Bài gi ng

LÝ THUY T T I y U

Phan Lê Na

Khoa Công nghệ Thông tin

Trường Đại học Vinh

☞ **Mục đích:**

Cung cấp cho sinh viên một số phương pháp giải bài toán tối ưu: Phương pháp đơn hình, Phương pháp đơn hình đối ngẫu, Phương pháp Phân phối.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Nguyễn Đức Nghĩa,** ***Tối ưu hoá*****, NXB GD 2002**

2. **Bùi Minh Trí-Bùi Thế Tâm,** ***Lý thuyết Quy hoạch Tuyến tính*****, NXB KH&KT 2002**

3. **Bùi Thế Tâm-Trần Vũ Thiệu,** ***Các phương pháp Tối ưu hoá*****, NXB KH&KT 2002**

4. **Trần Xuân Sinh,** ***Lý thuyết Quy hoạch Tuyến tính*****, NXB SP 2003**

5. **Phan Lê Na,** ***Giáo trình Lý thuyết Tối ưu*****, ĐH Vinh**

Nội dung

Chương 0: Mở đầu

Chương 1: Phương pháp đơn hình

Chương 2: Phương pháp đơn hình đối ngẫu

Chương 3: Phương pháp phân phối

CHƯƠNG 0

MỞ ĐẦU

☞ **Đối tượng nghiên cứu**

- **Bài toán qui hoạch toán học**
- **Phân loại bài toán quy hoạch toán học**

☞ **Xây dựng mô hình toán học cho bài toán tối ưu thực tế**

- **Các bước xây dựng**
- **Một số mô hình thực tế**

Đ1. Đối tượng nghiên cứu

1. <u>Bài toán quy hoạch toán học</u>

Tìm vectơ $X^*=(x^*_1,x^*_2,\ldots,x^*_n)$ để hàm f(X) đạt cực trị khi thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} g_i(X)\le 0 \\ x_j \quad 0,\ X=(x_j),\ j=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Cụ thể: Tìm vectơ $X^*=(x^*_1,x^*_2,\ldots,x^*_n)$ để đạt Max f(X) hoặc Min f(X) (1) khi thoả mãn:

$$\text{đk}\quad \begin{cases} g_i(X)\le 0 & (2) \\ x_j \quad 0,\ X=(x_j),\ j=1,2,3,\ldots & (3) \end{cases}$$

- Bài toán (1), (2), (3) gọi là bài toán quy hoạch toán học
- Hàm f(X) gọi là hàm mục tiêu
- Điều kiện (2) (3) gọi là điều kiện ràng buộc
- Vectơ $X=(x_j)$ thoả mãn đk ràng buộc gọi là 1 phương án
- Tập $D= \{X=(x_j) \mid g_i(x) \le 0, x_j \quad 0\}$ gọi là tập phương án
- Vectơ X* thoả mãn $f(X^*) \quad f(X) \quad X \quad D$

  hoặc $f(X^*) \quad f(X) \quad X \quad D$

  gọi là phương án tối ưu, f(X*) gọi là giá trị tối ưu.
- Giải bài toán quy hoạch là tìm phương án tối ưu X* và giá trị tối ưu f(X*).

2. Phân loại bài toán quy hoạch toán học.

- Dựa vào tính chất của hàm mục tiêu và điều kiện ràng buộc để phân loại bài toán. Thông thường tên gọi của các bài toán được thể hiện trong điều kiện bài ra.

Ví dụ **:**

Quy hoạch tuyến tính, Quy hoạch phi tuyến, Quy hoạch lồi, Quy hoạch toàn phương, Quy hoạch nguyên…

- Khi hàm mục tiêu và các điều kiện ràng buộc là các hàm tuyến tính thì bài toán đã cho là bài toán quy hoạch tuyến tính (qhtt).

Trong đó quy hoạch tuyến tính có một vị trí quan trọng đối với tối ưu hoá.

Đ 2. Xây dựng mô hình toán học cho bài toán tối ưu thực tế

1. Các bước xây dựng mô hình toán học cho các bài toán tối ưu thực tế

Bước1: Xây dựng mô hình định tính cho vấn đề đặt ra

Bước2: Xây dựng mô hình toán học

Bước3: Sử dụng công cụ toán học để khảo sát cho bài toán ở bước 2
Đưa ra các tính chất, định lý và thuật toán

Bước 4: Phân tính đánh giá kết quả thu được ở bước 3 so với mô hình thực tế

2. Viết mô hình toán học một số mô hình thực tế

Ví du1: Một xí nghiệp sản xuất 2 sản phẩm A và B từ các nguyên liệu I , II . Biết tỷ lệ lãi, lượng dự trữ từ các nguyên liệu I, II cho theo bảng sau:

NL / SP	I	II	Lãi
A	1	2	3
B	3	3	5
Dự trữ	9	10	

Hãy thiết lập kế hoạch sản xuất sao cho có tổng số lãi lớn nhất?

Giải:

Gọi x_1, x_2 là lượng sản phẩm tương ứng của A, B

Mô hình toán học:

$$\text{Max } (3x_1 + 5x_2)$$

$$\text{đk} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \quad 10 \\ x_1, x_2 \quad 0, X = (x_1, x_2) \end{cases}$$

-

Bài toán tổng quát:

Một xí nghiệp sản xuất n sản phẩm, từ m nguyên liệu.

Biết:

- a_{ij} là sản phẩm thứ j, từ nguyên liệu thứ i
- b_i là lượng nguyên liệu dữ trữ thứ i
- c_j là tỷ lệ lãi trên 1 đơn vị sản phẩm thứ j.

Hãy thiết lập kế hoạch sản xuất sao cho có tổng số lãi là lớn nhất?

Giải:

Gọi x_j là số lượng sản phẩm thứ j.

Mô hinh toán học:

$$\text{Max}(f(X) = \overset{n}{\underset{j=1}{}} C_j\, x_j)$$

$$\text{đk} \quad \begin{cases} \overset{n}{\underset{j=1}{}} a_{ij}\, x_j \qquad b_i \;,\; i=1,2,\ldots,m \\ x_j \qquad 0 \;,\; X=(x_j) \;,\; j= 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cần chuyển một loại hàng từ 2 kho dến 2 địa điểm tiêu thụ. Biết cước phí vận chuyển trên 1 đơn vị hàng từ các kho đến các địa điểm bán, lượng hàng ở kho và lượng hàng cần thiết ở điểm bán cho theo bảng sau:

Kho / Địa điểm	5	15
7	x_{11} 3	x_{12} 4
13	x_{21} 2	x_{22} 5

Hãy tổ chức phân phối hàng sao cho phát hết thu đủ, nhưng có tổng cước phí là nhỏ nhất?

Giải:

Gọi x_{ij} là lượng hàng chuyển từ j -> i

Mô hình toán học:

$$f(X) = \text{Min}\ (3x_{11} + 4x_{12} + 2x_{21} + 5x_{22})$$

$$\text{đk}\quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} = 7 \\ x_{21} + x_{22} = 13 \\ x_{11} + x_{21} = 5 \\ x_{12} + x_{22} = 15 \\ x_{ij} \quad 0\ ,\ X=(x_{ij})\ ,\ i=1,2,\ j=1,2 \end{cases}$$

Bài toán tổng quát:

Cần vận chuyển một loại hàng từ n kho đến m địa điểm bán .

Biết:

- a_j là lượng hàng tại kho thứ j
- b_i là lượng hàng tại địa điểm bán thứ i
- c_{ij} là cước phí vận chuyển trên 1 đơn vị hàng chuyển kho j địa điểm bán i

=> Hãy phân phối lượng hàng sao cho tổng cước phí là nhỏ nhất ?

<u>Giải:</u>

Gọi x_{ij} là lượng hàng chuyển từ kho j -> i

Mô hình toán học :

$$\text{Min} \;\; (f(X) = \quad c_{ij}\, x_{ij} \;)$$

i,j

$$x_{ij} = a_j$$

i

đk

$$x_{ij} = b_i$$

j

$$x_{ij} \;,\; a_j \,, b_i \;\geq 0 \;,\; X=(x_{ij}),\; i = 1,m \;\; j = 1,n$$

CHƯƠNG 1

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

- ☞ Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc
- ☞ Giải bài toán qhtt 2 biến bằng phương pháp hình học
- ☞ Tính chất của bài toán qhtt
- ☞ Bài tập áp dụng các tính chất

- ☞ Công thức số gia hàm mục tiêu. Tiêu chuẩn tối ưu.
- ☞ Thuật toán đơn hình.
- ☞ Tìm phương án cực biên xuất phát trong trường hợp tổng quát.
- ☞ Câu hỏi và bài tập áp dụng thuật toán đơn hình.

Đ1. Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc

1. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát

$$\text{Min}\ (\ f(X) = \overset{n}{\underset{j=1}{}}\ c_j\, x_j\ )$$

đk

$$\begin{cases} \overset{n}{\underset{j=1}{}} a_{ij}\, x_j \quad (\quad , =)\ \ b_i \quad i=1,2,3\ldots m \\ x_j \qquad 0\ ,\ \ X=(x_j),\ j=1,2,\ldots n \end{cases}$$

Ví dụ : Cho bài toán quy hoạch tuyến tính.

$$\text{Min}\ (x_1 - x_2 + x_3)$$

$$\text{đk}\quad \begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad - x_3 \quad 5 \\ \qquad x_2 \quad + 2x_3 \quad 4 \\ x_1, x_2, x_3 \quad 0 \end{cases}$$

2. Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\text{Min } \left(f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right)$$

$$\text{đk} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \ i = 1,2,3\ldots, m \\ x_j \geq 0 \ , \ X=(x_j) \ , j = 1,2,3,\ldots,n \end{cases}$$

Ví dụ: Max ($x_1 - 2x_2 + x_3$)

$$\text{đk} \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 5 \\ x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

3. Các phép biến đổi tuyến tính đưa bài toán qhtt dạng tổng quát về dạng chính tắc

Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad b_i$ thì thêm ẩn phụ $x_{n+i} \quad 0, i = \overline{1,m}$

đưa bài toán về dạng:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1,m}$$

Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad b_i$ thì thêm ẩn phụ $x_{n+i} \quad 0, \; i = \overline{1,m}$

đưa bài toán về dạng:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1,m}$$

\# Nếu tồn tại x_k chưa xác định rõ dấu thì đặt:

$$x_k = x_k^+ - x_k^- \quad , x_k^+, x_k^- \quad 0$$

Thay $x_k = x_k^+ - x_k^-$ vào hàm mục tiêu và điều kiện ràng buộc

<u>Ví du 1</u>: Đưa về bài toán QHTT dạng chính tắc:

$$\text{Min } (x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad - x_3 \quad 2 \\ \qquad x_2 + x_3 = 4 \\ x_1, x_2, x_3 \quad 0 \end{cases}$$

