Bộ giáo dục và đào tạo
Trường đại học Dà lạt
***

Lê Minh Lưu

BÀI TÓAN TỐI ƯU CÓ THAM SỐ VÀ ỨNG DỤNG

Nghiên cứu khoa học và công nghệ cấp Bộ
Mã số: B2004-29-01.

Đà lạt 2006
****

Mở đầu

Từ những năm 30 của thế kỷ 20 hàm đa trị, cũng gọi là hàm điểm-tập đã được nghiên cứu nhiều (Bouligand, Kuratowski...) do nhu cầu ứng dụng cũng như sự phát triển logic nội tại của tóan học. Tối ưu hóa, với mối liên quan mật thiết với tóan kinh tế là một trong các lĩnh vực ứng dụng hàm đa trị nhiều nhất. Thực chất các ứng dụng này xuất hiện từ đầu thế kỷ 19, chẳng hạn trong định lý về cầu vượt cung, người ta giả thiết hàm đa trị $p \to 2^{Z(p)}$ ứng mỗi bảng gía p với tập vector nhu cầu trội z là nửa liên tục trên và chứng minh được sự tồn tại bảng giá $p*$ để có $z* \in Z(p*)$, $z* \geq 0$ tức là cầu không vượt cung. Các ánh xạ đa trị còn dùng nhiều hơn trong việc nghiên cứu các mô hình kinh tế thị trường cạnh tranh Walras-Ward và Arrow-Debreu-Mckenzie để khẳng định sự tồn tại của các trạng thái cân bằng.

Các bài tóan phụ thuộc tham số đã gặp từ nhiều thế kỷ, trong mọi lĩnh vực; nói riêng trong tối ưu cũng vậy. Có hai nguyên nhân chính dẫn tới việc xét bài tóan có tham số, và do đó có hai cách tiếp cận chính. Một là các bài tóan thực tế thường có nhiều biến quan hệ với nhau rất phức tạp mà khi mô hình tóan học, mặc dù đã đơn giản đi nhiều, vẫn cần phân biệt nhiều loại biến. Ngòai loại chính là biến độc lập và hàm còn có biến với vai trò nhẹ hơn, hoặc là hơi khác biệt, tức là các tham số. Cách tiếp cận tham số thứ hai, phổ biến hơn, liên quan đến tính ổn định, hay độ nhạy cảm của hệ. Các dữ kiện của mọi bài tóan thực tế thường được đo bằng thiết bị hoặc xác định bằng thống kê, nên phải coi là các số xấp xỉ. Hơn nữa điều kiện thực tế cũng luôn biến động hoặc phụ thuộc các yếu tố ngẫu nhiên. Sự xác định thiếu chính xác này có thể biểu thị qua việc phụ thuộc tham số của dữ kiện. Nội dung chính của đề tài nghiên cứu khoa học này là xét sự tồn tại nghiệm, sự thay đổi các tập nghiệm các bài tóan khi các dữ kiện đặt lên bài tóan bị nhiễu.

Trong đề tài nghiên cứu này chúng tôi đã có một vài kết quả về các điều kiện đủ tối ưu, lý thuyết đối ngẫu, sự tồn tại nghiệm các giả bất đẳng thức biến phân, về ổn định nghiệm và các ứng dụng cho bài tóan điều khiển, bài tóan mạng giao thông. Cụ thể đề tài nghiên cứu này bao gồm nội dung chính của các bài báo sau:

1- (Với P. Q. Khánh) On the Existence of Solutions to Vector Quasi-Variational Inequalities and Quasi-Complementarity Problems with Applications to Traffic Network Equilibria, *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol. 123, No. 3, pp. 533-548, 2004.

2- (Với P. Q. Khánh) Lower Semicontinuity and Upper Semicontinuity of the Solution and Approximate Solution Sets to Parametric Multivalued Quasivariational Inequalities, đã nhận đăng trong *Journal of Optimization Theory and Applications.*

3- (Với P. Q. Khánh) Upper semicontinuity with respect to parameters of solutions to vector quasivariational inequalities, *Journal of Global Optimization,* Vol. 32, pp. 569-580, 2005.

4- (Với P. Q. Khánh) Some existence results for quasi-variational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems, *Journal of Global Optimization,* Vol. 32, pp. 551-568, 2005.

5- On the δ-Approximate Sufficient Optimality Conditions of Multifunction Optimization Problems Involving Parameters and Applications in Optimal Control Problems with a Set-Valued Objective.

6- On The Traffic Equilibrium Problems and Time-dependent Traffic Networks with Multivalued Demands. The Relations Between Quasivariational Inequalities, Multifunction Optimizations and Existence of

Equilibria Flows .

Sau đây là nội dung chính của các bài báo

I. Về các điều kiện đủ δ-Approximate của bài toán tối ưu đa trị có tham số và ứng dụng vào các bài toán điều khiển tối ưu với hàm mục tiêu đa trị.

Bài báo xét các điều kiện đủ tối ưu δ-approximate của các bài tóan tối ưu đa trị có tham số theo tính nửa khả vi đồng nhất. Thiết lập điều kiện quasi Kuhn-Tucker, đối ngẫu Wolfe và ứng dụng vào bài tóan điều khiển có mục tiêu đa trị.

Chúng ta sẽ xét các bài toán tối ưu đa trị với tham số u và biến cơ sở x. Điều này là cần thiết trong thực tế. Ví dụ trong các bài toán điều khiển, các giả thiết về tính khả vi của biến điều khiển u thường yếu hơn so với biến trạng thái x. Trong Ref. 7 đã xét các điều kiện đủ tối ưu với các giả thiết kiểu lồi. Cách tiếp cận ở đây là sử dụng các đặc trưng của xấp xỉ các tập chấp nhận được và các giả thiết về tính nửa khả vi đồng nhất để chứng minh cho các điều kiện đủ tối ưu.

