TOÁN CAO CẤP A2 CAO ĐẲNG

PHÂN PHỐI CHƯƠNG TRÌNH
Số tiết: 45

Chương 1. Hàm số nhiều biến số
Chương 2. Tích phân bội hai
Chương 3. Tích phân đường
Chương 4. Phương trình vi phân

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Phú Vinh – *Giáo trình Toán cao cấp* – ĐH Công nghiệp TP. HCM.

2. Nguyễn Đình Trí – *Toán cao cấp Tập 2* (dùng cho SV Cao đẳng) – NXB Giáo dục.

3. Đỗ Công Khanh – *Toán cao cấp A3* – NXB ĐHQG TP. HCM.

4. Phan Quốc Khánh – *Phép tính Vi tích phân* (tập 2) – NXB Giáo dục.

Biên soạn: *ThS. Đoàn Vương Nguyên*

Download Slide bài giảng Toán A2 CĐ tại
dvntailieu.wordpress.com

……………………….

§1. KHÁI NIỆM CƠ BẢN

1.1. Các định nghĩa

a) Miền phẳng

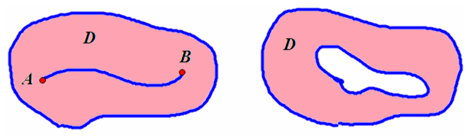
- Trong mặt phẳng Oxy, hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong kín được gọi là *miền phẳng*.

Tập hợp các đường cong kín giới hạn D được gọi là *biên* của D, ký hiệu ∂D hay Γ.

Đặc biệt, mặt phẳng Oxy được xem là miền phẳng với biên ở *vô cùng*.

- Miền phẳng D kể cả biên ∂D được gọi là *miền đóng*, miền phẳng D không kể biên ∂D là *miền mở*.
- Miền phẳng D được gọi là *miền liên thông* nếu có 1 đường cong nằm trong D nối 2 điểm bất kỳ thuộc D.

Miền liên thông có biên là 1 đường cong kín được gọi là *miền đơn liên* (hình a); có biên là nhiều đường cong kín rời nhau là *miền đa liên* (hình b).



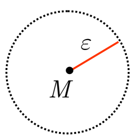
Hình a *Hình b*

b) Lân cận của một điểm

- Khoảng cách giữa 2 điểm $M_1(x_1,\ y_1)$, $M_2(x_2,\ y_2)$ là:

$$d\left(M_1,\ M_2\right) = M_1M_2 = \sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}.$$

- Hình tròn $S(M,\ \varepsilon)$ mở có tâm $M(x,\ y)$, bán kính $\varepsilon > 0$ được gọi là một *lân cận* của điểm M. Nghĩa là:



$$M_0(x_0, y_0) \in S(M, \varepsilon) \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon.$$

c) Hàm số hai biến số

- Trong mặt phẳng Oxy cho tập $D \subset \mathbb{R}^2$.

Tương ứng $f : D \to \mathbb{R}$ cho tương ứng mỗi $(x,\ y) \in D$ với một giá trị $z = f(x,\ y) \in \mathbb{R}$ duy nhất được gọi là hàm số hai biến số $x,\ y$.

- Tập $D \subset \mathbb{R}^2$ được gọi là miền xác định (MXĐ) của hàm số, ký hiệu D_f. Miền giá trị của hàm số là:

$$G = \left\{ z = f(x,\ y) \in \mathbb{R} \middle| (x,\ y) \in D_f \right\}.$$

<u>VD</u>

- Hàm số $f(x,\ y) = 3x^2y - \cos xy$ có $D_f = \mathbb{R}^2$.

- Hàm số $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ có MXĐ là hình tròn đóng tâm $O(0;\ 0)$, bán kính $R = 2$.
- Hàm số $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$ có MXĐ là hình tròn mở tâm $O(0;\ 0)$, bán kính $R = 2$.

Chú ý

- Trong trường hợp xét hàm số $f(x,\ y)$ mà không nói gì thêm thì ta hiểu MXĐ của hàm số là tập tất cả các điểm $M(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ sao cho $f(x,\ y)$ có nghĩa.
- Hàm có nhiều hơn hai biến được định nghĩa tương tự.

1.2. Giới hạn của hàm số hai biến số (xem giáo trình)

1.3. Hàm số liên tục (xem giáo trình)

§2. ĐẠO HÀM RIÊNG – VI PHÂN

2.1. Đạo hàm riêng

a) Đạo hàm riêng cấp 1

- Cho hàm số $f(x,\ y)$ xác định trên miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ chứa điểm $M_0(x_0,\ y_0)$. Cố định y_0, nếu hàm số $f(x,\ y_0)$ có đạo hàm tại x_0 thì ta gọi đạo hàm đó là *đạo hàm riêng theo biến* x của hàm số $f(x,\ y)$ tại $(x_0,\ y_0)$.

Ký hiệu: $f_x(x_0,\ y_0)$ hay $f_x^/(x_0,\ y_0)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,\ y_0)$.

Vậy $\boxed{f_x^/(x_0,\ y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{x - x_0}}$.

- Tương tự, đạo hàm riêng *theo biến* y tại $(x_0,\ y_0)$ là:

$$\boxed{f_y^/(x_0,\ y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,\ y) - f(x_0,\ y_0)}{y - y_0}}.$$

Chú ý

- Nếu $f(x)$ là hàm số một biến x thì $f_x^/ = \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{df}{dx}$.
- Hàm số nhiều hơn hai biến có định nghĩa tương tự.

VD 1. Tính các đạo hàm riêng của hàm số:

$f(x,\ y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2y^3 - 3xy$ tại $(-1;\ 2)$.

VD 2. Tính các đạo hàm riêng của $z = \ln \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + y^2 + 1}$.

VD 3. Tính các đạo hàm riêng của $z = \cos \dfrac{x}{y}$ tại $(\pi;\ 4)$.

VD 4. Tính các đạo hàm riêng của $f(x, y, z) = e^{x^2 y} \sin z$.

b) Đạo hàm riêng cấp cao

- Đạo hàm riêng (nếu có) của hàm số $f_x^/(x,\ y)$, $f_y^/(x,\ y)$ được gọi là các *đạo hàm riêng cấp hai* của $f(x,\ y)$.

Ký hiệu:

$$f_{x^2}^{//} = f_{xx} = \left(f_x\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$f_{y^2}^{//} = f_{yy} = \left(f_y\right)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$f_{xy}^{//} = f_{xy} = \left(f_x\right)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

$$f_{yx}^{//} = f_{yx} = \left(f_y\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

- Hàm số nhiều hơn 2 biến và đạo hàm riêng cấp cao hơn 2 có định nghĩa tương tự.

VD 5. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số:

$f(x,\ y) = x^3e^y + x^2y^3 - y^4$ tại $(-1;\ 1)$.

VD 6. Cho hàm số $f(x,\ y) = x^5 + y^4 - x^4y^5$.

Giá trị của đạo hàm riêng cấp năm $f_{x^3y^2}^{(5)}(1;-1)$ là:

A. $f_{x^3y^2}^{(5)}(1;-1) = 480$; B. $f_{x^3y^2}^{(5)}(1;-1) = -480$;
C. $f_{x^3y^2}^{(5)}(1;-1) = 120$; D. $f_{x^3y^2}^{(5)}(1;-1) = -120$.

- **Định lý Schwarz**

Nếu hàm số $f(x,\ y)$ có các đạo hàm riêng $f_{xy}^{//}$, $f_{yx}^{//}$ liên tục trong miền mở $D \subset \mathbb{R}^2$ thì $f_{xy}^{//} = f_{yx}^{//}$.

VD 7. Đạo hàm riêng $z^{(m+n)}_{x^{m-2}y^n x^2}$ $(m \geq 2)$ của $z = e^{2x-y}$ là:

A. $(-1)^n 2^{m+n} e^{2x-y}$; B. $(-1)^m 2^{m+n} e^{2x-y}$;
C. $(-1)^m 2^m e^{2x-y}$; D. $(-1)^n 2^m e^{2x-y}$.

2.2. Vi phân

2.2.1. Vi phân cấp 1

a) Số gia của hàm số

- Cho hàm số $f(x,\ y)$ xác định trong lân cận $S(M_0,\ \varepsilon)$ của điểm $M_0(x_0,\ y_0)$. Cho x một số gia Δx và y một số gia Δy, khi đó hàm $f(x,\ y)$ có tương ứng số gia:

$$\boxed{\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0).}$$

b) Định nghĩa

- Nếu trong lân cận $S(M_0,\ \varepsilon)$ với số gia Δx, Δy mà số gia Δf tương ứng có thể viết được dưới dạng

$$\Delta f = A.\Delta x + B.\Delta y + O\left(r\right),\ r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

trong đó $A,\ B$ là những số chỉ phụ thuộc vào điểm $M_0(x_0,\ y_0)$ và hàm $f(x,\ y)$, không phụ thuộc $\Delta x,\ \Delta y$ thì đại lượng $A.\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là *vi phân* của hàm số $f(x,\ y)$ tại điểm $M_0(x_0,\ y_0)$. Khi đó, $f(x,\ y)$ được gọi là *khả vi* tại điểm $M_0(x_0,\ y_0)$.

