

Định nghĩa. 1) Các đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp 1.

2) Nếu hàm $\dfrac{\partial f}{\partial x} : D_x \to \mathbb{R}$ và $\dfrac{\partial f}{\partial y} : D_y \to \mathbb{R}$ có các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

thì chúng được gọi là các *đạo hàm riêng cấp 2* theo x và theo y.

Các đạo hàm riêng cấp 3 được định nghĩa như là các đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp 2, v.v...

Ta lưu ý rằng nếu hàm $f(x,y)$ có các đạo hàm hỗn hợp $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ và $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ liên tục tại điểm (x,y) thì tại điểm đó các đạo hàm hỗn hợp này bằng nhau:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính đạo hàm riêng cấp 1 của các hàm

1) $4w = x^2 - 2xy^2 + y^3$. 2) $w = x^y$.

Giải. 1) Đạo hàm riêng $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ được tính như là đạo hàm của hàm w theo biến x với giả thiết $y = \text{const}$. Do đó

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_x = 2x - 2y^2 + 0 = 2(x - y^2).$$

Tương tự, ta có

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_y = 0 - 4xy + 3y^2 = y(3y - 4x).$$

2) Như trong 1), xem $y = \text{const}$ ta có

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \big(x^y\big)'_x = yx^{y-1}.$$

Tương tự, khi xem x là hằng số ta thu được

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x^y \ln x.$$

(vì $w = x^y$ là hàm mũ đối với biến y khi $x = \text{const}$. ▲

Ví dụ 2. Cho $w = f(x, y)$ và $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Hãy tính $\dfrac{\partial w}{\partial \rho}$ và $\dfrac{\partial w}{\partial \varphi}$.

Giải. Để áp dụng công thức (9.2), ta lưu ý rằng

$$w = f(x, y) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = F(\rho, \varphi).$$

Do đó theo (9.2) và biểu thức đối với x và y ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \rho} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\sin\varphi \\
\frac{\partial w}{\partial \varphi} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial x}(-\rho\sin\varphi) + \frac{\partial w}{\partial y}(\rho\cos\varphi) \\
&= \rho\Big(-\frac{\partial w}{\partial x}\sin\varphi + \frac{\partial w}{\partial y}\cos\varphi\Big). \quad ▲
\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm của hàm $w = x^2 + y^2x$ tại điểm $M_0(1,2)$ theo hướng của vectơ $\overrightarrow{M_0M_1}$, trong đó M_1 là điểm với tọa độ $(3,0)$.

Giải. Đầu tiên ta tìm vectơ đơn vị $\vec{e}$ có hướng là hướng đã cho. Ta có

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{M_0M_1} = (2,-2) = 2e_1 - 2e_2,\\
\Rightarrow |\overrightarrow{M_0M_1}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \vec{e} = &\frac{\overline{M_0M_1}}{|M_0M_1|} = \frac{2e_1 - 2e_2}{2\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2.
\end{aligned}$$

trong đó $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ là vectơ đơn vị của các trục tọa độ. Từ đó suy rằng

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$$

Tiếp theo ta tính các đạo hàm riêng tại điểm $M_0(1,2)$. Ta có

$$\begin{aligned}
f'_x &= 2x + y^2 \Rightarrow f'_x(M_0) = f'_x(1,2) = 6,\\
f'_y &= 2xy \quad\;\; \Rightarrow f'_y(M_0) = f'_y(1,2) = 4.
\end{aligned}$$

Do đó theo công thức (9.4) ta thu được

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 4. Hàm $f(x,y) = x + y + \sqrt{|xy|}$ có đạo hàm theo mọi hướng tại điểm $O(0,0)$ nhưng không khả vi tại đó.

Giải. 1. Sự tồn tại đạo hàm theo mọi hướng.

Ta xét hướng của vectơ $\vec{e}$ đi ra từ O và lập với trục Ox góc α. Ta có

$$\begin{aligned}
\Delta_e f(0,0) &= \Delta x + \Delta y + \sqrt{|\Delta x\Delta y|}\\
&= \big(\cos\alpha + \sin\alpha + \sqrt{|\cos\alpha\sin\alpha|}\big)\rho,
\end{aligned}$$

trong đó $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\sin\alpha$.

Từ đó suy ra

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(0,0) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta_e f(0,0)}{\rho} = \cos\alpha + \sin\alpha + \sqrt{|\sin\alpha\cos\alpha|}$$

tức là đạo hàm theo hướng tồn tại theo mọi hướng.

2. Tuy nhiên hàm đã cho không khả vi tại O. Thật vậy, ta có

$$\Delta f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \Delta x + \Delta y + \sqrt{|\Delta x|\,|\Delta y|} - 0.$$

Vì $f'_x = 1$ và $f'_y = 1$ (tại sao ?) nên nếu f khả vi tại $O(0,0)$ thì

$$\Delta f(0,0) = \Delta x + \Delta y + \sqrt{|\Delta x \Delta y|} = 1\cdot\Delta x + 1\cdot\Delta y + \varepsilon(\rho)\rho$$

$$\varepsilon(\rho) \to 0 (\rho\to 0), \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

hay là lưu ý $\Delta x = \rho\cos\alpha$, $\Delta y = \rho\sin\alpha$ ta có

$$\varepsilon(\rho) = \sqrt{|\cos\alpha\sin\alpha|}.$$

Vế phải đẳng thức này không phải là vô cùng bé khi $\rho\to 0$ (vì nó hoàn toàn không phụ thuộc vào ρ). Do đó theo định nghĩa hàm $f(x,y)$ đã cho không khả vi tại điểm O. ▲

Ví dụ 5. Tính các đạo hàm riêng cấp 2 của các hàm:

1) $w = x^y$, 2) $w = \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y}\cdot$

Giải. 1) Đầu tiên tính các đạo hàm riêng cấp 1. Ta có

$$\frac{\partial w}{\partial x} = yx^{y-1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Tiếp theo ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= y(y-1)x^{y-2},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} &= x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = x^{y-1}(1 + y\ln x),\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} &= yx^{y-1}\ln x + x^y\cdot\frac{1}{x} = x^{y-1}(1 + y\ln x),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^y(\ln x)^2.
\end{aligned}$$

2) Ta có

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}\,, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{2xy}{x^2+y^2}\,,\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\\
\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{x}{x^2+y^2}\Big) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Nhận xét. Trong cả 1) lẫn 2) ta đều có $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}$. ▲

Ví dụ 6. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm $w = f(x+y^2, y+x^2)$ tại điểm $M_0(-1,1)$, trong đó x và y là biến độc lập.

Giải. Đặt $t = x + y^2$, $v = y + x^2$. Khi đó

$$w = f(x+y^2, y+x^2) = f(t, v).$$

Như vậy $w = f(t, v)$ là hàm hợp của hai biến độc lập x và y. Nó phụ thuộc các biến độc lập thông qua hai biến trung gian t, v. Theo công thức (9.2) ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\
&= f'_t(x+y^2, y+x^2)\cdot 1 + f'_v(x+y^2, y+x^2)\cdot 2x\\
&= f'_t + 2xf'_v.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = f'_t(0,2) - 2f'_v(0,2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} &= f'_t(\cdot)2y + f'_v(\cdot)1\\ &= 2yf'_t + f'_v\end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(-1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 2f'_t(0,2) + f'_v(0,2). \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính đạo hàm riêng của các hàm sau đây

1. $f(x,y) = x^2 + y^3 + 3x^2y^3$.
(ĐS. $f'_x = 2x + 6xy^3$, $f'_y = 3y^2 + 9x^2y^2$)

2. $f(x,y,z) = xyz + \dfrac{x}{yz}$.
(ĐS. $f'_x = yz + \dfrac{1}{yz}$, $f'_y = xz - \dfrac{x}{y^2z}$, $f'_z = xy - \dfrac{x}{yz^2}$)

3. $f(x,y,z) = \sin(xy + yz)$. (ĐS. $f'_x = y\cos(xy+yz)$,
$f'_y = (x+z)\cos(xy+yz)$, $f'_z = y\cos(xy+yz)$)

4. $f(x,y) = \mathrm{tg}(x+y)e^{x/y}$.

$$\text{(ĐS.}\quad \begin{aligned} f'_x &= \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \mathrm{tg}(x+y)e^{x/y}\frac{1}{y},\\ f'_y &= \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \mathrm{tg}(x+y)e^{x/y}\Big(-\frac{x}{y^2}\Big).\text{)}\end{aligned}$$

5. $f = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (ĐS. $f'_x = \dfrac{|y|}{x^2+y^2}$, $f'_y = \dfrac{-x\mathrm{sign}y}{x^2+y^2}$)

6. $f(x,y) = xy\ln(xy)$. (ĐS. $f'_x = y\ln(xy) + y$, $f'_y = x\ln(xy) + x$)

7. $f(x,y,z) = \left(\dfrac{y}{x}\right)^z$.

$$(\text{ĐS.}\quad f'_x = z\left(\frac{y}{x}\right)^{z-1}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z,$$
$$f'_y = \frac{z}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z,\quad f'_z = \left(\frac{y}{x}\right)^z \ln\frac{y}{x})$$

8. $f(x,y,z) = z^{x/y}$.

(ĐS. $f'_x = z^{x/y}\ln z\cdot\left(\dfrac{1}{y}\right)$, $f'_y = z^{x/y}\ln z\cdot\left(\dfrac{-x}{y^2}\right)$, $f'_z = \left(\dfrac{x}{y}\right)z^{x/y-1}$)

9. $f(x,y,z) = x^{y^z}$.