Giả sử X và Y là các không gian Banach thực, Y sắp thứ tự bởi nón lồi K, $int\ K \neq \emptyset$. Hàm đa trị $F : X \to 2^Y$ gọi là có *δ-minimum* ($\delta \geq 0$) tại $(x_0; f_0)$ trên tập $A \subset X$, nếu $f_0 \in F(x_0)$, $\forall f \in F(A)$,

$$f - f_0 \in \delta B_Y + Y \setminus ((-K) \setminus K). \tag{1}$$

Nếu $\delta = 0$ thì $(x_0; f_0)$ được gọi là *minimum* của F trong A. Nếu (1) được thay thế bởi

$$f - f_0 \in \delta B_Y + Y \setminus (-int\ K), \tag{2}$$

thì $(x_0; f_0)$ gọi là δ - *weak minimum* của F trong A, ở đây B_Y biểu thị quả cầu mở trong Y. Nếu $\delta = 0$ thì $(x_0; f_0)$ gọi là *weak minimum* của F trong A.

Tập $dom\mathcal{F} := \{x \in X : \mathcal{F}(x) \neq \emptyset\}$ gọi là *domain* của $\mathcal{F}$ và $gr\mathcal{F} := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \mathcal{F}(x)\}$ chỉ *graph* của $\mathcal{F}$.

Giả sử Y^* chỉ topological dual của Y, K^* chỉ dual cone của K và K^o chỉ quasiinterior của K^*.

$$K^* := \{\lambda \in Y^* :< \lambda, y >\geq 0 \quad \forall y \in K\},$$

$$K^o := \{\lambda^* \in K^* : < \lambda, y >> 0 \quad \forall y \in K \setminus (-K)\}.$$

$(x_0; f_0)$ gọi là *positively proper minimum* của F trong $A \subset X$ nếu có $\lambda \in K^o$ sao cho, với mọi $f \in F(A)$,

$$< \lambda, f - f_0 >\geq 0.$$

Định nghĩa 1.1.1 *Giả sử X và Y là các không gian Banach, Y sắp thứ tự bởi convex cone K, $x_0 \in A \subset X$. Hàm đa trị $\mathcal{F} : X \to 2^Y$ được gọi là semi K-differentiable tại $(x_0, f_0) \in A \times \mathcal{F}(x_0)$ nếu $\forall \epsilon > 0$, $\forall x \in A$, $\exists \Gamma_\epsilon > 0$, và $\forall \gamma_\epsilon > \Gamma_\epsilon$, $\bar{x} := \frac{x - x_0}{\gamma_\epsilon}$, $\forall f \in \mathcal{F}(x), \exists f' \in D\mathcal{F}(x_0; f_0)\bar{x}$,*

$$\frac{1}{\gamma_\epsilon}(f - f_0) - f' \in \epsilon B_Y - K.$$

$\mathcal{F}$ gọi là semi K -differentiable tại x_0 nếu tính khả vi này đúng với mọi $f_0 \in F(x_0)$.

$\mathcal{F}$ gọi là semi K -differentiable trong tập A nếu $\mathcal{F}$ là semi K -differentiable tại x_0, $\forall x_0 \in A$. Chú ý rằng nếu $\mathcal{F}(A)$ và $D\mathcal{F}(x_0, f_0)(A)$ là các tập giới nội thì $\mathcal{F}$ là *semi K-differentiable* trong A.

Giả sử X, Y, Z và W là các không gian Banach, Y và Z được sắp thứ tự bởi các nón lồi K và M, chứa gốc với $int\ K \neq \emptyset$. Giả sử $\Omega \subset X$

và U là tập tuỳ ý. F và G là các hàm đa trị từ $X \times U$ vào Y và Z, tương ứng. $p : X \times U \to W$ là hàm đơn trị. Xét bài toán (P) sau

$$min\ F(x,u),$$

$$G(x,u) \subset -M,$$

$$p(x,u) = 0,$$

$$(x,u) \in \Omega \times U.$$

Nếu trong bài tóan (P) ta thay $G(x,u) \subset -M$ bởi $G(x,u) \cap (-M) \neq \emptyset$ ta có bài tóan $\tilde{P}$. Ở đây $min\ F(x,u)$ được hiểu theo nghĩa δ-minimum (hoặc minimum), weak hoặc positively proper δ-minimum (hoặc minimum) của F. Để ý là đồng thời (P) và $(\tilde{P})$ là mở rộng của các bài toán tối ưu véc tơ trong trường hỡp đơn trị.

$$E := \{(x,u) \in \Omega \times U : G(x,u) \subset -M, p(x,u) = 0\},$$
$$\tilde{E} := \{(x,u) \in \Omega \times U : G(x,u) \cap (-M) \neq \emptyset, p(x,u) = 0\},$$
$$\Omega_{x_0} := \{\gamma(x - x_0) : \gamma \geq 0, x \in \Omega\},$$
$$S := Y \setminus ((-K) \setminus K),$$
$$S_0 := Y \setminus (-int\ K).$$

Dưới đây ta giả sử rằng $(x_0, u_0) \in E$ hoặc $(x_0, u_0) \in \tilde{E}$ và $g_0 \in G(x_0, u_0) \cap (-M)$ trong mỗi trường hợp tương ứng. Đặt

$$M_0 := \{\gamma(z + g_0) : \gamma \geq 0, z \in M\},$$

$$M_0^* := \{\mu \in M^* :< \mu, g_0 >= 0\} = (M_0)^*.$$

Ký hiệu $\mathcal{L}(Z,Y)$ là không gian các ánh xạ tuyến tính giới nội từ Z vào Y. Hàm Lagrange cuả (P) (vector và vô hướng) là

$$L(x, u, \Lambda, \Delta) = F(x,u) + \Lambda G(x,u) + \Delta P(x,u),$$

$$L_s(x,u,\lambda,\mu,\nu)$$
$$=< \lambda, F(x,u) > + < \mu, G(x,u) > + < \nu, P(x,u) >,$$

ở đây $(x,u) \in \Omega \times U, \Lambda \in \mathcal{L}(Z,Y)$ với $\Lambda(M) \subset K, \Delta \in \mathcal{L}(W,Y), \lambda \in K^*, \mu \in M^*, \nu \in W^*$.

