CHƯƠNG I. MA TRẬN – ĐỊNH THỨC – HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. KHÁI NIỆM VỀ MA TRẬN

Bài 1: Thực hiện các phép tính sau

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 11 & 5 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, a \in R$ và $n \in \mathbb{N}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n \quad (n \in \mathbb{N}, 0 \le \varphi < 2\pi)$

Bài 2: Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$. Tính $f(A)$.

Bài 3:

1. Tìm các số thực x, y, z, w sao cho $3\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$.
2. Tìm tất cả các ma trận cấp 2 giao hoán với ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bài 4: Cho các ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Tính $C^t B^t A^t$.

Bài 5: Tìm ma trận X trong các trường hợp sau

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.X.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.X - X.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}X - \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

§2. ĐỊNH THỨC

Bài 6: Tính các định thức sau đây

1. $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix}$

Bài 7: Tính các định thức cấp n sau đây

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \ldots\ldots & n-1 & n \\ n & n & n & \ldots\ldots & n & n \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots\ldots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 3 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n-1 & n \end{vmatrix}$ 4. $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

Bài 8: Giải các phương trình sau đây

1. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$ 2. $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$

§3. HẠNG CỦA MA TRẬN

Bài 9: Tìm hạng của các ma trận sau

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

Bài 10: Tùy theo tham số m, hãy tìm hạng của các ma trận sau

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & m & 12 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ m & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$

Bài 11: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m^2 \end{pmatrix}$. Tìm m để $r(A) < 3$.

§4. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Bài 12: Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây bằng phương pháp biến đổi sơ cấp

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

§5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Bài 13: Giải các hệ phương trình tuyến tính sau

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$

Bài 14: Giải và biện luận các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = m \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - x_4 = 4m \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 9x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 + mx_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = m \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = m \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + mx_4 = m+2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = m+1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2mx_4 = 2m+3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3mx_4 = 3m+1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2mx_4 = m^2 + m + 2 \end{cases}$

Bài 15: Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y + z = m \\ 2x + (1+m)y + (1+m)z = m-1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$. Tìm tham số m để hệ phương trình trên có nghiệm.

Bài 16: Cho hệ phương trình $\begin{cases} ax - 3y + z = -2 \\ ax + y + 2z = 3 \\ 3x + 2y + z = b \end{cases}$ (I), trong đó a, b là tham số.

1. Xác định a, b để hệ (I) là hệ Cramer. Khi đó hãy tìm nghiệm của hệ theo a, b.
2. Tìm a, b để hệ (I) vô nghiệm.
3. Tìm a, b để hệ (I) có vô số nghiệm và tìm nghiệm tổng quát của hệ.

Bài 17: Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$.