CHUYÊN ĐỀ 1

HÀM SỐ - MÔ HÌNH TOÁN

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT:

1) *Hàm số*:

+ *Định nghĩa:*

Hàm là một quy tắc cho tương ứng với mỗi phần tử trong tập A với chỉ một phần tử trong tập B.

Tập A được gọi là miền xác định của hàm và tập B được gọi là miền giá trị của hàm.

Ví dụ: Tìm (2) nếu (x) = $x^2 + 8$.

Giải: (2) = $2^2 + 8 = 12$

HÀM HỢP

+ *Định nghĩa*:

Cho các hàm (u) và g(x), hàm hợp (g(x)) là hàm theo biến x thu được bằng cách thế u = g(x) cho u trong công thức f(u).

Ví dụ: Tìm hàm hợp (g(x)), trong đó (u) = $u^2 + 4u + 3$ và g(x) = x + 2.

Giải:

Thay u bởi x + 2 vào công thức của f(u) ta được

(g(x)) = $(x + 2)^2 + 4(x + 2) + 3$

$= (x^2 + 4x + 4) + (4x + 2) + 3$

$= x^2 + 8x + 9$

2) Đồ thị hàm số

+ *Định nghĩa:*

Đồ thị hàm số f là bao gồm tất cả các điểm (x,y) trong đó x thuộc miền xác định của f và y = f(x), tức là gồm các điểm có dạng (x,f(x)).

+ Lược đồ phát họa đồ thị hàm số f bằng cách vẽ từng điểm:

1. Chọn một số điểm x thuộc miền xác định của f và lập bảng gồm giá trị của hàm y=f(x) cho những giá trị x này.
2. Xác định các điểm tương ứng (x,f(x))
3. Nối các điểm này với một đường cong trơn.

3) Mô hình toán

Một bài toán thực tế được sử dụng các biểu thức toán học để mô tả nó được gọi là mô hình toán

4) Giới hạn hàm số

a. Định nghĩa: Ta nói L là giới hạn của (x) khi x tiến về x_0, và viết là: $\lim_{x \quad x_0}$ (x) = L, nếu khi x nhận những giá trị "gần" với x_0 thì giá trị tương ứng của (x) "gần" với L

Ví dụ: $\lim_{x \quad 1} (2x^2 - 1) = 1$

Ta có bảng số liệu

X	0.5	0.9	0.99	1	1.001	1.01	1.1
(x)	-0.5	0.62	0.96	1	1.004	1.07	1.42

b. <u>Tính chất của giới hạn</u>

x R ; $\lim_{x \quad x_0}$ (x) = M ; $\lim_{x \quad x_0}$ g(x) = N

* $\lim_{x \quad x_0}$ [(x) + g(x)] = $\lim_{x \quad x_0}$ (x) + $\lim_{x \quad x_0}$ g(x)

* $\lim_{x \quad x_0}$ (k. (x)) = k. $\lim_{x \quad x_0}$ (x)

* $\lim_{x \quad x_0}$ [(x).g(x)] = $\lim_{x \quad x_0}$ (x) . $\lim_{x \quad x_0}$ g(x)

* $\lim_{x \quad x_0} \frac{(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \quad x_0} (x)}{\lim_{x \quad x_0} g(x)}$ nếu $\lim_{x \quad x_0}$ g(x) = N 0

Ví dụ: Tìm $\lim_{x \quad 1}(2x^2 - 1)$

Ta có $\lim_{x \quad 1}(2x^2 - 1) = \lim_{x \quad 1} 2x^2 + \lim_{x \quad 1}(-1)$

$= \lim_{x \quad 1} 2x^2 - 1$

$= 2\lim_{x \quad 1}(x.x) - 1$

$= 2\lim_{x \quad 1} x \,.\, \lim_{x \quad 1} x - 1$

$= 2.1.1 - 1$

$= 1$

B. ỨNG DỤNG:

<u>Ví dụ 1</u>:

Tại công ty Trường Giang, khi q sản phẩm được sản xuất thì chi phí được xác định theo biểu thức $C(q) = q^4 + 15q - 8$ (đvtt)

a. *Tính chi phí khi 20 sản phẩm được sản xuất*
b. *Tính chi phí khi sản phẩm thứ 20 được sản xuất*

<u>Giải</u>:

a. Chi phí khi 20 sản phẩm được sản xuất là:
   $C(20) = 20^4 + 15.20 - 8$
   $= 160292$ (đvtt)
b. Chi phí khi sản phẩm thứ 20 được sản xuất là:
   $C(20) - C(19) = 160292 - (19^4 + 15.19 - 8)$
   $= 30264$ (đvtt)

<u>Ví dụ 2:</u>

Một nhà nghiên cứu môi trường ước tính rằng hàm lượng CO trong không khí tại một đô thị là c(p)= 0.5p + 3 (ppm), khi số dân là p nghìn người. Người ta cũng ước tính rằng sau t năm số dân tại đây sẽ là: $p(t) = 10 + t^2$ nghìn người.

a) Hãy biểu diễn hàm lượng CO trong không khí là một hàm số theo thời gian.
b) Sau bao nhiêu năm hàm lượng CO đạt đến 9 ppm?

Giải:

a) Vì hàm lượng CO được liên hệ theo biến p bởi phương trình c(p)=0.5p + 3 (ppm)và biến p được liên hệ với biến t theo phương trình $p(t)=10 + t^2$, do đó hàm hợp:

$$c(p(t))= c(10 + t^2)=0.5(10 + t^2)+ 3=0.5t^2 + 8$$

biểu diễn hàm lượng CO trong không khí như hàm số theo thời gian.

b) Theo đề, ta có:

$$c(p(t))=9 \quad 0.5t^2 + 8=9 \quad t=1.4$$

Vậy sau 1.4 năm lượng CO trong không khí sẽ đạt 9ppm.

Ví dụ 3:

Một công ty chuyên sản xuất đĩa CD với chi phí mỗi đĩa là 40 ngàn. Nếu mỗi đĩa được bán với giá là x ngàn thì số lượng đĩa bán được là q(x)=120-x cái. Hãy xác định giá bán của mỗi đĩa sao cho lợi nhuận mà công ty thu được là cao nhất.

Giải:

Gọi x là giá bán của sản phẩm

Doanh thu mà công ty thu được: $R(x)=x.q(x)= x(120-x)= 120x-x^2$

Chi phí mà công ty bỏ ra: C(x)=40(120-x)=4800-40x

Lợi nhuận công ty thu được:

$N(x)=R(x)-C(x)= 120x-x^2-(4800-40x)=160x-x^2-4800$

Để lợi nhuận đạt được cao nhất thì x= -160/(-2)=80

Vậy khi bán với giá 80 ngàn thì công ty đạt lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 4:

Một nhà sản xuất bán bóng đèn với giá là 30$, tại giá bán này khách hàng sẽ mua 3000 bóng mỗi tháng. Nhà sản xuất dự định tăng giá bán và họ ước tính rằng cứ giá mà tăng lên 1$ thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 bóng. Biết rằng nhà sản xuất sản xuất bóng đèn với chi phí là 18$ mỗi bóng. Biểu diễn lợi nhuận hàng tháng của nhà sản xuất bằng một hàm theo giá bán mới, và ước tính giá bán tối ưu nhất.

Giải:

Gọi x là giá bán mới

Lượng tiền tăng trong giá bán: x-30

Với giá bán mới, lượng bóng đèn bán ra hàng tháng sẽ giảm: 100(x-30)

Số bóng đèn bán hàng tháng theo giá bán mới: 3000-100(x-30)

Lợi nhuận mỗi bóng: x-18

Lợi nhuận thu được hàng tháng theo giá bán mới:

$P(x)=(x-18)[3000-100(x-30)]= -100x^2+7800x-108000$

Để Pmax thì x= -7800/2(-100)=39

Vậy giá bán tối ưu là 39USD/bóng.