Ký hiệu $\boxed{df = A.\Delta x + B.\Delta y.}$

Nhận xét

- Xét những điểm $M(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ dịch chuyển trên đường đi qua M_0 song song Ox. Khi đó $\Delta y = 0$:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0) = A.\Delta x + O(\Delta x)$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A \Rightarrow A = f'_x(x_0,\ y_0).$$

Tương tự, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta y} = B \Rightarrow B = f'_y(x_0,\ y_0)$.

Suy ra $df(x,\ y) = f'_x(x,\ y).\Delta x + f'_y(x,\ y).\Delta y$.

- Xét $f(x,\ y) = x \Rightarrow df(x,\ y) = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$.

Tương tự, $dy = \Delta y$. Vậy:

$$\boxed{df(x,\ y) = f'_x(x,\ y)dx + f'_y(x,\ y)dy.}$$

c) Định lý

- Nếu hàm số $f(x,\ y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận nào đó của $(x_0,\ y_0)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại $(x_0,\ y_0)$ thì $f(x,\ y)$ khả vi tại $(x_0,\ y_0)$.

VD 8. Cho hàm $f(x,\ y) = x^2 e^{x-y} - y^5$. Tính $df(1;-1)$.

VD 9. Tính vi phân cấp 1 của hàm $z = e^{x^2-y}\sin(xy^2)$.

2.2.2. Vi phân cấp 2

- Giả sử $f(x,\ y)$ là hàm khả vi với $x,\ y$ là các biến độc lập. Các số gia $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$ tùy ý độc lập với $x,\ y$ nên được xem là hằng số đối với $x,\ y$. Vi phân của $df(x,\ y)$ được gọi là vi phân cấp 2 của $f(x,\ y)$.

Ký hiệu và công thức:

$$\boxed{d^2 f = d\left(df\right) = f''_{x^2}dx^2 + 2f''_{xy}dxdy + f''_{y^2}dy^2.}$$

Chú ý

- Nếu $x,\ y$ là các biến không độc lập (biến trung gian) $x = x(\varphi,\ \psi)$, $y = y(\varphi,\ \psi)$ thì công thức trên không còn đúng nữa. Sau đây ta chỉ xét trường hợp $x,\ y$ độc lập.

VD 10. Cho hàm số $f(x,\ y) = x^2y^3 + xy^2 - 3x^3y^5$.

Tính vi phân cấp hai $df^2(2;-1)$.

VD 11. Tính vi phân cấp 2 của hàm $f(x,\ y) = \ln(xy^2)$.

2.3. Đạo hàm của hàm số ẩn (hai biến)

- Hàm $z(x,\ y)$ xác định trên $D_z \subset \mathbb{R}^2$ thỏa phương trình $F(x, y, z(x, y)) = 0,\ \forall (x, y) \in D \subset D_z$ (*) được gọi là *hàm số ẩn* hai biến xác định bởi (*).

Giả sử các hàm trên đều khả vi, đạo hàm 2 vế (*) ta được:

$$F'_x + F'_z.z'_x = 0,\ F'_y + F'_z.z'_y = 0.$$

Vậy $\boxed{z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z},\ z'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_z}\ \left(F'_z \neq 0\right).}$

VD 12. Cho hàm ẩn $z(x,\ y)$ thỏa phương trình:

$xyz = \cos(x + y + z)$. Tính $z'_x,\ z'_y$.

VD 13. Cho hàm ẩn $z(x,\ y)$ thỏa phương trình mặt cầu:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$. Tính z'_y.

§3. CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN SỐ

3.1. Định nghĩa

- Hàm số $z = f(x,\ y)$ đạt *cực trị thực sự* tại $M_0(x_0,\ y_0)$ nếu với mọi điểm $M(x,\ y)$ khá gần nhưng khác M_0 thì hiệu $\Delta f = f(x,\ y) - f(x_0,\ y_0)$ có dấu không đổi.
- Nếu $\Delta f > 0$ thì $f(x_0,\ y_0)$ là *giá trị cực tiểu* và M_0 là *điểm cực tiểu* của $z = f(x,\ y)$.
- Nếu $\Delta f < 0$ thì $f(x_0,\ y_0)$ là *giá trị cực đại* và M_0 là *điểm cực đại* của $z = f(x,\ y)$.

VD 1. Hàm số $f(x,\ y) = x^2 + y^2 - xy = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3y^2}{4}$

$\Rightarrow f(x,\ y) \geq 0,\ \forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ nên đạt cực tiểu tại $O(0;\ 0)$.

3.2. Định lý

a) Điều kiện cần

- Nếu hàm số $z = f(x,\ y)$ đạt cực trị tại $M_0(x_0,\ y_0)$ và tại đó hàm số có đạo hàm riêng thì:

$$\boxed{f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.}$$

Điểm $M_0(x_0,\ y_0)$ thỏa $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ được gọi là *điểm dừng*, M_0 có thể không là điểm cực trị.

b) Điều kiện đủ

Giả sử $z = f(x,\ y)$ có điểm dừng là M_0 và có đạo hàm riêng cấp hai tại lân cận của điểm M_0.

Đặt $A = f''_{x^2}(M_0),\ \ B = f''_{xy}(M_0),\ \ C = f''_{y^2}(M_0)$.

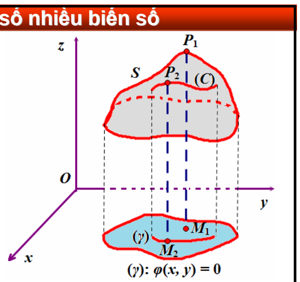
Khi đó:

- Nếu $\begin{cases} AC - B^2 > 0 \\ A > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x,\ y)$ đạt cực tiểu tại M_0.
- Nếu $\begin{cases} AC - B^2 > 0 \\ A < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x,\ y)$ đạt cực đại tại M_0.
- Nếu $AC - B^2 < 0 \Rightarrow f(x,\ y)$ không đạt cực trị tại M_0.
- Nếu $AC - B^2 = 0$ thì ta không thể kết luận.

3.3. Phân loại cực trị

- Trong không gian $Oxyz$, xét mặt cong S chứa đường cong (C). Chiếu S lên mpOxy ta được miền $D \subset \mathbb{R}^2$ và đường cong phẳng $(\gamma) : \varphi(x,\ y) = 0$ (xem hình vẽ).

Khi đó, điểm $P_1 \in S$ là điểm cao nhất (hay thấp nhất) so với các điểm ở trong lân cận của nó và hình chiếu $M_1 \in D$ là được gọi là *điểm cực trị tự do* của hàm $f(x,\ y)$



xác định trên D (vì không phụ thuộc vào (γ)). Tương tự, điểm $P_2 \in (C)$ là điểm cao nhất (hay thấp nhất) so với các điểm ở trong lân cận của nó và hình chiếu $M_2 \in (\gamma)$ là *điểm cực trị có điều kiện* ràng buộc bởi $(\gamma) : \varphi(x,\ y) = 0$ của hàm $f(x,\ y)$.

3.4. Cực trị tự do

Cho hàm số $f(x,\ y)$ xác định trên D. Để tìm cực trị (tự do) của $f(x,\ y)$, ta thực hiện các bước sau:

- ***Bước* 1.** Tìm điểm dừng $M_0(x_0,\ y_0)$ bằng cách giải hệ:

$$\boxed{\begin{cases} f'_x(x_0,\ y_0) = 0 \\ f'_y(x_0,\ y_0) = 0. \end{cases}}$$

- ***Bước* 2.** Tính $A = f''_{x^2}(x_0,\ y_0),\ \ B = f''_{xy}(x_0,\ y_0),$

$$C = f''_{y^2}(x_0,\ y_0) \Rightarrow \Delta = AC - B^2.$$

- ***Bước* 3.** Dựa vào điều kiện đủ để kết luận.

VD 2. Tìm điểm dừng của hàm số $z = xy(1 - x - y)$.

➢ Chương 1. Hàm số nhiều biến số

VD 3. Tìm cực trị của hàm $z = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 8$.

VD 4. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy - 2$.

VD 5. Tìm cực trị của $z = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

VD 6. Cho hàm số $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.

Khẳng định đúng là:

A. z đạt cực tiểu tại $M(2;\ 5)$ và giá trị cực tiểu $z = 39$.

B. z đạt cực tiểu tại $M(5;\ 2)$ và giá trị cực tiểu $z = 30$.

C. z đạt cực đại tại $M(2;\ 5)$ và giá trị cực đại $z = 39$.

D. z đạt cực đại tại $M(5;\ 2)$ và giá trị cực đại $z = 30$.

➢ Chương 1. Hàm số nhiều biến số

3.5. Cực trị có điều kiện

- Cho hàm số $f(x,\ y)$ xác định trên lân cận của điểm $M_0(x_0,\ y_0)$ thuộc đường cong $(\gamma): \varphi(x,\ y) = 0$.