Giải: Thêm ẩn phụ $x_4 \quad 0$, đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$\text{Min } (x_1 - 2x_2 + x_3)$$

–

$$\text{đk} \quad \begin{cases} 2x_1 \qquad - x_3 - x_4 = 2 \\ \qquad x_2 + x_3 \qquad = 4 \\ x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \quad 0 \end{cases}$$

Ví du 2: đưa về bài toán QHTT dạng chính tắc

$$\text{Min}\ (x_1 + 2x_2 - x_3)$$

–

Đk

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad\qquad 1 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 \qquad + x_3 \qquad 3 \\ x_1, x_2, x_3 \quad 0 \end{cases}$$

Giải: Thêm ẩn phụ x_4, x_5 0, đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$\text{Min}\ (x_1 + 2x_2 - x_3)$$

–

Đk
$$\left\{\begin{array}{llllll}
x_1 & -\ 2x_2 & & -\ x_4 & & = 1 \\
 & x_2 & +\ 2x_3 & & & = 2 \\
-x_1 & & +\ x_3 & & +\ x_5 & = 3 \\
\multicolumn{6}{l}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \quad 0}
\end{array}\right.$$

Chú ý: ẩn phụ nhằm mục đích đưa điều kiện bất đẳng thức về đẳng thức và có hệ số hàm mục tiêu $c_{n+i} = 0$

Ví dụ 3: đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$\text{Min } (x_1 - x_2 - x_3)$$

–

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} 2x_1 \qquad - \quad x_3 \qquad 2 \\ \qquad x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 \qquad - \; 2x_3 \qquad 1 \\ x_1, x_3 \quad 0 \end{cases}$$

Giải: - Thêm ẩn phụ $x_4, x_5 \quad 0$,

đặt $x_2 = x_2^+ - x_2^- \quad , x_2^+ x_2^- \quad 0$

đưa bài toán về dạng chính tắc:

$$\text{Min}\ (x_1 - x_2^+ + x_2^- - x_3)$$

$$\text{Đk}\ \begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \\ x_2^+ - x_2^- + 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_3 - x_5 = 1 \\ x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4, x_5 \quad 0 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Viết bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc trong trường hợp tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ.

Ví dụ 5: Nêu các phép toán biến đổi tuyến tính đưa bài toán về dạng chính tắc. Cho 1 ví dụ minh hoạ tất cả các phép biển đổi trên.

4. Các dạng viết bài toán QHTT dạng chính tắc

***Dạng 1*:**

$$\text{Min} \left(f(X) = \mathop{}\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \right)$$

$$\text{Đk} \begin{cases} \mathop{}\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i = 1,2,3\ldots m \\ x_j \quad 0, \; X=(x_j), j = 1,2,3,\ldots n \end{cases}$$

- ***Dạng 2***: Dạng ma trận

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad C = c_1 \quad \dots \quad c_n$$

Vậy: $\text{Min } (f(X) = C\,X)$

đk $\begin{cases} AX = b \\ X \quad 0 \end{cases}$

- ***<u>Dạng 3</u>***: Dạng Vectơ:

$C = (c_1 \quad \ldots \quad c_n)$

$X = (x_1 \quad \ldots \quad x_n)$

$b = (b_1 \quad \ldots \quad b_m)$

$A_j = (a_{1j} , a_{2j} , \ldots , a_{mj})$

=> Min (f(X) = <C , X>)

$$\text{đk} \quad \begin{cases} x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = b \\ X \quad 0, X=(x_j), j = 1,n \end{cases}$$

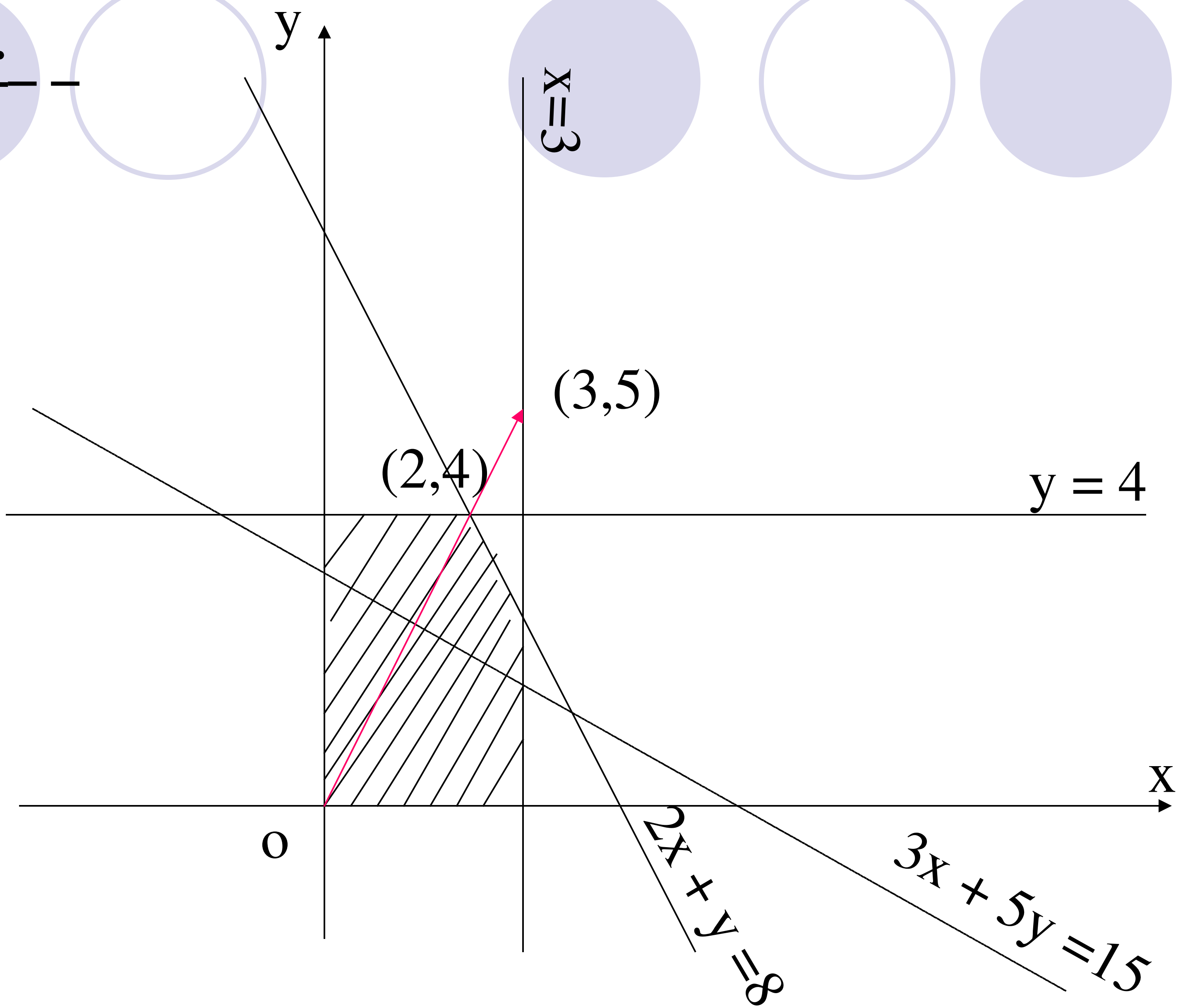
Đ2 Giải bài toỏn QHTT 2 biến bằng phương phỏp hỡnh học

<u>Ví dụ 1</u>: Giải bài toán QHTT bằng phương pháp hình học

$$\text{Max } (3x + 5y)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} 2x + y \quad 8 \\ \quad y \quad 4 \\ x \quad 3 \\ x, y \quad 0 \end{cases}$$

Giải:



=> X* = (2,4) , f(X*) = 3*2 + 5*4 =26

Bài toán tổng quát:

Giải bài toán QHTT bằng phương pháp hình học:

$$\text{Max } (ax + by)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} a_{1i}\, x + a_{2i}\, y \qquad b_i \\ x,\ y \qquad 0 \end{cases}$$

