Môn học

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN TỰ ĐỘNG

Giảng viên: TS. Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn Điều Khiển Tự Động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TP.HCM
Email: hthoang@hcmut.edu.vn
Homepage: http://www2.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 6

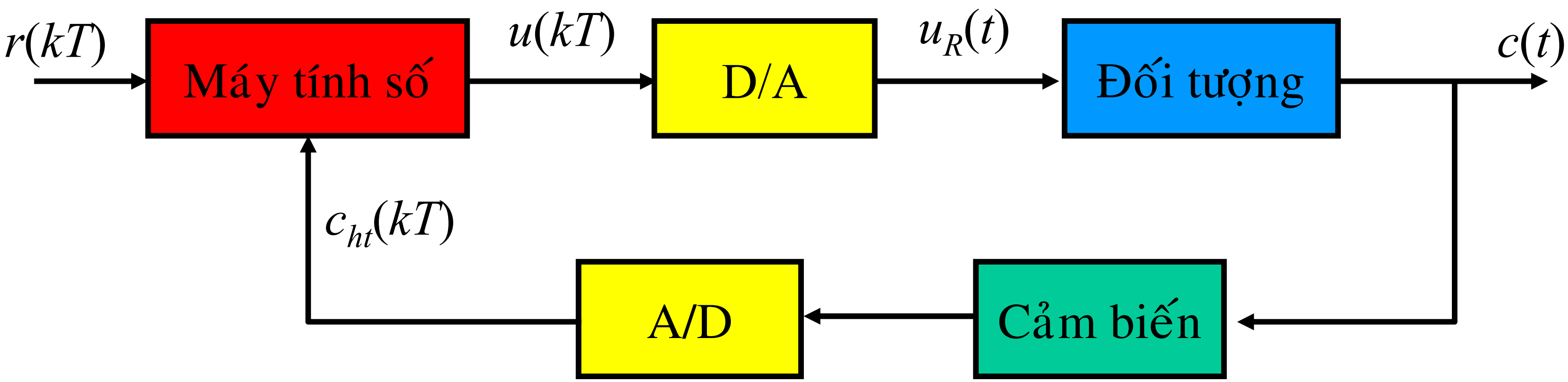
MÔ TẢ TOÁN HỌC
HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN RỜI RẠC

Nội dung chương 6

- Khái niệm
- Phép biến đổi Z
- Hàm truyền
- Phương trình trạng thái

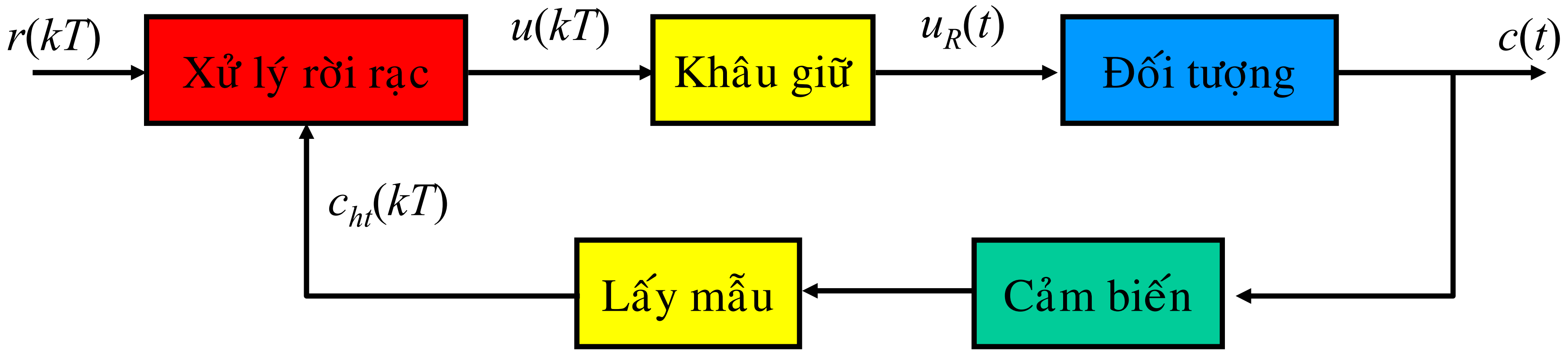
Khái niệm

Hệ thống điều khiển dùng máy tính số



- “Máy tính số” = thiết bị tính toán dựa trên cơ sở kỹ thuật vi xử lý (vi xử lý, vi điều khiển, máy tính PC, DSP,...).
- Ưu điểm của hệ thống điều khiển số:
  - Linh hoạt
  - Dễ dàng áp dụng các thuật toán điều khiển phức tạp
  - Máy tính số có thể điều khiển nhiều đối tượng cùng một lúc

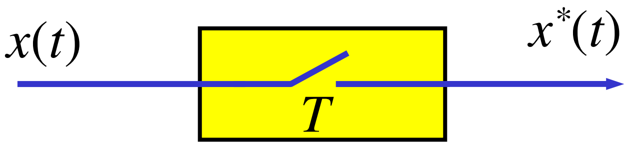
Hệ thống điều khiển rời rạc



★ Hệ thống điều khiển rời rạc là hệ thống điều khiển trong đó có tín hiệu tại một hoặc nhiều điểm là (các) chuỗi xung.