(ĐS. $f'_x = y^z x^{y^z-1}$, $f'_y = x^{y^z} z y^{z-1}\ln x$, $f'_z = x^{y^z}\ln(x)^z \ln y$)

10. $f(x,y,z) = x^y y^z z^x$.

(ĐS. $f'_x = x^{y-1}y^{z+1}z^x + x^y y^z z^x\ln z$, $f'_y = x^y\ln x y^z z^x + x^y y^{z-1}z^{x+1}$,
$f'_z = x^y y^z \ln y\cdot z^x + x^{y+1}y^z z^{x-1}$)

11. $f(x,y) = \ln\sin\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$.

(ĐS. $f'_x = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\text{cotg}\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$, $f'_y = -\dfrac{x+a}{y}\text{cotg}\dfrac{x+a}{\sqrt{y}}$)

12. $f(x,y) = \dfrac{x}{y} - e^x\text{arctg}y$.

(ĐS. $f'_x = \dfrac{1}{y} - e^x\text{arctg}y$, $f'_y = -\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{e^x}{1+y^2}$)

13. $f(x,y) = \ln\big(x + \sqrt{x^2+y^2}\big)$.

(ĐS. $f'_x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f'_y = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$).

Tìm đạo hàm riêng của hàm hợp sau đây (giả thiết hàm $f(x,y)$ khả vi)

14. $f(x,y) = f(x+y, x^2+y^2)$.

(ĐS. $f'_x = f'_t + f'_v 2x$, $f'_y = f'_t + f'_v 2y$, $t = x+y$, $v = x^2+y^2$)

15. $f(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{x}\right)$.

(ĐS. $f'_x = \frac{1}{y}f'_t - \frac{y}{x^2}f'_v$, $f'_y = \frac{-x}{y^2}f'_t + \frac{1}{x}f'_v$, $t = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$)

16. $f(x,y) = f(x-y, xy)$.

(ĐS. $f'_x = f'_t + yf'_v$, $f'_y = -f'_t + xf'_v$, $t = x-y$, $v = xy$)

17. $f(x,y) = f(x-y^2, y-x^2, xy)$.

(ĐS. $f'_x = f'_t - 2xf'_v + yf'_w$, $f'_y = -2yf'_t + f'_v + xf'_w$,
$t = x-y^2$, $v = y-x^2$, $w = xy$)

18. $f(x,y,z) = f(\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{z^2+x^2})$.

(ĐS. $$f'_x = \frac{xf'_t}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xf'_w}{\sqrt{z^2+x^2}}, \quad f'_y = \frac{yf'_t}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{yf'_v}{\sqrt{x^2+z^2}},$$
$$f'_z = \frac{zf'_v}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{zf'_w}{\sqrt{z^2+x^2}}, \quad t = \sqrt{x^2+y^2},$$
$$v = \sqrt{y^2+z^2}, \quad w = \sqrt{z^2+x^2})$$

19. $w = f(x, xy, xyz)$.

(ĐS. $$\begin{aligned} f'_x &= f'_t + yf'_u + yzf'_v, \\ f'_y &= \quad\;\; xf'_u + xzf'_v, \\ f'_z &= \qquad\qquad xyf'_v \\ & t = x,\ u = xy,\ v = xyz). \end{aligned}$$

Trong các bài toán sau đây hãy chứng tỏ rằng hàm $f(x,y)$ thỏa mãn phương trình đã cho tương ứng ($f(x,y)$-khả vi).

20. $f = f(x^2+y^2)$, $y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

21. $f = x^n f\Big(\frac{y}{x^2}\Big)$, $x\frac{\partial f}{\partial y} + 2y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$.

22. $f = yf(x^2-y^2)$, $y^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} = xyf$.

23. $f = \frac{y^2}{3x} + f(x,y)$, $x^2\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} + y^2 = 0$.

24. $f = x^n f\Big(\dfrac{y}{x^\alpha}, \dfrac{z}{x^\beta}\Big)$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + \alpha y\dfrac{\partial f}{\partial y} + \beta z\dfrac{\partial f}{\partial z} = nf$.

25. $f = \dfrac{xy}{z}\ln x + xf\Big(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\Big)$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = f + \dfrac{xy}{z}$.

26. Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ nếu $f = \cos(xy)$

(ĐS. $f''_{xx} = -y^2\cos xy$, $f''_{xy} = -\sin xy - xy\cos xy$, $f''_{yy} = -x^2\cos xy$)

27. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm $f = \sin(x + yz)$.

(ĐS. $f''_{xx} = -\sin t$, $f''_{xy} = -z\sin t$, $f''_{xz} = -y\sin t$, $f''_{yy} = -z^2\sin t$, $f''_{yz} = -yz\sin t$, $f''_{zz} = -y^2\sin t$, $t = x + yz$)

28. Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ nếu $f = \sqrt{x^2+y^2}e^{x+y}$.

(ĐS. $\dfrac{e^{x+y}}{(x^2+y^2)^{3/2}}\Big[-xy + (x+y)(x^2+y^2) + (x^2+y^2)^2\Big]$)

29. Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}$ nếu $f = x^{yz}$.

(ĐS. $f''_{xy} = x^{yz-1}z(1 + yz\ln x)$, $f''_{xz} = x^{yz-1}y(1 + yz\ln x)$,
$f''_{yz} = \ln x \cdot x^{yz}(1 + yz\ln x)$)

30. Tính $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ nếu $f = \mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$. (ĐS. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0$)

31. Tính $f''_{xx}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yy}(0,0)$ nếu

$$f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n.$$

(ĐS. $f''_{xx}(0,0) = m(m-1)$, $f''_{xy}(0,0) = mn$, $f''_{yy}(0,0) = n(n-1)$)

32. Tính $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$ nếu $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. (ĐS. $\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$)

33. Tính f''_{xy}, f''_{yz}, f''_{xz} nếu $f = \Big(\dfrac{x}{y}\Big)^z$.

(ĐS. $f''_{xy} = -z^2y^{-2}\big(xy^{-1}\big)^{z-1}$, $f''_{xz} = \Big(\dfrac{1}{y}\Big)\Big(\dfrac{x}{y}\Big)^{z-1}\Big(1 + z\ln\dfrac{x}{y}\Big)$,

$$f''_{yz} = -\frac{1}{y}\Big(\frac{x}{y}\Big)^z \cdot \Big(1 + z\ln\frac{x}{y}\Big))$$

34. Chứng minh rằng $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nếu $f = \arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$.

Tính các đạo hàm cấp hai của các hàm (giả thiết hai lần khả vi)

35. $u = f(x+y, x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}(\text{ĐS.}\quad u''_{xx} &= f''_{tt} + 4xf''_{tv} + 4x^2 f''_{vv} + 2f'_v,\\ u''_{xy} &= f''_{tt} + 2(x+y)f''_{tv} + 4xyf''_{vv},\\ u''_{yy} &= f''_{tt} + 4yf''_{tv} + 4y^2 f''_{vv} + 2f'_v,\\ & t = x+y,\ v = x^2+y^2.)\end{aligned}$$

36. $u = f\Big(xy, \dfrac{x}{y}\Big)$.

$$\begin{aligned}(\text{ĐS.}\quad u''_{xx} &= y^2 f''_{tt} + 2f''_{tv} + \frac{1}{y^2}f''_{vv},\\ u''_{xy} &= xyf''_{tt} - \frac{x}{y^3}f''_{vv} + f'_t - \frac{1}{y^2}f'_v,\\ u''_{yy} &= x^2 f''_{tt} - 2\frac{x^2}{y^2}f''_{tv} + \frac{x^2}{y^4}f''_{vv} + \frac{2x}{y^3}f'_v,\\ & t = xy,\ v = \frac{x}{y}\ )\end{aligned}$$

37. $u = f(\sin x + \cos y)$.

(ĐS. $u''_{xx} = \cos^2 x \cdot f'' - \sin x \cdot f'$, $u''_{xy} = -\sin y \cos x \cdot f''$,
$u''_{yy} = \sin^2 y \cdot f'' - \cos y \cdot f'$)

38. Chứng minh rằng hàm

$$f = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$$

(trong đó a, x_0 là các số) thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot$$

39. Chứng minh rằng hàm $f = \dfrac{1}{r}$ trong đó

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

thỏa mãn phương trình Laplace:

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad r \neq 0.$$

Trong các bài toán 40 - 44 chứng minh rằng các hàm đã cho thỏa mãn phương trình tương ứng (giả thiết f và g là những hàm hai lần khả vi)

40. $u = f(x - at) + g(x + at)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

41. $u = xf(x + y) + yg(x + y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

42. $u = f\Big(\dfrac{y}{x}\Big) + xg\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

43. $u = x^n f\Big(\dfrac{y}{x}\Big) + x^{1-n} g\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$,

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n - 1)u.$$

44. $u = f(x + g(y))$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot$

45. Tìm đạo hàm theo hướng $\varphi = 135°$ của hàm số
$f(x, y) = 3x^4 + xy + y^3$ tại điểm $M(1, 2)$. (ĐS. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

46. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ tại điểm $M(3, 1)$ theo hướng từ điểm này đến điểm $(6, 5)$. (ĐS. 0)

47. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ tại điểm $M(1, 1)$ theo hướng phân giác của góc phần tư thứ nhất. (ĐS. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

48. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = z^2 - 3xy + 5$ tại điểm $M(1, 2, -1)$ theo hướng lập với các trục tọa độ những góc bằng nhau. (ĐS. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

49. Tìm đạo hàm của hàm $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ tại gốc tọa độ và hướng lập với các trục tọa độ x, y, z các góc tương ứng là α, β, γ.
(ĐS. $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}$)

50. Tính đạo hàm của hàm $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ tại điểm $M(1, 0)$ theo hướng lập với trục hoành góc bằng $120°$. (ĐS. -2)