Ví dụ 7:

Một doanh nghiệp sản xuất và bán một loại sản phẩm với giá 45 (ngàn đồng) mỗi sản phẩm, tại giá bán này khách hàng sẽ mua 60 sản phẩm mỗi tháng. Doanh nghiệp dự định tăng giá bán và họ ước tính rằng nếu tăng 2 (ngàn đồng) trong giá bán thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 6 sản phẩm. Biết rằng chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 27 (ngàn đồng).
Vậy doanh nghiệp nên bán sản phẩm với giá nào thì lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Giải:

Gọi x là giá bán mới của 1 sản phẩm mà doanh nghiệp phải định để lợi nhuận thu được sau khi tăng giá là cao nhất

Suy ra số tiền đã tăng là: x – 45

Số lượng sản phẩm giảm xuống là: $\frac{6(x-45)}{2}$ = 3x – 135

Vậy tổng số sản phẩm bán được là: 60 – (3x – 135) = 195 – 3x

Lợi nhuận công ty thu được sau khi tăng giá là: (x-27) (195-3x) = 276x – $3x^2$ – 5265

Lợi nhuận đạt cao nhất khi x = 46

Vậy muốn đạt được lợi nhuận cao nhất thì công ty nên bán với giá 46 (ngàn đồng)

CHUYÊN ĐỀ 2

ĐẠO HÀM- ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT:

I. ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM

Cho hàm số f (x) có miền xác định : Df và x_0 Df, đạo hàm của f (x) tại x_0 là $f'(x_0)$ hoặc $\frac{d}{dx}(x_0)$ được định nghĩa bởi biểu thức:

$$f'(x_0) = \lim_{x \quad x_0} \frac{(x) - (x_0)}{x - x_0}$$

Ví dụ: Cho $f(x) = x^2$ .Tìm $f'(3)$

Ta có $f'(3) = \lim_{x \quad 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

\+ Cho $f(x)$ là hàm số

Khi ấy $f'(x) = \lim_{h \quad 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ được gọi là đạo hàm cấp 1 của $f(x)$

Ví dụ: Cho $f(x) = x^2$. Tìm $f'(x)$

$$\text{Ta có } f'(x) = \lim_{h} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h} \frac{h(2x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h} (2x + h) = 2x$$

\+ <u>Ý nghĩa các tên gọi của đạo hàm về mặt kinh tế:</u>

* Giả sử ta có 2 đại lượng kinh tế x và y liên kết với nhau theo quan hệ hàm y = f(x). Ta nói biên tế của đại lượng y theo đại lượng x là lượng thay đổi của đại lượng y theo đại lượng x khi đại lượng x tăng lên 1 đơn vị. Ký hiệu $M_x(y)$ hoặc $M_y(x)$

* Giả sử 2 đại lượng kinh tế x và y liên kết với nhau theo quan hệ hàm y = y(x) khi ấy $M_x y = y'(x)$

* Một số tên gọi:

+ Biên tế của chi phí còn được gọi là chi phí biên
+ Biên tế của lợi nhuận còn được gọi là lợi nhuận biên
+ Biên tế của doanh thu còn được gọi là doanh thu biên

II. CÁC PHÉP TOÁN ĐẠO HÀM

Cho $f(x)$ và g(x) là 2 hàm số; $x \in R$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$
$$[k.f(x)]' = k.f'(x)$$
$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{[g(x)]^2}$$

Ví dụ: Cho $f(x) = 9x^8 + 7x^5 - 2x^3 + 6x + 2000$. Tìm $f'(x)$

$f'(x) = (9x^8)' + (7x^5)' - (2x^3)' + (6x)' + (2000)'$
$= 9(x^8)' + 7(x^5)' - 2(x^3)' + 6(x)' + (2000)'$
$= 72x^7 + 35x^4 - 6x^2 + 6$

III. QUY TẮC HÀM HỢP-ĐẠO HÀM CẤP HAI- HÀM ẨN

1) Quy tắc hàm hợp: Giả sử y là một hàm khả vi theo u, và u là một hàm khả vi theo x, thì y là một hàm hợp của x.
2) Đạo hàm cấp hai của một hàm là đạo hàm của đạo hàm của nó.
3) Đạo hàm hàm ẩn: Giả sử một phương trình xác định ẩn y là một hàm khả vi theo x. Để tìm dy/dx, ta thực hiện theo:
   - Đạo hàm cả hai vế của phương trình theo x. Nhớ rằng y thực ra là một hàm của x và dùng quy tắc hàm hợp khi đạo hàm những số hạng chứa y
   - Giải phương trình đại số đạo hàm của dy/dx.

IV. HÀM MŨ VÀ HÀM LOGARIT:

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT:

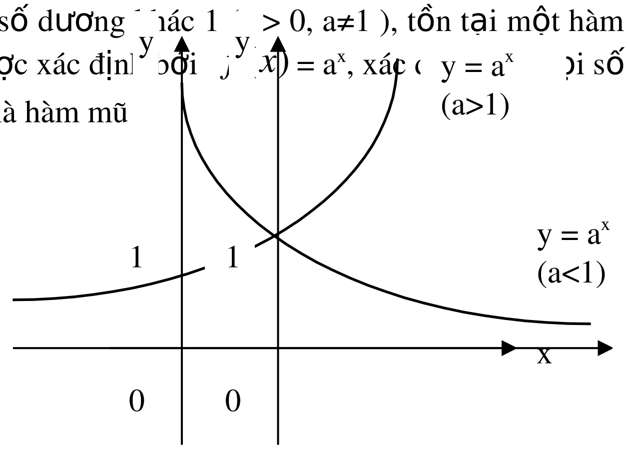
<u>1. Hàm mũ:</u>

<u>a. Định nghĩa</u> : Nếu a là một số dương khác 1 (a > 0, a≠1), tồn tại một hàm duy nhất được gọi là hàm mũ với cơ số a được xác định bởi $f(x) = a^x$, xác định với mọi số thực x.

Ví dụ: $f(x) = 4^x$ là hàm mũ

<u>b. Đồ thị</u>:

-

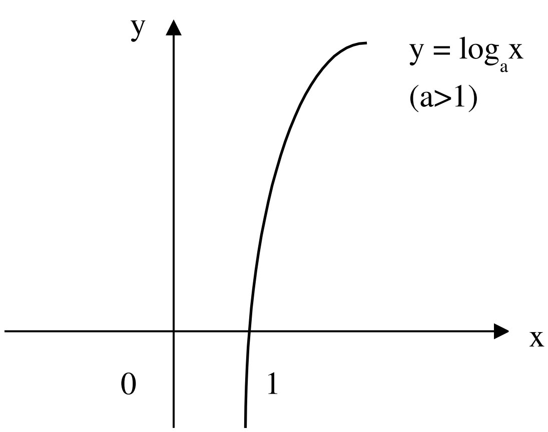


- *c. Một số tính chất*: Cho các cơ số a, b (a > 0, b > 0) và các số thực x, y bất kỳ, ta có
- Quy tắc đẳng thức : $a^x = a^y$ x = y
- Quy tắc tích : $a^x . a^y = a^{x+y}$
- Quy tắc nhân : $a^x . b^x = (a.b)^x$
- Quy tắc thương : $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- Quy tắc chia : $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$
- Quy tắc lũy thừa : $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
- * Với $e = \lim_{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ta có hàm mũ y = $f(x) = e^x$. Hàm này được gọi là hàm mũ tự nhiên (hàm mũ cơ số e)

2. Hàm logarit:

a. Định nghĩa: Logarit cơ số a (a>0 và a≠1) của x là số y sao cho $a^y = x$ và ta viết $y = \log_a x$

b. Đồ thị:

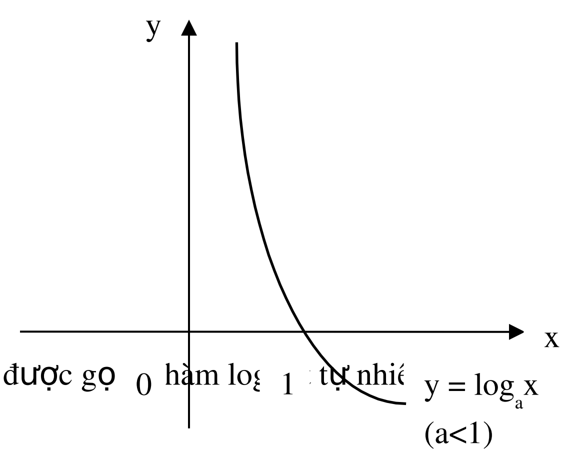


c. Một số tính chất hàm logarit:

+ $\log_a x = \log_a y$ x = y

$\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$

+ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$



d. Khi a = e ta có hàm logarit y = $f(x) = \log_e x = \ln x$ được gọ hàm log tự nhiê

e. ối liên hệ giữa hàm logarit và hàm mũ

+ $y = \log_a x$ $a^y = x$

+ $a^{\log_a x} = x$

+ $\log_a a^x = x$

+ $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

<u>3. Đạo hàm của hàm mũ và hàm logarit</u>

<u>*a. Đạo hàm của hàm ẩn*</u>:

Giả sử y = $f(x)$ cho ở dạng hàm ẩn trong biểu thức F(x,y) = 0

+ Bước 1: Từ biểu thức F(x,y) = 0 ta đạo hàm hai vế theo x với việc xem y như là hàm của x bằng cách sử dụng đạo hàm của hàm hợp

+ Bước 2: Rút y' từ biểu thức ở bước 1 và y' chính là đạo hàm của hàm ẩn y = $f(x)$

<u>*b. Đạo hàm của hàm mũ*</u>:

- $\left(e^x\right)' = e^x$
- $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$

<u>*c. Đạo hàm của hàm logarit:*</u>

Ta có $y = \log_a x$ $\quad a^y = x$

Đạo hàm 2 vế của biểu thức $a^y = x$ theo x ta có

$a^y.\ln a.y' = 1$

Suy ra $y' = \dfrac{1}{a^y.\ln a} = \dfrac{1}{x.\ln a}$

Vậy $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x.\ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x.\ln e} = \dfrac{1}{x}$

V. CỰC TRỊ

* Ta nói hàm số f(x) đạt cực đại tại x = a; nếu trong lân cận nhỏ (I) của x = a ta có

$f(x) \quad (a) \quad \forall x \quad I$

* Ta nói hàm số f(x) đạt cực tiểu tại x = a; nếu trong lân cận nhỏ (I) của x = a ta có

$f(x) \quad f(a) \quad \forall x \quad I$

* Cực đại hay cực tiểu còn được gọi là cực trị
* Định lý 1: Nếu x = a là điểm cực trị của f(x) thì $f'(a) = 0$
* Định lý 2: Giả sử x = a là điểm cực trị thì

+ Nếu khi x đi qua a từ trái sang phải mà $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm thì x = a là cực đại ; $f'(a)$ là giá trị cực đại

x	A
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	Z CĐ]

+ Nếu khi x đi qua a từ trái sang phải mà f'(x) đổi dấu từ âm sang dương thì x = a là cực tiểu ; f'(a) là giá trị cực tiểu

x	A
f'(x)	- 0 +
f(x)	] CT Z

* Định lý 3:

+ Nếu $\begin{matrix} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{matrix}$ thì x = a là điểm cực đại

+ Nếu $\begin{matrix} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{matrix}$ thì x = a là điểm cực tiểu

Ví dụ: Xét cực trị của f(x) = -3x^2 +18x – 25

f'(x) = -6x + 18

f'(x) = 0 -6x + 18 = 0

x = 3

x	3
f ’(x)	+ 0 -
f(x)	Z CĐ]

Vậy x = 3 là điểm cực đại và giá trị cực đại là f(x) = 2

B. ỨNG DỤNG

<u>Ví dụ 1</u>:

Công ty Phương Trang đang có kế hoạch xây một khu nhà ở cho công nhân viên trong công ty. Nếu công ty xây k (tầng) thì tổng chi phí sẽ được xác định theo công thức: C(k) = 3,2k^2 + 278k + 80 (tỷ đồng)

Xác định số tầng thực tế cần xây sao cho chi phí trung bình công ty cần chi ra là nhỏ nhất

<u>Giải</u>:

Gọi x là số tầng thực tế của khu nhà ở mà công ty cần xây, khi ấy chi phí trung bình sẽ là:

AC(x) = $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{3{,}2x^2 + 278x + 80}{x} = 3{,}2x + 278 + \dfrac{80}{x}$

Theo yêu cầu đề ra ta cần có

$$\begin{cases} AC'(x)=0 \\ AC''(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3,2-\dfrac{80}{x^2}=0 \\ \dfrac{160}{x^3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-5 \end{array}\right. \\ \dfrac{160}{x^3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$$

Vậy muốn chi phí trung bình thấp nhất thì công ty phải xây 5 tầng

***Ví dụ 2*:**

Doanh nghiệp tư nhân Tân Hưng Yên chuyên kinh doanh xe gắn máy và tay ga các loại. Hiện nay, doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe tay ga Lead với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán với giá 40 (triệu đồng) mỗi chiếc. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua là 2000 chiếc.

Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 2 (triệu đồng) mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra sẽ tăng thêm 800 chiếc.

Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện việc giảm giá, lợi nhuân thu được sẽ là cao nhất?

***Giải*:**

Gọi x là giá bán mới của mỗi chiếc xe Lead mà doanh nghiệp phải định để lợi nhuận thu được sau khi giảm giá là cao nhất

Suy ra Số tiền đã giảm là: 40 – x

Số lượng xe tăng lên là: 800(40 – x)

Vậy tổng số sản phẩm bán được là: 2000 + 800(40 – x) = 34000 – 800x

Doanh thu mà doanh nghiệp sẽ đạt được là: (34000 – 800x). x

Chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra là: (34000 – 800x). 27

Suy ra lợi nhuận mà công ty đạt được sẽ là:

L(x) = Doanh thu – Chi phí

= [(34000 – 800x). x] – [(34000 – 800x). 27]

= $-800x^2$ + 55600x – 918000

Theo yêu cầu đề ra ta cần có

$$\begin{cases} L'(x)=0 \\ L''(x)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1600x+55600=0 \\ -1600<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1600x+55600=0 \Leftrightarrow x=34,75$$

Ta có 27 < 34,75 < 40

Ví dụ 3:

Công ty Chi Tùng chuyên sản xuất một loại sản phẩm và ước tính rằng với q sản phẩm được sản xuất thì tổng chi phí được xác định bởi biểu thức

C(q) = $3q^2$ + 72q + 9789 (đvtt)

Giả sử mỗi sản phẩm công ty sẽ bán với giá là p(q) = 180 - 3q

Hãy xác định số sản phẩm mà công ty cần sản xuất sao cho công ty thu được lợi nhuận cao nhất

Giải:
Gọi q là số sản phẩm mà công ty Chi Tùng cần sản xuất để thu được lợi nhuận cao nhất
Khi ấy nếu bán hết số sản phẩm thì doanh thu mà công ty có được là

$$D(q) = q(180 - 3q) = 180q - 3q^2$$

Suy ra lợi nhuận mà công ty thu được là

$$\begin{aligned} L(q) &= D(q) - C(q) \\ &= 180q - 3q^2 - (3q^2 + 72q + 9789) \\ &= -6q^2 + 108q - 9789 \end{aligned}$$

Theo yêu cầu đề ra ta cần có

$$\begin{cases} L'(q) = 0 \\ L''(q) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12q + 108 = 0 \\ -12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -12q + 108 = 0 \Leftrightarrow q = 9$$

Vậy để thu được lợi nhuận cao nhất thì số sản phẩm mà công ty Quỳnh Giang cần sản xuất là q = 9 (đvsp)

Ví dụ 4:
Một doanh nghiệp chuyên sản xuất một loại sản phẩm, biết nhu cầu và chi phí của loại sản phẩm này được xác định bởi biểu thức

$$Q_D = 5000 - \frac{1}{3}P$$

$$C_Q = Q^2 + 2200Q + 500$$

Trong đó, Q là số sản phẩm và P là giá bán của một sản phẩm
Hãy xác định mức thuế t cần định trên một đơn vị sản phẩm sản xuất ra sao cho thuế thu được từ công ty là cao nhất.