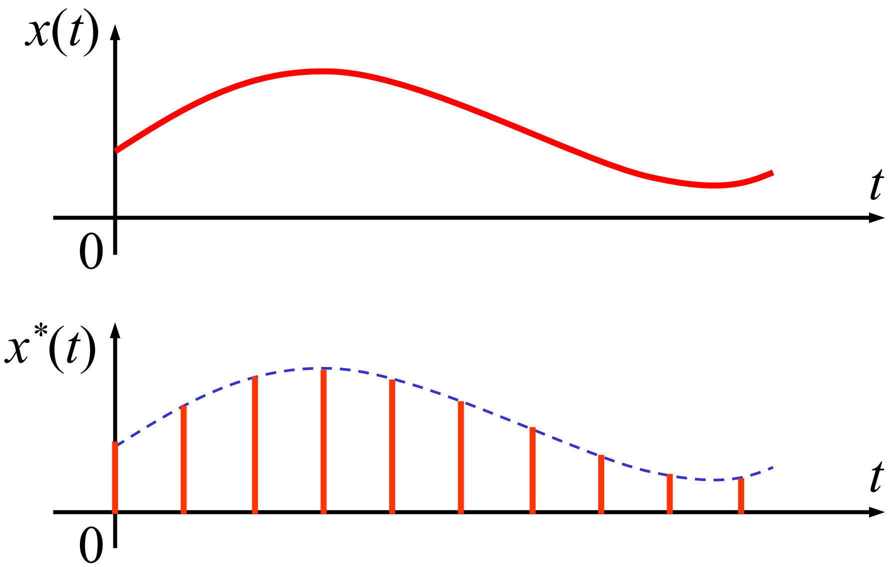
Lấy mẫu dữ liệu

- ★ Lấy mẫu là biến đổi tín hiệu liên tục theo thời gian thành tín hiệu rời rạc theo thời gian.



- ★ Biểu thức toán học mô tả quá trình lấy mẫu:

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)e^{-kTs}$$



- ★ Định lý Shannon

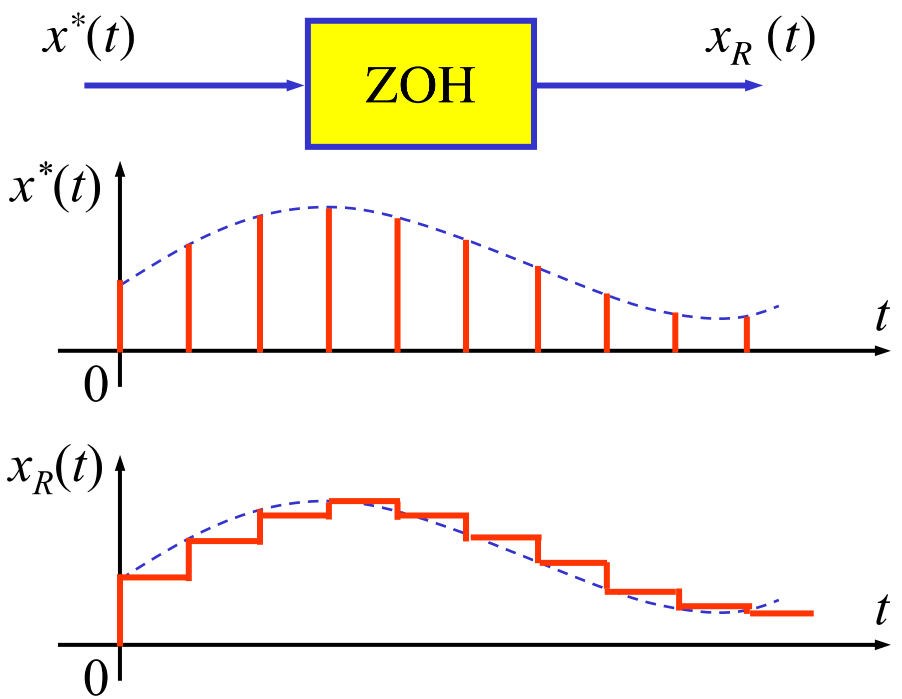
$$f = \frac{1}{T} \geq 2f_c$$

- ★ Nếu có thể bỏ qua được sai số lượng tử hóa thì các khâu chuyển đổi A/D chính là các khâu lấy mẫu.

Khâu giữ dữ liệu

★ Khâu giữ dữ liệu là khâu chuyển tín hiệu rời rạc theo thời gian thành tín hiệu liên tục theo thời gian

★ Khâu giữ bậc 0 (ZOH): giữ tín hiệu bằng hằng số trong thời gian giữa hai lần lấy mẫu.



★ Hàm truyền khâu giữ bậc 0.

$$G_{ZOH}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}$$

★ Nếu có thể bỏ qua được sai số lượng tử hóa thì các khâu chuyển đổi D/A chính là các khâu giữ bậc 0 (ZOH).

Phép biến đổi Z

Định nghĩa phép biến đổi Z

★ Cho $x(k)$ là chuỗi tín hiệu rời rạc, biến đổi Z của $x(k)$ là:

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k}$$

Trong đó:

– $z = e^{Ts}$ (s là biến Laplace)

– $X(z)$: biến đổi Z của chuỗi $x(k)$. Ký hiệu: $x(k) \xleftrightarrow{Z} X(z)$

★ Nếu $x(k) = 0$, $\forall\, k < 0$:

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k) z^{-k}$$

★ Miền hội tụ (Region Of Convergence – ROC)

ROC là tập hợp tất cả các giá trị z sao cho $X(z)$ hữu hạn.

Ý nghĩa của phép biến đổi Z

- Giả sử $x(t)$ là tín hiệu liên tục trong miền thời gian, lấy mẫu $x(t)$ với chu kỳ lấy mẫu T ta được chuỗi rời rạc $x(k) = x(kT)$.
- Biểu thức lấy mẫu tín hiệu $x(t)$

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

- Biểu thức biến đổi Z chuỗi $x(k) = x(kT)$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k)z^{-k}$$

- Do $z = e^{Ts}$ nên vế phải của hai biểu thức lấy mẫu và biến đổi Z là như nhau, do đó bản chất của việc biến đổi Z một tín hiệu chính là rời rạc hóa tín hiệu đó .