  Nếu tại M_0 hàm $f(x,\ y)$ đạt cực trị thì ta nói M_0 là điểm *cực trị có điều kiện* của $f(x,\ y)$ với điều kiện $\varphi(x,\ y) = 0$.
- Để tìm cực trị có điều kiện của hàm số $f(x,\ y)$ ta dùng *phương pháp khử* hoặc *nhân tử Lagrange*.

a) Phương pháp khử

- Từ phương trình $\varphi(x,\ y) = 0$ ta rút x hoặc y thế vào $f(x,\ y)$, sau đó tìm cực trị của hàm một biến.

➢ Chương 1. Hàm số nhiều biến số

VD 7. Tìm điểm cực trị của hàm $z = x^2y$ thỏa điều kiện:

$$x - y + 3 = 0.$$

b) Phương pháp nhân tử Lagrange

Tại điểm cực trị $(x,\ y)$ của f, gọi $\lambda = -\dfrac{f'_x}{\varphi'_x} = -\dfrac{f'_y}{\varphi'_y}$ là *nhân tử Lagrange*. Để tìm cực trị ta thực hiện các bước:

- ***Bước* 1.** Lập hàm phụ (*hàm Lagrange*):

  $$\boxed{L(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda\varphi(x,\ y)}$$
- ***Bước* 2.** Giải hệ: $L'_x = 0,\ L'_y = 0,\ L'_\lambda = 0$

  $\Rightarrow$ điểm dừng $M_0(x_0,\ y_0)$ ứng với λ_0.

➢ Chương 1. Hàm số nhiều biến số

- ***Bước* 3.** Tính vi phân cấp 2 tại $M_0(x_0,\ y_0)$ ứng với λ_0:

  $$\boxed{d^2L(M_0) = L''_{x^2}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{y^2}dy^2}$$

  Các vi phân $dx,\ dy$ phụ thuộc vào điều kiện ràng buộc:

  $$\begin{cases} d\varphi(x_0, y_0) = \varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0 \ (1) \\ (dx)^2 + (dy)^2 > 0 \ (2). \end{cases}$$
- ***Bước* 4.** Từ điều kiện ràng buộc (1) và (2), ta có:

  ➢ Nếu $d^2L(M_0) > 0$ thì $f(x,\ y)$ *đạt cực tiểu* tại M_0.

  ➢ Nếu $d^2L(M_0) < 0$ thì $f(x,\ y)$ *đạt cực đại* tại M_0.

  ➢ Nếu $d^2L(M_0) = 0$ thì M_0 không là điểm cực trị.

➢ Chương 1. Hàm số nhiều biến số

VD 8. Tìm điểm cực trị của hàm số $f(x,\ y) = 2x + y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

VD 9. Tìm điểm cực trị của hàm $z = xy$ thỏa điều kiện

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

…………………………………………

➢ Chương 2. Tích phân bội

§1. Tích phân bội hai (tích phân kép)

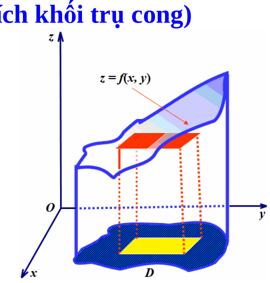
§2. Ứng dụng của tích phân bội hai

…………………………………

§1. TÍCH PHÂN BỘI HAI

1.1. Bài toán mở đầu (thể tích khối trụ cong)

- Xét hàm số $z = f(x,\ y)$ liên tục, không âm và một mặt trụ có các đường sinh song song với Oz, đáy là miền phẳng đóng D trong mpOxy.



➢ Chương 2. Tích phân bội

• Để tính thể tích khối trụ, ta chia miền D thành n phần không dẫm lên nhau ΔS_i, $i = \overline{1; n}$. Diện tích mỗi phần cũng ký hiệu là ΔS_i. Khi đó, khối trụ cong được chia thành n khối trụ nhỏ. Trong mỗi phần ΔS_i ta lấy điểm $M_i(x_i; y_i)$ tùy ý và thể tích V của khối trụ là:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i.$$

• Gọi $d_i = \max\left\{d(A,B) \middle| A, B \in \Delta S_i\right\}$ là *đường kính* của ΔS_i. Ta có: $\boxed{V = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i.}$

➢ Chương 2. Tích phân bội

1.2. Tích phân bội hai

a) Định nghĩa

• Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên miền D đóng và bị chặn trong mpOxy. Chia miền D một cách tùy ý thành n phần không dẫm lên nhau, diện tích mỗi phần là ΔS_i, $i = \overline{1; n}$. Lấy n điểm tùy ý $M_i(x_i; y_i) \in \Delta S_i$. Khi đó, $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)\Delta S_i$ được gọi là *tổng tích phân* của $f(x, y)$ trên D (ứng với phân hoạch ΔS_i và các điểm chọn M_i).

➢ Chương 2. Tích phân bội

• Nếu giới hạn $I = \lim_{\max d_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào phân hoạch ΔS_i và cách chọn điểm M_i thì số thực I được gọi là *tích phân bội hai* của hàm số $f(x, y)$ trên miền D. Ký hiệu $I = \iint_D f(x,y)dS$.

• Chia miền D bởi các đường thẳng song song với Ox, Oy ta được $\Delta S_i = \Delta x_i.\Delta y_i$ hay $dS = dxdy$.

Vậy $\boxed{I = \iint_D f(x, y)dS = \iint_D f(x, y)dxdy.}$

➢ Chương 2. Tích phân bội

• Nếu tồn tại $\iint_D f(x, y)dxdy$, ta nói $f(x, y)$ khả tích trên miền D; $f(x, y)$ là hàm dưới dấu tích phân; x, y là các biến tích phân.

Nhận xét

➢ $\iint_D dxdy = S(D)$ (diện tích của miền D).

b) Định lý

• Hàm $f(x, y)$ liên tục trong miền D đóng và bị chặn thì khả tích trong D.

➢ Chương 2. Tích phân bội

1.3. Tính chất của tích phân bội hai

Giả sử các tích phân dưới đây đều tồn tại.

• ***Tính chất 1.*** $\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_D f(u, v)dudv.$

• ***Tính chất 2***

$$\iint_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint_D fdxdy \pm \iint_D gdxdy;$$

$$\iint_D kf(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy,\ k \in \mathbb{R}.$$

• ***Tính chất 3***

Nếu chia miền D thành D_1, D_2 bởi đường cong có diện tích bằng 0 thì:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

1.4. Phương pháp tính tích phân bội hai

1.4.1. Đưa về tích phân lặp

a) Công thức tính tích phân lặp

▪ Nếu miền lấy tích phân D là:

$$D = \{(x, y) : a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

thì ta có:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.}$$

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

- Nếu miền lấy tích phân D là:

$$D = \{(x,\ y) : x_1(y) \le x \le x_2(y),\ \ c \le y \le d\}$$

thì ta có:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.}$$

Chú ý

1) Nếu miền D là hình chữ nhật,
$D = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\} = [a;\ b] \times [c;\ d]$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

2) Nếu $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$
và $f(x,\ y) = u(x).v(y)$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b u(x)dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} v(y)dy.$$

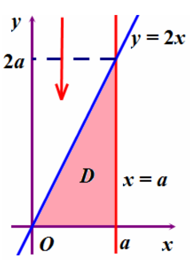
3) Nếu $D = \{(x,y) : x_1(y) \le x \le x_2(y),\ c \le y \le d\}$
và $f(x,\ y) = u(x).v(y)$ thì:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d v(y)dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} u(x)dx.$$

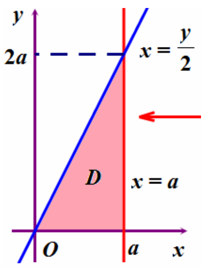
4) Nếu D là miền phức tạp thì ta chia D ra thành những miền đơn giản.

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

VD 1. Cho $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Xác định cận tích phân lặp với miền D giới hạn bởi $y = 0,\ y = 2x,\ x = a > 0$.



Hình a



Hình b

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

VD 2. Tính tích phân $I = \iint\limits_D 6xy^2 dxdy$.

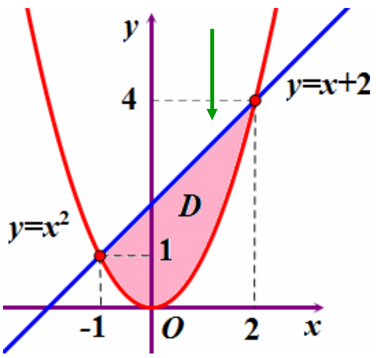
Trong đó, $D = [0;\ 2] \times [-1;\ 1]$.

VD 3. Tính tích phân $I = \iint\limits_D (2x + y)dxdy$.

Trong đó, $D = \{y \le x \le 1 - y,\ -2 \le y \le 0\}$.