51. Tìm đạo hàm của hàm $z = x^2 - y^2$ tại điểm $M_0(1, 1)$ theo hướng vectơ $\vec{e}$ lập với hướng dương trục hoành góc $\alpha = 60°$. (ĐS. $1 - \sqrt{3}$)

52. Tìm đạo hàm của hàm $z = \ln(x^2 + y^2)$ tại điểm $M_0(3, 4)$ theo hướng gradien của hàm đó. (ĐS. $\dfrac{2}{5}$)

53. Tìm giá trị và hướng của vectơ gradien của hàm

$$w = \mathrm{tg}x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \mathrm{cotg}z$$

tại điểm $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.
(ĐS. $(\mathrm{grad}w)_M = \vec{i} + \dfrac{3}{8}\vec{j}$, $\cos\alpha = \dfrac{8}{\sqrt{73}}$, $\cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{73}}$)

54. Tìm đạo hàm của hàm $w = \arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ tại điểm $M_0(1, 1, 1)$ theo hướng vectơ $\overrightarrow{M_0M}$, trong đó $M = (3, 2, 3)$. (ĐS. $\dfrac{1}{6}$)

9.2 Vi phân của hàm nhiều biến

Trong mục này ta xét vi phân của hàm nhiều biến mà để cho gọn ta chỉ cần trình bày cho hàm hai biến là đủ. Trường hợp số biến lớn hơn hai được trình bày hoàn toàn tương tự.

9.2.1 Vi phân cấp 1

Giả sử hàm $w = f(x, y)$ khả vi tại điểm $M(x, y)$, tức là tại đó số gia toàn phần của hàm có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{aligned} \Delta f(M) &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= D_1 \Delta x + D_2 \Delta y + o(\rho) \end{aligned} \tag{9.5}$$

trong đó $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, D_1 và D_2 không phụ thuộc vào Δx và Δy. Khi đó biểu thức (gọi là *phần chính tuyến tính đối với* Δx *và* Δy của số gia Δf)

$$D_1 \Delta x + D_2 \Delta y$$

được gọi là *vi phân* (hay *vi phân toàn phần* ≡ hay *vi phân thứ nhất*) của hàm $w = f(x, y)$ và được ký hiệu là df:

$$df = D_1 \Delta x + D_2 \Delta y.$$

Vì $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ và vì $f(x, y)$ khả vi tại M nên $D_1 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $D_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ và

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{9.6}$$

Như vậy, nếu $w = f(x, y)$ khả vi tại $M(x, y)$ thì từ (9.5) và (9.6) ta có

$$\Delta f(M) = df(M) + o(\rho) \quad \text{hay} \quad \Delta f(M) = df(M) + \varepsilon(\rho)\rho \tag{9.7}$$

trong đó $\varepsilon(\rho) \to 0$ khi $\rho \to 0$.

9.2.2 Áp dụng vi phân để tính gần đúng

Đối với Δx và Δy đủ bé ta có thể thay xấp xỉ số gia $\Delta f(M)$ bởi vi phân $df(M)$, tức là

$$\Delta f(M) \approx df(M)$$

hay là

$$\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(M)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\Delta y} \qquad (9.8)$$

Công thức (9.8) là cơ sở để áp dụng vi phân tính gần đúng. Đối với hàm có số biến nhiều hơn 2 ta cũng có công thức tương tự.

9.2.3 Các tính chất của vi phân

Đối với các hàm khả vi f và g ta có:

(i) $d(f \pm g) = df \pm dg$;

(ii) $d(fg) = fdg + gdf$, $d(\alpha f) = \alpha df$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iii) $d\Big(\dfrac{f}{g}\Big) = \dfrac{gdf - fdg}{g^2}$, $g \neq 0$;

(iv) Vi phân cấp 1 của hàm hai biến $f(x,y)$ bất biến về dạng bất luận x và y là biến độc lập hay là hàm của các biến độc lập khác.

9.2.4 Vi phân cấp cao

Giả sử hàm $w = f(x,y)$ khả vi trong miền D. Khi đó vi phân cấp 1 của nó tại điểm $(x,y) \in D$ tương ứng với các số gia dx và dy của các biến độc lập được biểu diễn bởi công thức

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (9.9)$$

Ở đây, $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ là những số gia tùy ý của biến độc lập, đó là những số không phụ thuộc vào x và y. Như vậy, khi cố định dx và dy vi phân df là hàm của x và y.

Theo định nghĩa: Vi phân thứ hai d^2f (hay vi phân cấp 2) của hàm $f(x,y)$ tại điểm $M(x,y)$ được định nghĩa như là vi phân của vi phân thứ nhất tại điểm M với các điều kiện sau đây:

(1) Vi phân df là hàm chỉ của các biến độc lập x và y.

(2) Số gia của các biến độc lập x và y xuất hiện khi tính vi phân của f'_x và f'_y được xem là bằng số gia đầu tiên, tức là bằng dx và dy.

Từ đó

$$d^2f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M)dy^2 \qquad (9.10)$$

trong đó $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$ và ta xem các đạo hàm riêng hỗn hợp bằng nhau.

Một cách *hình thức* đẳng thức (9.10) có thể viết dưới dạng

$$d^2f = \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^2 f(x,y)$$

tức là sau khi thực hiện phép "bình phương" ta cần điền $f(x,y)$ vào "ô trống".

Tương tự

$$\begin{aligned} d^3f &= \Big(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\Big)^3 f(x,y) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3, \end{aligned}$$

v.v... Một cách quy nạp ta có

$$d^nf(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k. \qquad (9.11)$$

Trong trường hợp nếu

$$w = f(t,v), \quad t = \varphi(x,y),\ v = \psi(x,y)$$

thì

$$dw = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial v}dx \quad \text{(tính bất biến về dạng !)}$$

$$d^2w = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial v}dtdy + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial f}{\partial t}d^2t + \frac{\partial f}{\partial v}d^2v. \qquad (9.12)$$

9.2.5 Công thức Taylor

Nếu hàm $f(x,y)$ là $n+1$ lần khả vi trong ε-lân cận $\mathcal{V}$ của điểm $M_0(x_0,y_0)$ thì đối với điểm bất kỳ $M(x,y)\in\mathcal{V}$ ta có công thức Taylor

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\big(f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\big)\\
&\quad + \frac{1}{2!}\big(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\
&\quad + f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)\big)\\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{m} C_n^i \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x-x_0)^{n-i}(y-y_0)^i\\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^{n+1} f(\xi,\eta)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(x-x_0)^{n-i}(y-y_0), \qquad (9.13)
\end{aligned}
$$

trong đó $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, $\eta = y_0 + \theta(y-y_0)$, $0<\theta<1$.
hay là

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \ldots\\
&\quad + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + R_{n+1},\\
&= P_n(x,y) + R_{n+1} \qquad (9.14)
\end{aligned}
$$

trong đó $P_n(x,y)$ gọi là đa thức Taylor bậc n của hai biến x và y, R_{n+1} là số hạng dư. Nếu đặt

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

thì (9.14) có thể viết dưới dạng

$$f(x,y) = P_n(x,y) + 0(\rho), \quad \rho \to 0,$$

ở đây $R_{n+1} = o(\rho)$ là phần dư dạng Peano.

9.2.6 Vi phân của hàm ẩn

Theo định nghĩa: biến w được gọi là hàm ẩn của các biến độc lập $x, y, ..., t$ nếu nó được cho bởi phương trình

$$F(x, y, \dots, w) = 0$$

không giải được đối với w.

Để tính vi phân của hàm ẩn w ta lấy vi phân cả hai vế của phương trình (xem như đồng nhất thức) rồi từ đó tìm dw. Để tính d^2w ta cần lấy vi phân của dw với lưu ý rằng dx và dy là hằng số, còn dw là vi phân của hàm.

Ta cũng có thể thu được vi phân dw bằng cách tính các đạo hàm riêng:

$$w'_x = -\frac{F'_x(\cdot)}{F'_w(\cdot)}, \qquad w'_y = -\frac{F'_y(\cdot)}{F'_w(\cdot)}, \dots$$

rồi thế vào biểu thức

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \cdots + \frac{\partial w}{\partial t}dt, v.v...$$

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính vi phân df nếu

1) $f(x, y) = xy^2$, 2) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Giải. 1) Ta có

$$f'_x = \left(xy^2\right)'_x = y^2, \quad f'_y = \left(xy^2\right)'_y = 2xy.$$

Do đó

$$df(x, y) = y^2dx + 2xydy.$$

2) Ta tính các đạo hàm riêng:

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\cdot$$

Do đó

$$df = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 2. Tính $df(M_0)$ nếu $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ và $M_0 = M_0(0,1,2)$.

Giải. Ta có

$$df(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(M)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(M)dz, \quad M = M(x,y,z).$$

Ta tính các đạo hàm riêng

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = 0, \quad (\text{vì } x = 0)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 2ye^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 2e^5,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 2ze^{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = 4e^5.
\end{aligned}$$

Từ đó

$$df(M_0) = 2e^5dy + 4e^5dz. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 3. Tính dw tại điểm $M_0(-1,1)$ nếu

$$w = f(x+y^2, y+x^2).$$

Giải. Cách 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm $f(x,y)$ theo x và theo y rồi áp dụng công thức (9.9). Từ ví dụ 4, mục 9.1 ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) &= f'_t(0,2) - 2f'_v(0,2)\\
\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) &= 2f'_t(0,2) + f'_v(0,2)\\
&\qquad t = x+y^2,\ v = y+x^2
\end{aligned}$$

và do đó

$$df(M_0) = \big[f'_t(0,2) - 2f'_v(0,2)\big]dx + 2\big[2f'_t(0,2) + f'_v(0,2)\big]dy.$$

Cách 2. Áp dụng tính bất biến về dạng của vi phân cấp 1.