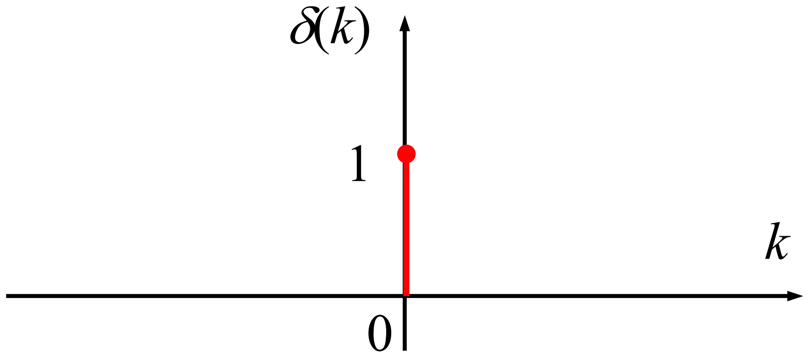
Cho $x(k)$ và $y(k)$ là hai chuỗi tín hiệu rời rạc có biến đổi Z là:

$$Z\{x(k)\} = X(z) \qquad Z\{y(k)\} = Y(z)$$

- Tính tuyến tính: $Z\{ax(k) + by(k)\} = aX(z) + bY(z)$
- Tính dời trong miền thời gian: $Z\{x(k - k_0)\} = z^{-k_0} X(z)$
- Tỉ lệ trong miền Z: $Z\{a^k x(k)\} = X(a^{-1}z)$
- Đạo hàm trong miền Z: $Z\{kx(k)\} = -z\dfrac{dX(z)}{dz}$
- Định lý giá trị đầu: $x(0) = \lim\limits_{z\to\infty} X(z)$
- Định lý giá trị cuối: $x(\infty) = \lim\limits_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z)$

★ Hàm dirac:

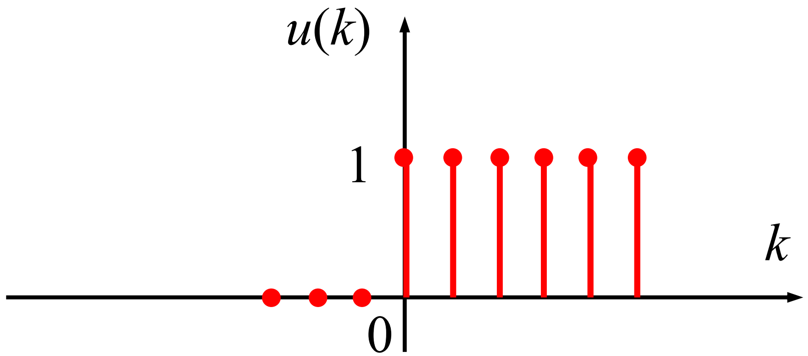
$$\delta(k)=\begin{cases}1 & \text{nếu } k=0\\ 0 & \text{nếu } k\neq 0\end{cases}$$



$$Z\{\delta(k)\}=1$$

★ Hàm nấc đơn vị:

$$u(k)=\begin{cases}1 & \text{nếu } k\geq 0\\ 0 & \text{nếu } k< 0\end{cases}$$

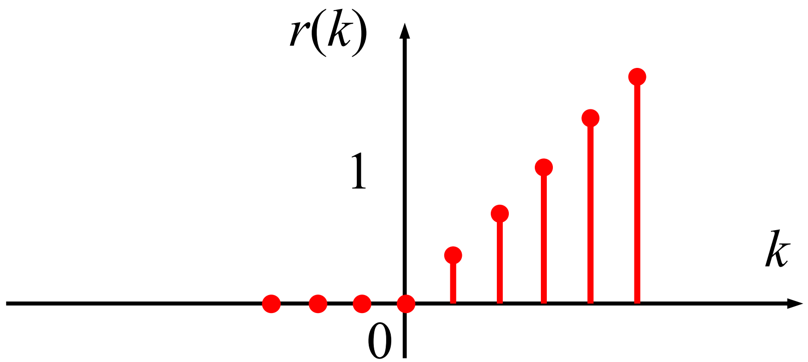


$$Z\{u(k)\}=\frac{z}{z-1}$$

Biến đổi Z của các hàm cơ bản

★ Hàm dốc đơn vị:

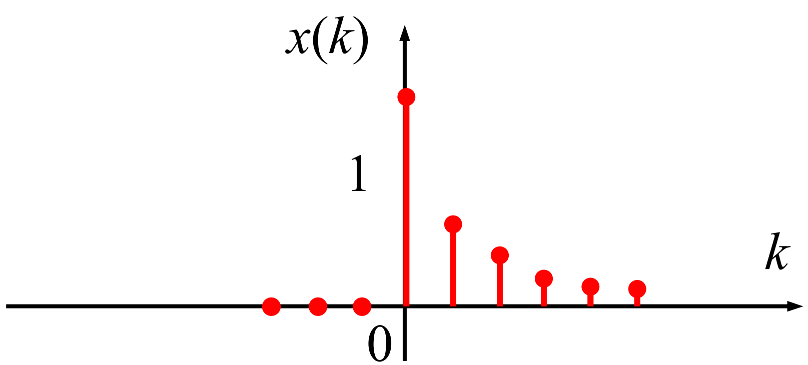
$$r(k) = \begin{cases} kT & \text{nếu } k \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$



$$Z\{u(k)\} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

★ Hàm mũ:

$$x(k) = \begin{cases} e^{-akT} & \text{nếu } k \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } k < 0 \end{cases}$$



$$Z\{x(k)\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

Hàm truyền của hệ rời rạc

Tính hàm truyền từ phương trình sai phân

- Quan hệ vào ra của hệ rời rạc có thể mô tả bằng phương trình sai phân

$$a_0c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\ldots+a_{n-1}c(k+1)+a_nc(k)=$$

$$b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\ldots+b_{m-1}r(k+1)+b_mr(k)$$

trong đó $n>m$, n gọi là bậc của hệ thống rời rạc

- Biến đổi Z hai vế phương trình trên ta được:

$$a_0z^nC(z)+a_1z^{n-1}C(z)+\ldots+a_{n-1}zC(z)+a_nC(z)=$$

$$b_0z^mR(z)+b_1z^{m-1}R(z)+\ldots+b_{m-1}zR(z)+b_mR(z)$$

Tính hàm truyền từ phương trình sai phân

- Lập tỉ số $C(z)/R(z)$, ta được hàm truyền của hệ rời rạc:

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_{m-1}z+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n}$$

- Hàm truyền trên có thể biến đổi tương đương về dạng:

$$G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{z^{-(n-m)}[b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_{m-1}z^{-m+1}+b_mz^{-m}]}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_{n-1}z^{-n+1}+a_nz^{-n}}$$

Tính hàm truyền từ phương trình sai phân - Thí dụ

★ Tính hàm truyền của hệ rời rạc mô tả bởi phương trình sai phân:

$$c(k+3)+2c(k+2)-5c(k+1)+3c(k)=2r(k+2)+r(k)$$

★ Giải: Biến đổi Z hai vế phương trình sai phân ta được:

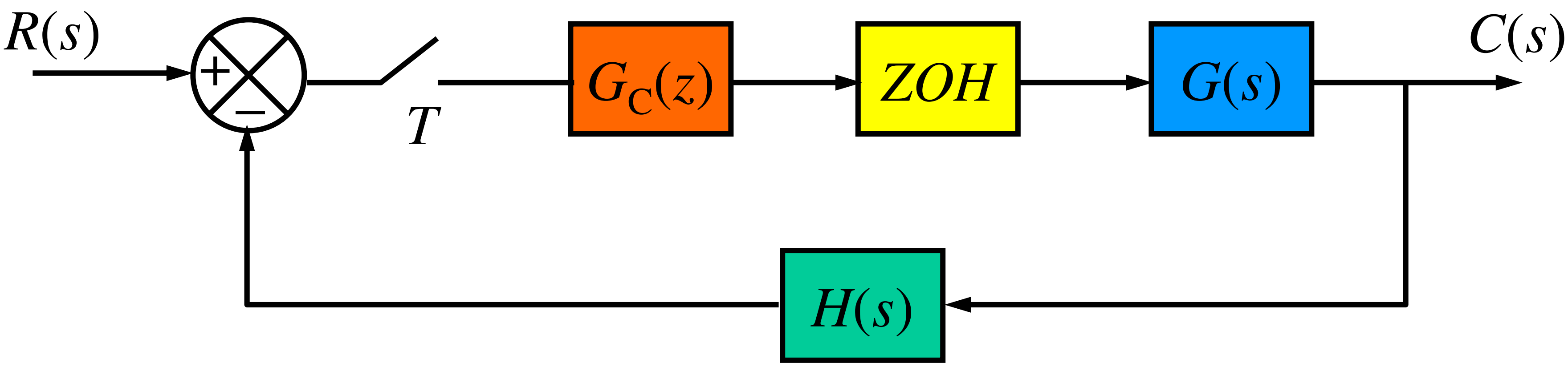
$$z^3C(z)+2z^2C(z)-5zC(z)+3C(z)=2z^2R(z)+R(z)$$

$$\Rightarrow \quad G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{2z^2+1}{z^3+2z^2-5z+3}$$

$$\Leftrightarrow \quad G(z)=\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{z^{-1}(2+z^{-2})}{1+2z^{-1}-5z^{-2}+3z^{-3}}$$

Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối

★ Cấu hình thường gặp của các hệ thống điều khiển rời rạc:



★ Hàm truyền kín của hệ thống:

$$G_k(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_C(z)G(z)}{1 + G_C(z)GH(z)}$$

trong đó:

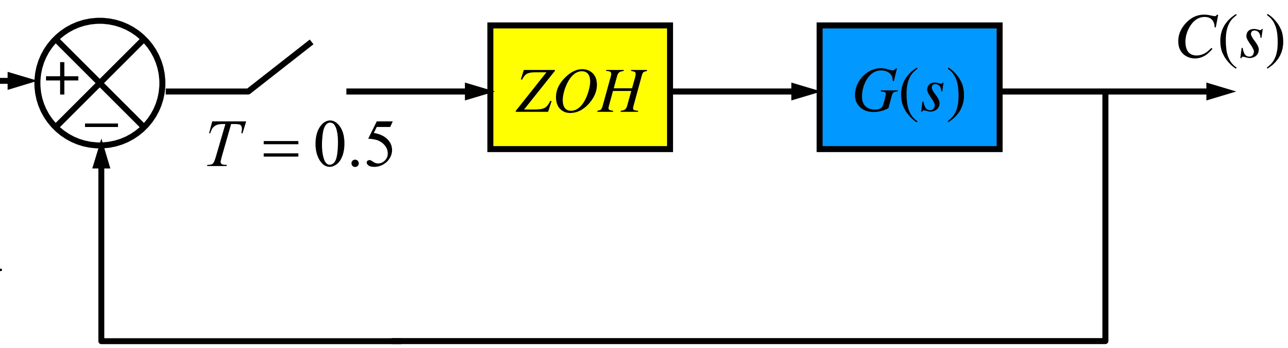
$G_C(z)$: hàm truyền của bộ điều khiển, tính từ phương trình sai phân

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$GH(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}$$

Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối. Thí dụ 1

★ Tính hàm truyền kín của hệ thống:



$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

Giải: $$G(z) = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{3}{s(s+2)}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})\frac{3}{2}\frac{z(1 - e^{-2\times 0.5})}{(z-1)(z - e^{-2\times 0.5})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(z) = \frac{0.948}{z - 0.368}}$$

Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối. Thí dụ 1

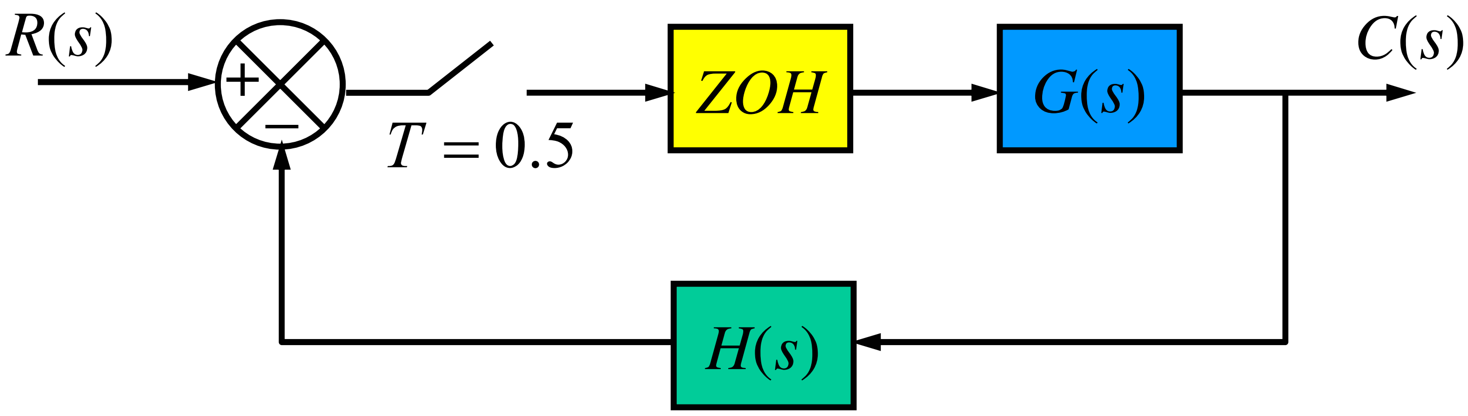
★ Hàm truyền kín của hệ thống:

$$G_k(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{\dfrac{0.948}{z-0.368}}{1+\dfrac{0.948}{z-0.368}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G_k(z) = \frac{0.948}{z+0.580}}$$

Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối. Thí dụ 2

- Tính hàm truyền kín của hệ thống:



Biết rằng: $G(s)=\dfrac{3e^{-s}}{s+3}$ $\quad H(s)=\dfrac{1}{s+1}$

- Giải:

Hàm truyền kín của hệ thống:

$$G_k(z)=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối. Thí dụ 2

- $$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{3e^{-s}}{s(s+3)}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})z^{-2}\frac{z(1 - e^{-3\times0.5})}{(z-1)(z - e^{-3\times0.5})}$$

$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{0.777}{z^2(z - 0.223)}$$

Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối. Thí dụ 2

- $$GH(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)H(s)}{s}\right\}$$

$$= (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{3e^{-s}}{s(s+3)(s+1)}\right\}$$

$$= 3(1 - z^{-1})z^{-2}\frac{z(Az+B)}{(z-1)(z-e^{-3\times 0.5})(z-e^{-1\times 0.5})}$$

$$A = \frac{(1-e^{-3\times 0.5}) - 3(1-e^{-0.5})}{3(1-3)} = 0.0673$$

$$B = \frac{3e^{-3\times 0.5}(1-e^{-0.5}) - e^{-0.5}(1-e^{-3\times 0.5})}{3(1-3)} = 0.0346$$

$\Rightarrow$ $$GH(z) = \frac{0.202z + 0.104}{z^2(z-0.223)(z-0.607)}$$

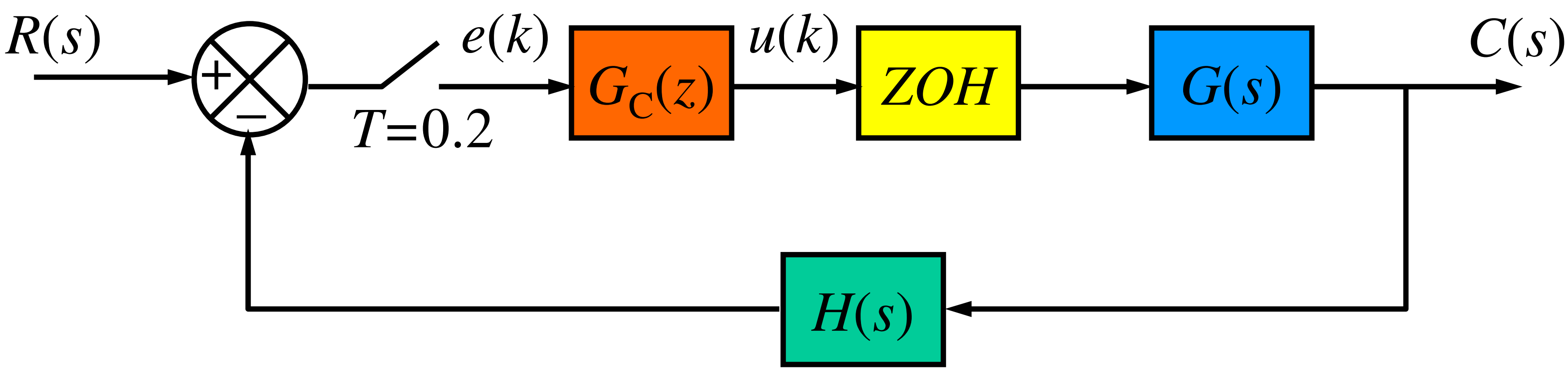
Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối. Thí dụ 2

★ Hàm truyền kín của hệ thống:

$$G_k(z) = \frac{G(z)}{1+GH(z)} = \frac{\dfrac{0.777}{z^2(z-0.223)}}{1+\dfrac{0.202z+0.104}{z^2(z-0.223)(z-0.607)}}$$

$$\Rightarrow \quad G_k(z) = \frac{0.777(z-0.607)}{z^4-0.83z^3+0.135z^2+0.202z+0.104}$$