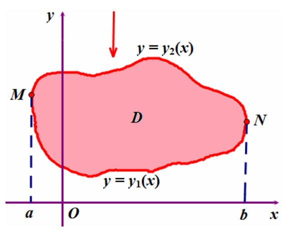
VD 4. Tính tích phân $I = \iint\limits_D ydxdy$, trong đó miền D giới hạn bởi các đường $y = x + 2,\ y = x^2$.

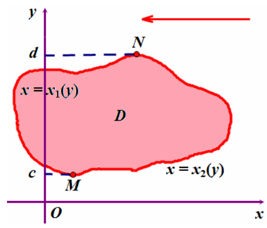
➢ Chương 2. Tích phân bội hai



➢ Chương 2. Tích phân bội hai

b) Đổi thứ tự lấy tích phân

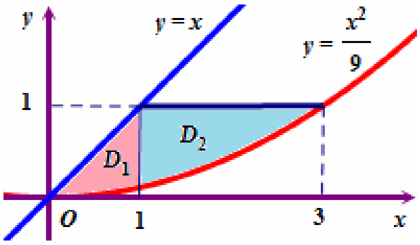




$$I = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad I = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

VD 5. Đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân sau:

$$I = \int_0^1 dx \int_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)dy.$$



1.4.2. Phương pháp đổi biến

a) Công thức đổi biến tổng quát

- Đặt $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.

Khi đó miền D_{xy} trở thành:

$D_{xy} = \{(x, y) : x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ (u,v) \in D_{uv}\}.$

- Nếu ***Jacobien*** $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0$ thì ta có:

$$\boxed{\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)).|J|\,dudv.}$$

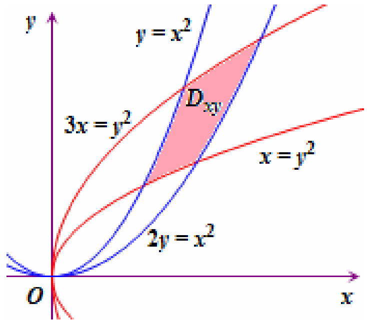
VD 6. Bằng cách đổi biến $x = \dfrac{u+v}{2}$, $y = \dfrac{u-v}{2}$ ta có miền $D \equiv D_{xy}$ trở thành $D_{uv} = \{1 \le u \le 3,\ 2 \le v \le 5\}$.

Hãy tính tích phân $I = \iint_D (x^2 - y^2)dxdy$.

Chú ý. $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}}.$

VD 7. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 parapol:

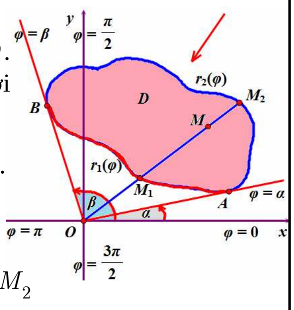
$$y = x^2,\ 2y = x^2,\ x = y^2,\ 3x = y^2.$$



b) Đổi biến trong tọa độ cực

Trong mpOxy, xét miền D. Vẽ 2 tia OA, OB tiếp xúc với miền D và

$\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}\right) = \alpha$, $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OB}\right) = \beta$.



Khi đó:

$$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} OM_1 \le OM \le OM_2 \\ \alpha \le \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right) \le \beta. \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ với $r = OM$, $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Khi đó, miền D trở thành:

$D_{r\varphi} = \{(r, \varphi) : r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta\}.$

Ta có $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$

Vậy:

$$\boxed{\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi).rdr.}$$

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

Chú ý

1) Đổi biến trong tọa độ cực thường dùng khi biên của D là đường tròn hoặc elip.

2) Để tìm $r_1(\varphi)$, $r_2(\varphi)$ ta thay $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$ vào phương trình của biên D.

3) Nếu cực O nằm trong D và mỗi tia từ O chỉ cắt biên D *tại* 1 *điểm* thì: $I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

4) Nếu cực O nằm trên biên của D thì:

$$I = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

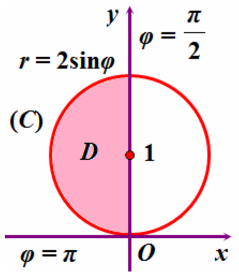
5) Nếu biên của D là *elip* thì ta đặt: $\begin{cases} x = ra\cos\varphi \\ y = rb\sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow D_{r\varphi} = \{(r,\ \varphi): 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le r \le 1\},$$

$$J = abr \Rightarrow I = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 f(ra\cos\varphi, rb\sin\varphi) r dr.$$

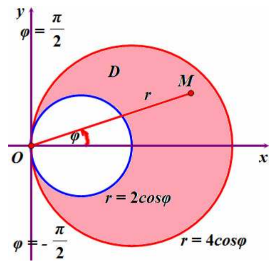
➢ Chương 2. Tích phân bội hai

VD 8. Hãy biểu diễn tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong tọa độ cực. Biết miền D giới hạn bởi hình tròn có biên là $(C): x^2 + y^2 - 2y = 0$ và nằm trong góc phần tư thứ hai.



➢ Chương 2. Tích phân bội hai

VD 9. Hãy biểu diễn tích phân $I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$ trong tọa độ cực. Biết miền D nằm ngoài đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 = 2x$ và nằm trong $(C_2): x^2 + y^2 = 4x$.



➢ Chương 2. Tích phân bội hai

VD 10. Tích phân $I = \iint\limits_D \sqrt{4 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2}\, dxdy$, với miền D giới hạn bởi $(E): \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ và nằm trong góc phần tư thứ nhất có giá trị là:

A. $\left(8 - 3\sqrt{3}\right)\pi$; B. $\left(3\sqrt{3} - 8\right)\pi$;

C. $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\pi$; D. $\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\pi$.

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

§2. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN BỘI HAI

2.1. Tính diện tích hình phẳng

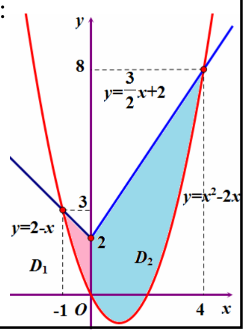
Diện tích S của hình phẳng D là:

$$\boxed{S = \iint\limits_D dxdy.}$$

VD 1. Tính diện tích hình phẳng D giới hạn bởi:

$y = x^2 - 2x$, $y = 2 - x$

và $y = \frac{3}{2}x + 2$.



➢ Chương 2. Tích phân bội hai

2.2. Tính thể tích khối trụ

Cho hình trụ V có các đường sinh song song với Oz, hai đáy giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $z = f(x, y)$ với $f(x, y) > 0$ và liên tục $\forall (x, y) \in D$.

Khi đó, thể tích của khối trụ là:

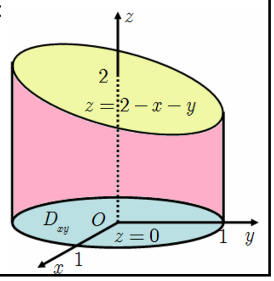
$$\boxed{V = \iint_D f(x,y)dxdy.}$$

VD 2. Tính thể tích V giới hạn bởi phần hình trụ

$$x^2 + y^2 = 1$$

và hai mặt phẳng

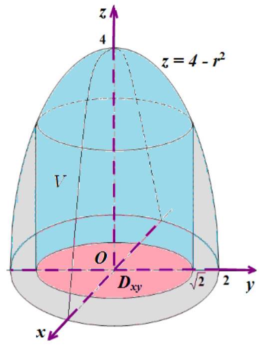
$x + y + z - 2 = 0$, $z = 0$.



➢ Chương 2. Tích phân bội hai

VD 3. Tính thể tích khối V giới hạn bởi các mặt

$$x^2 + y^2 = 4 - z,\ x^2 + y^2 \le 2 \text{ và } z = 0.$$



➢ Chương 2. Tích phân bội hai

2.3. Khối lượng của bản phẳng (tham khảo)

Xét một bản phẳng chiếm miền $D \subset \mathbb{R}^2$ (đóng và bị chặn) có *khối lượng riêng* (mật độ khối lượng) tại điểm $M(x,y) \in D$ là hàm $\rho(x,y)$ liên tục trên D.

Khi đó, khối lượng của bản phẳng là:

$$\boxed{m = \iint_D \rho(x,y)dxdy.}$$

2.4. Momen tĩnh (tham khảo)

a) Định nghĩa

Momen tĩnh của một chất điểm có khối lượng m đặt tại điểm $M(x,y)$ trong Oxy đối với các trục Ox, Oy theo thứ tự là: $\boxed{M_{y=0} = my,\ M_{x=0} = mx.}$

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

b) Công thức tính

Momen tĩnh của bản phẳng chiếm diện tích D trong mpOxy có *khối lượng riêng* tại điểm $M(x,y) \in D$ là hàm $\rho(x,y)$ liên tục trên D là:

$$\boxed{M_{y=0} = \iint_D y\rho(x,y)dxdy,\ M_{x=0} = \iint_D x\rho(x,y)dxdy.}$$

2.5. Trọng tâm của bản phẳng (tham khảo)

Xét một bản phẳng chiếm miền $D \subset \mathbb{R}^2$ (đóng và bị chặn) có *khối lượng riêng* tại điểm $M(x,y) \in D$ là hàm $\rho(x,y)$ liên tục trên D.