Ta có

$$\begin{aligned} t = x + y^2 &\Rightarrow dt = dx + 2ydy, \\ v = y + x^2 &\Rightarrow dv = 2xdx + dy. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} df(M_0) &= \frac{\partial f}{\partial t}(0,2)dt + \frac{\partial f}{\partial v}(0,2)dv \\ &= f'_t(0,2)[dx + 2ydy] + f'_v(0,2)[2xdx + dy] \\ &= \big[f'_t(0,2) - 2f'_v(0,2)\big]dx + \big[2f'_t(0,2) + f'_v(0,2)\big]dy. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. 1) Cho hàm $f(x, y) = x^y$. Hãy tìm vi phân cấp hai của f nếu x và y là biến độc lập.

2) Tìm vi phân cấp hai của hàm $f(x + y, xy)$ nếu x và y là biến độc lập.

Giải. 1) Từ ví dụ 2, 1) và công thức (9.10) ta có

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2,$$

trong đó

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y(y-1)x^{y-2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^y(\ln x)^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= x^{y-1}(1 + y\ln x) \end{aligned}$$

và do đó

$$d^2f = y(y-1)x^{y-2}dx^2 + x^{y-1}(1 + y\ln x)dxdy + x^y(\ln x)^2dy^2.$$

2) Ta viết hàm đã cho dưới dạng $u = f(t, v)$, trong đó $t = x + y$, $v = xy$.

1^+ *Cách I.* Tính các đạo hàm riêng rồi áp dụng (9.10). Ta có:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= f'_t(x+y,xy) + f'_v(x+y,xy)\cdot y,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= f'_t(x+y,xy) + f'_v(x+y,xy)\cdot x,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f''_{tt} + f''_{tv}y + f''_{tv}y + f''_{vv}y^2\\
&= f''_{tt} + 2yf''_{tv} + y^2 f''_{vv},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= f''_{tt} + f''_{tv}x + f''_{tv}y + f''_{vv}xy + f'_v\\
&= f''_{tt} + (x+y)f''_{tv} + xyf''_{vv} + f'_v,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f''_{tt} + f''_{tv}x + f''_{tv}x + f''_{vv}x^2\\
&= f''_{tt} + 2xf''_{tv} + x^2 f''_{vv}.
\end{aligned}$$

Thế các đạo hàm riêng tìm được vào (9.10) ta thu được

$$\begin{aligned}
d^2 f = (f''_{tt} + 2yf''_{tv} + y^2 f''_{vv})dx^2 &+ 2(f''_{tt} + (x+y)f''_{tv} + xyf''_{vv} + f'_v)dxdy\\
&+ (f''_{tt} + 2xf''_{tv} + x^2 f''_{vv})dy^2.
\end{aligned}$$

2^+ *Cách II.* Ta có thể thu được kết quả này nếu lưu ý rằng với $t = x+y \Rightarrow dt = dx+dy$ và $v = xy \rightarrow dv = xdy + ydx$ và từ đó

$$d^2 t = d(dx+dy) = d^2 x + d^2 y = 0$$

(vì x và y là biến độc lập) và

$$d^2 v = d(xdy + ydx) = dxdy + dxdy = 2dxdy.$$

Áp dụng (9.12) ta có

$$\begin{aligned}
d^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dx+dy)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial v}(dx+dy)(xdy+ydx)\\
&\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(xdy+ydx)^2 + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}(2dxdy)\\
&= \big(f''_{tt} + 2yf''_{tv} + y^2 f''_{vv}\big)dx^2 + \big(f''_{tt} + 2xf''_{tv} + x^2 f''_{vv}\big)dy^2\\
&\quad + 2\big(f''_{tt} + (x+y)f''_{tv} + xyf''_{vv} + f'_v\big)dxdy. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

Ví dụ 5. Áp dụng vi phân để tính gần đúng các giá trị:

1) $a = (1,04)^{2,03}$

2) $b = \text{arctg}\Big(\dfrac{1,97}{1,02} - 1\Big)$

3) $c = \sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$

4) $d = \dfrac{\sin 1,49 \cdot \text{arctg}0,07}{2^{2,95}}$.

Giải. Để áp dụng vi phân vào tính gần đúng ta cần thực hiện các bước sau đây:

Thứ nhất là chỉ rõ biểu thức giải tích đối với hàm mà giá trị gần đúng của nó cần phải tính.

Thứ hai là chọn điểm đầu M_0 sao cho giá trị của hàm và của các đạo hàm riêng của nó tại điểm ấy có thể tính mà không cần dùng bảng.

Cuối cùng ta áp dụng công thức

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

1) Tính $a = (1,04)^{2,03}$. Ta xét hàm $f(x, y) = x^y$. Số a cần tính là giá trị của hàm khi $x = 1,04$ và $y = 2,03$.

Ta lấy $M_0 = M_0(1, 2)$. Khi đó $\Delta x = 0,04$, $\Delta y = 0,03$.

Tiếp theo ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{M_0} = 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{M_0} = 1 \cdot \ln 1 = 0.$$

Bây giờ áp dụng công thức vừa nêu ở trên ta có:

$$a = f(1,04; 2,03) = (1,04)^{2,03} \approx f(1, 2) + 2 \cdot 0,04 = 1 + 0,08 = 1,08.$$

2) Ta nhận xét rằng $\text{arctg}\Big(\dfrac{1,97}{1,02} - 1\Big)$ là giá trị của hàm

$$f(x, y) = \text{arctg}\Big(\frac{x}{y} - 1\Big)$$

tại điểm $M(1,97;1,02)$.

Ta chọn $M_0 = M_0(2,1)$ và có

$$\Delta x = 1,97 - 2 = -0,03,$$
$$\Delta y = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Tiếp đến ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = \frac{y}{y^2 + (x-y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2 + (x-y)^2}\cdot$$

Từ đó

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = f'_x(2,1) = \frac{1}{1^2 + (2-1)^2} = 0,5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = f'_y(2,1) = -1.$$

Do đó

$$\begin{aligned}\mathrm{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right) &= \mathrm{arctg}\left(\frac{2}{1} - 1\right) + (0,5)\cdot(-0,03) + 1\cdot(0,02)\\ &= \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 = 0,785 - 0,035\\ &= 0,75.\end{aligned}$$

3) Ta thấy rằng $c = \sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)}$ là giá trị của hàm $u = f(x,y,z) = \sqrt{x^y + \ln z}$ tại điểm $M(1,04;1,99;1,02)$.

Ta chọn $M_0 = M_0(1,2,1)$. Khi đó

$$\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$$
$$\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$$
$$\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02.$$

Bây giờ ta tính giá trị các đạo hàm riêng tại điểm M_0. Ta có

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \frac{2\cdot 1}{2\sqrt{1+\ln 1}} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2z\sqrt{x^y + \ln z}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \frac{1}{2}\cdot$$

Từ đó suy ra

$$\sqrt{(1,04)^{1,99} + \ln(1,02)} \approx \sqrt{1+\ln 1} + 1\cdot(0,04) + 0\cdot(-0,01) + (1/2)\cdot 0,02 = 1,05.$$

4) Ta thấy d là giá trị của hàm $f(x,y,z) = 2^x \sin y \,\mathrm{arctg} x$ tại điểm $M(-2,95; 1,49; 0,07)$

Ta lấy $M_0 = M_0\Big(-3, \dfrac{\pi}{2}, 0\Big)$. Khi đó

$$\Delta x = -2,95 - (-3) = 0,05$$
$$\Delta y = 1,49 - 1,57 = -0,08$$
$$\Delta z = 0,07.$$

Tiếp theo ta có

$$f(M_0) = 2^{-3}\sin(\pi/2)\,\mathrm{arctg}0 = 0,$$
$$f'_x(M_0) = 2^x \ln 2\cdot \sin y \,\mathrm{arctg} z\big|_{M_0} = 0,$$
$$f'_y(M_0) = 2^x \cos y \,\mathrm{arctg} z\big|_{M_0} = 0,$$
$$f'_z(M_0) = \frac{2^x \sin y}{1+z^2}\Big|_{M_0} = 2^{-3}.$$

Từ đó ta thu được

$$\frac{\sin 1,49\,\mathrm{arctg}0,07}{2^{2,95}} \approx 2^{-3}\cdot 0,07 \approx 0,01. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 6. Khai triển hàm $f(x,y) = x^y$ theo công thức Taylor tại lân cận điểm $(1,1)$ với $n = 3$.