★ Tính hàm truyền kín của hệ thống:



Biết rằng: $G(s)=\dfrac{5e^{-0.2s}}{s^{2}}$ $\quad H(s)=0.1$

Bộ điều khiển Gc(z) có quan hệ vào – ra mô tả bởi phương trình:

$$u(k)=10e(k)-2e(k-1)$$

★ Giải:

Hàm truyền kín của hệ thống:

$$G_k(z) = \frac{G_C(z)G(z)}{1 + G_C(z)GH(z)}$$

Ta có:

$$u(k) = 10e(k) - 2e(k-1)$$

$$\Rightarrow \quad U(z) = 10E(z) - 2z^{-1}E(z)$$

$$\Rightarrow \quad G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 10 - 2z^{-1}$$

Tính hàm truyền của hệ rời rạc từ sơ đồ khối. Thí dụ 3

- $G(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\dfrac{G(s)}{s}\right\}$

$$= (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{5e^{-0.2s}}{s^3}\right\} = 5(1 - z^{-1})z^{-1}\frac{(0.2)^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{G(z) = \frac{0.1(z+1)}{z(z-1)^2}}$$

- $GH(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\dfrac{G(s)H(s)}{s}\right\}$

$$= 0.1(1 - z^{-1})Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{GH(z) = \frac{0.01(z+1)}{z(z-1)^2}}$$

★ Hàm truyền kín của hệ thống:

$$G_k(z) = \frac{G_C(z)G(z)}{1+G_C(z)GH(z)} = \frac{\left[\frac{10z-2}{z}\right].\left[\frac{0.1(z+1)}{z(z-1)^2}\right]}{1+\left[\frac{10z-2}{z}\right].\left[\frac{0.01(z+1)}{z(z-1)^2}\right]}$$

$$\Rightarrow \quad G_k(z) = \frac{z^2+0.8z-0.2}{z^4-2z^3+1.1z^2+0.08z-0.02}$$

Phương trình trạng thái

Khái niệm

★ Phương trình trạng thái (PTTT) của hệ rời rạc là hệ phương trình sai phân bậc 1 có dạng:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}$$

Thành lập PTTT từ phương trình sai phân (PTSP)

- ***Trường hợp 1:*** Vế phải của PTSP không chứa sai phân của tín hiệu vào

$$a_0 c(k+n) + a_1 c(k+n-1) + \ldots + a_{n-1} c(k+1) + a_n c(k) = b_0 r(k)$$

- Đặt biến trạng thái theo qui tắc:
  - Biến đầu tiên đặt bằng tín hiệu ra:
  - Biến thứ i (i=2..n) đặt bằng cách làm sớm biến thứ i–1 một chu kỳ lấy mẫu

$$\begin{aligned} x_1(k) &= c(k) \\ x_2(k) &= x_1(k+1) \\ x_3(k) &= x_2(k+1) \\ &\vdots \\ x_n(k) &= x_{n-1}(k+1) \end{aligned}$$

Trường hợp 1 (tt)

★ Phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dfrac{b_0}{a_0} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thí dụ trường hợp 1

- Viết PTTT mô tả hệ thống có quan hệ vào ra cho bởi PTSP sau:

$$2c(k+3)+c(k+2)+5c(k+1)+4c(k)=3r(k)$$

- Đặt các biến trạng thái: $\begin{cases} x_1(k)=c(k) \\ x_2(k)=x_1(k+1) \\ x_3(k)=x_2(k+1) \end{cases}$

- Phương trình trạng thái: $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k)=\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$

trong đó:

$$\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_3}{a_0} & -\dfrac{a_2}{a_0} & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_d=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{b_0}{a_0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thành lập PTTT từ PTSP

- ***Trường hợp 2:*** Vế phải của PTSP có chứa sai phân của tín hiệu vào

$$a_0c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\ldots+a_{n-1}c(k+1)+a_nc(k)=$$
$$b_0r(k+n-1)+b_1r(k+n-2)+\ldots+b_{n-2}r(k+1)+b_{n-1}r(k)$$

- Đặt biến trạng thái theo qui tắc:
  - Biến đầu tiên đặt bằng tín hiệu ra
  - Biến thứ *i* (*i*=2..*n*) đặt bằng cách làm sớm biến thứ *i*–1 một chu kỳ lấy mẫu và trừ 1 lượng tỉ lệ với tính hiệu vào

$$x_1(k)=c(k)$$
$$x_2(k)=x_1(k+1)-\beta_1r(k)$$
$$x_3(k)=x_2(k+1)-\beta_2r(k)$$
$$\vdots$$
$$x_n(k)=x_{n-1}(k+1)-\beta_{n-1}r(k)$$

Trường hợp 2 (tt)

★ Phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trường hợp 2 (tt)

Các hệ số β trong vector $\boldsymbol{B}_d$ xác định như sau:

$$\beta_1 = \frac{b_0}{a_0}$$

$$\beta_2 = \frac{b_1 - a_1\beta_1}{a_0}$$

$$\beta_3 = \frac{b_2 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1}{a_0}$$

$$\vdots$$

$$\beta_n = \frac{b_{n-1} - a_1\beta_{n-1} - a_2\beta_{n-2} - \ldots - a_{n-1}\beta_1}{a_0}$$

Thí dụ trường hợp 2

- Viết PTTT mô tả hệ thống có quan hệ vào ra cho bởi PTSP sau:

$$2c(k+3)+c(k+2)+5c(k+1)+4c(k)=r(k+2)+3r(k)$$

- Đặt các biến trạng thái: $\begin{cases} x_1(k)=c(k) \\ x_2(k)=x_1(k+1)-\beta_1 r(k) \\ x_3(k)=x_2(k+1)-\beta_2 r(k) \end{cases}$

- Phương trình trạng thái: $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k)=\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$

trong đó:

$$\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_3}{a_0} & -\dfrac{a_2}{a_0} & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2.5 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_d=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thí dụ trường hợp 2 (tt)