Bước1: Dựng các đường thẳng $a_{1i}\, x + a_{2i}\, y = b_i$

Bước 2: Xác định miền phương án

Bước 3: Dựng đường định mức $ax + by = f_o$

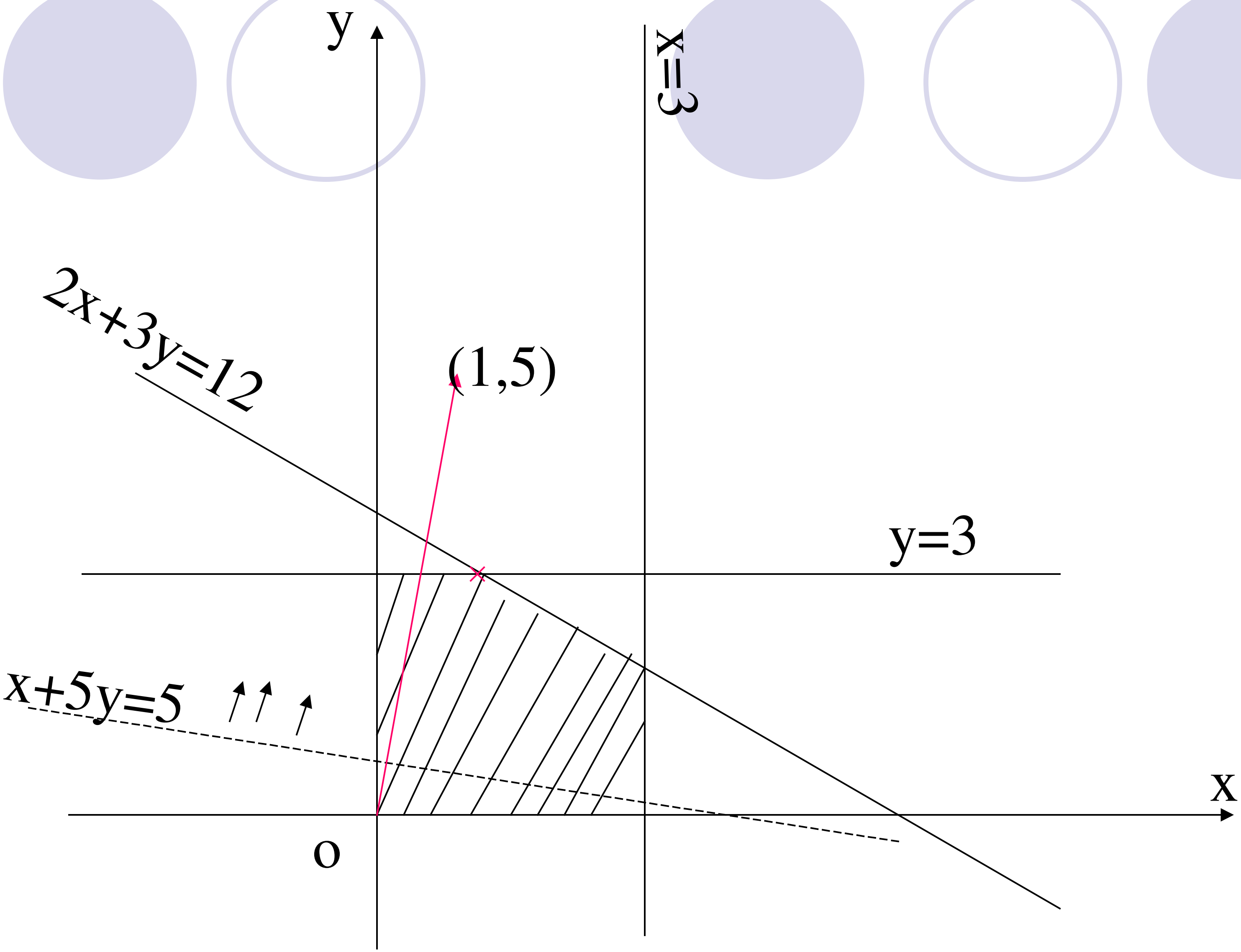
$$f_o = \text{BSCNN } (a,b)$$

Bước 4: Tịnh tiến đường mức $ax + by = f_o$ theo đường pháp tuyến n(a,b) để tìm Max, tịnh tiến theo chiều ngược lại để tìm Min

Ví dụ 2: Giải bài toán bằng phương pháp hình học

$$\text{Max } (x + 5y)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} 2x + 3y \qquad 12 \\ \qquad\quad y \qquad 3 \\ x \qquad\qquad\quad 3 \\ x\,,\, y \qquad 0 \end{cases}$$

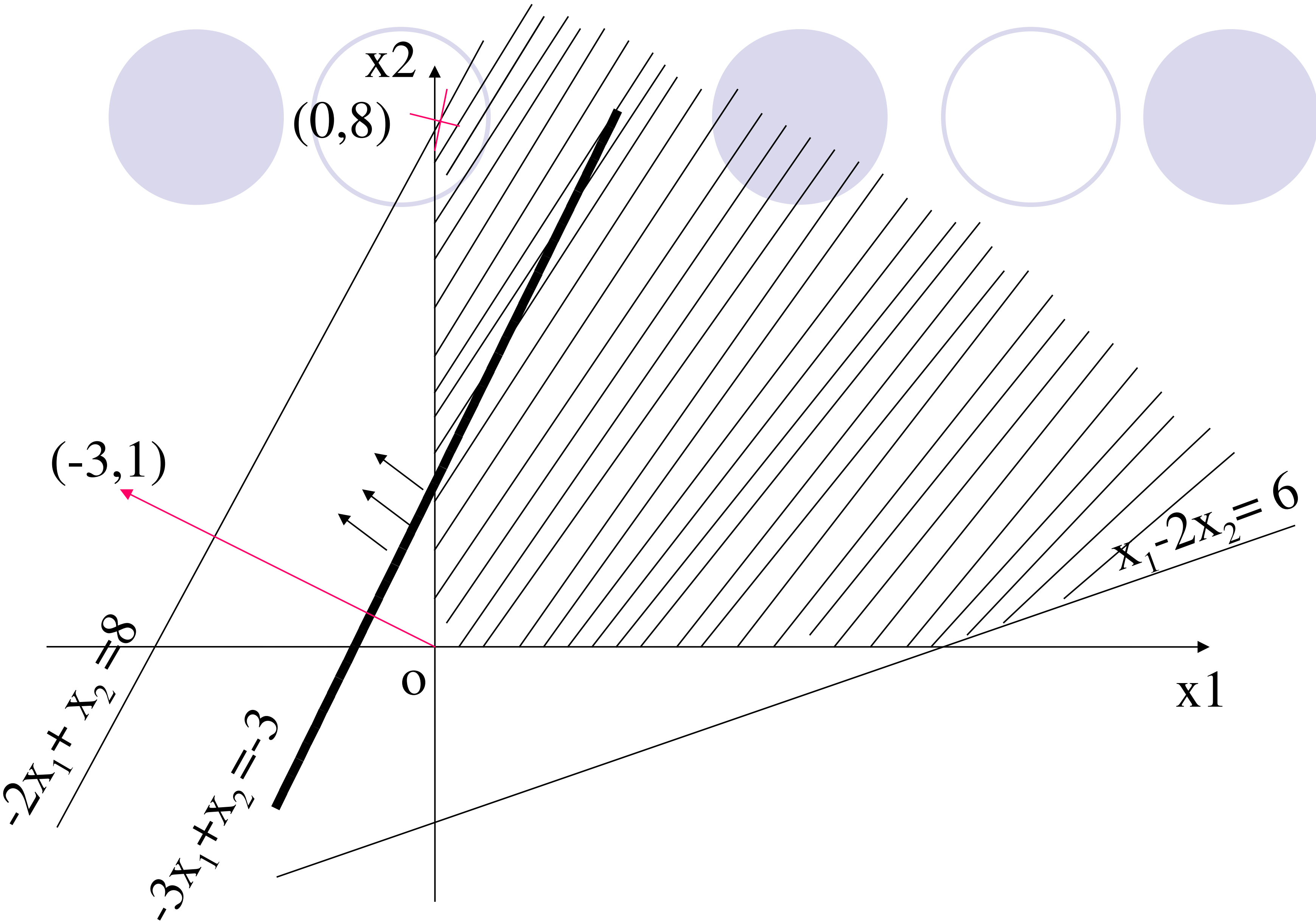


<u>Kết quả:</u> X* = (3/2 , 3) f(X*) = 3/2 + 5*3 = 33/2

<u>Ví dụ 3</u>: Giải bài toán bằng phương pháp hình học

$$\text{Max } (-3x_1 + x_2)$$

$$\text{Đk} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \quad 8 \\ x_1 - 2x_2 \quad 6 \\ x_1, x_{2,} \quad 0 \end{cases}$$



Kết quả: $X^* = (0,8)$, $f(X^*) = -3*0 + 8 = 8$

Ví dụ 4: **Giải bài toán bằng phương pháp hình học**

a) Max $(-x_1 + x_2)$

b) Min $(-x_1 + x_2)$

$$
\text{Đk} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \qquad 2 \\ x_1 - 2x_2 \qquad 2 \\ x_1 + x_2 \qquad 5 \\ x_1, x_{2,} \qquad 0 \end{cases}
$$

<u>Kết quả:</u> a) $X_1^* = (1,4) \Rightarrow \text{Max}\ (-x_1 + x_2) = 3$

b) $X_2^* = (4,1) \Rightarrow \text{Min}\ (-x_1 + x_2) = -3$

<u>Ví dụ 5</u>**:** $\text{Max}\,(-x_1 + x_2\ )$

$$\text{Đk}\quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 \qquad 2 \\ -x_1 + 2\,x_2 \qquad 8 \\ x_1, x_{2,} \qquad 0 \end{cases}$$

<u>Kết quả:</u> $X_1^* = (4/3,\ 14/3) \Rightarrow \text{Max}\,(-x_1 + x_2\ ) = 10/3$

Đ 3 Tính chất của bài toán QHTT

1.Một số khái niệm về giải tích lồi:

- ***Tổ hợp lồi:***

Cho $x_{1,}, x_2, \ldots, x_n \quad R^n$

$$X = \ {}_1x_1 + \ {}_2x_2 + \ldots + \ {}_nx_{n}\,, \ 0 \quad {}_j \quad 1 \qquad \overset{n}{\underset{j=1}{}} \quad {}_j = 1$$

được gọi là biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi.

- ***Tập hợp lồi:***

L là tập lồi ⇔ $\quad x,y \quad L \Rightarrow \ x + (1- \ )y \quad L, \ 0 \qquad 1$

Tập L được gọi là tập lồi nếu việc chứa 2 điểm trong tập lồi thì nó chứa đoạn thẳng nối giữa 2 điểm đó

- ***Điểm cực biên (Đỉnh):*** Là điểm không thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi thực sự của 2 điểm nào trong tập đó.
- ***Đa diện lồi:*** Cho các điểm $x_{1,}, x_2, \ldots, x_n \quad R^n$. Tập hợp tất cả các điểm X là tổ hợp lồi của các điểm đã cho gọi là đa diện lồi.

$\{ x_{1,}, x_2, \ldots, x_n \}$ gọi là hệ sinh.

Biểu diễn đa diện lồi:

$$X \quad D: X = \sum_{j=1}^{n} {}_j x_j , \quad \sum_{j=1}^{n} {}_j = 1 , \; 0 \quad {}_j \quad 1.$$

2. Tính chất của bài toán QHTT.

Xét bài toán QHTT:

$$\text{Min}(\ f(X) = C\,X\ )$$

$$\text{đk} \quad \begin{cases} AX = b \\ X \quad 0 \end{cases}$$

Tính chất 1: Tập phương án của bài toán QHTT là tập lồi.

Định nghĩa: Điểm cực biên của tập phương án bài toán QHTT gọi là phương án cực biên.

Phương án X=(x_j) gọi là bị chặn nếu   số thực q sao cho x_j q, $\overline{j=1..n}$.

Tập phương án được gọi là bị chặn nếu   phương án điều bị chặn.

***<u>Ví dụ 1</u>*:** Xét bài toán QHTT

$$\text{Min } (x_1 - x_2 - x_3)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 & (1) \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 & (2) \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 & (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \quad 0 & \end{cases}$$

Chứng minh rằng: Tập phương án bị chặn.

<u>Giải:</u>

- **<u>Cách 1</u>:** Nhân 4 với pt (2), cộng vế với vế ta có:

  $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12, \quad x_j \quad 12 \quad j=1..4$ => đpcm

- **<u>Cách 2</u>:** Nhân 6 với pt (3) , cộng vế với vế ta có:

  $14x_1 + x_2 + 14x_3 + x_4 = 39, \; x_j \quad 39, \quad j=1..4.$

  => đpcm

Tính chất 2: Nếu tập phương án của bài toán QHTT là đa diện lồi thì có ít nhất 1 phương án cực biên là phương án tối ưu.

Tính chất 3: Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu thì có ít nhất 1 phương án cực biên là phương án tối ưu

Tính chất 4: Phương án X =(x_j) là phương án cực biên ⇔ các vectơ cột A_j tương ứng với các x_j >0 là độc lập tuyến tính.