Giải. Trong trường hợp này công thức Taylor có dạng sau đây

$$f(x,y) = f(1,1) + \frac{df(1,1)}{1!} + \frac{d^2f(1,1)}{2!} + \frac{d^2f(1,1)}{3!} + R_3. \qquad (*)$$

1^+ Tính mọi đạo hàm riêng của hàm cho đến xấp 3. Ta có

$$\begin{aligned}
&f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y\ln x, \quad f''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2},\\
&f''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x, \quad f''_{y^2} = x^y(\ln x)^2,\\
&f^{(3)}_{x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3}, \quad f^{(3)}_{x^2y} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2}\ln x,\\
&f^{(3)}_{xy^2} = 2x^{y-1}\ln x + yx^{y-1}(\ln x)^2, \quad f^{(3)}_{y^3} = x^y(\ln x)^3.
\end{aligned}$$

2+ Tính giá trị của các đạo hàm riêng tại điểm $(1,1)$. Ta có

$$\begin{aligned}
&f(1,1) = 1, \quad f'_x(1,1) = 1, \quad f'_y(1,1) = 0, \quad f''_{x^2}(1,1) = 0,\\
&f''_{xy}(1,1) = 1, \quad f''_{y^2}(1,1) = 0, \quad f^{(3)}_{x^3}(1,1) = 0, \quad f^{(3)}_{x^2y}(1,1) = 1,\\
&f^{(3)}_{xy^2}(1,1) = 0, \quad f^{(3)}_{y^3}(1,1) = 0.
\end{aligned}$$

3^+ Thế vào công thức (*) ta có

$$\begin{aligned}
df(1,1) &= f'_x(1,1)\Delta x + f'_y(1,1)\Delta y = \Delta x,\\
d^2f(1,1) &= f''_{x^2}(1,1)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(1,1)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(1,1)\Delta y^2 = 2\Delta x\Delta y,\\
d^3f(1,1) &= 3\Delta x^2\Delta y
\end{aligned}$$

và do đó

$$x^y = 1 + \Delta x + \Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\Delta x^2\Delta y + R_3. \ \blacktriangle$$

Ví dụ 7. Tính vi phân của hàm ẩn $w(x,y)$ được cho bởi phương trình

$$w^3 + 3x^2y + xw + y^2w^2 + y - 2x = 0.$$

Giải. Ta xem phương trình đã cho như một đồng nhất và lấy vi phân của vế trái và vế phải:

$$\begin{aligned}
&3w^2dw + 6xydx + 3x^2dy + wdx + xdw + 2y\cdot w^2dy\\
&\qquad + 2y^2wdw - 2dx + dy = 0
\end{aligned}$$

và từ đó rút ra dw. Ta có

$$(6xy + w - 2)dx + (3x^2 + 2yw^2 + 1)dy + (3w^2 + x + 2y^2w)dw = 0$$

và do đó

$$dw = \frac{2 - 6xy - w}{3w^2 + x + 2y^2w}dx - \frac{3x^2 + 2yw^2 + 1}{3w^2 + x + 2y^2w}dy. \quad \blacktriangle$$

Ví dụ 8. Tính dw và d^2w của hàm ẩn $w(x, y)$ được cho bởi phương trình

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} + \frac{w^2}{8} = 1.$$

Giải. Đầu tiên tìm dw. Tương tự như trong ví dụ 7 ta có

$$xdx + \frac{ydy}{3} + \frac{wdw}{4} = 0 \Rightarrow dw = -\frac{4x}{w}dx - \frac{4y}{3w}dy. \qquad (*)$$

Lại lấy vi phân toàn phần đẳng thức thu được với lưu ý là dx, dy là hằng số; dw là vi phân của hàm.

Ta có

$$d^2w = -4\frac{wdx - xdw}{w^2}dx - \frac{4}{3}\cdot\frac{wdy - ydw}{w^2}dy$$

hay là

$$d^2w = 4\Big(\frac{1}{w}dx^2 - \frac{x^2}{w^2}dxdw + \frac{1}{3w}dy^2 - \frac{y}{3w^2}dydw\Big) \qquad (**)$$

Để có biểu thức d^2w qua x, y, w, dx và dy ta cần thế dw từ (*) vào (**). $\blacktriangle$

Ví dụ 9. Các hàm ẩn $u(x, y)$ và $v(x, y)$ được xác định bởi hệ

$$xy + uv = 1,$$
$$xv - yu = 3.$$

Tính $du(1,-1)$, $d^2u(1,-1)$; $dv(1,-1)$, $d^2v(1,-1)$ nếu $u(1,-1) = 1$, $v(1,-1) = 2$.

Giải. Lấy vi phân hệ đã cho hai lần ta có

$$\begin{cases} ydx + xdy + udv + vdu = 0, \\ xdv + vdx - ydu - udy = 0. \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} 2dxdy + 2dudv + ud^2v + vd^2u = 0, \\ 2dxdv - 2dudv + xd^2v - yd^2u = 0. \end{cases} \tag{II}$$

Thế vào (I) giá trị $x = 1$, $y = -1$, $u = 1$, $v = 2$ ta có

$$\begin{cases} -dx + dy + dv + 2du = 0 \\ \ \ 2dx - dy + dv + du = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} du = 3dx - 2dy \\ dv = -5dx + 3dy \end{array} \tag{III}$$

Từ (III) ta cũng thu được $u'_x = 3$, $u'_v = -2$; $v'_x = -5$, $v'_y = 3$.

Thay vào (II) các giá trị $x = 1$, $y = -1$, $u = 1$, $v = 2$ và du, dv từ (III) ta có:

$$d^2v + 2d^2u = -2dxdy - 2(3dx - 2dy)(3dy - 5dx)$$
$$d^2v + d^2u = 2dy(3dx - 2dy) - 2dx(3dy - 5dx)$$

và do đó

$$d^2u = 4(5dx^2 - 10dxdy + 4dy^2),$$
$$d^2v = 10(-dx^2 + 4dxdy - 2dy^2). \quad \blacktriangle$$

BÀI TẬP

Tính vi phân dw của các hàm sau

1. $w = x^2y - y^2x + 3$. (ĐS. $dw = (2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy$)

2. $w = (x^2 + y^2)^3$. (ĐS. $6(x^2 + y^2)^2(xdx + ydy)$)

3. $w = x - 3\sin y$. (ĐS. $dw = dx - 3\cos y dy$)

4. $w = \ln(x^2 + y)$. (ĐS. $\dfrac{2xdx}{x^2+y} + \dfrac{dy}{x^2+y}$)

5. $w = \left(\dfrac{y}{x}\right)^x$. (ĐS. $\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^x \ln\dfrac{y}{x} - \left(\dfrac{y}{x}\right)^x\right]dx + \left(\dfrac{y}{x}\right)^{x-1}dy$)

6. $w = \ln \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$. (ĐS. $-\dfrac{2ydx}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}} + \dfrac{2dy}{x\sin\dfrac{2y}{x}}$).

Tính $dw(M_0)$ của các hàm tại điểm M_0 đã cho (7-14)

7. $w = e^{-\frac{y}{x}}$, $M_0(1,0)$. (ĐS. $dw(1,0) = -dy$)

8. $w = y\sqrt[3]{x}$, $M_0(1,1)$. (ĐS. $dw(1,1) = \dfrac{1}{3}dx + dy$)

9. $f(x,y) = \dfrac{yz}{x}$, $M_0(1,2,3)$. (ĐS. $df\big|_{M_0} = -6dx + 3dy + 2dz$)

10. $f(x,y,z) = \cos(xy + xz)$, $M_0\left(1, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

(ĐS. $df\big|_{M_0} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\pi}{3}dx + dy + dz\right)$)

11. $f(x,y) = e^{xy}$, $M_0(0,0)$. (ĐS. $df\big|_{M_0} = 0$)

12. $f(x,y) = x^y$, $M_0(2,3)$. (ĐS. $df\big|_{M_0} = 12dx + 8\ln 2dy$)

13. $f(x,y) = x\ln(xy)$, $M_0(1,1)$. (ĐS. $df\big|_{M_0} = dx + dy$)

14. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $M_)(1,2)$. (ĐS. $df\big|_{M_0} = \dfrac{1}{5}(2dx - dy)$).

Tìm vi phân của các hàm hợp sau đây tại các điểm đã chỉ ra (15-18)

15. $f(x,y) = f(x-y, x+y)$, $M(x,y)$, $M_0(1,-1)$.

(ĐS. $$df\big|_M = (f'_t + f'_v)dx + (f'_v - f'_t)dy,$$
$$df\big|_{M_0} = \big[f'_t(2,0) + f'_v(2,0)\big]dx + \big[f'_v(2,0) - f'_t(2,0)\big]dy,$$
$$t = x - y,\ v = x + y)$$

16. $f(x,y) = f\Big(xy, \dfrac{x}{y}\Big)$, $M(x,y)$, $M_0(0,1)$.

$$\text{(ĐS.}\quad df\big|_M = \Big(yf'_t + \frac{1}{y}f'_v\Big)dx + \Big(xf'_t - \frac{x}{y^2}f'_v\Big)dy,$$
$$df\big|_{M_0} = \big[f'_t(0,0) + f'_v(0,0)\big]dx,\ t = xy,\ v = \frac{x}{y}\text{)}$$

17. $f(x,y,z) = f(x^2-y^2, y^2-z^2, z^2-x^2)$, $M(x,y,z)$, $M_0(1,1,1)$.

$$\text{(ĐS. } df\big|_M = 2(xf'_t - xf'_w)dx + 2y(f'_v - f'_t)dy + 2z(f'_w - f'_v)dz,$$
$$df\big|_{M_0} = 2(f'_t(0,0,0) - f'_w(0,0,0))dx + 2(f'_v(0,0,0) - f'_t(0,0,0))dy$$
$$+ 2(f'_w(0,0,0) - f'_v(0,0,0))dz,$$
$$t = x^2-y^2,\ v = y^2-z^2,\ w = z^2-x^2\text{)}$$

18. $f(x,y,z) = f(\sin x + \sin y, \cos x - \cos z)$, $M(x,y,z)$ và $M_0(0,0,0)$.

$$\text{(ĐS.}\quad df\big|_M = (f'_t\cos x - f'_v\sin x)dx + f'_t\cos y dy + f'_v \sin z dz,$$
$$df\big|_{M_0} = f'_t(0,0)dx + f'_v(0,0)dy,$$
$$t = \sin x + \sin y,\ v = \cos x - \cos z\text{).}$$

Tính vi phân dw và d^2w tại điểm $M(x,y)$ (19-22) nếu:

19. $w = f(\ln z)$, $z = x^2 + y^2$.