Tương tự, của $(\tilde{P})$ là,

$$\tilde{L}(x,u,\Lambda,\Delta) = F(x,u) + \Lambda(G(x,u) \cap (-M)) + \Delta P(x,u),$$

$$\tilde{L}_s(x,u,\lambda,\mu,\nu)$$
$$=< \lambda, F(x,u) > + < \mu, G(x,u) \cap (-M) > + < \nu, P(x,u) > .$$

Ta nói là điều kiện *quasi-Kuhn-Tucker* của (P) (ký hiệu là qKT) tại $(x_0,u_0,\Lambda,\Delta; l_0)$ thoả nếu từ mỗi $u \in U$, $\exists T_u \in \mathcal{L}(X,Y)$ với $T_u(\Omega_{x_0}) \subset K$ và $l_0 = f_0 + \Lambda g_0, f_0 \in F(x_0,u_0), g_0 \in G(x_0,u_0)$,

(i) $D_x L(x_0,u,\Lambda,\Delta; l_0(u))x - T_u x \subset S \cap (-S)\ \forall x \in X,\ \forall u \in U$;

(ii) $L(x_0,u,\Lambda,\Delta) - l_0 \subset K,\ l_0 - L(x,u_0,\Lambda,\Delta) \subset K$, $\forall (x,u) \in E$;

(iii) $\Lambda(M_0) \subset K$.

Nếu S trong (i) được thế bởi S_0, thì điều kiện này gọi là điều kiện *weak quasi-Kuhn-Tucker* (qKTw).

Giả sử $0 \neq \lambda \in K^*, \mu \in M^*, \nu \in W^*$ với $(x_0,u_0) \in E, f_0 \in F(x_0,u_0), g_0 \in G(x_0,u_0), l_{0s} = < \lambda, f_0 > + < \mu_0, g_0 >$. Ta nói là điều kiện *scalar quasi-Kuhn-Tucker* (sqKT) của (P) tại $(x_0,u_0,\lambda,\mu,\nu; l_{0s})$ là thoả nếu

(i) $D_x L_s(x_0,u,\lambda,\mu,\nu; l_0(u))x \subset R_+,\ \ \forall x \in \Omega_{x_0},\ \forall u \in U$;

(ii) $L_s(x_0,u,\lambda,\mu,\nu) - l_{0s} \subset R_+,\ l_{0s} - L_s(x,u_0,\lambda,\mu,\nu) \subset R_+;\ \forall x \in \Omega_{x_0},\ \forall u \in U$;

(iii) $< \mu, g_0 >= 0$.

Thế các điều kiện quasi-Kuhn-Tucker ở trên của (P) $L, L_s, E, g_0 \in G(x_0, u_0)$ bởi $\tilde{L}, \tilde{L}_s, \tilde{E}, g_0 \in G(x_0, u_0) \cap (-M)$, tương ứng, chúng ta có các điều kiện quasi-Kuhn-Tucker của $(\tilde{P})$, biểu thị bởi $(q\tilde{KT})$, $(q\tilde{KT}w)$ và $(sq\tilde{KT})$, tương ứng.

Điều kiện (iii) gọi là điều kiện về độ lệch bù, (i) là điều kiện Euler-Lagrange. Nếu bài toán không tham số thì (i) và (iii) gọi là điều kiện Kuhn- Tucker.

Điều kiện đủ tối ưu

Giả sử có $\Lambda \in \mathcal{L}(Z, Y), \Delta \in \mathcal{L}(W, Y)$, với mỗi $u \in U$, $T_u \in \mathcal{L}(X, Y)$, với $\Lambda(M) \subset K, T(\Omega_{x_0}) \subset K$ và $l_0 = f_0 + \Lambda g_0, f_0 \in F(x_0, u_0), g_0 \in G(x_0, u_0)$, $\lambda \in K*$, $\mu \in M*, w \in W*$, $l_{0s} = \langle \lambda l_0 \rangle + \langle \mu, g_0 \rangle$, $(x_0, u_0) \in E$. Giả sử từ mỗi $u \in U$, $L(., u, \Lambda, \Delta)$ là semi K-differentiable tại (x_0, u), $l_0(u) \in L(x_0, u, \Lambda, \Delta)$ thì với mọi x và $\forall \epsilon_u > 0$, $\forall \gamma^u_{\epsilon_u} > \Gamma^u_{\epsilon_u}$, $\bar{x} := \frac{x - x_0}{\gamma^u_\epsilon}$, $\forall l \in L(x, u, \Lambda, \Delta), \exists l' \in D_x L(x_0, u, \Lambda, \Delta; l_0)\bar{x}$,

$$\frac{1}{\gamma^u_{\epsilon_u}}(l - l_0(u)) - l' \in \epsilon_u B_Y - K.$$

Với $\delta > 0$ xét tập $W^\delta := \{(u, x) \in E : \exists \epsilon_u, \exists \gamma^u_{\epsilon_u} > \Gamma^u_{\epsilon_u}, \text{ s.t. } 2\epsilon_u \gamma^u_{\epsilon_u} \leq \delta\}$.

Nếu $(x_0, u_0) \in W^1 \subset W^\delta$ thì $L(., ., \Lambda, \Delta)$ được gọi là *semi uniformly K-differentiable* với δ tại $(x_0, u_0; l_0)$ trong W^1,

Nếu $(x_0, u_0) \in W^0 := \cap_{\delta > 0} W^\delta$ thì $L(., ., \Lambda, \Delta)$ được gọi là *semi uniformly K-differentiable* tại $(x_0, u_0; l_0)$ trong W^0.

Tương tự ta cũng có các khái niệm về *semi uniformly K-differentiable* (với δ) của các hàm Lagrange $\hat{L}(., ., \Lambda, \Delta), L_s(., ., \lambda, \mu, v)$ và $\hat{L}_s(., ., \lambda, \mu, v)$

tại $(x_0, u_0; l_0)$ trong $\hat{W}^0(\hat{W}^\delta), W_s^0(W_s^\delta)$ và , $\hat{W}_s^0(\hat{W}_s^\delta)$, tương ứng.