***Ví dụ 2*: Xét bài toán QHTT**

$$\text{Min}\,(x_1 - x_2 - x_3)$$

đk

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \quad 0 \end{cases}$$

a) Điểm X = (0,8/5 ,11/5 , 33/5) có phải là phương án cực biên không?

b) Ti`m pacb tương ứng với cơ sở $A_1 A_2 A_4$.

Giải:

- Kiểm tra xem X có phải là phương án không?

Ta có: $3*0 - 7*8/5 + 3*11/5 + 33/5 = 2$

$- 0 + 2*8/5 - 11/5 = 1$

$2*0 + 8/5 + 2*11/5 = 6$

=> X là phương án

- Tại phương án X ta có : $x_{2,}$, x_3 , $x_4 > 0$ nên

=> Xét cơ sở $A_2 A_3 A_4$

Ta có: $|A_2 A_3 A_4| = \begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5 \quad 0$

=> $A_2 A_3 A_4$ độc lập tuyến tính => X là pacb.

b) Kiểm tra $A_1 A_2 A_4$ là độc lập tuyến tính?

$$\text{Ta có: } |A_1 A_2 A_4| = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \quad 0$$

=> $A_1 A_2 A_4$ độc lập tuyến tính => $x_1, x_2, x_4 > 0$ và $x_3 = 0$

Thay $x_3 = 0$ vào điều kiện ràng buộc ta có hệ phương tri`nh:

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 11/5 \\ x_2 &= 8/5 \\ x_4 &= 33/5 \end{aligned}$$

Pacb X= (11/5 , 8/5 , 0 , 33/5).

Tổng quát: Kiểm tra $X = (x_j)$ là phương án cực biên?

Bước 1: Kiểm tra X là phương án.

Bước 2: Tại X có $x_j > 0$ thì xét $\{A_j\}$ có độc lập tuyến tính hay không?

Bước 3: Kết luận.

Hệ quả: Số toạ độ dương của pacb có tối đa không quá số phương trình độc lập tuyến tính.

Số phương án cực biên của bài toán QHTT là hữu hạn.

Khái niệm:

Phương án cực biên có đủ m toạ độ dương gọi là phương án cực biên không suy biến.

Bài toán quy hoạch tuyến tính được gọi là không suy biến nếu tất cả các phương án cực biên đều không suy biến.

Ví dụ1: Xét bài toán QHTT:

$$\text{Đk}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 \qquad = 0 \\ x_1 , x_2 , x_3 \qquad 0 \end{cases}$$

X1=(1,1,2) là phương án.

X2=(0,0,4) là pacb suy biến vì có 1 toạ độ dương mà có 2 pt.

X3=(2,2,0) là pacb không suy biến vì có 2 toạ độ dương và cũng có 2 phương trình điều kiện.

X4=(3,3,-2) không phải là phương án.

<u>Tính chất 5</u>: Nếu bài toán QHTT có 2 phương án tối ưu khác nhau thì bài toán có vô số phương án tối ưu.

<u>Chứng minh:</u> Giả sử X_1, X_2 là 2 patư và $X_1 \quad X_2$.

Ta xét Y= $\quad X_1 + (1 - \quad)X_2, \quad 0 \qquad 1.$

Vì X_1, X_2 là phương án tối ưu nên $f(X_1) = \text{Min } f(X)$,

$f(X_2) = \text{Min } f(X) \Rightarrow f(X_1) = f(X_2)$.

$\Rightarrow f(Y) = \quad f(X_1) + (1 - \quad) f(X_2)$

$= \quad f(X_2 + (1 - \quad) f(X_2)$

$= f(X2) = \text{Min } f(X) \Rightarrow$ Y là patư => đcpcm

Tính chất 6: Điều kiện cần và đủ để bài toán QHTT có phương án tối ưu là hàm mục tiêu bị chặn và tập phương án .

Ví dụ 2: Xét bài toán QHTT

$$\text{Max}\ (2x_1 + 3x_2)$$

$$\text{đk} \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 \qquad = 1 \\ x_j \quad 0,\ j = 1,2,3 \end{cases}$$

a) Tìm tất cả các phương án cực biên.
b) CMR bài toán có phương án tối ưu.
c) Tìm phương án tối ưu và giá trị tối ưu.

a) + Xét $A_1 A_2$

Ta có:

$$|A_1 A_2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \quad 0$$

Nên $A_1 A_2$ là độc lập tuyến tính => x_1 x_2 >0 và x_3= 0.

Thay vào điều kiện ràng buộc ta có:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra: $x_1 = 13/10$ và $x_2 = -1/10 < 0$ (Loại)

+ Xét $A_1 A_3$

Ta có:

$$|A_1 A_3| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad 0$$

Nên $A_1 A_3$ là độc lập tuyến tính=> x_1 x_3 >0 và x_2= 0.

Thay vào điều kiện ràng buộc ta có:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 = 5 \\ x_1 \qquad\; = 1 \end{cases}$$

Suy ra: $x_1 = 1$ và $x_3 = 1$

=> Pacb X=(1 , 0 , 1)

+ Xét $A_2 A_3$

Ta có:

$$|A_2 A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \quad 0$$

Nên $A_2 A_3$ là độc lập tuyến tính=>x_2 x_3 >0 và x_1= 0.

Thay vào điều kiện ràng buộc ta có:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_2 = 1 \end{cases}$$

Suy ra: $x_2 = 1/3$ và $x_3 = 13/3$

=> Pacb X=(0 , 1/3 , 13/3)

Suy ra:

Tất cả các pacb của bài toán đã cho là:

X1 = (1 , 0 , 1) là pacb với cơ sở $A_1 A_3$.

X2 = (0 , 1/3 , 13/3) là pacb với cơ sở $A_2 A_3$.

b) Từ câu a) ta có X1=(1 , 0 , 1) là pacb => Tập phương án là .

Mặt khác:

Từ phương trình $x_1 + 3x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - 3x_2$.Thay vào hàm mục tiêu ta có:

$$f(X) = 2x_1 + 3x_2 = 2(1 - 3x_2) + 3x_2 = 2 - 3x_2 \qquad 2$$

do $x_2 \qquad 0$.

Nên theo t/c 6 => đpcm.

c) Thay các pacb vào hàm mục tiêu , ta có:

$f(X1) = 2*0 + 3*1/3 = 1$

$f(X2) = 2*1+3*0 = 2$

Vì $f(X1) < f(X2) \Rightarrow f(X^*) = f(X2) = 2$ và $X^* = (1 , 0 , 1)$

Ví dụ 3: Xét bài toán QHTT

$$\text{Min } (x_2 - x_4 - 3x_5)$$

$$\text{đk} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad - \quad x_4 + x_5 = 1 \\ \quad - 4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ \quad 3x_2 \quad \text{——} \quad + x_5 + x_6 = 5 \\ x_j \quad 0 , j = 1, 6 \end{cases}$$

- Điểm (0 , 5/3 ,4 , 7/3 , 0 , 0) có phải là pacb?
- Tìm pacb ứng với cơ sở A_2 A_4 A_5 ?
- CMR tập phương án bị chặn ?
- CMR bài toán có phương án tối ưu ?

a) # Kiểm tra X = (0 , 5/3 ,4 , 7/3 , 0 , 0) là phương án?

0 + 2*5/3 -7/3 +0 =1

- 4*5/3 + 4 + 2*7/3 -0 =2

3*5/3 +0 +0 =5

Vậy X là phương án .

Tại X, ta có : x_2 , x_3 , x_4 > 0

=> xét cơ sở A_2 A_3 A_4

$$|A_2\ A_3\ A_4| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad 0$$

A_2 A_3 A_4 là độc lập tuyến tính => X là pacb.

b) Xét $A_2\ A_4\ A_5$

$$|A_2\ A_4\ A_5| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad 0$$

$A_2\ A_4\ A_5$ là độc lập tuyến tính => x_2, x_4, $x_5 > 0$ và

$x_1 = x_3 = x_6 = 0$

Thay vào điều kiện ràng buộc ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1/3 \\ x_4 = 11/3 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

Suy ra pacb ứng với cơ sở $A_2\ A_4\ A_5$ là:

$$X = (0\ ,\ 1/3\ ,\ 0\ ,\ 11/3\ ,\ 4\ ,\ 0).$$

c) Cộng vế với vế của 3 phương trình trong điều kiện ràng buộc, ta có:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 8 \Rightarrow x_j \quad 8 \qquad j = \overline{1..6}$

=> đpcm

d) Từ câu c) ta có $x_2 \quad 8 \Rightarrow f(X) = x_2 - x_4 - 3x_5 \quad 8$

và từ câu a) => Tập phương án => đpcm

3. Công thức số gia hàm mục tiêu

3.1 Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình:

Dựa vào 2 nhận xét sau:

Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu thì có ít nhất 1 phương án cực biên là phương án tối ưu.

Số phương án cực biên của bài toán QHTT là hữu hạn.

Xây dựng thuật toán đơn hình gồm 2 giai đoạn:

Gđ1: Tìm phương án cực biên xuất phát.

Gđ2: Kiểm tra điều kiện tối ưu đối với phương án cực biên xuất phát. Nếu đúng đó là phương án tối ưu, Nếu sai thì xây dựng phương án cực biên mới và kiểm tra điều kiện tối ưu đối với phương án này.

- Xét bài toán QHTT

$$\text{Min } (f(X) = CX)$$

$$\text{đk} \begin{cases} AX = b \\ X \quad 0 \end{cases}$$

Trong đó ma trận A chứa ma trận đơn vị

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Ví dụ 1: Xét bài toán QHTT với điều kiện

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad - 2x_4 = 2 \\ \qquad x_2 \qquad + \ x_4 = 4 \\ \qquad\qquad x_3 - \ x_4 = 1 \\ x_j \quad 0 \ \ j = 1,2,3,4 \end{cases}$$

Tìm pacb xuất phát.

Giải:

Tacó : Ma trận đơn vị $E = (A_1\, A_2\, A_3\,)$ => Tập chỉ số

$J = \ 1,2,3$ $\Rightarrow x_1 = b_1 = 2,\ x_2 = b_2 = 4\ ,\ x_3 = b_3 = 1,\ x_1 = 0$

=> pacb xuất phát (2 , 4 , 1 , 0).

<u>Tổng quát</u>: Tìm pacb xuất phát:

- Tìm ma trận đơn vị $E = (A_j)$, Tập chỉ số cơ sở J
- Pacb xuất phát $X = (x_j)$

$$x_j = \begin{cases} b_i & \text{Nếu } j \quad J \\ 0 & \text{Nếu } j \quad J \end{cases}$$

<u>Ví dụ2</u>: Hãy tự cho 1 ví dụ về bài toán QHTT dạng chính tắc, trong đó ma trận A chứa ma trận đơn vị. Viết pacb xuất phát từ ví dụ đó.