Giải: Gọi Q là số sản phẩm mà doanh nghiệp cần sản xuất

Khi ấy ta phải có $Q = 5000 - \frac{1}{3}P \Leftrightarrow P = 15000 - 3Q$

Gọi t là mức thuế cần định trên một đơn vị sản phẩm sao cho thuế thu được là cao nhất
Ta có + Thuế mà doanh nghiệp phải nộp là T(t) = t.Q
+ Doanh thu mà doanh nghiệp có được là

$$D(Q) = P.Q$$

$$\Rightarrow D(Q) = (15000 - 3Q).Q = 15000Q - 3Q^2$$

Suy ra lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được là

$$\begin{aligned} L(Q) &= D(Q) - C(Q) - T(t) \\ &= (15000Q - 3Q^2) - (Q^2 + 2200Q + 500) - (t.Q) \\ &= -4Q^2 + 12800Q - 500 - (t.Q) \end{aligned}$$

Để công ty nộp thuế cao nhất thì trước hết lợi nhuận thu được của doanh nghiệp là cao nhất

Tức là $\begin{cases} L'(Q)=0 \\ L''(Q)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8Q+12800-t=0 \\ -8<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -8Q+12800-t=0$$

$$Q = 1600 - \frac{1}{8}t$$

Vậy thuế mà doanh nghiệp phải nộp là T(t) = t.Q = $t.(1600 - \frac{1}{8}t)$

$$= 1600t - \frac{1}{8}t^2$$

Theo yêu cầu đề ra ta phải có $\begin{cases} T'(t)=0 \\ T''(t)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}t+1600=0 \\ -\frac{1}{4}<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1600 = 0 \Leftrightarrow t = 6400$$

Vậy mức thuế cần định trên một đơn vị sản phẩm sao cho thuế thu được từ doanh nghiệp cao nhất là t = 6400 (đvtt)

<u>Ví dụ 5</u>:

Một công ty được độc quyền xuất khẩu một loại sản phẩm. Biết hàm cung và hàm cầu của loại sản phẩm trên ở thị trường nội địa là:

$Q_S = -1100 + P$ và $Q_D = 4700 - 3P$ với P là giá bán trong nước của mỗi sản phẩm.

Hãy định mức thuế t đánh trên một đơn vị sản phẩm hàng xuất khẩu để thuế thu được của công ty là cao nhất. Biết rằng giá bán của 1 đơn vị sản phẩm được bán ra ở thị trường nước ngoài là $P_0 = 3600$ (đvtt)

***<u>Giải</u>*:**

Ta có số sản phẩm mà công ty cần xuất khẩu là:

$Q = Q_S - Q_D = (1100 + P) - (4700 - 3P)$

$= -5800 + 4P$

Gọi t là mức thuế cần định trên một đơn vị sản phẩm hàng xuất khẩu để thuế thu được từ công ty là cao nhất.

Ta có: + Thuế mà công ty phải nộp là: T(t) = t. Q = -5800t + 4Pt

+ Doanh thu mà công ty có được là:

$D(P) = P_0 . Q = 14400P - 2088.10^4$

+ Chi phí mua hàng xuất khẩu là: C(P) = Q . P = (-5800 + 4P). P

$= 4P^2 - 5800P$

Vậy lợi nhuận mà công ty có được là:

L(P) = D(P) – C(P) – T(t)

$= -4P^2 + 20200P - 2088.10^4 + 5800t - 4Pt$

Để công ty nộp thuế cao nhất thì trước hết lợi nhuận thu được của công ty là cao nhất, tức là:

$$\begin{cases} L'(P) = 0 \\ L''(P) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8P + 20200 - 4t = 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8P + 20200 - 4t = 0 \Leftrightarrow P = 2525 - \frac{1}{2}t$$

Vậy thuế mà công ty phải nộp là:

$$T(t) = t.Q = t.\left[-5800 + 4\left(2525 - \frac{1}{2}t\right)\right] = 4300t - 2t^2$$

Theo yêu cầu đề ra ta phải có

$$\begin{cases} T'(t) = 0 \\ T''(t) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4300 - 4t = 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4300 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1075$$

Vậy mức thuế đánh trên một đơn vị sản phẩm hàng xuất khẩu để thuế thu được từ công ty cao nhất là t = 1075 (đvtt)

<u>Ví dụ 6</u>:

Một công ty chuyên nhập khẩu một loại sản phẩm. Biết hàm cung và hàm cầu của loại sản phẩm trên ở thị trường nội địa là:

$Q_S = -1800 + 3P$ *và* $Q_D = 6800 - P$ *với P là giá bán trong nước của mỗi sản phẩm.*

Hãy định mức thuế t đánh trên một đơn vị sản phẩm hàng nhập khẩu để thuế thu được của công ty là cao nhất. Biết rằng giá bán của 1 đơn vị sản phẩm đó trên thị trường quốc tế là $P_0 = 1250$ *(đvtt)*

***<u>Giải</u>*:**

Ta có số sản phẩm mà công ty cần nhập khẩu là:

$$Q = Q_D - Q_S = (6800 - P) - (-1800 + 3P) = 8600 - 4P$$

Gọi t là mức thuế cần định trên một đơn vị sản phẩm hàng nhập khẩu để thuế thu được từ công ty là cao nhất.

Ta có: + Thuế mà công ty phải nộp là: $T(t) = t.Q = 8600t - 4Pt$

+ Doanh thu mà công ty có được là:

$$D(P) = P.Q = 8600P - 4P^2$$

+ Chi phí mua hàng nhập khẩu là: $C(P) = P_0.Q = 1250.(8600 - 4P) = 1075.10^4 - 5000P$

Vậy lợi nhuận mà công ty có được là:

$$L(P) = D(P) - C(P) - T(t)$$
$$= (8600P - 4P^2) - (1075.10^4 - 5000P) - (8600t - 4Pt)$$
$$= -4P^2 + 13600P - 1075.10^4 - 8600t + 4Pt$$

Để công ty nộp thuế cao nhất thì trước hết lợi nhuận thu được của công ty là cao nhất, tức là:

$$\begin{cases} L'(P) = 0 \\ L''(P) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8P + 13600 + 4t = 0 \\ -8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -8P + 13600 + 4t = 0 \Leftrightarrow P = 1700 + \frac{1}{2}t$$

Vậy thuế mà công ty phải nộp là:

$T(t) = t.Q = t.\ [\ 8600 - 4.(1700 + \frac{1}{2}t\ )] = 1800t - 2t^2$

Theo yêu cầu đề ra ta phải có

$$\begin{cases} T'(t) = 0 \\ T''(t) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1800 - 4t = 0 \\ -4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1800 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 450$$

Vậy mức thuế đánh trên một đơn vị sản phẩm hàng nhập khẩu để thuế thu được từ công ty cao nhất là t = 450 (đvtt)

Vậy công ty muốn đạt được lợi nhuận cao nhất thì phải giảm giá bán mỗi chiếc xe xuống còn 34,75 (triệu đồng)

<u>Ví dụ 7</u>:

Một doanh nghiệp sản xuất và bán một loại sản phẩm với giá 45 (ngàn đồng) mỗi sản phẩm, tại giá bán này khách hàng sẽ mua 60 sản phẩm mỗi tháng. Doanh nghiệp dự định tăng giá bán và họ ước tính rằng nếu tăng 2 (ngàn đồng) trong giá bán thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 6 sản phẩm. Biết rằng chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 27 (ngàn đồng).
Vậy doanh nghiệp nên bán sản phẩm với giá nào thì lợi nhuận thu được là lớn nhất?