Khi đó, tọa độ trọng tâm G của bản phẳng là:

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

$$x_G = \frac{\iint_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy} = \frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy,$$

$$y_G = \frac{\iint_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint_D \rho(x,y)dxdy} = \frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Nhận xét

Khi bản phẳng đồng chất thì $\rho(x,y)$ là hằng số nên:

$$\boxed{x_G = \frac{1}{S(D)}\iint_D xdxdy,\ y_G = \frac{1}{S(D)}\iint_D ydxdy.}$$

➢ Chương 2. Tích phân bội hai

2.6. Momen quán tính (tham khảo)

a) Định nghĩa

Momen quán tính của một chất điểm có khối lượng m đặt tại điểm $M(x,y)$ trong Oxy đối với các trục Ox, Oy và gốc tọa độ O theo thứ tự là:

$$\boxed{I_x = my^2,\ I_y = mx^2,\ I_O = I_x + I_y = m(x^2 + y^2).}$$

b) Công thức tính

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy,\ I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy,$$

$$I_O = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)\rho(x,y)dxdy.$$

………………………………………………………………

➢ Chương 3. Tích phân đường

§1. Tích phân đường loại 1
§2. Tích phân đường loại 2
……………………………

§1. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI I

1.1. Định nghĩa

• Giả sử đường cong L trong mặt phẳng Oxy có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t)$ với $t \in [a;\ b]$ và $f(x,\ y)$ là hàm số xác định trên L. Chia L thành n cung không dẫm lên nhau bởi các điểm chia ứng với:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b.$$

➢ Chương 3. Tích phân đường

• Gọi độ dài cung thứ i là Δs_i. Trên cung thứ i lấy điểm tùy ý $M_i(x(t_i),\ y(t_i))$. Tổng $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ được gọi là ***tổng tích phân đường loại* 1** của hàm $f(x,\ y)$ trên đường cong L.

• Giới hạn $\lim\limits_{max\Delta s_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$ tồn tại hữu hạn được gọi là ***tích phân đường loại* 1** của hàm $f(x,\ y)$ trên đường cong L.

Ký hiệu là $\int\limits_L f(x,y)ds$ hay $\int\limits_L f(x,y)dl$.

➢ Chương 3. Tích phân đường

Chú ý

1) Tích phân đường loại 1 có tất cả các tính chất của tích phân xác định.

2) Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc vào chiều của đường cong L, nghĩa là:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)ds.$$

3) Nếu đường cong L trơn từng khúc và hàm số $f(x,\ y)$ liên tục trên L thì $\int\limits_L f(x,y)ds$ tồn tại.

➢ Chương 3. Tích phân đường

1.2. Phương pháp tính tích phân đường loại 1

a) Đường cong *L* có phương trình tham số

Nếu đường cong L có phương trình tham số: $x = x(t),\ y = y(t)$, với $a \le t \le b$ thì:

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\ dt.}$$

VD 1. Tính tích phân $I = \int\limits_L xds$. Trong đó, L là cung tròn có phương trình: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$.

➢ Chương 3. Tích phân đường

VD 2. Tính tích phân $I = \int\limits_L (x - y)dl$. Trong đó, L là đoạn thẳng nối điểm $A(0;\ 2)$ và điểm $B(-2;-3)$.

VD 3. Tính tích phân $I = \int\limits_L (1 - 2x^2)2ydl$. Trong đó, L là đoạn thẳng nối điểm $A(1;-3)$ và điểm $B(1;-7)$.

Chú ý

Phương trình tham số của đường thẳng AB là không duy nhất, nhưng kết quả tính tích phân vẫn không thay đổi.

➢ Chương 3. Tích phân đường

b) Đường cong *L* có phương trình tổng quát

• Nếu L có phương trình $y = y(x)$ với $a \le x \le b$ thì:

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x)).\sqrt{1 + \left(y_x'\right)^2}\ dx.}$$

• Nếu L có phương trình $x = x(y)$ với $a \le y \le b$ thì:

$$\boxed{\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x(y),y).\sqrt{\left(x_y'\right)^2 + 1}\ dy.}$$

➢ Chương 3. Tích phân đường

Đặc biệt

• Nếu L có phương trình $y = \alpha \in \mathbb{R}$ với $a \le x \le b$ thì:

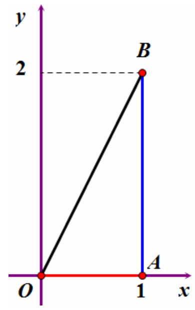
$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,\alpha)dx.}$$

• Nếu L có phương trình $x = \alpha \in \mathbb{R}$ với $a \le y \le b$ thì:

$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(\alpha,y)dy.}$$

➢ Chương 3. Tích phân đường

VD 4. Tính tích phân $I = \int_L (x+y)ds$ với L là ΔOAB có các đỉnh $O(0;\,0)$, $A(1;\,0)$, $B(1;\,2)$.



➢ Chương 3. Tích phân đường

c) Đường cong L trong tọa độ cực

Nếu phương trình của đường cong L được cho trong tọa độ cực $r = r(\varphi)$ với $\alpha \le \varphi \le \beta$ thì ta xem φ là tham số.

Khi đó, phương trình của L là:

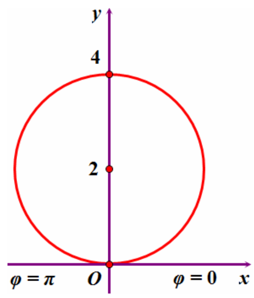
$x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi,\ \alpha \le \varphi \le \beta.$

Đặt $f \equiv f(r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$, ta có công thức:

$$\boxed{\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f.\sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\,d\varphi.}$$

➢ Chương 3. Tích phân đường

VD 5. Tính tích phân $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$ với L là đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 4y = 0$.



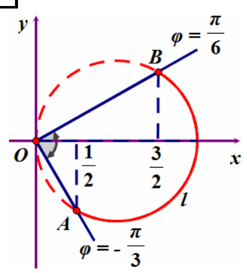
➢ Chương 3. Tích phân đường

1.3. Ứng dụng của tích phân đường loại 1

a) Tính độ dài cung L

Độ dài của cung L là $\boxed{l = \int_L ds.}$

VD 6. Tính độ dài cung tròn $x^2 + y^2 - 2x = 0$ từ điểm $A\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ đến $B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ và không đi qua gốc O.



➢ Chương 3. Tích phân đường

b) Tính khối lượng và trọng tâm của dây cung L

• Nếu một dây cung L có hàm mật độ khối lượng $\rho(x,y)$ phụ thuộc vào điểm $M \in L$ thì khối lượng của dây là:

$$\boxed{m = \int_L \rho(x,y)ds.}$$

• Trọng tâm G của dây cung L ứng với $\rho(x,y)$ là:

$$\boxed{x_G = \frac{1}{m}\int_L x\rho(x,y)ds,\ y_G = \frac{1}{m}\int_L y\rho(x,y)ds.}$$

VD 7. Cho một dây thép có dạng nửa đường tròn với phương trình $x^2 + y^2 = 1,\ y \ge 0$. Biết hàm mật độ khối lượng là $\rho(x,y) = 2y$.

Tìm khối lượng và trọng tâm của dây thép.

➢ Chương 3. Tích phân đường

§2. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI II

2.1. Bài toán mở đầu

Tính công sinh ra do lực $\vec{F} = \vec{F}(M)$ tác dụng lên chất điểm $M(x,\ y)$ di chuyển dọc theo đường cong L.

• Nếu L là đoạn thẳng AB thì công sinh ra là:

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{AB}\right).$$

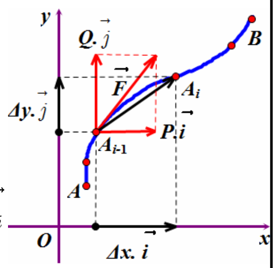
• Nếu L là cung AB thì ta chia L thành n cung nhỏ bởi các điểm chia $A = A_0,\ A_1, \ldots,\ A_n = B$. Trên mỗi cung $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ ta lấy điểm $M_i(x_i,\ y_i)$ tùy ý.

Chiếu $\vec{F}(M_i)$, $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ lần lượt lên trục Ox, Oy ta được:

➢ Chương 3. Tích phân đường

$$\vec{F}(M_i) = P(M_i).\vec{i} + Q(M_i).\vec{j}$$

và $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i.\vec{i} + \Delta y_i.\vec{j}$.



Khi đó, công W sinh ra là:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(M_i)\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i\right].$$

Vậy $W = \lim\limits_{max\left|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right| \to 0} \sum_{i=1}^{n}\left[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i\right]$.

➢ Chương 3. Tích phân đường

2.2. Định nghĩa (tích phân đường theo tọa độ)

• Cho hai hàm số $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ xác định trên đường cong L. Chia L như bài toán mở đầu. Khi đó:

$I_n = \sum_{i=1}^{n}\left[P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i\right]$ được gọi là *tổng tích phân đường loại* 2 của $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ trên L.