3.2 Công thức số gia hàm mục tiêu:

Giả sử $X = (x_j)$ là pacb

$$f(X) = \qquad C_k x_k$$

$$k \quad J$$

$$f(X^j) = \qquad C_k x_{kj}$$

$$k \quad J$$

Đặt $\quad_j = f(X^j) - C_j = \qquad C_k x_{kj} - C_j$

$$k \quad J$$

=> Biểu thức trên gọi là công thức số gia hàm mục tiêu.

3.3 Bảng đơn hình

(j J)

Bảng	Cơ sở	x_j	C_j	C_1	.....	C_n
				A_1		A_n
		f(X)		1		n

Ví dụ 1: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$

$$\text{đk} \begin{cases} 3x_1 \qquad\qquad +x_3 \qquad = 6 \\ -2x_1 \quad +x_2 \qquad\qquad\quad = 1 \\ x_1 \qquad\qquad\quad + \ x_4 = 3 \\ x_j \quad 0, \ j=1,4 \end{cases}$$

Tính $_j$ tại pacb xuất phát.

Giải:

Ta có ma trận đơn vị $E = (A_3\ A_2\ A_4)$, J= 3,2,4 .

$x_3 = 6$, $x_2 = 1$, $x_4 = 3$, $x_1 = 0$

Pacb xuất phát X = (0 , 1 , 6 , 3)

Ta có : $C_1 = 1$, $C_2 = -2$, $C_3 = -3$, $C_4 = 0$

Lập bảng đơn hình:

Bảng	Cơ sở	x_j	C_j	1	-2	-3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
I	A_3	6	-3	3	0	1	0
	A_2	1	-2	-2	1	0	0
	A_4	3	0	1	0	0	1
				-6	0	0	0

Ví dụ 2: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (-2x_1 + x_2 - x_3)$$

Đk
$$\begin{cases} -3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_j \quad 0, \ j=1,4 \end{cases}$$

Tính $_j$ tại pacb xuất phát.

Giải:

Ta có ma trận đơn vị $E = (A_3\ A_1\ A_4)$, J= 3,1,4

$x_3 = 1$, $x_1 = 7$, $x_4 = 2$, $x_2 = 0$

Pacb xuất phát X = (7 , 0 , 1 , 2).

Ta có : $C_1 = -2$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$, $C_4 = 0$

Lập bảng đơn hình:

Bảng	Cơ sở	x_j	C_j	-2	1	-1	0
				A_1	A_2	A_3	A_4
I	A_3	1	-1	0	-3	1	0
	A_1	7	-2	1	2	0	0
	A_4	2	0	0	1	0	1
				0	-2	0	0

Định lý1: (*Tiêu chuẩn tối ưu*)

Nếu tại pacb X = (x_j) có mọi $_j$ 0 thi` X là phương án tối ưu

<u>Ví dụ 3</u>: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (x_1 + 2x_2 - x_4)$$

Đk
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_j \quad 0,\ j=\overline{1,4} \end{cases}$$

Kiểm tra pacb xuất phát có phải là patư không?

<u>Giải</u>:

Ta có ma trận đơn vị $E = (A_1\ A_4\ A_3)$, $J=\ 1,4,3$

$x_1 = 5$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$, $x_2 = 0$

Pacb xuất phát $X = (5 , 0 , 1 , 2)$.

Ta có : $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 0$, $C_4 = -1$

Lập bảng đơn hình:

Bảng	Cơ sở	x_j	C_j	1	2	0	-1
				A_1	A_2	A_3	A_4
I	A_1	5	1	1	2	0	0
	A_4	2	-1	0	1	0	1
	A_3	1	0	0	-1	1	0
				0	-1	0	0

Tại pacb xuất phát X = (5,0,1,2) thì $_j$ $0 \quad j = \overline{1,4}$

Đây là phương án tối ưu

Ví dụ 3: Cho bài toán QHTT bằng phương pháp đơn hình

$$\text{Min } (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\text{đk} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_j \quad 0, \; j = 1,5 \end{cases}$$

Giải:

Ta có ma trận đơn vị E = (A_2 A_5 A_4) , J= 2,5,4

$x_2 = 2$, $x_5 = 3$, $x_4 = 4$, $x_1 = x_3 = 0$

Pacb xuất phát X = (0 , 2 , 0 , 4 , 3)

Ta có : $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, $C_4 = 1$

Lập bảng đơn hình

Bảng	Cơ sở	x_j	C_j	1	1	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
I	A_2	2	1	-1	1	2	0	0
	A_5	3	0	1	0	-1	0	1
	A_4	4	0	2	0	1	1	0
				-2	0	1	0	0
II	A_3	1	1	-1/2	1/2	1	0	0
	A_5	4	0	1/2	1/2	0	0	1
	A_4	3	0	5/2	-1/2	0	1	0
				-3/2	-1/2	0	0	0

Tại bảng II $_j$ 0 , nên $X^* = (0,0,1,3,4)$

$f(X^*) = 1$

4. Thuật toán đơn hình

Bước 0: Tìm pacb xuất phát $X = (x_j)$, J , C_j

Bước 1: Tính $_j$

Kiểm tra $_j$ 0 không ?

Nếu đúng => X là patư

Nếu sai sang Bước 2

Bước 2: Kiểm tra $_p > 0$, x_{ip} 0 ?

Nếu đúng => Bài toán không có patư.

Nếu sai sang Bước 3

Bước 3: Chọn $_k$ = Max $_j$ => A_k vào cơ sở

$$\underset{x_{ik} \quad 0}{Min} \quad \frac{x_j}{x_{ik}} \qquad \frac{x_L}{x_{Lk}}$$

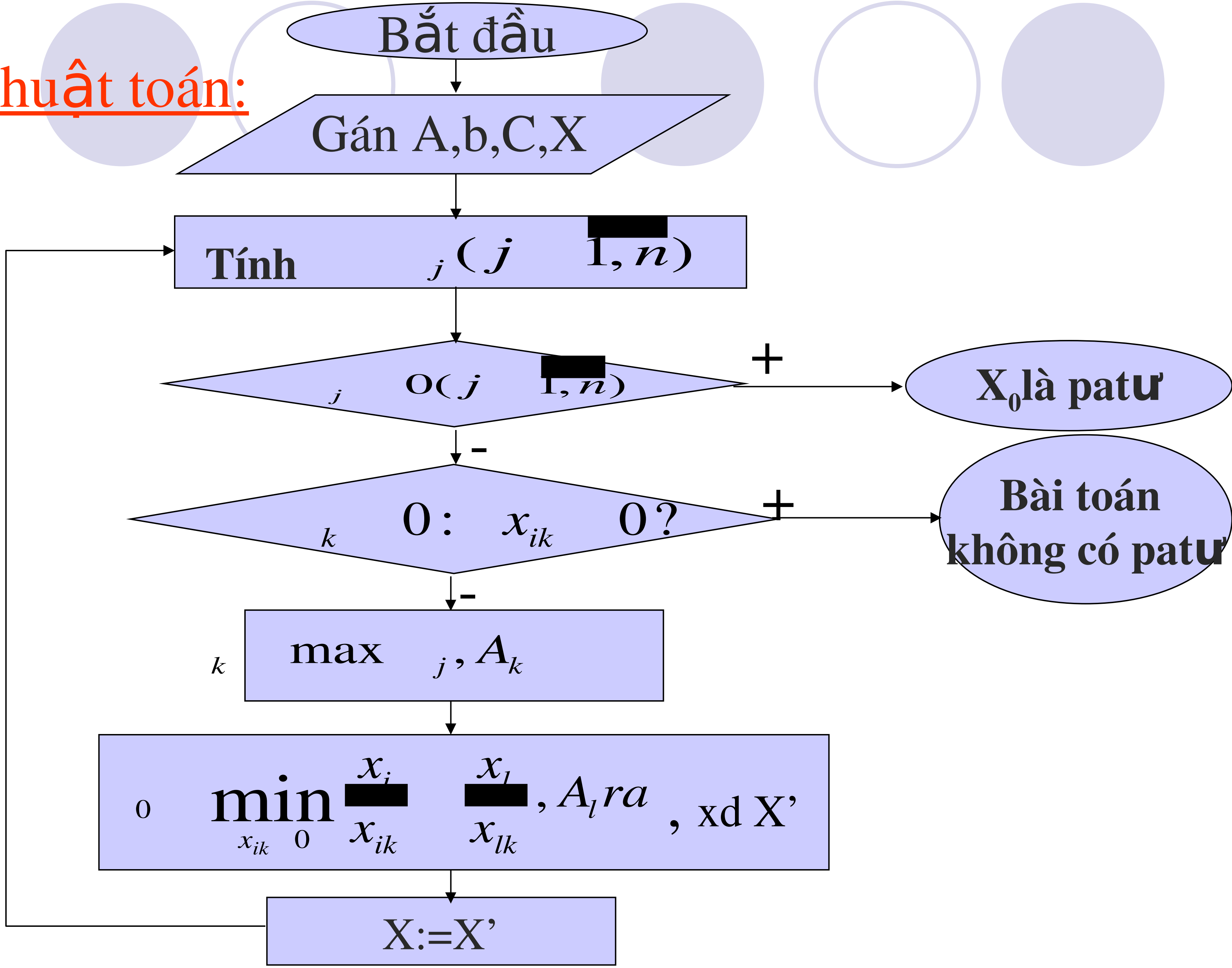
=> A_L cơ sở , x_{Lk} là phần tử quay

<u>Bước 4</u>: Xây dựng pacb X ' =(x_j') theo quy tắc.

X : = X' (Trở lại Bước 1)

<u>Chú ý</u>: Phương pháp đơn hình giải bài toán tìm Min và chỉ xét các đại lượng dương

Thuật toán:



Bắt đầu
Gán A,b,C,X
Tính $_j\,(j$ [redacted] $1, n)$
$_j$ $o(j$ [redacted] $, n)$
+
X_0 là patư
-
$_k$ $0 :$ x_{ik} $0\,?$
+
Bài toán không có patư
-
$_k$ max $_j, A_k$
$_0$ min x_i [redacted] x_l [redacted] $, A_l\, ra$, xd X’
x_{ik} 0 x_{ik} x_{lk}
X:=X’

<u>Ví dụ 5</u>: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2 \\ x_1 \cancel{+2x_3} + x_5 + 2x_6 = 6 \\ x_j \quad 0, \; j=1,6 \end{cases}$$

a) Sử dụng phương pháp đơn hình tìm 2 pacb.

b) Sử dụng phương pháp đơn hình kiểm tra pacb thứ 2 có phải là patư không?

c) Sử dụng phương pháp đơn hình tính $_j$ tại 2 pacb.

d) Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

5. Tìm phương án cực biên xuất phát trong trường hợp tổng quát

Ví dụ 1: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} 2x_1 \qquad\qquad - x_3 \qquad 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad 5 \\ x_j \quad 0 \,,\; j=1,3 \end{cases}$$

Đưa bài toán về dạng chính tắc.