- Các hệ số của vector $\boldsymbol{B}_d$ xác định như sau:

$$\begin{cases} \beta_1 = \dfrac{b_0}{a_0} = \dfrac{1}{2} = 0.5 \\ \beta_2 = \dfrac{b_1 - a_1\beta_1}{a_0} = \dfrac{0 - 1\times 0.5}{2} = -0.25 \\ \beta_3 = \dfrac{b_2 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1}{a_0} = \dfrac{3 - 1\times(-0.25) - 5\times 0.5}{2} = 0.375 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.25 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

Thành lập PTTT từ PTSP dùng phương pháp tọa độ pha

- Xét hệ rời rạc mô tả bởi phương trình sai phân

$$a_0c(k+n)+a_1c(k+n-1)+\ldots+a_{n-1}c(k+1)+a_nc(k)=$$
$$b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\ldots+b_{m-1}r(k+1)+b_mr(k)$$

- Đặt biến trạng thái theo qui tắc:
  - Biến trạng thái đầu tiên là nghiệm của phương trình:

$$x_1(k+n)+\frac{a_1}{a_0}x_1(k+n-1)+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_0}x_1(k+1)+\frac{a_n}{a_0}x_1(k)=r(k)$$

  - Biến thứ i (i=2..n) đặt bằng cách làm sớm biến thứ i–1 một chu kỳ lấy mẫu:

$$x_2(k)=x_1(k+1)$$
$$x_3(k)=x_2(k+1)$$
$$\vdots$$
$$x_n(k)=x_{n-1}(k+1)$$

★ Phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

trong đó:

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & -\dfrac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} \dfrac{b_m}{a_0} & \dfrac{b_{m-1}}{a_0} & \dots & \dfrac{b_0}{a_0} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Thí dụ thành lập PTTT từ PTSP dùng PP tọa độ pha

- Viết PTTT mô tả hệ thống có quan hệ vào ra cho bởi PTSP sau:

$$2c(k+3)+c(k+2)+5c(k+1)+4c(k)=r(k+2)+3r(k)$$

- Đặt biến trạng thái theo phương pháp tọa độ pha, ta được phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k)=\boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

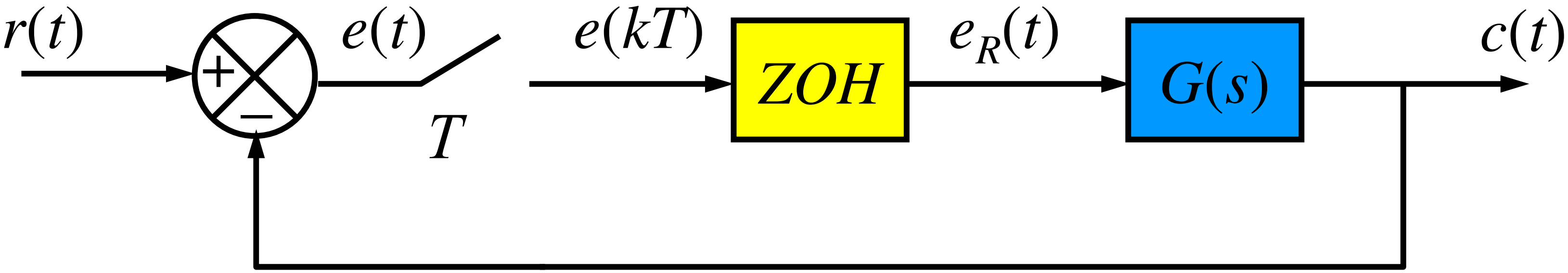
trong đó:

$$\boldsymbol{A}_d=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_3}{a_0} & -\dfrac{a_2}{a_0} & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2.5 & -0.5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_d=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

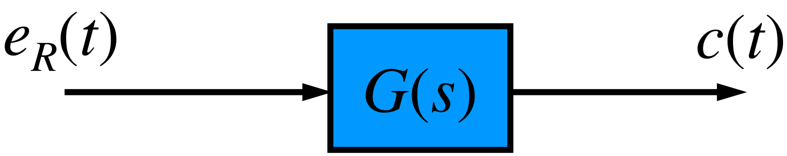
$$\boldsymbol{C}_d=\begin{bmatrix} \dfrac{b_2}{a_0} & \dfrac{b_1}{a_0} & \dfrac{b_0}{a_0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Thành lập PTTT hệ rời rạc từ PTTT hệ liên tục

★ Thành lập PTTT mô tả hệ rời rạc có sơ đồ khối:



★ ***Bước 1:*** Thành lập PTTT mô tả hệ liên tục (hở):



$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}e_R(t) \\ c(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

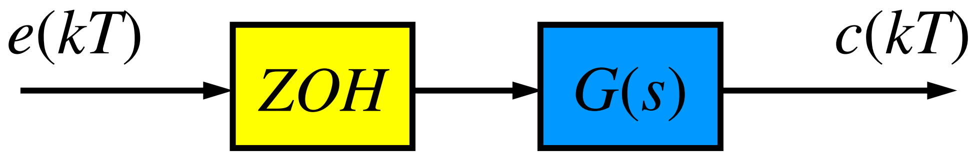
★ ***Bước 2:*** Tính ma trận quá độ

$$\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)]$$

với
$$\Phi(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$$

Thành lập PTTT hệ rời rạc từ PTTT hệ liên tục

★ ***Bước 3:*** Rời rạc hóa PTTT mô tả hệ liên tục (hở):



$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}_d e_R(kT) \\ c(kT) = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(kT) \end{cases}$$