Định lý 1.2.1. *Nếu $L(.,.,\Lambda,\Delta)$ là semi uniformly (-K) -differentiable với δ tại $(x_0, u_0; l_0)$ trên W^δ, (resp. semi uniformly $(-K)$ -differentiable) và điều kiện (qKT) tại $(x_0, u_0, \Lambda, \Delta, l_0)$ là thoả thì $(x_0, u_0; f_0)$ là δ-mininum (rep. minimum) của (P) trên W^δ. Kết quả này vẫn đúng cho $(\tilde{P})$ với một vài thay đổi phù hợp.*

Định lý 1.2.2. *Nếu $L(.,.,\Lambda,\Delta)$ là semi uniformly (-K)-differentiable với δ tại $(x_0, u_0; l_0)$(rep. semi uniformly $(-K)$ -differentiable) và $(qKTw)$ là thoả thì $(x_0, u_0; f_0)$ là weak δ-minimum (rep. weak minimum) của (P) trên W^δ. Kết quả này vẫn đúng cho $(\tilde{P})$ với một vài thay đổi phù hợp.*

Định lý 1.2.3. *Giả sử có $0 \neq \lambda \in K^*, \mu \in M^*, \nu \in W^*$ sao cho với $l_{0s} =< \lambda, f_0 > + < \mu, g_0 >, g_0 \in G(x_0, u_0)$. Nếu $L_s(.,.,\lambda,\mu,\nu)$ semi uniformly differentiable trên W_s^0 (resp. $L_s(.,.,\lambda,\mu,\nu)$ là semi uniformly differentiable với δ) tại $(x_0, u_0; l_0)$ và điều kiện (sKT) tại $(x_0, u_0, \lambda, \mu, \nu; l_0)$ là thoả thì $(x_0, u_0; f_0)$ là minimum (resp. δ-minimum) của (P) trên W_s^0. Các trường hợp nói trên vẫn đúng cho trường hợp weakly minimal và cho bài toán $(\tilde{P})$, với một vài thay đổi phù hợp của giả thiết.*

Đối ngẫu Wolfe

Mở rộng của đối ngẫu Wolfe trong [Ref. 2-3, Ref. 7]. Đối ngẫu Wolfe (D1) và $(\tilde{D}1)$ của (P) và $(\tilde{P})$ được định nghĩa như sau

$$(D1) \qquad max(f + \Lambda g + \Delta p),$$

$$f \in F(x,u), g \in G(x,u), p = p(x,u), (x,u) \in \Omega \times U,$$

$$\Lambda \in \mathcal{L}(Z,Y), \Delta \in \mathcal{L}(W,Y), 0 \neq \lambda \in K^*,\ \Lambda(M) \subset K, T(\Omega_x) \subset K,$$

$$D_x L_s(x, v, \lambda, \lambda\Lambda, \lambda\Delta; l_s)x' - \lambda T x' \subset R_+, \quad \forall v \in U, \forall x' \in \Omega_x;$$

$$l_s - L_s(x', u, \lambda, \lambda\Lambda, \lambda\Delta) \subset R_+, \quad \forall x' \in \Omega_x,$$

$$L_s(x, v, \lambda, \lambda\Lambda, \lambda\Delta) - l_s \subset R_+, \quad \forall v \in U,$$

Ở đây $l_s = < \lambda, f + \Lambda g + \Delta p >$.

$(\tilde{D}1)$ thu được bởi thay thế L_s và $g \in G(x,u)$ bởi $\tilde{L}_s$ và $g \in G(x,u) \cap (-M)$, tương ứng.

Biểu thị $\mu := \lambda\Lambda$ và $\nu := \lambda\Delta$.

Định lý 1.3.1 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử (x', u') và $(x, u, \Lambda, \Delta, T, \lambda)$ là chấp nhận được của (P) và (D1), tương ứng. $L_s(.,., \lambda, \lambda\Lambda, \lambda\Delta)$ là semi uniformly $(-R_+)$ - differentiable trong Ω. Khi đó từ mỗi giá trị mục tiêu chấp nhận được $l = f + \Lambda g + \Delta p$ của (D1) tương ứng $(x, u, \Lambda, \Delta, T, \lambda)$,*

$$F(x', u') - l \subset S_0.$$

Khẳng định cũng đúng cho $(\tilde{D}1)$, với vài thay đổi phù hợp của giả thiết.

Nếu $\lambda \in K^{\circ}$, thì trong mỗi một trường hợp ta có

$$F(x', u') - l \subset S.$$

Định lý 1.3.2 (Đối ngẫu mạnh). *Giả sử $L_s(x, u, \lambda, \lambda\Lambda, \lambda\Delta)$ là semi uniformly $(-R_+)$-differentiable trong Ω. (x_0, u_0) là chấp nhận được của (P) và $(x_0, u_0, \Lambda, \Delta, T, \lambda)$ là chấp nhận được của (D1). Giả sử $f_0 + \Lambda g_0$, $f_0 \in F(x_0, u_0)$ và $g_0 \in G(x_0, u_0)$, là giá trị mục tiêu chấp nhậm được của (D1) sao cho ứng (với g_0) M_0 thoả $\Lambda(M_0) \subset K$. Khi đó*

(i) (x_0, u_0, f_0) là weak minimum của (P) và $f_0 + \Lambda g_0$ là giá trị mục tiêu yếu maximal của (D1) và các giá trị này thoả quan hệ

$$(f_0 + \Lambda g_0) - f_0 \in K \cap (-K).$$

(ii) nếu $\lambda \in K^{\circ}$, thì các nghiệm là thực sự dương;

(iii) với vài thay đổi phù hợp của giả thiết, các kết quả nói trên vẫn đúng cho $(\tilde{P})$ và $(\tilde{D}1)$.

Ứng dụng cho bài toán điều khiển

Xét bài toán điều khiển tối ưu với mục tiêu đa trị

$$\dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)), \tag{3}$$

$$x(t_0) = 0, h(x(t_1)) = 0, \tag{4}$$

$$u(t) \in \mathcal{U} \subset R^r, \tag{5}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t))dt \in -M, \tag{6}$$

$$F(x(.), u(.)) \to min, \tag{7}$$

Ở đây $\varphi : R\times R^n \times R^r \to R^n, h : R^n \to R^s, g : R\times R^n \times R^r \to R^k, R^k$ sắp thứ tự bởi closed convex cone M; (3) và (5) thoả hầu khắp trong $[t_0, t_1]$; tham số điều khiển $u(.) \in L^r_\infty[t_0, t_1]$, là thoả (5); $x(.) \in C^n[t_0, t_1]$; $F : C^n[t_0, t_1] \times L^r_\infty \to 2^R$.