$$\text{(ĐS.}\quad d^2w = \frac{2}{(x^2+y^2)^2}\Big[(2x^2f''_{tt} - x^2f'_t + y^2f'_t)dx^2$$
$$+ (4xyf''_{tt} - 4xyf'_t)dxdy + (x^2f'_t - yf'_t + 2yf''_{t^2})dy^2\text{)}$$

20. $w = f(\alpha,\beta,\gamma)$, $\alpha = ax$, $\beta = by$, $\gamma = cz$; a,b,c-hằng số.

$$\text{(ĐS.}\quad dw = af'_\alpha dx + bf'_\beta dy + cf'_\gamma dz;$$
$$d^2w = a^2f''_{\alpha^2}dx^2 + b^2f''_{\beta^2}dy^2 + c^2f''_{\gamma^2}dz^2$$
$$+ 2(f''_{\alpha\beta}abdxdy + f''_{\beta\gamma}bcdydz + f''_{\alpha\gamma}acdxdz)\text{)}$$

21. $w = f(x+y, x-y)$. (ĐS. $x + y = u$, $x - y = v$;

$$d^2w = (f''_{u^2} + 2f''_{uv} + f''_{v^2})dx^2 + (f''_{u^2} - 2f''_{v^2})dxdy + (f''_{u^2} - 2f''_{uv} + f''_{v^2})dy^2\text{)}$$

22. $w = xf\Big(\dfrac{x}{y}\Big)$. (ĐS. $dw = \Big(f + \dfrac{x}{y}f'\Big)dx - \dfrac{x^2}{y^2}f'dy$,

$$d^2w = \Big(\frac{2}{y}f' + \frac{x}{y^2}f''\Big)dx^2 - \Big(\frac{4x}{y^2}f' + \frac{2x^2}{y^3}f''\Big)dxdy - \Big(\frac{2x^2}{y^3}f' - \frac{x^3}{y^4}f''\Big)dy^2)$$

Tính vi phân cấp hai của các hàm sau đây tại các điểm $M(x,y)$ và $M_0(x_0,y_0)$ nếu f là hàm hai lần khả vi và x,y,z là biến độc lập (23-25)

23. $u = f(x-y, x+y)$, $M(x,y)$, $M_0(1,1)$.

$$\text{(ĐS.}\quad \begin{aligned} d^2u\big|_M &= f''_{tt}(dx-dy)^2 + 2f''_{tv}(dx^2-dy^2) + f''_{vv}(dx+dy)^2,\\ d^2u\big|_{M_0} &= f''_{tt}(0,2)dx(dx-dy)^2 + 2f''_{tv}(0,2)(dx^2-dy^2)\\ &\quad + f''_{vv}(0,2)(dx+dy)^2) \end{aligned}$$

24. $u = f(x+y, z^2)$, $M(x,y,z)$, $M_0(-1,-1,0)$.

$$\text{(ĐS.}\quad \begin{aligned} d^2u\big|_M &= f''_{tt}(dx+dy)^2 + 4zf''_{tv}dz(dx+dy)\\ &\quad + 4z^2f''_{vv}dz^2 + 2f'_vd^2z,\\ d^2u\big|_{M_0} &= f''_{tt}(0,0)(dx+dy)^2 + 2f'_v(0,0)dz^2,\\ &\quad t = x+y,\ v = z^2) \end{aligned}$$

25. $u = f(xy, x^2+y^2)$, $M(x,y)$, $M_0(0,0)$.

$$\text{(ĐS.}\quad \begin{aligned} d^2u\big|_M &= f''_{tt}(ydx+xdy)^2 + 4f''_{tv}(ydz+xdy)(xdx+ydy)\\ &\quad + 4f''_{vv}(xdx+ydy)^2 + 2f'_tdxdy + 2f'_v(dx^2+dy^2),\\ d^2u\big|_{M_0} &= 2f'_t(0,0)dxdy + 2f'_v(0,0)(dx^2+dy^2),\\ &\quad t = xy,\ v = x^2+y^2) \end{aligned}$$

Tính vi phân d^nw (26-27) nếu:

26. $w = f(ax+by+cz)$.

(ĐS. $d^nw = f^{(n)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^n$)

27. $w = f(ax, by, cz)$.

$$(\text{ĐS.}\quad d^n w = \Big(a\frac{\partial}{\partial\alpha}dx + b\frac{\partial}{\partial\beta}dy + c\frac{\partial}{\partial\gamma}dz\Big)^n f(\alpha,\beta,\gamma),$$
$$\alpha = ax,\ \beta = by,\ \gamma = cz)$$

Khai triển các hàm đã cho theo công thức Taylor đến các số hạng cấp 2 (28-30) nếu

28. $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$

$$(\text{ĐS.}\quad \Delta w = \frac{\Delta y - \Delta x}{(x-y)^2} + \frac{\Delta x^2 - 2\Delta x\Delta y + \Delta y^2}{(x-y)^3} + R_2)$$

29. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

$$(\text{ĐS.}\quad \Delta w = \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{x+y}} - \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \Delta y^2}{8(x+y)^{3/2}} + R_2)$$

30. $f(x,y) = e^{x+y}$.

$$\text{ĐS.}\quad \Delta w = e^{x+y}(\Delta x + \Delta y) + e^{x+y}\frac{(\Delta x + \Delta y)^2}{2} + R_2).$$

Áp dụng vi phân để tính gần đúng (31-35)

31. i) $a = (0,97)^{2,02}$ (ĐS. $\approx 0,94$)
ii) $b = \sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$ (ĐS. ≈ 4.998)

32. i) $a = \sqrt{(1.04)^{2,99} + \ln 1,02}$. (ĐS. 1,05)
Chỉ dẫn. Xét hàm $\sqrt{x^y + \ln z}$.
ii) $b = \sqrt[3]{(1,02)^2 + (0,05)^2}$. (ĐS. 1,013)
Chỉ dẫn. Xét hàm $\sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

33. i) $a = \sin 29^\circ \cdot \text{tg}46^\circ$. (ĐS. $\approx 0,502$)
ii) $b = \sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$. (ĐS. $\approx 0,273$)

34. i) $a = \ln(0,09^3 + 0,99^3)$. (ĐS. $\approx -0,03$)

Chỉ dẫn. Xét hàm $f = \ln(x^3 + y^3)$, $M_0(0, 1)$.

ii) $b = \sqrt{5e^{0,02} + (2,03)^2}$. (ĐS. $\approx 3,037$)

Chỉ dẫn. Xét hàm $f = \sqrt{5e^x + y^2}$, $M_0(0, 2)$.

35. Tính vi phân của hàm $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$. Ứng dụng để tính xấp xỉ $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$. (ĐS. $\approx 2,95$)

Trong các bài toán sau đây (36-38) hãy tính vi phân cấp 1 của hàm ẩn $z(x, y)$ xác định bởi các phương trình tương ứng

36. $z^3 + 3x^2z = 2xy$. (ĐS. $dz = \dfrac{(2y - 6xz)dx + 2xdy}{3(x^2 + z^2)}$)

37. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$.

$$(\text{ĐS.}\quad dz = -\frac{\sin 2xdx + \sin 2ydy}{\sin 2z}).$$

38. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$. (ĐS. $dz = -dx - dy$)

39. Cho w là hàm của x và y xác định bởi phương trình

$$\frac{x}{w} = \ln\frac{w}{y} + 1.$$

Tính vi phân dw, d^2w.

$$(\text{ĐS.}\quad dw = \frac{w(ydx + wdy)}{y(x + w)}, \quad d^2w = -\frac{w^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x + w)^2}).$$

40. Tính dw và d^2w nếu hàm $w(x, y)$ được xác định bởi phương trình $w - x = \text{arctg}\dfrac{y}{w - x}$.

$$(\text{ĐS.}\quad dw = dx + \frac{(w - x)dy}{(w - x)^2 + y^2 + y},$$

$$d^2w = -\frac{2(y + 1)(w - x)[(w - x)^2 + y^2]}{[(w - x)^2 + y^2 + y]^3}dy^2).$$

9.3 Cực trị của hàm nhiều biến

9.3.1 Cực trị

Hàm $f(x, y)$ có cực đại địa phương (hoặc cực tiểu địa phương) bằng $f(x_0, y_0)$ tại điểm $M_0(x_0, y_0) \in D$ nếu tồn tại δ-lân cận của điểm M_0 sao cho với mọi điểm $M \neq M_0$ thuộc lân cận ấy ta có

$$f(M) < f(M_0) \quad (\text{tương ứng: } \ f(M) > f(M_0)).$$

Gọi chung cực đại, cực tiểu của hàm số là *cực trị* của hàm số.

Điều kiện cần để tồn tại cực trị địa phương: Nếu tại điểm M_0 hàm $f(x, y)$ có cực trị địa phương thì tại điểm đó cả hai đạo hàm riêng cấp 1 (nếu chúng tồn tại) đều bằng 0 hoặc ít nhất một trong hai đạo hàm riêng không tồn tại (đó là những *điểm tới hạn* hoặc *điểm dừng* của hàm $f(x, y)$). Không phải mọi điểm dừng đều là điểm cực trị.

Điều kiện đủ: giả sử

$$f''_{xx}(M_0) =, \quad f''_{xy}(M_0) = B, \quad f''_{yy}(M_0) = C.$$

Khi đó:

i) Nếu $\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ và $A > 0$ thì tại điểm M_0 hàm f có cực tiểu địa phương.

ii) Nếu $\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ và $A < 0$ thì tại điểm M_0 hàm f có cực đại địa phương.

iii) Nếu $\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$ thì M_0 là điểm yên ngựa của f, tức là tại M_0 hàm f không có cực trị.

iv) Nếu $\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ thì M_0 là điểm nghi vấn (hàm f có thể có và cũng có thể không có cực trị tại đó).

