ĐỊNH THỨC

A. <u>Tóm tắt lý thuyết:</u>

I/ Tính chất cơ bản của định thức:

TC1: Phép chuyển vị không làm thay đổi định thức

TC2: Nếu đổi chỗ hai dòng bất kỳ của ma trận vuông thì định thức đổi dấu

TC3: Nếu định thức có một hàng chỉ gồm toàn số không thì định thức bằng không.

TC4: Một định thức có hai hàng giống nhau thì bằng không.

TC5: Nếu nhân mọi phần tử của một hàng nào đó với k thì định thức được nhân lên với k

TC6: Một định thức có hai hàng tỉ lệ thì bằng không

TC7: Nếu dòng thứ i nào đó của A có tính chất: $a_{ij} = \lambda b_j + \mu c_j$ (j = 1, 2, ..., n) thì:

$$\det(A) = \lambda \det(B) + \mu \det(C)$$

Trong đó các phần tử dòng thứ i trong B là $b_1, b_2, b_3..., b_n$, của C là $c_1,...,c_n$

TC8: Nếu có một hàng là tổ hợp tuyến tính của các hàng khác thì định thức bằng không

TC9: Định thức không thay đổi nếu ta thêm vào một hàng nào đó tổ hợp tuyến tính của các hàng khác.

II/ Tính định thức:

(1) Đối với các định thức cấp 3 có thể dùng quy tắc Sarrus để tính.

(2) Tính định thức bằng phép khai triển theo dòng (hay cột)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ ; \ i = 1, 2, ..., n$$

hoặc $$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ ; \quad j = 1, 2, ..., n$$

trong đó: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det S_{ij}$ (với S_{ij} là ma trận có được từ ma trận A bằng cách xóa đi dòng i và cột j

(3) Tính định thức bằng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức về dạng tam giác.

(4) Phương pháp thay đổi các phần tử của định thức: Dựa vào tính chất sau:

Nếu ta cộng vào mọi phần tử của định thức D với cùng một phần tử x thì định thức sẽ tăng một lượng bằng tích của x với tổng các phần bù đại số của mọi phần tử trong D.

B/ Bài tập:

Bài 3.1 Định thức của một ma trận thay đổi thế nào nếu ta viết các dòng của ma trận theo thứ tự ngược lại

Bài 3.2 Định thức cấp n thay đổi như thế nào, nếu ta đổi dấu mọi phần tử của định thức

Bài 3.3 Định thức phản đối xứng là định thức mà các phần tử nằm đối xứng nhau qua đường chéo chính thì đối nhau, nghĩa là $a_{ik} = -a_{ki}$. Chứng minh rằng: định thức phản đối xứng cấp n bằng không nếu n lẻ.

Bài 3.4 Giải các phương trình:

a/ $$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

b/ $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ đôi một khác nhau

Bài 3.5 Không tính định thức. Chứng minh rằng: $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ chia hết cho 13

Bài 3.6 Chứng minh rằng:

a/ $$\begin{vmatrix} a+x & b+y & c+z \\ x+u & y+v & z+w \\ u+a & v+b & w+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

b/ $$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & y & z \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Bài 3.7 Không khai triển định thức, tính

a/ $$\begin{vmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{vmatrix}$$

b/ $$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$$

Bài 3.8 Không khai triển định thức, chứng minh rằng:

a. $$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

b. $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$ d. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r & 1 & 1 & 1 \\ r & r & 1 & 1 \\ r & r & r & 1 \end{vmatrix} = (1-r)^3$

e. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$

f. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$

g. $\begin{vmatrix} a+b+c & a+b & a & a \\ a+b & a+b+c & a & a \\ a & a & a+b+c & a+b \\ a & a & a+b & a+b+c \end{vmatrix} = c^2(2b+c)(4a+2b+c)$

h. $\begin{vmatrix} 1+a & a & a & a \\ b & 1+b & b & b \\ c & c & 1+c & c \\ d & d & d & 1+d \end{vmatrix} = 1+a+b+c+d$

Bài 3.9 Tính

a. $\begin{vmatrix} 13547 & 13647 \\ 28423 & 28523 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ e. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 4 & 99 & 83 & 1 \\ 0 & 8 & 16 & 0 \\ 60 & 17 & 134 & 20 \\ 15 & 43 & 106 & 5 \end{vmatrix}$ h. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ i. $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

Bài 3.10 Tính

a. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & y & z \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos c & \cos b \\ 1 & \cos c & 1 & \cos a \\ 1 & \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$

c. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ d. $\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

e. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ . . & . . & . . & . . & . . \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ f. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ . . & . . & . . & . . & . . \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$

g. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ . . & . . & . . & . . & . . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$ h. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ . . & . . & . . & . . & . . & . . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$

Bài 3.11 Hãy xét xem các hệ phương trình ở bài 2.12, hệ phương trình nào là hệ Cramer. Giải hệ phương trình đó theo phương pháp trên.

Bài 3.12 Giải lại bài 2.15 và 2.16 bằng phương pháp định thức