• Giới hạn $\lim\limits_{max\left|\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\right| \to 0} I_n$ tồn tại hữu hạn được gọi là *tích phân đường loại* 2 của $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ trên L.

Ký hiệu là: $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

➢ Chương 3. Tích phân đường

Nhận xét

• Tích phân đường loại 2 có tất cả các tính chất như tích phân xác định.

• Tích phân đường loại 2 phụ thuộc vào chiều của L vì khi thay đổi chiều thì $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \left(\Delta x_i,\ \Delta y_i\right)$ đổi dấu, do đó khi viết tích phân ta cần ghi rõ điểm đầu và cuối:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

• Từ định nghĩa tổng tích phân, ta có thể viết:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy.$$

➢ Chương 3. Tích phân đường

Định lý

Nếu hai hàm số $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ liên tục trong miền mở chứa đường cong L trơn từng khúc thì tồn tại tích phân đường loại 2 của $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ dọc theo L.

Chú ý

Nếu L là đường cong phẳng và kín lấy theo chiều dương (*ngược chiều kim đồng hồ*) thì ta dùng ký hiệu:

$$\boxed{\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.}$$

➢ Chương 3. Tích phân đường

2.3. Phương pháp tính tích phân đường loại 2

a) Đường cong L có phương trình tham số

Nếu đường cong L có phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t)$ thì:

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{t_A}^{t_B}\left[P(x(t),y(t))x'_t + Q(x(t),y(t))y'_t\right]dt.}$$

VD 1. Tính tích phân $I = \int\limits_L dx + xdy$.

Trong đó L là cung có phương trình tham số:

$$x = 2t^2,\ y = 2 - 3t$$

nối từ điểm $A(0;\ 2)$ đến điểm $B(2;\ 5)$.

VD 2. Tính tích phân $I = \oint\limits_L 2xdx - dy$ với L là elip $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều dương.

b) Đường cong *L* có phương trình tổng quát

• Nếu đường cong L có phương trình $y = y(x)$ thì:

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left[P(x, y(x)) + Q(x, y(x)).y'_x\right] dx.}$$

• Nếu đường cong L có phương trình $x = x(y)$ thì:

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{y_A}^{y_B} \left[P(x(y), y).x'_y + Q(x(y), y)\right] dy.}$$

Đặc biệt

• Nếu đường cong L có phương trình $y = \alpha \in \mathbb{R}$ thì:

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x, \alpha)dx.}$$

• Nếu đường cong L có phương trình $x = \alpha \in \mathbb{R}$ thì:

$$\boxed{\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_{y_A}^{y_B} Q(\alpha, y)dy.}$$

VD 3. Tính tích phân $I = \int\limits_L (x - y)dx + (x + y)dy$.

Trong đó L là đường nối 2 điểm $O(0;\ 0)$ và $A(1;\ 1)$ với:

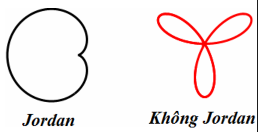
1) L là đường thẳng $y = x$; 2) L là đường cong $y = x^2$.

VD 4. Tính tích phân $I = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} dx + 4xydy$ với $\overset{\frown}{BA}$ có phương trình $y = \sqrt{x}$ và điểm $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 2)$.

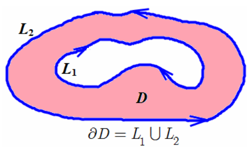
2.4. Công thức Green (liên hệ với tích phân kép)

a) Xác định chiều trên biên của miền đa liên

➢ Đường cong L được gọi là ***Jordan*** nếu nó không tự cắt.



➢ Cho miền D là miền đa liên, liên thông, bị chặn có biên ∂D *Jordan* kín trơn từng khúc. Chiều dương của ∂D là chiều mà khi di chuyển dọc theo biên ta thấy miền D nằm về phía bên tay trái.



b) Công thức Green

Cho miền D (xác định như mục a). Nếu $P(x, y)$, $Q(x, y)$ và các đạo hàm riêng liên tục trên miền mở chứa D thì:

$$\boxed{\oint\limits_{\partial D} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy.}$$

▪ **Hệ quả**

Diện tích của miền D được tính theo công thức:

$$\boxed{S(D) = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial D} xdy - ydx.}$$

VD 5. Tính tích phân $I = \oint\limits_L xdy - ydx$.

Trong đó, L là $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ lấy theo chiều dương.

VD 6. Tính tích phân

$$I = \oint\limits_C (x \arctan x + y^2)dx + (x + 2xy + y^2 e^{-y})dy$$

với C là đường tròn $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

➤ Chương 3. Tích phân đường

VD 7*. Tính $I = \oint\limits_L \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ trong các trường hợp:

1) L là đường cong kín không bao quanh gốc tọa độ O;
2) L là đường cong kín bao quanh gốc tọa độ O.

Giải. 1) Các hàm $P = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ và các đạo hàm riêng liên tục trên $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;\ 0)\}$ nên áp dụng Green:

$$I = \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = 0.$$

➤ Chương 3. Tích phân đường

2) Hàm $P = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ không liên tục tại $O(0;\ 0)$ nên ta không áp dụng công thức Green được.

Giả sử L có phương trình trong tọa độ cực là $r = r(\varphi)$.
Khi đó, phương trình tham số của L là:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi,\ y = r(\varphi)\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Do $\begin{cases} dx = x'_r dr + x'_\varphi d\varphi = \cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi \\ dy = y'_r dr + y'_\varphi d\varphi = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi \end{cases}$ nên

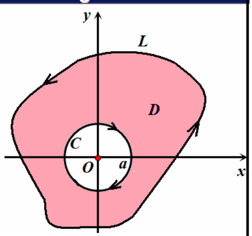
$$xdy - ydx = r^2\cos^2\varphi d\varphi + r^2\sin^2\varphi d\varphi = r^2 d\varphi$$

$$\Rightarrow I = \oint\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^2 d\varphi}{r^2} = 2\pi.$$

➤ Chương 3. Tích phân đường

Cách khác

Xét miền D giới hạn bởi L và $(C): x^2 + y^2 = a^2\ (a > 0)$ (nằm trong L). Khi đó, chiều của L và C ngược nhau.



....
....
....

➤ Chương 3. Tích phân đường

2.5. Điều kiện để tích phân đường không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

a) Định lý

Giả sử các hàm số P, Q và các đạo hàm riêng cấp của chúng liên tục trong miền mở *đơn liên* D. Khi đó, bốn mệnh đề sau tương đương:

1) $P'_y = Q'_x,\ \forall (x, y) \in D$.

2) $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ dọc theo mọi đường cong kín L nằm trong D.

➤ Chương 3. Tích phân đường

3) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, trong đó $\overset{\frown}{AB}$ nằm trong D, chỉ phụ thuộc vào hai đầu mút A, B mà *không phụ thuộc* vào đường nối giữa A với B.

4) Biểu thức $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ là *vi phân toàn phần* của hàm $u(x,\ y)$ nào đó trong miền D.

VD 8. Tính $I = \int\limits_L \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}dy$. Biết L là đường trơn từng khúc nối điểm $A(-1;-1)$ và $B(-2;-2)$ nằm trong miền D không chứa gốc tọa độ O.

➤ Chương 3. Tích phân đường

VD 9. Tích phân đường nào sau đây không phụ thuộc vào các đường trơn từng khúc nối hai điểm A, B ?

A. $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (4xy^3 + 2x)dx + (y^4 + 2y - x)dy$.

B. $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (4xy^3 + 2x - 1)dx + (y^4 + 6x^2y^2 - 1)dy$.

C. $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (4xy^3 + 2x)dx - (y^4 + 2y - x)dy$.

D. $I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (4xy^3 + 2x - 1)dx - (y^4 + 6x^2y^2 - 1)dy$.

➢ Chương 3. Tích phân đường

b) Hệ quả

Nếu $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ là vi phân toàn phần của hàm $u(x,\ y)$ nào đó trong miền mở đơn liên D thì:

$$\boxed{\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=u(B)-u(A).}$$

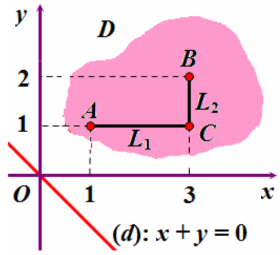
VD 10. Cho biết $u(x,y)=xe^y-ye^x+2x+1$ có vi phân toàn phần là $du=(e^y-ye^x+2)dx+(xe^y-e^x)dy$.

Hãy tính $I=\int\limits_{(1,1)}^{(1,0)}(e^y-ye^x+2)dx+(xe^y-e^x)dy.$

A. $I=-1$; B. $I=-2$; C. $I=1$; D. $I=2$.

➢ Chương 3. Tích phân đường

VD 11. Tính tích phân $I=\int\limits_{(1,1)}^{(3,2)}\dfrac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$ theo một đường trơn từng khúc không cắt $(d):x+y=0$.