Giải: Gọi x là giá bán mới của 1 sản phẩm mà doanh nghiệp phải định để lợi nhuận thu được sau khi tăng giá là cao nhất

Suy ra số tiền đã tăng là: x – 45

Số lượng sản phẩm giảm xuống là: $\frac{6(x-45)}{2} = 3x - 135$

Vậy tổng số sản phẩm bán được là: 60 – (3x – 135) = 195 – 3x

Doanh thu mà doanh nghiệp sẽ đạt được là: $(195 - 3x).x = 195x - 3x^2$

Chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra là: (195 – 3x).27 = 5265 – 81x

Suy ra lợi nhuận mà công ty đạt được là:

L(x) = Doanh thu – Chi phí
$= (195x - 3x^2) - (5265 - 81x)$
$= -3x^2 + 276x - 5265$

Theo yêu cầu đề ra ta cần có

$$\begin{cases} L'(x) = 0 \\ L''(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 276 = 0 \\ -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6x + 276 = 0 \Leftrightarrow x = 46$$

Ta có 46 > 45

Vậy muốn đạt được lợi nhuận cao nhất thì công ty nên tăng giá bán mỗi sản phẩm lên 46 (ngàn đồng)

Ví dụ 8

Giả sử ta có số tiền là P đầu tư bằng cách gửi vào ngân hàng với lãi suất hàng năm là r và phương thức tính lãi là k

Vậy sau t năm số tiền sẽ có được là $B(t) = P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$

Trong trường hợp $k \to +\infty$ *(lãi suất liên tục) thì ta có:*

$$B(t) = \lim_{k \to +\infty} P\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = P.e^{rt}$$

Ví dụ 9:

Anh Nguyễn Văn A dự định mua một chiếc ô tô sau 6 năm nữa. Hiện nay anh đang có 450 triệu đồng và anh quyết định gửi toàn bộ số tiền này vào ngân hàng với hệ số lãi suất là 14,5%. Hãy xác định số tiền mà anh sẽ có được sau 6 năm nếu phương thức tính lãi suất là

a. Theo năm
b. Theo nửa năm
c. Theo quý
d. Theo tháng
e. Theo ngày
f. Lãi suất được tính liên tục

Giải:

a. Theo năm: $B(6) = 450.\left(1+\frac{0,145}{1}\right)^{1.6}$ = 1014,02 (triệu đồng)

b. Theo nửa năm: $B(6) = 450.\left(1+\frac{0,145}{2}\right)^{2.6}$ = 1042,27 (triệu đồng)

c. Theo quý: $B(6) = 450.\left(1+\frac{0,145}{4}\right)^{4.6}$ = 1057,7 (triệu đồng)

d. Theo tháng: $B(6) = 450.\left(1+\frac{0,145}{12}\right)^{12.6}$ = 1068,52 (triệu đồng)

e. Theo ngày: $B(6) = 450.\left(1+\frac{0,145}{365}\right)^{365.6}$ = 1073,92 (triệu đồng)

f. Lãi suất tính liên tục: $B(6) = 450.e^{0,145.6}$ = 1074,11 (triệu đồng)

Ví dụ 10:

Công ty du lịch VITOURS dự định sau 2 năm nữa sẽ thành lập một đội xe du lịch có giá trị tổng cộng khoảng 12 (tỷ đồng). Với hệ số lãi suất là 15,6% thì công ty phải gửi bao nhiêu tiền vào ngân hàng để có đủ số tiền trên. Biết phương thức tính lãi là

a. Theo năm

b. *Theo quý*
c. *Theo tháng*

<u>Giải</u>:

a. $P = 12.\left(1+\frac{0,156}{1}\right)^{-1.2}$ = 8,98 (tỷ đồng)

b. $P = 12.\left(1+\frac{0,156}{4}\right)^{-4.2}$ = 8,836 (tỷ đồng)

c. $P = 12.\left(1+\frac{0,156}{12}\right)^{-12.2}$ = 8,801 (tỷ đồng)

<u>Ví dụ 11</u>:

Tay gôn Tiger Woods mua của cầu thủ bóng rổ giải nhà nghề Mỹ NBA Kobe Bryant một khu biệt thự trị giá 270 (triệu USD) và cách trả tiền được Tiger Woods thảo luận như sau. Tiger Woods sẽ trả trước 130 (triệu USD), số tiền còn lại sẽ được trả hàng tháng với hệ số lãi suất hàng năm là 11% trong vòng 1,5 năm. Như vậy mỗi tháng Tiger Woods sẽ phải trả cho Kobe Bryant một khoản tiền là $\left(\frac{140*1,11}{18}\right)$ $8,63$ *(triệu USD). Tuy nhiên, là một người nổi tiếng, Tiger Woods không thích trả tiền có số lẻ nên quyết định sẽ trả cho Kobe mỗi tháng là 9 (triệu USD). Liệu Kobe có nên đồng ý với phương án trả tiền này của Tiger hay không?*

***<u>Giải</u>*:**

Giả sử Kobe không cho Tiger vay theo thỏa thuận mà nhận ngay khoản tiền còn lại là 140 (triệu USD) và gửi vào ngân hàng với các thông số như trong thỏa thuận thì sau 1,5 năm Kobe sẽ có số tiền là:

$$B(1,5) = 140.\left(1+\frac{0,11}{12}\right)^{12.1,5} = 165 \text{ (triệu USD)}$$

Mặt khác nếu theo phương án thỏa thuận thì sau 1,5 năm Kobe sẽ có được số tiền là

$$P^{*} = 18*9 = 162 \text{ (triệu USD)}$$

Vậy Kobe không nên đồng ý với phương án thỏa thuận này của Tiger.

CHUYÊN ĐỀ 3

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT:

I. Nguyên hàm:

1. Định nghĩa: Ta nói F(x) là nguyên hàm của $f(x)$ nếu như F'(x) = $f(x)$

Ví dụ: F(x) = $4x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 47584$ là nguyên hàm của

$f(x) = 16x^3 - 6x^2 + 10x - 7$

F(x) = $e^x + 4x$ là nguyên hàm của $f(x) = e^x + 4$

F(x) = $e^x + 4x + 12$ là nguyên hàm của $f(x) = e^x + 4$

F(x) = $e^x + 4x + 96489449$ là nguyên hàm của $f(x) = e^x + 4$

2. Nhận xét: Nếu $f(x)$ có nguyên hàm là F(x) thì F(x) + C cũng là nguyên hàm của $f(x)$

II. Tích phân bất định:

1. Định nghĩa: Tập hợp tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ được gọi là tích phân bất định của $f(x)$. Ký hiệu: $f(x)dx$ với F(x) là một nguyên hàm của $f(x)$ và C là hằng số.

2. Một số tính chất cơ bản:

+ $\int kdx$ = kx + C với k là hằng số
+ $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$ với $\alpha \neq -1$
+ $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln x + C$
+ $\int e^{x}dx = e^{x} + C$

$$\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C$$

3. Một số quy tắc tính tích phân bất định:

+ $\int \left[f(x) + g(x)\right]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
+ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

III. Các phương pháp tính tích phân bất định:

1. Phương pháp đổi biến số:

Loại 1: Đặt x = x(t) $\Rightarrow$ d(x) = x'(t)dt. Khi ấy $\int f(x)dx = \int f\left[x(t)\right].x'(t)dt$

Ví dụ: Tính I = $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}.e^{\sqrt{x}}dx$

Đặt $x = t^2 \Rightarrow$ dx = 2t.dt

I = $\int \dfrac{1}{t}e^{t}.2t.dt = \int e^{t}.dt = 2\int e^{t}.dt = 2e^{t} + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$

Loại 2: Đặt t = t(x) $\Rightarrow$ dt = t'(x).dx

Khi ấy: $\int f\left[t(x)\right].t'(x)dx = \int f(t)dt$

Ví dụ: Tính K = $\int x^{3}.e^{x^{4}+2}dx$

Đặt $t = x^4 + 2$ => $dt = 4x^3dx$

K = $\int e^{t}.\dfrac{1}{4}dt = \dfrac{1}{4}e^{t} + C = \dfrac{1}{4}e^{x^{4}+2} + C$

2. Phương pháp tích phân từng phần:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

hoặc $\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$

hoặc $\int f(x).g(x)dx = f(x).G(x) - \int f'(x).G(x)dx$ với G(x) là một nguyên hàm của g(x)

Ví dụ: Tính $\int \ln xdx$

Đặt u = ln x du = $\frac{1}{x}dx$

dv = dx v = x

Suy ra $\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

<u>IV. Tích phân xác định</u>:

* *Định nghĩa*: Cho $f(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn $a \le x \le b$. Chia nhỏ đoạn này thành n đoạn bằng nhau, mỗi đoạn có chiều dài $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, đặt x_j là số được chọn từ đoạn thứ *j*, với *j* = 1,2,…,n. Thì tích phân xác định của $f(x)$ trên đoạn $a \le x \le b$ được ký hiệu bởi $\int_a^b f(x)dx$ và được xác định bởi giới hạn

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)\right]\Delta x$$

Chú ý rằng ký hiệu tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$ về cơ bản thì giống như ký hiệu tích phân bất định $\int f(x)dx$. Trong cả hai trường hợp, hàm *f (x)* được gọi là hàm lấy tích phân, các số a và b tương ứng là cận trên và cận dưới của tích phân

Định lý cơ bản của phép tính tích phân: Nếu *f (x)* là hàm liên tục trên đoạn $a \le x \le b$, thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Trong đó, F(x) là một nguyên hàm của *f (x)* trên đoạn $a \le x \le b$.