Trong các bài toán điều khiển có mục tiêu đa trị thường có dạng

$$F(x(.), u(.)) = \xi(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \psi(t, x(t), u(t); w(t))dt,$$

$$w(t) \in W(t, x(t), u(t)) \subset R,$$

Ở đây $\xi : R^n \to R, \psi : R \times R^n \times R^r \times R \to R$ và W là tập compact phụ thuộc t, x và u. Tuy nhiên để đơn giản ta xét dạng tổng quát $F(x(.), u(.))$ là hàm đa trị nào đó.

Để đưa bài toán (3) - (7) về bài toán tối ưu đa trị (P) ta đặt $X = C^n[t_0, t_1]$,

$$G(x(.), u(.)) = \int_{t_0}^{t_1} g(t, x(t), u(t))dt,$$

$$p(x(.), u(.)) = (y(.), b),$$

$$y(t) = x(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi(r, x(r), u(r))dr,$$
$$b = h(x(t_1)).$$

Hàm Lagragian là

$$L(x, u, \mu, q, v)$$
$$= F(x, u) + \int_{t_0}^{t_1} < \mu, g(t, x(t), u(t)) > dt + < q, h(x(t_1)) >$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} < x(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi(r, x(r), u(r))dr, dv(t) >$$
$$:= F(x, u) + w(x, u, \mu, q, v).$$

Với $p_1(x(.), u(.)) = y(.)$ và giả sử $\varphi(t, ., u_0(t)), g(t, ., u_0(t))$ khả vi liên tục tại $x_0(t)$ với mọi $t \in [t_0, t_1]$; φ và g là liên tục; h khả vi liên tục tại $x_0(t_1)$, $(x_0(.), u_0(.))$ là chấp nhận được của bài toán (3) - (7).

Mệnh đề 1.4.1 (Sufficient optimality condition).
Giả sử $(x_0(.), u_0(.))$ là chấp nhận được của bài toán (3) - (7) và $f_0 \in F(x_0, u_0)$. h là semi uniformly $\{0\}$-differentiable tại $x_0(t_1)$; $g(t, ., .)$ là semi uniformly M-differentiable tại $(x_0(t), u_0(t))$ và $u(.)$, p_1 là semi uniformly $\{0\}$-differentiable tại $x_0(.)$; F là semi uniformly R_+-differentiable tại $x_0(.)$.

Giả sử tồn tại $q \in R^s, \mu \in M^*$ và hàm biến phân bị chặn $v(.)$ trên $[t_0, t_1]$ sao cho

$$(a) \quad D_x F(x_0, u; f_u, u)x + \int_{t_0}^{t_1} < \mu, g_x(t, x_0(t), u(t))x(t) > dt$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} < x(t) - \int_{t_0}^{t} \varphi_x(r, x_0(r), u(r))x(r)dr, dv(t) >$$
$$+ < q, h'(x_0(t_1))x(t_1) > \subset R_+,$$
$$\forall x(.) \in X, \forall u(.) \in U, \forall f_u \in F(x_0, u);$$
$$(b_1) \quad F(x_0, u) - f_0 + \int_{t_0}^{t_1} < \mu, g(t, x_0(t), u(t)) > dt$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} < \int_{t_0}^{t} (\varphi(r, x_0(r), u(r)) - \varphi(r, x_0(r), u_0(r)))dr, dv(t) >$$

$$\subset R_+ \quad \forall u(.) \in U;$$

$$(b_2) \qquad f_0 - F(x,u_0) + \int_{t_0}^{t_1} < \mu, g(t,x(t),u_0(t)) > dt$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} < \int_{t_0}^{t} (\varphi(r,x(r),u_0(r)) - \varphi(r,x_0(r),u_0(r)))dr, dv(t) >$$
$$\subset R_+ \quad \forall x(.) \in X;$$

$$(c) \qquad \int_{t_0}^{t_1} < \mu, g(t,x_0(t),u_0(t)) > dt = 0.$$

Khi đó, $(x_0(.), u_0(.); f_0)$ *là minimum của (3) - (7).*

Đối ngẫu Wolfe của (3) - (7) là

$$max(f + w(x,u,\mu,q,v)),$$

$$f \in F(x,u), (x,u) \in X \times U, \mu \in M^*, q \in R^s, v \in X^*,$$

$$D_x F(x,w; f)x' + w_x(x,w,\mu,q,v)x' \subset R_+ \quad \forall x' \in X, \quad \forall w \in U;$$

$$F(x,w) - f + w(x,w,\mu,q,v) - w(x,u,\mu,q,v) \subset R_+ \quad \forall w \in U,$$

$$f - F(x',u) + w(x',u,\mu,q,v) - w(x,u,\mu,q,v) \subset R_+ \quad \forall x' \in X.$$

Mệnh đề 1.4.2 (Đối ngẫu yếu). *Giả sử* $F(x',u')$ *và* $f + w(x,u,\mu,q,v)$ *là giá trị mục tiêu chấp nhận được của (3) - (7) và đối ngẫu Wolfe, tương ứng. Giả sử các giả thiết uniform differentiability nói trong Mệnh đề 1.4.1 là thoả mãn với mọi* $(x,u) \in X \times U$. *Khi đó*

$$F(x',u') - f - w(x,u,\mu,q,v) \subset R_+.$$

Mệnh đề 1.4.3 (Đối ngẫu mạnh). *Giả sử* (x_0,u_0) *là chấp nhận được của (3) - (7),* $f_0 \in F(x_0,u_0)$ *và* (x_0,u_0,μ,q,v) *là chấp nhận được của đối ngẫu Wolfe sao cho*

$$\int_{t_0}^{t_1} < \mu, g(t,x_0(t),u_0(t)) > dt = 0.$$

Giả sử các giả thiết uniform differentiability được thỏa như trong Mệnh đề 1.4.2. Khi đó $(x_0, u_0; f_0)$ là minimum của (3) - (7) và (x_0, u_0, μ, q, v) là maximum của đối ngẫu Wolfe và hai giá trị optimal đều là f_0.