....

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

§1. Phương trình vi phân cấp 1
§2. Phương trình vi phân cấp 2
....

§1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I

1.1. Khái niệm cơ bản về phương trình vi phân cấp 1

- Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình có dạng tổng quát $F(x,y,y')=0$ (*). Nếu từ (*) ta giải được theo y' thì (*) trở thành $y'=f(x,y)$.
- Nghiệm của (*) có dạng $y=y(x)$ chứa hằng số C được gọi là *nghiệm tổng quát*. Khi thế điều kiện $y_0=y(x_0)$ cho trước (thường gọi là *điều kiện đầu*) vào nghiệm tổng quát ta được giá trị C_0 cụ thể và nghiệm lúc này được gọi là *nghiệm riêng* của (*).

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

VD 1. Cho phương trình vi phân $y'-x=0$ (*).

Xét hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}+C$, ta có:

$y'-x=0$ thỏa phương trình (*).

Suy ra $y=\dfrac{x^2}{2}+C$ là nghiệm tổng quát của (*).

Thế $x=2,\ y=1$ vào $y=\dfrac{x^2}{2}+C$, ta được:

$C=-1\Rightarrow y=\dfrac{x^2}{2}-1$ là nghiệm riêng của (*) ứng với điều kiện đầu $y(2)=1$.

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

1.2. Một số phương trình vi phân cấp 1 cơ bản

1.2.1. Phương trình vi phân cấp 1 với biến phân ly

➢ Phương trình vi phân với biến phân ly có dạng:

$$\boxed{f(x)dx+g(y)dy=0\ (1).}$$

➢ ***Phương pháp giải***

Lấy tích phân hai vế của (1) ta được nghiệm tổng quát:

$$\int f(x)dx+\int g(y)dy=C.$$

VD 2. Giải phương trình vi phân $\dfrac{xdx}{1+x^2}+\dfrac{ydy}{1+y^2}=0.$

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

VD 3. Giải phương trình vi phân $y'=xy(y+2)$.

VD 4. Giải ptvp $x^2(y+1)dx+(x^3-1)(y-1)dy=0$.

VD 5. Giải ptvp $xy'+y=y^2$ thỏa điều kiện $y(1)=\dfrac{1}{2}$.

1.2.2. Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1

a) Hàm đẳng cấp hai biến số

• Hàm hai biến $f(x,y)$ được gọi là đẳng cấp bậc n nếu với mọi $k > 0$ thì $f(kx, ky) = k^n f(x,y)$.

Chẳng hạn, hàm số:

$f(x,y) = \dfrac{x-y}{2x+3y}$ là đẳng cấp bậc 0,

$f(x,y) = \dfrac{4x^2+3xy}{5x-y}$ là đẳng cấp bậc 1,

$f(x,y) = 3x^2 - 2xy$ là đẳng cấp bậc 2.

b) Phương trình vi phân đẳng cấp

• Phương trình vi phân đẳng cấp cấp 1 có dạng:

$$\boxed{y' = f(x,y) \quad (2).}$$

Trong đó, $f(x,y)$ là hàm số đẳng cấp bậc 0.

Phương pháp giải

***Bước* 1.** Biến đổi (2) $\Leftrightarrow y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

***Bước* 2.** Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' = u + xu'$.

***Bước* 3.** (2) $\Rightarrow u + xu' = \varphi(u) \Rightarrow \dfrac{du}{\varphi(u)-u} = \dfrac{dx}{x}$

$\left(\varphi(u) - u \neq 0 \neq x\right)$ (đây là ptvp có biến phân ly).

VD 6. Giải phương trình vi phân $y' = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{xy}$.

VD 7. Giải phương trình vi phân $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

với điều kiện đầu $y(1) = 0$.

1.2.3. Phương trình vi phân toàn phần

• Cho hai hàm số $P(x,y)$, $Q(x,y)$ và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở D, thỏa điều kiện $Q'_x = P'_y$, $\forall (x,y) \in D$. Nếu tồn tại hàm $u(x,y)$ sao cho

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

thì phương trình vi phân có dạng:

$$\boxed{P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad (3)}$$

được gọi là phương trình *vi phân toàn phần*.

• Nghiệm tổng quát của (3) là $\boxed{u(x,y) = C}$.

Nhận xét

$$u'_x(x,y) = P(x,y),\ u'_y(x,y) = Q(x,y).$$

Phương pháp giải

***Bước* 1.** Từ (3) ta có $u'_x = P$ (3*a*) và $u'_y = Q$ (3*b*).

***Bước* 2.** Lấy tích phân (3*a*) theo biến x ta được:

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx = \varphi(x,y) + C(y) \text{ (3c)}.$$

Trong đó, $C(y)$ là hàm theo biến y.

***Bước* 3.** Đạo hàm (3*c*) theo biến y ta được:

$$u'_y = \varphi'_y + C'(y) \text{ (3d)}.$$

***Bước* 4.** So sánh (3*b*) và (3*d*) ta tìm được $C(y)$.

Thay $C(y)$ vào (3*c*) ta được $u(x,y)$.

VD 8. Cho phương trình vi phân:

$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (x^2 + 6xy + 3)dy = 0$ (*).

1) Chứng tỏ (*) là phương trình vi phân toàn phần.

2) Giải phương trình (*).

VD 9. Giải ptvp $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$.

1.2.4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1

• Phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 có dạng:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x) \ \ (4).}$$

• Khi $q(x) = 0$ thì (4) được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 *thuần nhất*.

Phương pháp giải
(phương pháp biến thiên hằng số Lagrange)

***Bước* 1.** Tìm biểu thức $A(x) = e^{-\int p(x)dx}$.

***Bước* 2.** Tìm biểu thức $B(x) = \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx$.

***Bước* 3.** Nghiệm tổng quát là $y = A(x)\left[B(x) + C\right]$.

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

Nhận xét. $B(x) = \int q(x).e^{\int p(x)dx}dx = \int \dfrac{q(x)}{A(x)}dx.$

Chú ý

• Khi tính các tích phân trên, ta chọn hằng số là 0.

• Phương pháp biến thiên hằng số là đi tìm nghiệm tổng quát của (4) dưới dạng: $\boxed{y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.}$

VD 10. Trong phương pháp biến thiên hằng số, ta đi tìm nghiệm tổng quát của $y' + 2\dfrac{y}{x} = 4x\ln x$ dưới dạng:

A. $y = \dfrac{C(x)}{x^2}$; B. $y = \dfrac{C(x)}{x^3}$;

C. $y = \dfrac{C(x)}{x}$; D. $y = -\dfrac{C(x)}{x}$.

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

VD 11. Giải phương trình vi phân $y' - x^2y = 0$ thỏa điều kiện $y\big|_{x=3} = -e^9$.

VD 12. Giải phương trình $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

1.2.5. Phương trình vi phân Bernoulli

• Phương trình vi phân Bernoulli có dạng:

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha} \ \ (5).}$$

• Khi $\alpha = 0$ hoặc $\alpha = 1$ thì (5) là tuyến tính cấp 1.

• Khi $p(x) = q(x) = 1$ thì (5) là pt có biến phân ly.

Phương pháp giải (với α khác 0 và 1)

***Bước* 1.** Với $y \neq 0$, ta chia hai vế cho y^{α}:

$$(5) \Rightarrow \frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\frac{y}{y^{\alpha}} = q(x)$$

$$\Rightarrow y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

***Bước* 2.** Đặt $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha}$, ta được:

$(5) \Rightarrow z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)$
(đây là phương trình tuyến tính cấp 1).

VD 13. Giải phương trình vi phân $y' + \dfrac{y}{x} = xy^2$ với điều kiện đầu $x = 1,\ y = 1$.

VD 14. Giải phương trình vi phân $y' - 2xy = x^3y^4$.

➢ Chương 4. Phương trình vi phân

§2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP II

2.1. Các dạng phương trình vi phân cấp 2 khuyết

2.1.1. Phương trình khuyết *y* và *y'*

• Phương trình vi phân khuyết y và y' có dạng:

$$\boxed{y'' = f(x) \quad (1).}$$

Phương pháp giải

• Lấy tích phân hai vế (1) hai lần:

$$y'' = f(x) \Rightarrow y' = \int f(x)dx = \varphi(x) + C_1$$

$$\Rightarrow y = \int \varphi(x)dx + C_1x = \psi(x) + C_1x + C_2.$$

VD 1. Giải phương trình vi phân $y'' = x^2$.

VD 2. Giải ptvp $y'' = e^{2x}$ với $y(0) = -\frac{7}{4},\ y'(0) = \frac{3}{2}$.

2.1.2. Phương trình khuyết *y*

• Phương trình vi phân khuyết y có dạng:

$$\boxed{y'' = f(x, y') \quad (2).}$$

Phương pháp giải

• Đặt $z = y'$ đưa (2) về phương trình tuyến tính cấp 1.

VD 3. Giải phương trình vi phân $y'' = x - \frac{y'}{x}$.