9.3.2 Cực trị có điều kiện

Trong trường hợp đơn giản nhất, cực trị có điều kiện của hàm $f(x,y)$ là cực đại hoặc cực tiểu của hàm đó đạt được với điều kiện các biến x và y thỏa mãn phương trình $\varphi(x,y)=0$ (*phương trình ràng buộc*).

Để tìm cực trị có điều kiện với điều kiện ràng buộc $\varphi(x,y)$ ta lập *hàm Lagrange (hàm bổ trợ)*

$$F(x,y)=f(x,y)_\lambda\varphi(x,y)$$

trong đó λ là hằng số nhân chưa được xác định và đi tìm cực trị thông thường của hàm bổ trợ này. Đây là *phương pháp thừa số bất định Lagrange*.

Tìm điều kiện cần để tồn tại cực trị có điều kiện chung quy là giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0\\ \varphi(x,y)=0\end{cases} \tag{9.15}$$

Từ hệ này ta có thể xác định x,y và λ.

Vấn đề tồn tại và đặc tính của cực trị địa phương được minh định trên cơ sở xét dấu của vi phân cấp hai của hàm bổ trợ

$$d^2F=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}dy^2$$

được tính đối với các giá trị x,y,λ thu được khi giải hệ (9.15) với điều kiện là

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0\quad(dx^2+dy^2\neq0).$$

Cụ thể là:

i) Nếu $d^2F < 0$ hàm $f(x,y)$ có cực đại có điều kiện.

ii) Nếu $d^2F > 0$ hàm $f(x,y)$ có cực tiểu có điều kiện.

iii) Nếu $d^2F = 0$ thì cần phải khảo sát.

Nhận xét

i) Việc tìm cực trị của hàm ba biến hoặc nhiều hơn được tiến hành tương tự như ở 1.

ii) Tương tự có thể tìm cực trị có điều kiện của hàm ba biến hoặc nhiều hơn với một hoặc nhiều phương trình ràng buộc (*số phương trình ràng buộc phải bé hơn số biến*). Khi đó cần lập hàm bổ trợ với số thừa số chưa xác định bằng số phương trình ràng buộc.

iii) Ngoài phương pháp thừa số bất định Lagrange, người ta còn dùng *phương pháp khử biến số* để tìm cực trị có điều kiện.

9.3.3 Giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm

Hàm khả vi trong miền đóng bị chặn đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) hoặc tại điểm dừng hoặc tại điểm biên của miền.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm cực trị địa phương của hàm

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Giải. i) Miền xác định của hàm là toàn mặt phẳng $\mathbb{R}^2$.

ii) Tính các đạo hàm riêng f'_x và f'_y và tìm các điểm tới hạn. Ta có

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y, \quad f'_y = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Do đó

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y &= 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y &= 0 \end{aligned}$$

và từ đó

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -\sqrt{2} \\ y_2 = \sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = \sqrt{2} \\ y_3 = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Như vậy ta có ba điểm tới hạn. Vì f'_x, f'_y tồn tại với mọi điểm $M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ nên hàm không còn điểm tới hạn nào khác.

iii) Ta tính các đạo hàm riêng cấp hai và giá trị của chúng tại các điểm tới hạn.

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 = 4, \quad f''_{xy} = 4, \quad f''_{yy} = 12y^2 - 4.$$

Tại điểm $O(0, 0)$: $A = -4$, $B = 4$, $C = -4$
Tại điểm $M_1(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$: $A = 20$, $B = 4$, $C = 20$
Tại điểm $M_2(+\sqrt{2}, -\sqrt{2})$: $A = 20$, $B = 4$, $C = 20$.
iv) Tại điểm $O(0, 0)$ta có

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 16 - 16 = 0.$$

Dấu hiệu đủ không cho ta câu trả lời. Ta nhận xét rằng trong lân cận bất kỳ của điểm O tồn tại những điểm mà $f(x, y) > 0$ và những điểm mà $f(x, y) < 0$. Chẳng hạn dọc theo trung c Ox $(y = 0)$ ta có

$$f(x, y)\big|_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0$$

tại những điểm đủ gần $(0, 0)$, và dọc theo đường thẳng $y = x$

$$f(x, y)\big|_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0$$

Như vậy, tại những điểm khác nhau của một lân cận nào đó của điểm $O(0, 0)$ số gia toàn phần $\Delta f(x, .y)$ không có cùng một dấu và do đó tại $O(0, 0)$ hàm không có cực trị địa phương.

Tại điểm $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ta có

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = 400 - 16 > 0$$

và $A > 0$ nên tại $M_1(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ hàm có cực tiểu địa phương và $f_{\min} = -8$.

Tại điểm $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ta có $AC - B^2 > 0$ và $A > 0$ nên tại đó hàm có cực tiểu địa phương và $f_{\min} = -8$.

Ví dụ 2. Khảo sát và tìm cực trị của hàm

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y.$$

Giải. i) Hiển nhiên $D_f \equiv \mathbb{R}$.

ii) Tìm điểm dừng. Ta có

$$\begin{array}{l} f'_x = 2x + y - 2 \\ f'_y = x + 2y - 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x + y - 2 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0. \end{array}$$

Hệ thu được có nghiệm là $x_0 = \dfrac{1}{3}$, $y_0 = \dfrac{4}{3}$. Do đó $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ là điểm dừng và ngoài điểm dừng đó hàm f không có điểm dừng nào khác vì f'_x và f'_y tồn tại $\forall (x,y)$.

iii) Khảo sát cực trị. Ta có $A = f''_{x^2} = 2$, $B\ f''_{xy} = 1$, $C = f''_{y^2} = 2$. Do đó

$$\Delta(M_0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \text{ và } A = 2 > 0$$

nên hàm f có cực tiểu tại điểm $M_0(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3})$. ▲

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện là x và y liên hệ với nhau bởi phương trình $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Ta lập hàm Lagrange

$$F(x,y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$$

và ta giải hệ phương trình

$$\begin{aligned} -4 + 2\lambda x &= 0 \\ -3 + 2\lambda x &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Giải ra ta có

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = \frac{3}{5} \\ &\lambda_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_2 = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Vì

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$$

nên

$$d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Nếu $\lambda = \frac{5}{2}$, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ thì $d^2F > 0$ nên tại điểm $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ hàm có cực tiểu có điều kiện.

Nếu $\lambda = -\frac{5}{2}$, $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ thì $d^2F < 0$ và do đó hàm có cực đại có điều kiện tại điểm $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Như vậy

$$\begin{aligned} f_{\max} &= 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11, \\ f_{\min} &= 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

Ví dụ 4. Tìm cực trị có điều kiện của hàm

1) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10, \quad x + y = 4.$

2) $u = f(x, y, z) = x + y + z^2$

$$\begin{cases} z - x &= 1, \\ y - xz &= 1. \end{cases}$$

Giải. 1) Từ phương trình ràng buộc $x + y = 4$ ta có $y = 4 - x$ và

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + (4-x)^2 + x(4-x) - 5x - 4(4-x) + 10 \\ &= x^2 - 5x + 10, \end{aligned}$$

ta thu được hàm một biến số

$$g(x) = x^2 - 5x + 10$$

và cực trị địa phương của $g(x)$ cũng chính là cực trị có điều kiện của hàm $f(x, y)$. Áp dụng phương pháp khảo sát hàm số một biến số đối với $g(x)$ ta tìm được $g(x)$ có cực tiểu địa phương

$$g_{\min} = g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}\cdot$$

Nhưng khi đó hàm $f(x, y)$ đã cho có cực tiểu có điều kiện tại điểm $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $(y = 4 - x \Rightarrow y = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2})$ và

$$f_{\min} = f\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}\cdot$$

2) Từ các phương trình ràng buộc ta có

$$\begin{aligned} z &= 1 + x \\ y &= x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

và thế vào hàm đã cho ta được hàm một biến số

$$u = f(x, y(x), z(x)) = g(x) = 2x^2 + 4x + 2.$$

Dễ dàng thấy rằng hàm $g(x)$ có cực tiểu tại $x = -1$ (khi đó $y = 1$, $z = 0$) và do đó hàm $f(x, y, z)$ có cực tiểu có điều kiện tại điểm $(-1, 1, 0)$ và

$$f_{\min} = f(-1, 1, 0) = 0. \blacktriangle$$

Ví dụ 5. Bằng phương pháp thừa số bất định Lagrange tìm cực trị có điều kiện của hàm

$$u = x + y + z^2$$

với điều kiện

$$\begin{cases} z - x = 1 \\ y - xz = 1 \end{cases} \tag{9.16}$$

(xem ví dụ 4, ii)).

Giải. Ta lập hàm Lagrange

$$F(x,y,z) = x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - zx - 1)$$

và xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0 \\ \varphi_1 = z - x - 1 = 0 \\ \varphi_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất $x = -1$, $y = 1$, $z = 0$, $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = -1$ nghĩa là $M_0(-1,1,0)$ là điểm duy nhất có thể có cực trị của hàm với các điều kiện ràng buộc φ_1 và φ_2.