Giải: Thêm 2 ẩn phụ $x_4\, x_5 \quad 0$, đưa bài toán về dạng chuẩn tắc

$$
\text{Đk} \quad \begin{cases} \text{Min} \; (x_1 - 2x_2 + x_3) \\ 2x_1 \qquad\qquad - x_3 - x_4 \qquad\quad = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_5 = 5 \\ x_j \quad 0 \, , \; j = 1,5 \end{cases}
$$

- Tìm pacb xuất phát của bài toán trên.

Thêm ẩn giả tạo $x_6 \quad 0$, với T>0 tuỳ ý đưa bài toán về dạng giả tạo:

$$\text{Min}\,(x_1 - 2x_2 + x_3 + T\,x_6)$$

$$\text{Đk}\quad \begin{cases} 2x_1 \quad - x_3 - x_4 \quad + x_6 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \quad + x_5 \quad = 5 \\ x_j \quad 0,\ j=1,6 \end{cases}$$

Ta có : Ma trận đơn vị $E = (A_6\ A_5)$, $J = \ 6,5$

$x_6 = 2$, $x_5 = 5$, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

Pacb xuất phát là: $X = (0 , 0 , 0 , 0 , 5 , 2)$.

***<u>Ví dụ 2</u>*:** Cho bài toán QHTT

$$\text{Min}\ (-x_1 + 2x_2 - x_3)$$

Đk
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \quad 0,\ j = 1,3 \end{cases}$$

Viết pacb xuất phát.

Giải: Thêm 2 ẩn giả tạo $x_4\ x_5 \quad 0$, với T > 0 tuỳ ý, đưa bài toán về dạng giả tạo:

$$\text{Min}\ (-x_1 + 2x_2 - x_3 + Tx_4 + Tx_5)$$

$$\text{Đk}\quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4 \\ x_j \quad 0,\ j = 1,5 \end{cases}$$

Ta có : Ma trận đơn vị $E = (A_4\ A_5)$, $J = \ 4,5$

$x_4 = 1$, $x_5 = 4$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Pacb xuất phát là: X = (0 , 0 , 0 , 1 , 4).

- *Tổng quát*: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (f(X) = \overset{n}{\underset{j=1}{}} \; c_j x_j)$$

$$\text{Đk} \begin{cases} \overset{n}{\underset{j=1}{}} \; a_{ij} x_j = b_i \;,\; i = 1,2,3\ldots, m \\ x_j \quad 0 \;,\; X=(x_j) \;,\; j = 1,2,3,\ldots,n \end{cases}$$

Trong đó, ma trận A = $(a_{ij})_{m \times n}$ chưa chứa ma trận đơn vị E. Thêm ẩn giả tạo x_{n+i} 0, với T >0 tuỳ ý , đưa bài toán về dạng giả tạo.

$$\text{Min}\left(f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + T \sum_{j=1}^{n} x_{n+i} \right)$$

$$\text{Đk} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \,, \; i = \overline{1,m} \\ x_j \geq 0 \,, \; X = (x_j) \,, \; j = \overline{1,n+m} \end{cases}$$

Nhận xét : ẩn giả tạo nhằm mục đích tạo ra ma trận đơn vị với hệ số của hàm mục tiêu $c_{n+i} = T$.

Ví dụ 3: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (2x_1 - x_2 - 3x_3)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_j \quad 0, \ j = 1,4 \end{cases}$$

Viết pacb xuất phát.

Giải:

Thêm 2 ẩn giả tạo x_5 x_6 0 với T >0 tuỳ ý. Ta đưa bài toán về dạng giả tạo

$$\text{Min } (2x_1 - x_2 - 3x_3 + Tx_5 + T x_6)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ x_j \quad 0 ,\ j = 1,6 \end{cases}$$

Ma trận đơn vị E = (A_5 A_4 A_6) => Tập chỉ số

J= 5,4,6 => x5 = 3, x_4 = 7 , x_6 = 1, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

=> pacb xuất phát (0, 0 ,0 , 7 , 3 , 1).

<u>Ví dụ 4</u>: Cho bài toán QHTT

$$\text{Min } (2x_1 + x_2 - 3x_4)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} -x_1 \qquad\quad - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 \qquad\quad - x_3 + x_4 = 4 \\ x_j \quad 0 , \; j = 1,4 \end{cases}$$

Tính $\quad_j$ tại pacb xuất phát ?

Giải:

Thêm 2 ẩn giả tạo x_5 x_6 0 với T >0 tuỳ ý . Ta đưa bài toán về dạng giả tạo

$$\text{Min } (2x_1 + x_2 - 3x_4 + T x_5 + T x_6)$$

$$\text{Đk} \quad \begin{cases} -x_1 \qquad\qquad - x_3 + x_4 + x_5 \qquad = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \qquad\qquad = 6 \\ x_1 \qquad\qquad - x_3 + x_4 \qquad + x_6 = 4 \\ x_j \quad 0 , j = 1,6 \end{cases}$$

Ma trận đơn vị E = (A_5 A_2 A_6) => Tập chỉ số

J= 5,2,6 => x5 = 1, x_2= 6 , x_6 = 4, $x_1 = x_3 = x_4 = 0$

=> pacb xuất phát (0, 6 ,0 , 0 , 1 , 4)

Ta có bảng đơn hình như sau :

Bảng	Cơ sở	x_j	C_j	2	1	0	-3	T	T
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A6
I	A_5 A_2 A_6	1 6 4	T 1 T	-1 2 1	0 1 0	-1 1 -1	1 -1 1	1 0 0	0 0 1
				0	0	-2T+1	2T+2	0	0

Nhận xét:

$$_{j} = T_{j} + \;_{j}$$

- Nếu $_{j} > 0$ => $_{j} > 0$, $_{j}$
- Nếu $_{j} < 0$ => $_{j} < 0$, $_{j}$
- Max $_{j}$ ⇔ Max $_{j}$

  $_{j} > 0$ $\qquad$ $_{j} > 0$
- $_{j} = 0$ => Đưa về trường hợp đã biết trước đây.

VÝ dô 4: Gi¶i bµi to¸n b»ng ph-−ng ph¸p ®−n h×nh

$$\text{Min}\ (2x_1 - 3x_2)$$

§k

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_j \quad 0,\ j = 1,4 \end{cases}$$

Giải:

Thêm 2 ẩn giả tạo x_5 0 với T >0 tuỳ ý . Ta đưa bài toán về dạng giả tạo

$$\text{Min } (2x_1 - 3x_2 + T\,x_5)$$

Đk
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \quad + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 \quad + 2x_3 \quad + x_5 = 1 \\ x_j \quad 0 ,\ j = 1,5 \end{cases}$$

Ma trận đơn vị E = (A_2 A_4 A_5) => Tập chỉ số

J= 2,4,5 => x2 = 4, x_4= 2 , x_5 = 1, $x_1 = x_3$ =0

=> pacb xuất phát (0, 4 ,0 , 2 , 1)

Ta có bảng đơn hình:

Bảng	Cơ sở	x_j	C_j	2	-3	0	0	T
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
I	A_2	4	-3	2	1	-1	0	0
	A_4	2	0	1	0	1	1	0
	A_5	1	T	2	0	2	0	1
				2T-8	0	2T+3	0	0
II	A_2	9/2	-3	3	1	0	0	1/2
	A_4	3/2	0	0	0	0	1	-1/2
	A_3	1/2	0	1	0	1	0	1/2
		-27/2		-11	0	0	0	-3/2-T

X*=(0,9/2,1/2.3/2,0) , f(X*)=-27/2

<u>Định lý 4</u>: Với T >0 tuỳ ý ta có:

1) Nếu X^* là patư của bài toán đã cho thì $\overline{X^*} = (X^*, 0)$ là patư của bài toán dạng giả tạo.
2) Nếu $\overline{X^*}$ là patư của bài toán dạng giả tạo có $x_{n+i} > 0$ thì bài toán đã cho không có patư.

Câu hỏi ôn tập:

☞Viết bài toán qhtt dạng tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ.

☞Viết bài toán qhtt dạng chính tắc trong trường hợp tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ.

☞Nêu các phép biến đổi tuyến tính đưa bài toán qhtt tổng quát về dạng chính tắc. Cho 1 ví dụ minh hoạ các phép biến đổi trên.

☞Nêu các bước giải bài toán qhtt 2 biến bằng phương pháp hình học.

☞Viết bài toán qhtt dạng giả tạo trong trường hợp tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ.

☞**Nêu cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình.**

☞**Phân biệt ẩn phụ và ẩn giả tạo. Cho ví dụ minh hoạ.**

☞**Cho ví dụ bài toán qhtt dạng chính tắc, trong đó ma trận A chưa chứa ma trận đơn vị. Viết phương án cực biên xuất phát của ví dụ này.**

☞**Hãy chỉ ra các giai đoạn xây dựng thuật toán đơn hình.**

☞**Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.**

<u>CHƯƠNG 2</u>

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH ĐỐI NGẪU

- ☞ Bài toán qui hoạch tuyến tính dạng chính tắc
- ☞ Giải bài toán qhtt 2 biến bằng phương pháp hình học
- ☞ Tính chất của bài toán qhtt
- ☞ Bài tập áp dụng các tính chất

- ☞ Công thức số gia hàm mục tiêu. Tiêu chuẩn tối ưu.
- ☞ Thuật toán đơn hình.
- ☞ Tìm phương án cực biên xuất phát trong trường hợp tổng quát.
- ☞ Bài tập áp dụng thuật toán đơn hình.

Đ1 Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\text{Min}(f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j)$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;, i = 1..m \qquad (1) \\ x_j >= 0, \; j=1..n \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên:

m

Min (g(y)= $b_i\ y_i$)

i=1

m

Điều kiện: $a_{ij}\ y_j \leq c_j$, j= 1..n (2)

i=1

Ví dụ1: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\text{Min}(2x_1 - x_3)$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j=1..3 \end{cases}$$

Viết bài toán đối ngẫu không đối xứng của bài toán đã cho .