II. Sự tồn tại nghiệm của các giả bất đẳng thức biến phân, bài tóan giả bù và ứng dụng vào mạng cân bằng giao thông

Bài báo xét các giả bất đẳng thức biến phân đa trị trong không gian vector tôpô, thu được một số kết quả nhờ giả thiết về lưới hội tụ mà không sử dụng tính đơn điệu như các kết quả thường gặp. Đưa ra dạng mới của giả bất đẳng thức biến phân, áp dụng vào bài tóan giả bù và mạng cân bằng giao thông. Đặc biệt, chúng ta đưa ra các định nghĩa về dòng cân bằng yếu và mạnh trong trường hợp hàm giá đa trị.

Bensoussan-Lions (Ref. 10) đưa khái niệm về các giả bất đẳng thức biến phân với sự liên quan tới các bài tóan điều khiển. Các công trình của Maugeri (Ref. 12), De Luca (Ref. 13), Cubiotti (Ref. 14),` Fu (Ref. 15), Kim and Tan (Ref. 16) có các kết quả về sự tồn tại nghiệm của các giả bất đẳng thức biến phân.

Bài báo của chúng ta mở rộng các kết quả trong Ref. 16 cho trường hợp đa trị và đưa ra một dạng bài tóan giả bù mới. Bài tóan được xét như sau. Giả sử X và Y là các không gian vector tôpô Hausdorff và $A \subset X$ là tập con lồi đóng khác trống. $C : A \to 2^Y$, $T : A \to 2^{L(X,Y)}$ và $K : A \to 2^X$ là hàm đa trị, C có giá trị là nón lồi đóng có phần trong khác trống, ở đây $L(X,Y)$ biểu thị không gian các ánh xạ tuyến tính giới nội từ X vào Y. Giả sử $g : A \to A$ là ánh xạ đơn trị liên tục và $E := \{x \in A : \ x \in clK(x)\} \neq \emptyset$. Xét hai bài toán sau:

(QVI) : tìm $\overline{x} \in A \cap \mathrm{cl}K(\overline{x})$ sao cho $\forall x \in K(\overline{x})$, $\exists \overline{t} \in T(\overline{x})$,

$$(\overline{t}, x - g(\overline{x})) \in Y \backslash -\mathrm{int}C(\overline{x});$$

(SQVI) : tìm $\overline{x} \in A \cap \mathrm{cl}K(\overline{x})$ sao cho $\forall x \in K(\overline{x})$, $\forall t \in T(\overline{x})$,

$$(t, x - g(\overline{x})) \in Y \backslash -\mathrm{int}C(\overline{x}),$$

ở đây $cl(.)$ chỉ bao đóng và (ζ, x) biểu thị giá trị của ánh xạ tuyến tính ζ tại x.

Các kết quả

Định lý 2.2.1. Giả sử, với bài toán (QVI), A là compact và

(i) $A \cap K(x)$ là lồi khác rỗng với mỗi $x \in A$, $K^{-1}(y)$ là mở trong A từ mỗi $y \in A$ và $\mathrm{cl}K(.)$ là usc;

(ii) nếu $x_\alpha \to x$, $y_\alpha \to y$ trong A và nếu $t_\alpha \in T(x_\alpha)$, thì tồn tại $t \in T(x)$ và các lưới con x_β, y_β , $t_\beta \in T(x_\beta)$ sao cho $(t_\beta, y_\beta) \to (t, y)$;

(iii) $Y \backslash -\mathrm{int}C(.)$ là đóng và $\forall x \in A, \exists t \in T(x)$,

$$(t, x - g(x)) \in Y \backslash -\mathrm{int}C(x).$$

Khi đó, (QVI) có nghiệm.

Định lý 2.2.1 là mở rộng các kết quả trong Ref. 16 cho trường hợp T là Đa trị.

Định lý 2.2.2. *Giả sử với bài toán (SQVI), A là compact và $g(x) \equiv x$. Giả sử*

(i_1) $A \cap K(x)$ là lồi khác trống từ mỗi $x \in A$. $\forall y \in A$, $K^{-1}(y)$ là

mở trong A và $\mathrm{cl}K(.)$ *là usc;*

(i_2) $\forall x \in E$, $\forall y \in K(x)$, $\forall \lambda \in (0,1]$, $\lambda y + (1-\lambda)x \in K(x)$;

(ii) T là glhc và pseudomonotone trong A;

(iii) $Y \backslash -\mathrm{int}C(.)$ *là đóng.*

Khi đó, (SQVI) có nghiệm.

Áp dụng cho bài toán giả bù

Bài toán giả bù đơn trị đã được xét trong Ref. 21 và với hàm đa trị trong Ref. 15. Để nối kết chúng với bài toán giả bất đẳng thức biến phân, ở bài báo này ta xét một dạng khác của bài toán giả bù ứng với bài toán (SQVI) đã đưa ra ở trên.

Giả sử A và T như đã nêu trong (SQVI). Giả sử X là không gian Banach, $Y = R$, $C(x) \equiv R_+$ và $g(x) \equiv x$. Giả sử $S : A \to 2^A$ là hàm đa trị. Bài toán giả bù được xét như sau

(QCP): tìm $\overline{x} \in A$ sao cho $\forall \overline{s} \in A \cap S(\overline{x})$, $\forall \overline{t} \in (-A^0) \cap T(\overline{x})$,

$$\langle \overline{t}, \overline{s} \rangle = 0,$$

Ở đây A^0 là tập polar của A, i.e.,

$$A^0 = \{f \in X^* : \langle f, x \rangle \leq 1, \forall x \in A\}.$$

(Chú ý là nếu A là nón thì $A^0 = -A^*$ với A^* là nón liên hợp dương (positive conjugate) của A.)

Định lý 2.3.1. *Giả sử với bài toán (QCP) các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 2.2.2 là được thoả. Giả sử A là nón lồi đóng và $K(x) = x - A \cap S(x) + A$, $\forall x \in A$. Giả sử (a) và (b) của Chú ý 2.2.2 được thỏa.*

Khi đó bài toán (QCP) có nghiệm.