VD 4. Giải pt vi phân $y'' - \frac{y'}{x-1} - x(x-1) = 0$

với điều kiện $y(2) = 1,\ y'(2) = -1$.

2.1.3. Phương trình khuyết *x*

• Phương trình vi phân khuyết x có dạng:

$$\boxed{y'' = f(y, y') \quad (3).}$$

Phương pháp giải

• Đặt $z = y'$ ta có:

$$y'' = z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx} = z\frac{dz}{dy}.$$

Khi đó, (3) trở thành ptvp với biến số phân ly.

VD 5. Giải phương trình vi phân $(1-y)y'' + 2(y')^2 = 0$.

VD 6. Giải phương trình vi phân $y'' + 2y'(1-2y) = 0$

với điều kiện $y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{1}{2}$.

2.2. Phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính với hệ số hằng

2.2.1. Phương trình thuần nhất

• Phương trình thuần nhất có dạng:

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0,\ \left(a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}\right) \quad (4).}$$

Phương pháp giải. Xét phương trình đặc trưng của (4):

$$\boxed{k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \quad (5).}$$

➢ ***Trường hợp 1***

Phương trình (5) có hai nghiệm thực phân biệt $k_1,\ k_2$.

Khi đó, (4) có hai nghiệm riêng $y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}$

và nghiệm tổng quát là $\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.}$

➢ ***Trường hợp 2***

Phương trình (5) có nghiệm kép thực k.

Khi đó, (4) có hai nghiệm riêng $y_1 = e^{kx},\ y_2 = xe^{kx}$

và nghiệm tổng quát là $\boxed{y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.}$

➢ ***Trường hợp 3***

Phương trình (5) có hai nghiệm phức liên hợp

$$k = \alpha \pm i\beta.$$

Khi đó, (4) có hai nghiệm riêng:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

và nghiệm tổng quát là:

$$\boxed{y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).}$$

VD 7. Giải phương trình vi phân $y'' + 2y' - 3y = 0$.

VD 8. Giải phương trình vi phân $y'' - 6y' + 9y = 0$.

VD 9. Giải phương trình vi phân $y'' + 16y = 0$.

VD 10. Giải phương trình vi phân $y'' + 2y' + 7y = 0$.

VD 11. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y'' - y' + y = 0.$$

2.2.2. Phương trình không thuần nhất

• Phương trình không thuần nhất có dạng:

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),\ \ (a_1,\ a_2 \in \mathbb{R})\ \ (6).}$$

a) Phương pháp giải tổng quát

• Nếu (4) có hai nghiệm riêng $y_1(x),\ y_2(x)$ thì (6) có nghiệm tổng quát là $\boxed{y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).}$

• Để tìm $C_1(x)$ và $C_2(x)$, ta giải hệ *Wronsky*:

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}}$$

VD 12. Giải phương trình vi phân $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ (*a*).

Giải. Xét phương trình thuần nhất $y'' + y = 0$ (*b*) ta có:

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1$$

$\Rightarrow y_1 = \cos x,\ y_2 = \sin x$ là 2 nghiệm riêng của (*b*).

Nghiệm tổng quát của (*a*) có dạng:

$$y = C_1(x).\cos x + C_2(x).\sin x.$$

Ta có hệ Wronsky:

$$\begin{cases} \cos x.C_1'(x) + \sin x.C_2'(x) = 0 \\ -\sin x.C_1'(x) + \cos x.C_2'(x) = \dfrac{1}{\cos x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x \cos x.C_1'(x) + \sin^2 x.C_2'(x) = 0 \\ -\sin x \cos x.C_1'(x) + \cos^2 x.C_2'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x} \\ C_2'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = \ln\left|\cos x\right| + C_1 \\ C_2(x) = x + C_2. \end{cases}$$

Vậy phương trình (a) có nghiệm tổng quát là:

$$y = \left(\ln\left|\cos x\right| + C_1\right)\cos x + \left(x + C_2\right)\sin x.$$

b) CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐẶC BIỆT

➢ **Phương pháp cộng nghiệm**

• **Định lý**

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (6) bằng *tổng* nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (4) với 1 nghiệm riêng của (6).

VD 13. Cho phương trình vi phân:

$$y'' - 2y' + 2y = (2 + x^2)e^x\ (*).$$

1) Chứng tỏ (*) có 1 nghiệm riêng là $y = x^2 e^x$.

2) Tìm nghiệm tổng quát của (*).

VD 14. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$y'' + y' = 2\sin 2x + 4\cos 2x,$$

biết 1 nghiệm riêng là $y = -\cos 2x$.

➢ **Phương pháp chồng chất nghiệm**

• **Định lý**

Cho phương trình vi phân:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)\ (7).$$

Nếu $y_1(x)$ và $y_2(x)$ lần lượt là nghiệm riêng của

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),\ y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$$

thì nghiệm riêng của (7) là:

$$\boxed{y = y_1(x) + y_2(x).}$$

VD 15. Tìm nghiệm tổng quát của $y'' - y' = 2\cos^2 x$ (*).

Cho biết $y'' - y' = 1$ và $y'' - y' = \cos 2x$ lần lượt có nghiệm riêng $y_1 = -x,\ y_2 = -\dfrac{2}{10}\cos 2x - \dfrac{1}{10}\sin 2x$.

➢ **Phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân tuyến tính cấp 2 với hệ số hằng**

Xét phương trình $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ (6)

và $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (4).

• **Trường hợp 1: *f(x) có dạng $e^{\alpha x}P_n(x)$***

($P_n(x)$ là đa thức bậc n).

Bước 1. Nghiệm riêng của (6) có dạng:

$$\boxed{y = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)}$$

($Q_n(x)$ là đa thức đầy đủ bậc n).

Bước 2. Xác định m:

1) Nếu α **không là nghiệm** của phương trình đặc trưng của (4) thì $m = 0$.

2) Nếu α **là nghiệm đơn** của phương trình đặc trưng của (4) thì $m = 1$.

3) Nếu α **là nghiệm kép** của phương trình đặc trưng của (4) thì $m = 2$.

Bước 3. Thế $y = x^m.e^{\alpha x}Q_n(x)$ vào (6) và đồng nhất thức ta được nghiệm riêng cần tìm.

VD 16. Tìm nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$y'' - 2y' - 3y = e^{3x}(x^2 + 1).$$

Giải. Ta có $f(x) = e^{3x}(x^2+1)$, $\alpha = 3$, $P_2(x) = x^2 + 1$.

Suy ra nghiệm riêng có dạng:

$$y = x^m e^{3x}(Ax^2 + Bx + C).$$

Do $\alpha = 3$ là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng $k^2 - 2k - 3 = 0$ nên $m = 1$.

Suy ra nghiệm riêng có dạng $y = xe^{3x}(Ax^2 + Bx + C)$.

Thế $y = xe^{3x}(Ax^2 + Bx + C)$ vào phương trình đã cho, đồng nhất thức ta được:

$$A = \frac{1}{12},\ B = -\frac{1}{16},\ C = \frac{9}{32}.$$

Vậy nghiệm riêng là $y = xe^{3x}\left(\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{9}{32}\right)$.

VD 17. Tìm dạng nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$y'' + 2y' + y = xe^x + 2e^{-x}.$$

• **Trường hợp 2**

f(x) có dạng $e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$

($P_n(x)$ là đa thức bậc n, $Q_m(x)$ là đa thức bậc m).

Bước 1. Nghiệm riêng có dạng:

$$y = x^s e^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x + H_k(x)\sin\beta x]$$

($R_k(x)$, $H_k(x)$ là đa thức đầy đủ bậc $k = \max\{n, m\}$).

Bước 2. Xác định s:

1) Nếu $\alpha \pm i\beta$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng của (4) thì $s = 0$.
2) Nếu $\alpha \pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng của (4) thì $s = 1$.

Bước 3. Thế $y = x^s e^{\alpha x}[R_k(x)\cos\beta x + H_k(x)\sin\beta x]$ vào (6) và đồng nhất thức ta được nghiệm riêng.

VD 18. Tìm dạng nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$y'' + 2y' - 3y = e^x\cos x + 3xe^x\sin x.$$

VD 19. Tìm dạng nghiệm riêng của phương trình vi phân:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x[(x^2+1)\cos x + x\sin x].$$

VD 20. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân:

$$y'' + y = 3\sin x \text{ (*)}.$$

Giải. Ta có $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k = \pm i$.

Nghiệm tổng quát của $y'' + y = 0$ là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x \text{ (1)}.$$

Mặt khác: $\alpha = 0$, $\beta = 1 \Rightarrow s = 1$, $k = 0$.

Dạng nghiệm riêng của (*) là $y = x(A\cos x + B\sin x)$.

Thế $y = x(A\cos x + B\sin x)$ vào (*), ta được:

$$A = -\frac{3}{2},\ B = 0 \Rightarrow y = -\frac{3x}{2}\cos x \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2), ta có nghiệm tổng quát là:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{3x}{2}\cos x.$$

……………………………………