Giải:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bài toán đối ngẫu không đối xứng:

$$\text{Max } (g(Y) = 4y_1 + 4y_2)$$

điều kiện:
$$\begin{cases} y_1 - y_2 \leq 2 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 0 \\ y_1 - y_2 \leq -1 \end{cases}$$

Ví dụ 2: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\text{Min}(-2x_1 + x_2)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1..3$$

Viết bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Giải:

$$\text{Max}(g(Y) = y_1 + 3y_2)$$

$$\text{điều kiện: } \begin{cases} y_1 - y_2 \leq -2 \\ -y_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$3y_2 \leq 0$$

Nhận xét:

- Nếu hàm f(X) tìm Min thì hàm g(Y) tìm Max và ngược lại
- Số ẩn của bài toán này là số điều kiện của bài toán kia
- Ma trận của 2 bài toán là chuyển vị của nhau

<u>Tính chất 1:</u> Với mọi phương án X, Y ta có $f(X) \geq g(Y)$.

<u>Chứng minh:</u>

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i x_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$= g(Y)$$

$$\Rightarrow f(X) \geq g(Y)$$

<u>Tính chất 2:</u> Nếu X^*, Y^* là phương án của bài toán đã cho và bài toán đối ngẫu không đối xứng thoả mãn điều kiện

$f(X^*) = g(Y^*)$ thì X^*, Y^* là các phương án tối ưu của các bài toán tương ứng trên.

<u>Chứng minh:</u>

Xét X^*,Y theo tính chất 1:

$f(X^*) \geq g(Y)$, Y

$g(Y^*) = f(X^*)$ => $g(Y^*) \geq g(Y)$ Y

=> Y^* là phương án tối ưu

Xét X^*,Y^* theo tính chất 1:

$f(X) \geq g(Y^*) = f(X^*)$ X

=> $f(X) \geq f(X^*)$

=> X^* là phương án tối ưu.

Tính chất 3: Nếu một trong 2 bài toán có phương án tối ưu thì bài toán kia cũng có phương án tối ưu, đồng thời Min(f(X))= Max(g(Y)).

Hệ quả:

X^*, Y^* là phương án tối ưu <=> $CX^* = BY^*$

<u>Tính chất 4</u>: (Tính lệch bù):

Phương án $X^* = (x_j^*)$ là tối ưu <=> Tồn tại phương án tối ưu $Y^* = (y_i^*)$ thoả mãn:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* = c_j \quad \text{nếu } x_j^* > 0$$

hoặc: $x_j^* = 0$ nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, y_i^* < c_j$

Chứng minh:

Theo tính chất 2 và 3: X^*, Y^* là phương án tối ưu $f(X^*) = g(Y^*)$

$$f(X^*) - g(Y^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) y_j^*$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j^* \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right)$$

$$= 0$$

$$\begin{cases} x_j = 0 \\ c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_{ji}^* \end{cases}$$

Ví dụ 1: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\text{Min}(x_2 - x_4 - 3x_5)$$

Điều kiện:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad - x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_2 \quad + x_5 + x_6 = 5 \\ x_j \geq 0,\ j=1..6 \end{cases}$$

Sử dụng tính lệch bù kiểm tra điểm X=(0,1/3, 0, 11/3, 4, 0) có phải là phương án tối ưu?

Giải:

- Kiểm tra X là phương án:

$$\begin{cases} 0 + 2*1/3 - 11/3 + 4 = 1 \\ -4*1/3 + 0 + 2*11/3 - 4 = 2 \\ 3*1/3 + 4 + 0 = 5 \end{cases}$$

X là phương án.

- Viết bài toán đối ngẫu không đối xứng:

$$\text{Max}(\ g(Y) = y_1 + 2y_2 + 3y_5\ )$$

$$\begin{cases} y_1 \le 0 & (1) \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \le 1 & (2) \\ y_2 \le 0 & (3) \\ -y_1 + 2y_2 \le -1 & (4) \\ y_1 - y_2 + y_3 \le -3 & (5) \end{cases}$$

$$y_3 \le 0 \quad (6)$$

Tại X ta có x_2 , x_4 , x_5 > 0 . Theo tính lệch bù thi` (2),(4),(5) xảy tra dấu =. Ta có hệ:

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 = -1 \end{cases}$$
$$y_1 - y_2 + y_3 = -3$$

$$\begin{cases} y_1 = -19/3 \\ y_2 = -11/3 \end{cases}$$
$$y_3 = -1/3$$

Y=(-19/3, -11/3, -1/3) thoả mãn các điều kiện còn lại của hệ phương tri`nh

- Tính f(X) = - 46/3
- g(Y) = - 46/3
- f(X) = g(Y)
- *Kết luận:*
- X =(0, 1/3, 0, 11/3, 4, 0) là phương án tối ưu.

Dạng 1: Sử dụng tính lệch bù kiểm tra $X = (x_j)$ có phải là phương án tối ưu?

Bước 1: Kiểm tra X là phương án

Bước 2: Viết bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Bước 3: Tại X có $x_j > 0$ thì điều kiện j xảy ra dấu bằng giải hệ $Y = (y_i)$

Bước 4: Kiểm tra Y có thoả mãn các điều kiện còn lại. So sánh f(X) và g(Y)

Bước 5: Kết luận

Dạng 2: Sử dụng tính lệch bù kiểm tra phương án cực biên xuất phát $X = (x_j)$ có phải là phương án tối ưu ?

Thực hiện từ bước 2 đến bước 5.

Dạng 3: Sử dụng tính lệch bù, tìm phương án tối ưu Y^* khi biết phương án tối ưu X^*.

Thực hiện từ bước 2 đén bước 3.

Dạng 4: Cho phương án tối ưu Y^*, tìm phương án tối ưu X^*.

Bước 1: Viết bài toán đối ngẫu không đối xứng

Bước 2: Thay $Y^*=(y_i^*)$ vào điều kiện j xảy ra dấu "< " thì $x_j = 0$. Thay vào điều kiện bài ra giải hệ tìm X^*.

Ví dụ 2: Cho bài toán qui hoạch tuyến tính.

$$\operatorname{Min}(x_2 - x_4 - 3x_5)$$

$$\text{Đk: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_j \ge 0,\ j = 1..5 \end{cases}$$

Sử dụng tính lệch bù:

a) Kiểm tra phương án cực biên xuất phát có phải là phương án tối ưu

b) Cho phương án tối ưu $Y^*(-19/3, -11/3, -1/3)$. Tìm phương án tối ưu X^*.

c) Cho phương tối ưu $X^* = (0, 1/3, 0, 11/3, 4, 0)$.tìm phương án tối ưu Y^*.

Giải:

a)Ta có ma trận đơn vị: $E = \{A_1A_3A_6\} \Rightarrow j = \{1,3,6\}$

$x_1=1$, $x_3=2$, $x_6=5$ => phương án cực biên xuất phát (1,0,2,0,0,5)

Bài toán đối ngẫu không đối xứng

$$\begin{cases} \text{Max}(y_1 + 2y_2 + 5y_3) \\ y_1 \leq 0 \quad (1) \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \leq 1 \quad (2) \\ y_2 \leq 0 \quad (3) \\ -y_1 + 2y_2 \leq -1 \quad (4) \\ y_1 - y_2 + y_3 \leq -3 \quad (5) \end{cases}$$

$$y_3 \leq 0 \quad (6)$$

Tại phương án cực biên xuất phát có: $x_1, x_3, x_6 > 0$. theo tính lệch bù.

(1), (3), (6) Xảy ra dấu "="

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow Y(0,0,0)$$

Y không thỏa mãn điều kiện (4),(5)

=> Phương án cực biên xuất phát không phải là phương án tối ưu.

b) Bài toán đối ngẫu không đối xứng.

$$\mathrm{Max}(y_1 + 2y_2 + 5y_3)$$

$$\begin{cases} y_1 \le 0 & (1) \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 \le 1 & (2) \\ y_2 \le 0 & (3) \\ -y_1 + 2y_2 \le -1 & (4) \\ y_1 - y_2 + y_3 \le -3 & (5) \end{cases}$$

$$y_3 \le 0 \quad (6)$$

$Y^* = (-19/3, -11/3, -1/3)$ thay vào điều kiện:

$$\begin{cases} -19/3 < 0 \\ 2*(-19/3) - 4(-11/3) + (-1/3) = 1 \\ -11/3 < 0 \\ -(-19/3) + 2(-11/3) = -1 \\ -19/3 - (-11/3) + (-1/3) = -3 \end{cases}$$

$$-1/3 < 0$$

Tại (1), (3), (6) xảy ra dấu “<” theo tính lệch bù:

Ta có: $x_1=0$, $x_3=0, x_6=0$ thay vào hệ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1 \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2 \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5 \\ x_j \geq 0,\ j = 1..6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1/3 \\ x_4 = 11/3 \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X^* = (0, 1/3, 0, 11/3, 4, 0)$$

c) Tại X^* có $x_2, x_4, x_5 > 0$

ta có: theo tính lệch bù => (2), (4), (5) xảy ra dấu "="

$$\begin{cases} 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 = -1 \\ y_1 - y_2 + y_3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -19/3 \\ y_2 = -11/3 \\ y_3 = -1/3 \end{cases}$$

=> $Y^* = (-19/3, -11/3, -1/3)$

Đ2 Cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\text{Min}(f(X) = \sum^{n} c_j x_j)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i=1..m \\ x_j \geq 0, \quad j = 1..n \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu đối xứng.

$$\text{Max}(g(Y) = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i)$$

Điều kiện: $\left\{ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \leq c_j, \; j=1..n \right.$

<u>Ví dụ 1:</u> Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\text{Min}(x_1 - 2x_2 - x_4)$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_2 - x_3 + x_4 \geq 5 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 \geq 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1..4$$

Bài toán đối ngẫu đối xứng:

$$\text{Max}(\ g(Y) = 2y_1 + y2 + y3)$$

Điều kiện
$$\begin{cases} -y_1 + y_3 \leq 1 \\ y_2 + y_3 \leq -2 \\ y_1 - y_2 \leq 0 \end{cases}$$

$$-y_1 + y_2 - y_3 \leq -1$$

Ví dụ 2: Viết bài toán đối ngẫu đối xứng dạng tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ.

Nhận xét: Cặp bài toán đối ngẫu đối xứng có đầy đủ 4 tính chất của cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Ví dụ 3: Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$\text{Min}(3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4)$$

Điều kiện:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq 2 \\ x_j \geq 0, j = 1..4 \end{cases}$$

Biết phương án tối ưu $Y^* = (1,2)$. Tìm phương án tối ưu X^*.