Áp dụng cho bài toán cân bằng giao thông

Khởi đầu bởi Ref. 22, các ứng dụng của bất đẳng thức biến phân cho bài toán cân bằng giao thông đã được nhiều người nghiên cứu, see e.g. Refs. 12, 13, 23 và 24. Bài báo này theo mô hình mạng giao thông của De Luca (Ref. 13) và Maugeri (Ref. 12). Các kết quả về sự tồn tại dòng cân bằng được xét thông qua sự tồn tại nghiệm của các bất đẳng thức biến phân tương ứng.

Giả sử N là tập các nodes, L là tập các cung, $W := (W_1, ..., W_l)$ là tập các cặp origin-destination (O/D pairs). Giả sử có $r_j \geq 1$ các đường nối W_j, $j = 1, ..., l$, và biểu thị bởi P_j. Đặt $m := r_1 + ... + r_l$, nghĩa là có m đường trong mạng. $F := (F_1, ..., F_m)$ là vector dòng đường. Giá của đường R_s, $s = 1, ..., m$, là tập $T_s(F) \subset R_+$. Khi đó có hàm đa trị $T : R^m_+ \to 2^{R^m_+}$ với $T(F) := (T_1(F), ..., T_m(F))$. Tải năng của các đường thỏa ràng buộc

$$F \in A := \{F \in R^m_+ : \ 0 \leq F_s \leq \Gamma_s, \ s = 1, ..., m\}.$$

Như De Luca và Maugeri, trong một vài trường hợp demands ρ_j của cặp đầu cuối W_j có thể phụ thuộc vào vector dòng cân bằng H, i.e., ta có ánh xạ $\rho : R^m_+ \to R^l_+$. Ở đây ta giả thiết rằng $\rho(.)$ là liên tục. Đặt

$$\varphi_{js} := \begin{cases} 1 & \text{if} \quad R_s \in P_j, \\ 0 & \text{if} \quad R_s \notin P_j, \end{cases}$$

và

$$\varphi = \{\varphi_{js}\}, \ j = 1, ..., l, \ s = 1, ..., m.$$

Khi đó tập các vector dòng đường thoả

$$\{F \in R^m_+ : \ \varphi F = \rho(H), \ F \in A\}.$$

Giả sử $\epsilon : R^m_+ \to R$ là hàm liên tục. Ta sẽ mở rộng cân bằng Wardrop cho trường hợp hàm giá đa trị và nhu cầu là tập. Đầu tiên ta xác định tập các vector dòng đường chấp nhận được như sau

$$K(H) := \{F \in R^m_+ : \varphi F \in B(\rho(H), \epsilon(H)),\ F \in A\},$$

ở đây $B(\rho(H), \epsilon(H))$ là quả cầu mở (trong R^l) có tâm $\rho(H)$ và bán kính $\epsilon(H)$. Giả thiết Γ_s, $\rho(.)$ và $\epsilon(.)$ được cho sao cho $K(H)$ khác trống với mỗi $H \in A$ và $E := \{H \in A : H \in \mathrm{cl}K(H)\} \neq \emptyset$.

Định nghĩa 2.4.1

(i) Vector dòng đường H được gọi là dòng cân bằng yếu nếu

$\forall W_j$, $\forall R_q \in P_j$, $\forall R_s \in P_j$, $\exists t \in T(H)$,

$$t_q < t_s \ \Rightarrow\ H_q = \Gamma_q \text{ or } H_s = 0,$$

ở đây $j = 1, ..., l$ and $q, s \in \{1, ..., m\}$ và r_j ứng với P_j.

(ii) Vector dòng đường H được gọi là dòng cân bằng mạnh nếu (i) thỏa với $\exists t \in T(H)$ được thay bởi $\forall t \in T(H)$.

Hệ quả 2.4.1 *Nếu trong mạng giao thông, T là glhc và pseudomonotone trong A, thì bài toán mạng giao thông có vector dòng cân bằng mạnh.*

III. Nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của tập nghiệm và tập nghiệm xấp xỉ theo tham số của các giả bất đẳng thức biến phân đa trị

Bài báo xét sự ổn định theo nghĩa nửa liên tục của các tập nghiệm cũng như tập nghiệm xấp xỉ theo tham số của các giả bất đẳng thức biến phân đa trị (multivalued quasivariational inequalities) trong không gian vector tôpô.

Giả sử X là không gian vector tôpô Hausdorff, U là không gian tôpô và $A \subseteq X$ là tập compact lồi khác trống. $T : U \times A \to 2^{X^*}$, $K : U \times A \to 2^X$ là các hàm đa trị và $g : U \times A \to A$ là hàm đơn trị liên tục. Với $u \in U$, xét ba bài toán sau

$(WQVI_u)$: tìm $\overline{x} \in A \cap dK(u, \overline{x})$ sao cho $\forall x \in K(u, \overline{x})$, $\exists \overline{t} \in T(u, \overline{x})$,

$$\langle \overline{t}, x - g(u, \overline{x}) \rangle \geq 0;$$

$(MQVI_u)$: tìm $\overline{x} \in A \cap dK(u, \overline{x})$ sao cho $\exists \overline{t} \in T(u, \overline{x})$, $\forall x \in K(u, \overline{x})$,

$$\langle \overline{t}, x - g(u, \overline{x}) \rangle \geq 0;$$

$(SQVI_u)$: tìm $\overline{x} \in A \cap dK(u, \overline{x})$ sao cho $\forall x \in K(u, \overline{x})$, $\forall t \in T(u, \overline{x})$,

$$\langle t, x - g(u, \overline{x}) \rangle \geq 0.$$

Giả sử $W(u)$, $M(u)$ và $S(u)$ là các tập nghiệm của $(WQVI_u)$, $(MQVI_u)$ và $(SQVI_u)$, tương ứng. Với T là đơn trị rõ ràng ta có $W(u) = M(u) = S(u)$. Trong trường hợp tổng quát, T là hàm đa trị, thì

$$S(u) \subseteq M(u) \subseteq S(u).$$

Cho X và Y là các không gian tôpô và $F : X \to 2^Y$ là hàm đa trị. $F : X \longrightarrow 2^Y$ được gọi là nửa liên tục dưới (lsc) tại $x \in \mathrm{dom}F$, nếu $\forall y \in F(x)$, $\forall x_\gamma \in \mathrm{domF} :\ x_\gamma \to x$, $\exists y_\gamma \in F(x_\gamma)$, $y_\gamma \to y$. Hàm đa trị gọi là liên tục nếu nó đồng thời là usc và lsc.