Ký hiệu $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Do đó $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

B. ỨNG DỤNG:

<u>Ví dụ 1</u>:

Tại 1 công ty, giá bán P của một đơn vị sản phẩm của một mặt hàng phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x được bán. Ước tính rằng nếu x (sp) được bán ra thì tốc độ thay đổi của giá mỗi sản phẩm được tính theo công thức $\frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}$ *(đvtt/sp).*

Hãy xác định giá khi 10 sản phẩm được bán ra, biết rằng nếu 1 sản phẩm được bán ra thì giá bán sẽ là 5600 (đvtt)

Giải:

Gọi x là số sản phẩm bán ra và P(x) là giá bán của mỗi sản phẩm

Theo đề ra ta có

$$P'(x) = \frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}$$

Suy ra $P(x) = \int P'(x)dx = \int \frac{-214x}{\sqrt{24+x^2}}dx = -214\int \frac{x}{\sqrt{24+x^2}}dx$

Đặt $t = 24 + x^2$ $dt = 2xdx$

Suy ra P(x) $= -214 \int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = -214\sqrt{t} + C$

$= -214\sqrt{24+x^2} + C$

Mặt khác theo đề ra ta có

P(1) = 5600

5600 = $-214\sqrt{24+1} + C$

C = 5600 + 1070 = 6670

Vậy P(x) = $-214\sqrt{24+x^2} + 6670$

Do đó P(10) = $-214\sqrt{24+10^2} + 6670$

$\approx$ 4287

Vậy khi 10 sản phẩm được bán ra thì giá bán sẽ là 4287 (đvtt)

Ví dụ 2:

Người ta dự đoán rằng dân số thế giới thay đổi với tốc độ $e^{0.001t}$ (tỷ người/năm) với t là số năm tính từ năm 2004. Biết rằng năm 2009 dân số thế giới là 4,5 (tỷ người).

Hãy tính dân số của thế giới vào năm 2013

Giải:

Gọi P(t) là dân số thế giới sau t năm tính từ năm 2004

Khi ấy theo đề ra ta có $P'(t) = e^{0,001t}$

Suy ra $P(t) = \int P'(t)dt = \int e^{0,001t}dt = \frac{1}{0,001}e^{0,001t} + C$

Mà P(6) = 4,5 $\frac{1}{0,001}e^{0,001.6} + C$ = 4,5

$4,5 = 1000e^{0,006} + C$

C = $4,5 - 1000e^{0,006}$

Do đó P(t) $= \frac{1}{0,001}e^{0,001t} + 4,5 - 1000e^{0,006}$

Suy ra P(10) $= \dfrac{1}{0,001}e^{0,001.10} + 4,5 - 1000e^{0,006} = 8,53$

Vậy dân số thế giới năm 2013 là 8,53(tỷ người)

Ví dụ 3:

Hưởng ứng phong trào "Ngày vì người nghèo" do Đài truyền hình Việt Nam tổ chức, tối ngày 10/04/2010 chương trình "Góp sức vì người nghèo" đã được tổ chức tại 3 điểm cầu truyền hình tại 3 thành phố lớn của cả nước là: TP Hà Nội, TP Đà Nẵng, TP Hồ Chí Minh và được truyền hình trực tiếp trên kênh sóng VTV3 – Đài truyền hình Việt Nam.

Trong chương trình này, các cá nhân tổ chức trong và ngoài nước sẽ có dịp được chung tay góp sức giúp đỡ cho người nghèo qua hình thức nhắn tin hoặc quyên góp tiền trực tiếp cho ban tổ chức chương trình. Theo ước tính, sau t (giờ) số tiền quyên góp thay đổi với tốc độ 300t $e^{-0,1t}$ (triệu đồng/giờ).

Hãy xác định số tiền có được sau 5 giờ đầu tiên quyên góp.

Giải:

Gọi M(t) là số tiền có được sau t (giờ) thực hiện việc quyên góp.

Khi ấy theo đề ra ta có $M'(t) = 300t.e^{-0,1t}$

Suy ra M(t) $= \int M'(t)dt = \int 300t.e^{-0,1t}dt$

Đặt u = 300t

dv = $e^{-0,1t}$dt

$$du = 300t.dt$$

$$v = -\frac{1}{0,1}e^{-0,1t}$$

Suy ra M(t) $= -3000t.e^{-0,1t} + \quad 3000.e^{-0,1t}dt$

$$= -3000t.e^{-0,1t} - \frac{3000}{0,1}.e^{-0,1t} + C$$

Mà M(0) = 0 $\Rightarrow -\dfrac{3000}{0,1} + C = 0$

$$C = 30000$$

Do đó M(t) $= -3000t.e^{-0,1t} - 30000.e^{-0,1t} + 30000$

Suy ra M(5) $= -3000.5.e^{-0,1.5} - 30000.e^{-0,1.5} + 30000$

= 2706,12

Vậy sau 5 giờ đầu tiên quyên góp, số tiền có được là 2706,12 (triệu đồng)

Ví dụ 4:

Giả sử rằng sau t năm, vốn đầu tư thứ nhất sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ $P_1'(t) = 126 + t^2$ *(triệu đồng/năm), trong khi đó vốn đầu tư thứ hai sẽ phát sinh lợi nhuận với tốc độ* $P_2'(t) = 262 + 9t$ *(triệu đồng/năm).*

(a) Hỏi trong khoảng bao nhiêu năm thì tốc độ thu lãi của vốn đầu tư thứ hai vượt quá vốn đầu tư thứ nhất ?

(b) Tính lợi nhuận vượt thực cho khoảng thời gian xác định trong câu (a).

Giải:

(a) Khoảng thời gian để tốc độ thu lợi nhuận của vốn đầu tư thứ hai mà nó vượt bằng vốn đầu tư thứ nhất là:

$$P_1'(t) = P_2'(t)$$

$$126 + t^2 = 262 + 9t$$

$$t^2 - 9t - 136 = 0$$

$t = 17$ năm (loại t=-8)

(b) Lợi nhuận thừa thực cho khoảng thời gian $0 \le t \le 17$ được cho bởi tích phân xác định

$$NE = \int_0^{17} \left[P_2'(t) - P_1'(t) \right] dt$$

$$NE = \int_0^{17} \left[(262 + 9t) - (126 + t^2) \right] dt$$

$$NE = \int_0^{17} \left(136 + 9t - t^2 \right) dt$$

$$= \left(136t + \frac{9}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right) \Bigg|_0^{17}$$

$$1634,8$$

Vậy lợi nhuận vượt thực cho khoảng thời gian 17 năm là 1643,8(triệu đồng)

Ví dụ 5:

Giả sử rằng khi máy công nghiệp nào đó sau t năm tính từ bây giờ thì nó sinh ra doanh thu với tốc độ $R'(t) = 24000 - 40t^2$ *triệu đồng /năm và chi phí họat động và chi phí bảo dưỡng của máy tăng với tốc độ* $C'(t) = 10500 + 20t^2$ *triệu đồng/năm.*

(a) Hỏi bao nhiêu năm trôi qua trước khi sự sinh ra lãi của máy bắt đầu giảm?

(b) Tính tiền lãi thực sinh ra của máy trong khoảng thời gian đã được xác định trong câu (a).