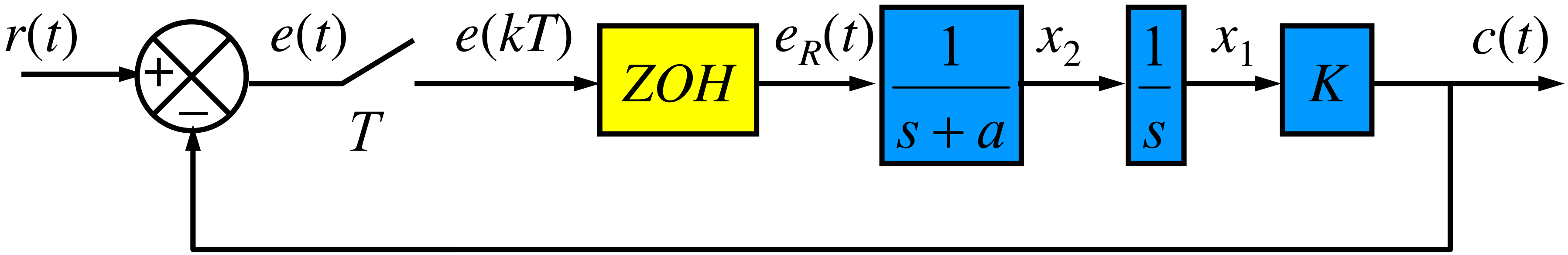
với

$$\begin{cases} \boldsymbol{A}_d = \Phi(T) \\ \boldsymbol{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau)Bd\tau \\ \boldsymbol{C}_d = \boldsymbol{C} \end{cases}$$

★ ***Bước 4:*** Viết PTTT mô tả hệ rời rạc kín (với tín hiệu vào là $r(kT)$)

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[(k+1)T] = \left[\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{C}_d\right]\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}_d r(kT) \\ c(kT) = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(kT) \end{cases}$$

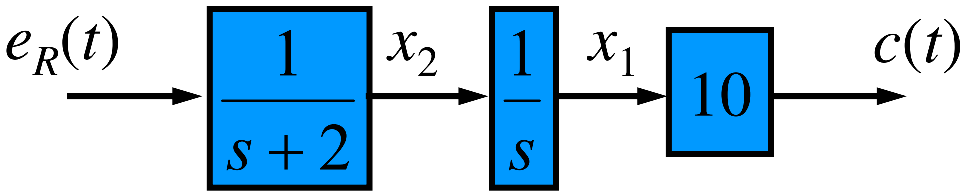
★ Thành lập PTTT mô tả hệ rời rạc có sơ đồ khối:



Với $a = 2$, $T = 0.5$, $K = 10$

Thí dụ thành lập PTTT hệ rời rạc từ PTTT hệ liên tục

- Giải:
- Bước 1:



$$X_1(s)=\frac{X_2(s)}{s} \quad\Rightarrow\quad sX_1(s)=X_2(s) \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_1(t)=x_2(t)$$

$$X_2(s)=\frac{E_R(s)}{s+2} \quad\Rightarrow\quad (s+a)X_2(s)=E_R(s) \quad\Rightarrow\quad \dot{x}_2(t)=-2x_2(t)+e_R(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}}e_R(t) \\ c(t)=10x_1(t)=\underbrace{\begin{bmatrix}10 & 0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} \end{cases}$$

★ Bước 2: Tính ma trận quá độ

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \left(s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{bmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s+2\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+2)}\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ 0 & s\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathscr{L}^{-1}[\Phi(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)}\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+2)}\right\}\\ 0 & \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi(t) = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t})\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}}$$

- Bước 3: Rời rạc hóa PTTT của hệ liên tục

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[(k+1)T] = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}_d e_R(kT) \\ c(kT) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(kT) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}_d = \Phi(T) = \left.\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\right|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2\times 0.5}) \\ 0 & e^{-2\times 0.5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.316 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_d = \int_0^T \Phi(\tau)\boldsymbol{B}\,d\tau = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2\tau}) \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \right\} = \int_0^T \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-e^{-2\tau}) \\ e^{-2\tau} \end{bmatrix} d\tau \right\}$$

$$= \left[\begin{matrix} \left(\frac{\tau}{2} + \frac{e^{-2\tau}}{2^2}\right) \\ -\frac{e^{-2\tau}}{2} \end{matrix}\right]_0^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{0.5}{2} + \frac{e^{-2\times 0.5}}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) \\ -\frac{e^{-2\times 0.5}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.092 \\ 0.316 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_d = \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}$$

★ Bước 4: PTTT rời rạc mô tả hệ kín

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}[(k+1)T] = \left[\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{C}_d\right]\boldsymbol{x}(kT) + \boldsymbol{B}_d r(kT) \\ c(kT) = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(kT) \end{cases}$$

với $\left[\boldsymbol{A}_d - \boldsymbol{B}_d\boldsymbol{C}_d\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0.316 \\ 0 & 0.368 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.092 \\ 0.316 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.316 \\ -3.160 & 0.368 \end{bmatrix}$

★ Vậy phương trình trạng thái của hệ rời rạc cần tìm là:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.316 \\ -3.160 & 0.368 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.092 \\ 0.316 \end{bmatrix} r(k)$$

$$c(k) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Tính hàm truyền từ PTTT

- Cho hệ rời rạc mô tả bởi PTTT

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

- Hàm truyền của hệ rời rạc là:

$$G(z) = \frac{\boldsymbol{C}(z)}{\boldsymbol{R}(z)} = \boldsymbol{C}_d (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d)^{-1} \boldsymbol{B}_d$$

Thí dụ tính hàm truyền từ PTTT

★ Tính hàm truyền của hệ rời rạc mô tả bởi PTTT

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d r(k) \\ c(k) = \boldsymbol{C}_d\boldsymbol{x}(k) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A}_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7 & -0.1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

★ Giải: Hàm truyền cần tìm là

$$G(z) = \boldsymbol{C}_d(z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_d)^{-1}\boldsymbol{B}_d$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\left(z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.7 & -0.1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{2}{z^2 + 0.1z + 0.7}}$$