Từ các hệ thức

$$z - x = 1$$
$$y - xz = 1$$

ta thấy rằng (9.16) xác định cặp hàm ẩn $y(x)$ và $z(x)$ (trong trường hợp này $y(x)$ và $z(x)$ dễ dàng rút ra từ (9.16)). Giả sử thế nghiệm

$y(x)$ và $z(x)$ vào hệ (9.16) và bằng cách lấy vi phân các đồng nhất thức thu được ta có

$$\begin{cases} dz - dx = 0 \\ dy - xdz - zdx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dz = dx \\ dy = (x+z)dx. \end{cases} \tag{9.17}$$

Bây giờ tính vi phân cấp hai của hàm Lagrange

$$d^2F = 2(dz)^2 - 2\lambda_2 dxdz. \tag{9.18}$$

Thay giá trị $\lambda_2 = -1$ và (9.17) vào (9.18) ta thu được dạng toàn phương xác định dương là

$$d^2F = 4dx^2.$$

Từ đó suy ra hàm đã cho có cực tiểu có điều kiện tại điểm $M_0(-1, 1, 0)$ và $f_{\min} = 0$. ▲

Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

trong miền

$$D = \{x \leqslant 0, y \leqslant 0, x + y \geqslant -3\}.$$

Giải. Miền D đã cho là tam giác OAB với đỉnh tại $A(-3, 0)$, $B(0, -3)$ và $O(0, 0)$.

i) Tìm các điểm dừng:

$$f'_x = 2x - y + 1 = 0$$
$$f'_y = 2y - x + 1 = 0$$

Từ đó $x = -1$, $y = -1$. Vậy điểm dừng là $M(-1, -1)$.

Tại điểm M ta có:

$$f(M) = f(-1, -1) = -1.$$

ii) Ta có

$$\begin{aligned} A &= f''_{xx}(-1,-1) = 2 \\ B &= f''_{xy}(-1,-1) = -1 \\ C &= f''_{yy}(-1,-1) = 2. \end{aligned}$$

Vậy $AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$, nên hàm có biệt thức $AC - B^2 > 0$ và $A = 2 > 0$. Do đó tại điểm M nó có cực tiểu địa phương và $f_{\min} = -1$.

iii) Khảo sát hàm trên biên của miền D.

+) Khi $x = 0$ ta có $f = y^2 + y$. Đối với hàm một biến $f = y^2 + y$, $-3 \leqslant y \leqslant 0$ ta có

$$\begin{aligned} (f_{ln})\big|_{x=0} &= 6 \text{ tại điểm } (0,-3) \\ (f_{nn})\big|_{x=0} &= \frac{-1}{4} \text{ tại điểm } \Big(0, -\frac{1}{2}\Big). \end{aligned}$$

+) Khi $y = 0$ ta có hàm một biến $f = x^2 + x$, $-3 \leqslant x \leqslant 0$ và tương tự:

$$\begin{aligned} (f_{ln})\big|_{y=0} &= 6 \text{ tại điểm } (0,-3) \\ (f_{nn})\big|_{y=0} &= \frac{-1}{4} \text{ tại điểm } \Big(-\frac{1}{2}, 0\Big). \end{aligned}$$

+) Khi $x + y = -3 \Rightarrow y = -3 - x$ ta có $f(x) = 3x^2 + 9x + 6$ và

$$\begin{aligned} (f_{nn})\big|_{x+y=-3} &= \frac{-3}{4} \text{ tại điểm } \Big(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\Big) \\ (f_{ln})\big|_{x+y=-3} &= 6 \text{ tại điểm } (0,-3) \text{ và } (-3,0). \end{aligned}$$

iv) So sánh các giá trị thu được đối với f ta kết luận $f_{ln} = 6$ tại $(0,-3)$ và $(-3,0)$ và giá trị $f_{nn} = -1$ tại điểm dừng $(-1,-1)$.

BÀI TẬP

Hãy tìm cực trị của các hàm sau đây

1. $f = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$. (ĐS. $f_{\max} = 13$ tại điểm $(4, -2)$)

2. $f = (x-1)^2 + 2y^2$. (ĐS. $f_{\min} = 0$ tại điểm $(1, 0)$)

3. $f = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$. (ĐS. $f_{\min} = -1$ tại điểm $(1, 0)$)

4. $f = x^3y^2(6-x-y)$ $(x > 0, y > 0)$. (ĐS. $f_{\max} = 108$ tại điểm $(3, 2)$)

5. $f = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$.

(ĐS. $f_{\max} = 0$ tại điểm $(0, 0)$,

$f_{\min} = -\dfrac{9}{8}$ tại các điểm $M_1\Big(\dfrac{1}{2}, -1\Big)$ và $M_2\Big(\dfrac{-1}{2}, 1\Big)$

$f_{\min} = -\dfrac{9}{8}$ tại các điểm $M_3\Big(\dfrac{1}{2}, -1\Big)$ và $M_4\Big(\dfrac{-1}{2}, -1\Big)$)

6. $f = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

(ĐS. $f_{\max} = 3^{-13}$ tại điểm $M_1(1, 3)$,

$f_{\min} = -26e^{-1/52}$ tại điểm $M_2\Big(\dfrac{-1}{26}, \dfrac{-3}{26}\Big)$)

7. $f = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$, $x > 0$, $y > 0$. (ĐS. $f_{\min} = 30$ tại điểm $(5, 2)$)

8. $f = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. (ĐS. $f_{\min} = -21$ tại điểm $(1, 4)$)

9. $f = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$. (ĐS. $f_{\max} = 15$ tại điểm $(4, 4)$)

10. $f = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$. (ĐS. $f_{\min} = -\dfrac{2}{e}$ tại $(0, -2)$)

11. $f = 2 + (x-1)^4(y+1)^6$. (ĐS. $f_{\min} = 2$ tại điểm $(1, -1)$)

Chỉ dẫn. Tại điểm $M_0(1, -1)$ ta có $\Delta(M_0) = 0$. Cần khảo sát dấu của $f(M) - f(M_0) = f(1 + \Delta x, -1 + \Delta y) - f(1, -1)$.

12. $f = 1 - (x-2)^{4/5} - y^{4/5}$. (ĐS. $f_{\max} = 1$ tại điểm $(2, 0)$)

Chỉ dẫn. Tại điểm $(2, 0)$ hàm không khả vi. Khảo sát dấu của $f(M) - f(M_0)$, $M_0 = (2, 0)$.

Tìm cực trị có điều kiện của các hàm sau đây

13. $f = xy$ với điều kiện $x + y = 1$.

(ĐS. $f_{\max} = \dfrac{1}{4}$ tại điểm $\Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$)

14. $f = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

(ĐS. $f_{\max} = 5$ tại điểm $(1, 2)$)

15. $f = x^2 + y^2$ với điều kiện $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$.

(ĐS. $f_{\min} = \dfrac{36}{13}$ tại điểm $\Big(\dfrac{18}{13}, \dfrac{12}{13}\Big)$)

16. $f = x - 2y + 2z$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

(ĐS. $f_{min} = -9$ tại điểm $(-1, 2, -2)$; $f_{\max} = 9$ tại $(1, -2, 2)$.)

17. $f = xy$ với điều kiện $2x + 3y = 5$.

(ĐS. $f_{\max} = \dfrac{25}{24}$ tại điểm $\Big(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{6}\Big)$)

18. 1) $f = x^2 + y^2$ với điều kiện ràng buộc $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{3} = 1$.

(ĐS. $f_{\min} = \dfrac{144}{25}$ tại $\Big(\dfrac{36}{25}, \dfrac{48}{25}\Big)$)

2) $f = e^{xy}$ với điều kiện $x + y = 1$.

(ĐS. $f_{\max} = e^{1/4}$ tại điểm $\Big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\Big)$)

Chỉ dẫn. Có thể sử dụng phương pháp khử biến.

19. $f = x^2 + y^2 + 2z^2$ với điều kiện $x - y + z = 1$.

(ĐS. $f_{\min} = 0,4$ tại điểm $(0,4; -0,4; 0,2)$)

20. $f = x^3 + y^2 - z^3 + 5$ với điều kiện $x + y - z = 1$.

(ĐS. $f_{\min} = 5$ tại điểm $(0, 0, 0)$ và $f_{\max} = 7\dfrac{10}{27}$ tại điểm $\Big(-\dfrac{4}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{4}{3}\Big)$)

21. $f = xyz$ với các điều kiện $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$.

$$(\text{ĐS.}\quad f_{\max} = 4\frac{4}{27} \text{ tại } \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{3}\right);\ \left(\frac{4}{3},\frac{7}{3},\frac{4}{3}\right);\ \left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$f_{\min} = 4 \text{ tại } (2,2,1); (2,1,2); (1,2,2))$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số sau.

22. $f = x^2y(2-x-y)$, D là tam giác được giới hạn bởi các đoạn thẳng $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

(ĐS. $f_{ln} = \dfrac{1}{4}$ tại điểm $(1,2)$; $f_{nn} = -128$ tại điểm $(4,2)$).

23. $f = x+y$, $D = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

$$(\text{ĐS.}\quad f_{ln} = \sqrt{2} \text{ tại điểm biên } \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$f_{nn} = -\sqrt{2} \text{ tại điểm biên } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)).$$

24. Từ mọi tam giác có chu vi bằng $2p$, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

Chỉ dẫn. Đặt $a=x$, $b=y \Rightarrow c = 2p-x-y$ và áp dụng công thức Heron

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

(ĐS. Tam giác đều).

25. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm

$$f = x^2 - y^2, \quad D = \{x^2+y^2 \leqslant 1\}$$

$$(\text{ĐS.}\quad f_{ln} = 1 \text{ tại } (1,0) \text{ và } (-1,0);$$

$$f_{nn} = -1 \text{ tại } (0,1) \text{ và } (0,-1)).$$

26. Xác định giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm

$$f = x^3 - y^3 - 3xy, \quad D = \{0 \leqslant x \leqslant 2, -1 \leqslant y \leqslant 2\}.$$

(ĐS. $f_{ln} = 13$ tại điểm $(2, -1)$;

$f_{nn} = -1$ tại điểm $(1, 1)$ và $(0, -1)$).