Giải:

(a) Lợi nhuận mà máy sinh ra sau t năm hoạt động là P(t) = R(t) – C(t) và tốc độ sinh lãi là:

$$P'(t) = R'(t) - C'(t)$$

$$= (24000 - 40t^2) - (10500 + 20t^2)$$
$$= 13500 - 60t^2$$

Ta có việc sinh lãi bắt đầu giảm khi

$$P'(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow 13500 - 60t^2 = 0$$
$$t^2 = 225$$
$$t = 15 \text{ (năm)}$$

(b) Tiền lãi thực NE trên khoảng thời gian 0≤ t ≤ 15 được cho bởi sự khác nhau NE = P(15) – P(0), mà có thể được tính bằng tích phân

$$NE = P(15) - P(0) = \int_0^{15} P'(t)dt$$
$$= \int_0^{15} (13500 - 60t^2)dt$$
$$= (13500t - 20t^3)\Big|_0^{15}$$
$$= 135.000$$

Vậy tiền lãi thực sinh ra của máy trong khoảng thời gian 15 năm là 135000 (triệu đồng), tức 135 tỷ đồng

CHUYÊN ĐỀ 4

CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

A. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

<u>1. Định nghĩa cực trị của hàm 2 biến (Cực trị tự do)</u>

Cho hàm 2 biến $z = f(x, y)$ có miền xác định là Df và (a,b) Df

* Ta nói f đạt giá trị cực đại tại (a,b) nếu như trong lân cận B của (a,b) ta có $f(x,y) \quad f(a,b), \forall(x,y) \quad B$, khi ấy ta nói (a,b) là điểm cực đại

* Ta nói f đạt giá trị cực tiểu tại (a,b) nếu như trong lân cận B của (a,b) ta có $f(x,y) \quad f(a,b), \forall(x,y) \quad B$, khi ấy ta nói (a,b) là điểm cực tiểu

* Cực đại hay cực tiểu được gọi chung là cực trị

* Nhận xét: Cực trị được định nghĩa ở trên chỉ mang tính địa phương chứ không phải là toàn cục

* Định lý: Nếu (a,b) là điểm cực trị của $f(x,y)$ thì ta có $\begin{array}{l} f'_x(a,b)=0 \\ f'_y(a,b)=0 \end{array}$

Nói cách khác, (a,b) chính là nghiệm của hệ phương trình $\begin{array}{l} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{array}$

* Ta gọi (a,b) là điểm tới hạn của $f(x,y)$ nếu như nó là nghiệm của hệ $\begin{array}{l} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{array}$ hoặc tại đó các đạo hàm riêng không tồn tại

2. Phương pháp xác định cực trị tự do:

Bước 1: Giải hệ phương trình $\begin{array}{l} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{array}$ để tìm nghiệm $\begin{array}{l} x=x_0 \\ y=y_0 \end{array}$

Bước 2: Tìm các đạo hàm riêng cấp 2: $f''_{xx}(x,y); f''_{xy}(x,y); f''_{yy}(x,y)$

Bước 3: Đặt $\mathrm{A} = f''_{xx}(x_0,y_0)$

$\mathrm{B} = f''_{xy}(x_0,y_0)$

$\mathrm{C} = f''_{yy}(x_0,y_0)$

$\Delta = \mathrm{AC} - \mathrm{B}^2$

Bước 4: Xét điều kiện và kết luận

+ Nếu $\Delta<0$ thì (x_0,y_0) không phải là điểm cực trị

+ Nếu $\begin{array}{l} \Delta>0 \\ \mathrm{A}>0 \end{array}$ thì (x_0,y_0) là điểm cực tiểu của $f(x,y)$

+ Nếu $\begin{array}{l} \Delta>0 \\ \mathrm{A}<0 \end{array}$ thì (x_0,y_0) là điểm cực đại của $f(x,y)$

3. Phương pháp xác định cực trị có điều kiện:

Bước 1: Xây dựng hàm Lagrane $F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda.g(x,y)$

(λ được gọi là hệ số Lagrane)

Bước 2: Giải hệ $\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda)=0 \\ F'_y(x,y,\lambda)=0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda)=0 \end{cases}$ để tìm nghiệm $\begin{matrix} x_0 \\ y_0 \\ \lambda_0 \end{matrix}$

Bước 3: Tìm các đạo hàm riêng

$g'_x(x,y)$; $g'_y(x,y)$; $F''_{xx}(x,y,\lambda)$; $F''_{xy}(x,y,\lambda)$; $F''_{yy}(x,y,\lambda)$

Bước 4: Lập ma trận Hessian

$$H = \begin{matrix} 0 & g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0) & F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) \\ g'_y(x_0,y_0) & F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0) & F''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0) \end{matrix}$$

Tính det(H)=

$$= -g'_x(x_0,y_0).\left\{g'_x(x_0,y_0).F''_{yy}(x_0,y_0,\lambda_0)\right\} - \left\{g'_y(x_0,y_0).F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)\right\}$$

$$+g'_y(x_0,y_0).\left\{g'_x(x_0,y_0).F''_{xy}(x_0,y_0,\lambda_0)\right\} - \left\{g'_y(x_0,y_0).F''_{xx}(x_0,y_0,\lambda_0)\right\}$$

+ Nếu det(H) > 0 thì (x_0, y_0) là điểm cực đại cần tìm

+ Nếu det(H) < 0 thì (x_0, y_0) là điểm cực tiểu cần tìm

B. ỨNG DỤNG

Ví dụ 1:

Một doanh nghiệp tư nhân nhỏ chuyên sản xuất chả với 2 loại 1 và 2. Nếu chả loại 1 sản xuất được x(kg) thì giá bán mỗi kg sẽ là

P(x) = 150 – x, và nếu chả loại 2 sản xuất được y(kg) thì giá bán mỗi kg sẽ là P(y) = 130 – y

Hãy xác định số lượng từng loại chả cần sản xuất để sao cho lợi nhuận thu được của doanh nghiệp là cao nhất, biết rằng tổng chi phí được xác định theo biểu thức C(x,y) $= 2x^2 + xy + 2y^2$

Giải:

Gọi x là số lượng sản phẩm 1 cần sản xuất và y là số lượng sản phẩm 2 cần sản xuất

Khi ấy doanh thu mà doanh nghiệp này thu được là

$$D(x,y) = (150-x)x + (130-y)y$$

$$= 150x - x^2 + 130y - y^2$$

Suy ra lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được là

$$L(x,y) = D(x,y) - C(x,y)$$

$$L(x,y) = (150x - x^2 + 130y - y^2) - (2x^2 + xy + 2y^2)$$

$$L(x,y) = 150x - 3x^2 + 130y - 3y^2 - xy$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y) = 150 - 6x - y = 0 \\ L'_y(x,y) = 130 - 6y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22 \\ y = 18 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} L''_{xx}(x,y) = -6 \\ L''_{xy}(x,y) = -1 \\ L''_{yy}(x,y) = -6 \end{cases}$

Đặt $A = L''_{xx}(22,18) = -6$

$B = L''_{xy}(22,18) = -1$

$C = L''_{yy}(22,18) = -6$

$\Delta = AC - B^2 = 35$

Vì $\begin{cases} \Delta = 35 > 0 \\ A = -6 < 0 \end{cases}$ nên (22,18) là điểm cực đại

Vậy với số lượng chả loại 1 = 22 (kg) và chả loại 2 = 18 (kg) được sản xuất thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận cao nhất

Ví dụ 2: *Một cửa hàng may lẻ chuyên may 2 loại áo sơ mi M và S để cung cấp cho các đại lý. Nếu áo loại M may được x(cái) thì giá bán mỗi cái sẽ là P(x) = 690 + 3x, và nếu áo loại S may được y(cái) thì giá bán mỗi cái sẽ là P(y) = 640 + 2y*

Hãy xác định số lượng từng loại áo sơ mi cần may để sao cho lợi nhuận thu được của cửa hàng là cao nhất, biết rằng tổng chi phí được xác định theo biểu thức C(x,y) $= 6x^2 + xy + 5y^2$

Giải:

Gọi x là số lượng áo loại M cần may và y là số lượng áo loại S cần may

Khi ấy doanh thu mà doanh nghiệp này thu được là

$$D(x,y) = (690 + 3x)x + (640 + 2y)y$$
$$= 690x + 3x^2 + 640y + 2y^2$$

Suy ra lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được là

$$L(x,y) = D(x,y) - C(x,y)$$
$$L(x,y) = (690x + 3x^2 + 640y + 2y^2) - (6x^2 + xy + 5y^2)$$
$$L(x,y) = 690x - 3x^2 + 640y - 3y^2 - xy$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y) = 690 - 6x - y = 0 \\ L'_y(x,y) = 640 - 6y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ y = 90 \end{cases}$

Ta có
$$\begin{cases} L''_{xx}(x,y) = -6 \\ L''_{xy}(x,y) = -1 \\ L''_{yy}(x,y) = -6 \end{cases}$$

Đặt
$$A = L''_{xx}(100,90) = -6$$
$$B = L''_{xy}(100,90) = -1$$
$$C = L''_{yy}(100,90) = -6$$
$$\Delta = AC - B^2 = 35$$

Vì $\begin{cases} \Delta = 35 > 0 \\ A = -6 < 0 \end{cases}$ nên (100,90) là điểm cực đại

Vậy với số lượng áo loại M = 100 (cái) và áo loại S = 90 (cái) được may thì cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất

Ví dụ 3: *Một tiệm tạp hóa nhỏ chuyên kinh doanh 2 loại mặt hàng A và B. Nếu mặt hàng A được mua vào x (cái) thì giá bán mỗi mặt hàng sẽ là P(x) = 800 – 2x, và nếu mặt hàng B được mua vào y (cái) thì giá bán mỗi mặt hàng sẽ là P(y) = 820 – 2y.*

Hãy xác định số lượng từng loại mặt hàng cần mua vào để sao cho lợi nhuận thu được của tiệm là cao nhất. Biết rằng, giá mua vào của một mặt hàng A là 60 + y và của một mặt hàng B là 90 + 2x

Giải:

Gọi x là số lượng mặt hàng A cần mua vào và y là số lượng mặt hàng B cần mua vào

Khi ấy + Doanh thu mà tiệm này thu được là

$$D(x,y) = (800-2x)x + (820-2y)y$$
$$= 800x - 2x^2 + 820y - 2y^2$$

+ Chi phí mà tiệm phải bỏ ra là

$$C(x,y) = (60+y)x + (90+2x)y$$
$$= 60x + xy + 90y + 2xy$$
$$= 60x + 90y + 3xy$$

Suy ra lợi nhuận mà tiệm thu được là

$$L(x,y) = D(x,y) - C(x,y)$$
$$L(x,y) = (800x - 2x^2 + 820y - 2y^2) - (60x + 90y + 3xy)$$
$$L(x,y) = 740x - 2x^2 + 730y - 2y^2 - 3xy$$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} L'_x(x,y) = 740 - 4x - 3y = 0 \\ L'_y(x,y) = 730 - 4y - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 110 \\ y = 100 \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} L''_{xx}(x,y) = -4 \\ L''_{xy}(x,y) = -3 \\ L''_{yy}(x,y) = -4 \end{cases}$

Đặt $A = L''_{xx}(110,100) = -4$

$B = L''_{xy}(110,100) = -3$

$C = L''_{yy}(110,100) = -4$

$\Delta = AC - B^2 = 7$

Vì $\begin{cases} \Delta = 7 > 0 \\ A = -4 < 0 \end{cases}$ nên (110,100) là điểm cực đại

Vậy với số lượng mặt hàng A = 110 (cái) và mặt hàng B = 100 (cái) được mua vào thì tiệm tạp hóa này sẽ thu được lợi nhuận cao nhất

Ví dụ 4: *Một hộ gia đình dự định mở cửa hàng cho thuê xe đạp với 2 loại xe đạp là xe đạp đôi và xe đạp đua. Hiện tại gia đình này có 128 (triệu đồng) để mua 2 loại xe này. Biết rằng giá của một chiếc xe đạp đua là P_1 = 6 (triệu đồng) và giá của một chiếc xe đạp đôi là P_2 = 8 (triệu đồng).*

Giả sử khi hộ gia dình này mua x chiếc xe đạp đua và y chiếc xe đạp đôi thì hàm tổng thời gian sử dụng của 2 loại xe này được xác định theo biểu thức T(x,y) = 2xy + 4x + 16y + 27

Xác định số lượng từng loại xe mà hộ gia đình này cần mua để sao cho hàm giá trị sử dụng là cao nhất

Giải: Gọi x là số lượng xe đạp đua và y là số lượng xe đạp đôi hộ gia đình này cần mua.

Khi ấy ta có 128 = 6x + 8y $\Leftrightarrow$ 128 – 6x – 8y = 0

Ta có hàm Lagrane $F(x,y,\lambda) = (2xy + 4x + 16y + 27) + \lambda.(128 - 6x - 8y)$

Ta có hệ $\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 4 - 6\lambda = 0 \\ 2x + 16 - 8\lambda = 0 \\ 128 - 6x - 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \\ \lambda = 4 \end{cases}$

Ta có các đạo hàm riêng $g'_x(x,y) = -6$; $g'_y(x,y) = -8$

$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0$; $F''_{xy}(x,y,\lambda) = 2$; $F''_{yy}(x,y,\lambda) = 0$

Ta có ma trận Hessian

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -8 \\ -6 & 0 & 2 \\ -8 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \ \det(H) = 192$$

Vì det(H) = 192 > 0 nên A(8,10) là điểm cực đại

Vậy hộ gia đình cần mua 8 chiếc xe đạp đua và 10 chiếc xe đạp đôi để tổng thời gian sử dụng của 2 loại xe này là cao nhất

Ví dụ 5: *Một nhà thám hiểm dự định thực hiện một chuyến đi mạo hiểm vào rừng. Trước khi đi anh ta phải chuẩn bị một số nhu yếu phẩm cho chuyến thám hiểm, trong đó lương khô và nước ngọt là 2 thứ được ưu tiên. Nhà thám hiểm định dùng số tiền 160 (ngàn đồng) để mua 2 loại này. Biết rằng giá của một kilogram lương khô là $P_1 = 6$ (ngàn đồng) và giá của một lít nước ngọt là $P_2 = 5$ (ngàn đồng).*

Giả sử khi nhà thám hiểm mua x (kg) lương khô và y (l) nước ngọt thì hàm tổng thời gian sử dụng của 2 loại này được xác định bởi biểu thức

$T(x,y) = 4xy - 50x - 35y + 149$

Hãy xác định số lượng từng loại nhu yếu phẩm mà nhà thám hiểm cần mua ở trên để sao cho hàm giá trị sử dụng là cao nhất.

Giải: Gọi x là số lượng lương khô và y là số lượng nước nhà thám hiểm này cần mua.

Khi ấy ta có $160 = 6x + 5y$ $\quad 160 - 6x - 5y = 0$

Ta có hàm Lagrane $F(x,y,\lambda) = (4xy - 50x - 35y + 149) + \lambda.(160 - 6x - 5y)$

Ta có hệ $\begin{cases} F'_x(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_y(x,y,\lambda) = 0 \\ F'_\lambda(x,y,\lambda) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y - 50 - 6\lambda = 0 \\ 4x - 35 - 5\lambda = 0 \\ 160 - 6x - 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12{,}5 \\ y = 17 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

Ta có các đạo hàm riêng $g'_x(x,y) = -6$; $g'_y(x,y) = -5$

$F''_{xx}(x,y,\lambda) = 0$; $F''_{xy}(x,y,\lambda) = 4$; $F''_{yy}(x,y,\lambda) = 0$

Ta có ma trận Hessian

$$H = \begin{vmatrix} 0 & -6 & -5 \\ -6 & 0 & 4 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix} \quad ; \ \det(H) = 240$$

Vì det(H) = 240 > 0 nên B(12,5;17) là điểm cực đại

Vậy nhà thám hiểm này cần mua 12,5 (kg) lương khô và 17 (l) nước để tổng thời gian sử dụng là cao nhất