Tính nửa liên tục dưới của các tập nghiệm.

Giả sử $U_0 \subseteq U$ là tập con mở và $u_0 \in U_0$. Giả sử với mỗi $u \in U_0$, các tập $W(u)$, $M(u)$ và $S(u)$ là khác trống.

Để xét tính nửa liên tục dưới (lower semicontinuity) của tập $W(.)$, ta biểu thị

$$E(u) := \{x \in A : x \in \mathrm{cl}K(u,x)\}.$$

Định lý 3.3.1. *Giả sử với $(WQVI_u)$ các điều kiện sau thỏa*

(i) $K(.,.)$ là usc và có giá trị compact trong (u_0, A), $E(.)$ là lsc tại u_0;

(ii) $\langle T(.,.),.\rangle$ là lsc trong (u_0, A, A);

(iii) $\forall x \in W(u_0)$, $\forall y \in K(u_0,x)$, $\exists t \in K(u_0,x)$, $\langle t, y-g(u_0,x)\rangle >$ 0.

Khi đó $W(.)$ là lsc tại u_0.

Định lý 3.3.3. *Giả sử với $(SQVI_u)$ điều kiện (i) của Định lý 3.3.1 được thỏa, $T(.,.)$ là usc có giá trị compact trong (u_0, A) và $\forall x \in S(u_0)$, $\forall t \in T(u_0,x)$, $\forall y \in K(u_0,x)$, $\langle t, y-g(u_0,x)\rangle > 0$.*

Khi đó $S(.)$ là lsc tại u_0.

Tính nửa liên tục trên của các tập nghiệm.

Định lý 3.4.1. *Với bài tóan $(WQVI_u)$, giả sử rằng*

(i) $K(.,.)$ là lsc trong (u_0, A) và $\mathrm{cl}K(.,.)$ là usc trong (u_0, A);

(ii) $T(.,.)$ là usc và có giá trị compact trong (u_0, A).

Khi đó, $W(.)$ là usc tại u_0.

Định lý 3.4.2. *Với bài toán $(MQVI_u)$ các giả thiết (i) và (ii) của Định* *lý 3.4.1. thoả thì $M(.)$ là usc tại u_0.*

Tính nửa liên tục dưới của các tập ϵ-nghiệm.

Giả sử $\epsilon \geq 0$, ta nói $\bar{x}$ là ϵ-nghiệm của bài toán $(WQVI_u)$ nếu $\bar{x} \in A \cap clK(u, \bar{x})$ sao cho $\forall x \in K(u, \bar{x})$, $\exists \bar{t} \in T(u, \bar{x})$, $\langle \bar{t}, x - g(u, \bar{x}) \rangle \geq -\epsilon$. Tập mọi ϵ-nghiệm của $(WQVI_u)$ biểu thị bởi $W^\epsilon(u)$. Các tập ϵ-nghiệm $M^\epsilon(u)$ và $S^\epsilon(u)$ của $(MQVI_u)$ và $(SQVI_u)$, tương ứng, được định nghĩa tương tự. Với u_0 ta định nghĩa

$$\widetilde{W}^\epsilon(x) = \begin{cases} W(u_0) & if \quad u = u_0, \\ W^\epsilon(u) & if \quad u \neq u_0, \end{cases}$$

$$\widetilde{M}^\epsilon(x) = \begin{cases} M(u_0) & if \quad u = u_0, \\ M^\epsilon(u) & if \quad u \neq u_0, \end{cases}$$

$$\widetilde{S}^\epsilon(x) = \begin{cases} S(u_0) & if \quad u = u_0, \\ S^\epsilon(u) & if \quad u \neq u_0. \end{cases}$$

Định lý 3.5.1. *Với bài toán $(WQVI_u)$ các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 3.3.1 thoả thì $\widetilde{W}^\epsilon(.)$ là lsc tại u_0 từ mỗi $\epsilon > 0$.*

Định lý 3.5.2. *Cùng với các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 3.3.2, $\widetilde{M}^\epsilon(.)$ là lsc tại u_0 từ mỗi $\epsilon > 0$.*

Định lý 3.5.3. *Với $(SQVI_u)$ nếu các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 3.3.3 thoả thì $\widetilde{S}^\epsilon(.)$ là lsc tại u_0 từ mỗi $\epsilon > 0$.*

Tính nửa liên tục trên của các tập ϵ-nghiệm.

Định lý 3.6.1. *Với các giả thiết (i) và (ii) trong Định lý 3.4.1, $W^\epsilon(.)$ là usc tại u_0 từ mỗi $\epsilon \geq 0$.*

Định lý 3.6.2. *Với các giả thiết (i) và (ii) trong Định lý 3.4.2, $M^\epsilon(.)$ là* *usc tại* u_0 *từ mỗi* $\epsilon \geq 0$.

Định lý 3.6.3. *Với các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 3.4.3,* $S^{\epsilon}(.)$ *là usc tại* u_0 *từ mỗi* $\epsilon \geq 0$.

Kết luận

Đề tài nghiên cứu này đã có một số kết quả về các điều kiện đủ tối ưu, lý thuyết đối ngẫu, sự tồn tại nghiệm các giả bất đẳng thức biến phân, về ổn định nghiệm và các ứng dụng cho bài tóan điều khiển, bài tóan mạng giao thông.

Các kết quả trên đã được báo cáo tại các hội thảo khoa học " Tối ưu và tính tóan khoa học " viện tóan học và tại hội nghị khoa học "Tối ưu và ứng dụng" của Việt nam và Bỉ tại Nha trang, 2004.

*

*