Giải:

Ta có bài toán đối ngẫu không đối xứng:

Max $(y_1 + 2y_2)$

Đk: $\begin{cases} 2y_1 - 2y_2 \le 3 \\ y_1 + y_2 \le 3 \\ -y_1 + y_2 \le 1 \\ -2y_1 - y_2 \le -1 \end{cases}$

Thay $Y^* = (1,2)$ vào hệ trên:

$$\begin{cases} 2*1 - 2*2 < 3 \\ 1 + 2 = 3 \\ -1 + 2 = 1 \\ -2*1 - 2 < -1 \end{cases}$$

Do điều kiện (1) và (4) xảy ra dấu <. Theo tính lệch bù thì $x_1 = 0$ và $x_4 = 0$. Thay vào điều kiện ban đầu ta có:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3/2 \\ x_3 = 1/2 \end{cases}$$

$$X^* = (0, 3/2 , 1/2 , 0).$$

Đ3 Cơ sở lý luận của phương pháp đơn hình đối ngẫu

3.1 Mối liên hệ giữa bài toán đã cho và bài toán đối ngẫu.

Min (f(X) = CX)

Đk: AX = b

X > 0

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên:

Max (g(Y) = BY)

Đk: AY < C

- Nếu X^*, Y^* là phương án của bài toán đã cho và bài toán đối ngẫu thoả mãn: $f(X^*) = g(Y^*)$ thì X^*, Y^* là phương án tối ưu của bài toán trên.
- ***(Tính lệch bù)*** Nếu phương án X^* là tối ưu Tồn tại phương án tối ưu Y^* thoả mãn:
- $A^TY^* < C$ nếu $X^* = 0$
- (hoặc: $X^* > 0$ nếu $A^TY^* = C$)

Gọi B là ma trận của phép biến đổi $C^* = (c_j)$,j J

Nếu có phương án cực biên Y thì tương ứng phương án cực biên X:

$$BY = C^* \qquad Y = C^* B^{-1} \qquad {}_j \leq 0$$

$$BY = b \qquad X = B^{-1} b$$

- $X = (x_j)$: $x_j \geq 0$ X là phương án tối ưu.
- $x_k < 0$, $x_{ik} \geq 0$ bài toán không có phương án tối ưu
- x_k , $x_{ik} < 0$ xây dựng phương án cực biên mới.

Ví dụ 1:

Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu.

$$\text{Min}(x_3 + x_4 + x_5)$$

$$\text{Đk}\begin{cases} -x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0,\ j = 1..5 \end{cases}$$

Giải:

Đưa bài toán về bài toán tương đương:

$\text{Min}(x_3 + x_4 + x_5)$

$$\text{Đk:} \begin{cases} x_1 \quad\quad - x_3 + x_4 - 2x_5 = -2 \\ \quad\quad x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j=1..5$

Ma trận đơn vị $E = (A1, A2), J = \{1,2\}$

$x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$

Phương án cực biên xuất phát: $X = (-2, 1, 0, 0, 0)$

$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = 1, c_5 = 1$

Lập bảng đơn hình:

B¶ng	C¬ së	X_j	C_j	0	0	1	1	1
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
I	A_1	-2	0	1	0	-1	1	-2
	A_2	1	0	0	1	-1	-1	1
				0	0	-1	-1	-1
II	A_5	1	1	-1/2	0	1/2	-1/2	1
	A_2	0	0	1/2	1	-3/2	-1/2	0
		1		-1/2	0	-1/2	-3/2	0

Tại bảng II có $x_j \geq 0$

$X^* = (0, 0, 0, 0, 1)$

$f(X^*) = 1.$

Chú ý:

Phương pháp đơn hình đối ngẫu giải bài toán tìm min và chỉ xét các đại lượng âm.

- Tính $Y^* = (\ _j + C_j), j$ J- tập chỉ số ban đầu, giá trị lấy ở bảng cuối.

  $Y^* = (\ _1 + C_1, \ _2 + C_2) = (-1/2 + 0 , 0 + 0) = (-1/2, 0)$

  $g(Y^*) = - 2y_1^* + y_2^* = (-2)*(-1/2) + 0 = 1.$

__Định lý 1:__ Nếu tại phương án cực biên $Y^* = C^*B^{-1}$ có tương ứng $X^* = B^{-1}b$ mà $x_j \geq 0$ thì X^*, Y^* là phương án tối ưu.

__Định lý 2:__ Nếu tại phương án cực biên $Y^* = C^*B^{-1}$ có tương ứng $X = B^{-1}b$, mà $x_k < 0$ và $x_{kj} \geq 0$ thì bài toán không có phương án tối ưu.

__Định lý 3:__ Nếu tại phương án cực biên $Y^* = C^*B^{-1}$ có tương ứng $X = B^{-1}b$ mà $x_k < 0$, $x_{pk} < 0$ thì có thể xây dựng phương án cực biên mới

3.2 Thuật toán đơn hình đối ngẫu.

Bước 0: Tìm E = (A_j) ma trận đơn vị J, Phương án cực biên xuất phát

$X = (x_j)$

Bước 1: Tính $_j$

Kiểm tra $x_j \geq 0$?

Nếu đúng X là phương án tối ưu

Nếu sai thì sang Bước 2

Bước 2: Kiểm tra $x_k < 0$, $x_{kj} > 0$?

Nếu đúng Bài toán không có phương án tối ưu

Nếu sai sang Bước 3

Bước 3: Chọn $\min\limits_{x_j < 0} x_j = x_p$ A_p ra cơ sở

$$\min_{x_{pj} < 0} \frac{j}{x_{pj}} = \frac{q}{x_{pq}}$$ A_q vào cơ sở

x_{pq} là phần tử quay.

Xây dựng phương án cực biên mới X' theo quy tắc đã biết

X = X' trở lại Bước 1.

<u>Ví dụ 2</u>**:** Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu

$$\mathrm{Min}(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

Đk

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 + x_4 - x_6 = 3 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j=1..6$$

Giải:

Đưa bài toán về bài toán tương đương:

$\text{Min}(x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$

$$\text{Đk:}\begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6 \\ x_1 - x_4 + x_6 = -3 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_j \geq 0,\ j = 1..6 \end{cases}$$

Ma trận đơn vị: $E = (A_3A_6A_2)$, $J = \{3,6,2\}$

$x_1 = 0$, $x_2 = 5$ $x_3 = 6$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = -3$

Phương án cực biên xuất phát $X = (1, 5, 6, 0, 0, -3)$

$c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $c_5 = 1$, $c_6 = 0$.

Lập bảng đơn hình:

B¶ng	C¬ së	X_j	C_j	1	-1	1	1	1	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
	A_3	6	1	2	0	1	-1	3	0
	A_6	-3	0	-1	0	0	-1	0	1
	A_2	5	-1	4	1	0	-1	2	0
I				-3	0	0	-1	0	0
	A_3	9	1	3	0	1	0	3	-1
	A_4	3	1	1	0	0	1	0	-1
	A_2	8	-1	5	1	0	0	2	-1
II		$f(X^*)=4$		-2	0	0	0	0	-1

Tại bảng 2 ta có $x_j \geq 0$ $X^* = (0, 8, 9, 3, 0, 0)$

$f(X^*) = 4$

$Y^* = (\ _3 + C_3, \ _6 + C_6, \ _2 + C_2)$

$= (0 + 1, -1 + 0, 0 + (-1))$

$= (1, -1, -1)$

$g(Y^*) = 6y_1^* - 3y_2^* + 5y_3^*$

$= 6*1 - 3*(-1) + 5(-1)$

$= 4.$

Câu hỏi ôn tập:

☞Viết cặp bài toán qhtt đối ngẫu đối xứng dạng tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ.

☞Viết cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng dạng tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ.

☞Cho ví dụ minh hoạ về cặp bài toán đối ngẫu đối xứng (hoặc không đối xứng). Nêu nhận xét về cặp bài toán đối đối ngẫu (hoặc đối xứng).

☝Nêu các giai đoạn xây dựng thuật toán đơn hình đối ngẫu.

☞Nêu mối liên hệ giữa bài toán qhtt đã cho và bài toán đối ngẫu.

☞Nêu cơ sở lý luận của phương pháp phân phối

☞Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu.

Bài tập

Bài 1: Cho bài toán qui hoạch tuyến tính

$$\text{Min}(3x_1+4x2+2x_3+x_4+5x_5)$$

điều kiện

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 + x_8 = 4; \\ x_j \quad 0, j=1..8 \end{cases}$$

a. Viết phương án cực biên xuất phát và các giá trị c_j.

b. Bằng tính lệch bù của cặp bài toán đối ngẫu, hãy kiểm tra X=(0,0,3,0,0,0,1,10) có phải là phương án tối ưu?

c.Cho Y*=(-2,0,0) là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Bằng tính lệch bù hãy tìm phương án tối ưu X* và giá trị tối ưu f(X*) của bài toán trên.

d. Giả sử có tệp văn bản sn.txt chứa các số nguyên là ma trận A của bài toán trên. Lập chương trình làm các công việc sau:

-Đọc dữ liệu từ tệp vào ma trận A, In ma trận A.

-Tính và in ra các △ij tại pacb xuất phát.

Bài 2: **Lập chương trình giải câu a,b,c.**

Bài 3: **Giải bài toán qui hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu:**

$$\mathit{Min}(x_3+x_4+x_5)$$

Điều kiện
$$\begin{cases} x_1 \qquad -x_3 + x_4 - 2x_5 = -10 \\ \qquad x_2 \quad -x_3 \quad -x_4 + x_5 = 6 \\ \quad x_j \quad 0, \quad j=1..5. \end{cases}$$

Bài 4: **Lập chương trình giải bài toán bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu.**

CHƯƠNG 3

PHƯƠNG PHÁP PHÂN PHỐI

- Bài toán vận tải
- Tính chất của bài toán vận tải
- Bài toán vận tải dạng bảng
- Các phương pháp tìm phương án cực biên xuất phát

- Cơ sở lý luận của phương pháp phân phối
- Thuật toán phân phối
- Câu hỏi và Bài tập áp dụng thuật toán phân phối.

Đ1. Bài toán vận tải.

Cần vận chuyển một loại hàng từ n kho về m nơi tiêu thụ. Biết lượng hàng tại kho thứ j là a_j, lượng hàng cần tiêu thụ tại điểm i là b_i. $C_{i\,j}$ là cước phí vận chuyển trên 1 đơn vị hàng từ j -> i.

Hãy tổ chức vận chuyển hàng sao cho phát hết thu đủ, sao cho có tổng cước phí vận chuyển là Min.

Mô hình toán học:

Gọi x_{ij} là lượng hàng chuyển j -> i

Min(f(X) = $C_{ij}\ x_{ij}$)

i,j

Đk:

m

$x_{ij} = a_j$

$i = 1$

n

$x_{ij} = b_j$

$j = 1$

$x_{ij}, b_i, a_j \geq 0$

<u>Nhận xét:</u>

Mô hình bài toán vận tải là mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc nên có thể giải bằng phương pháp đơn hình nhưng có có m + n ẩn và m + n phương trình. Nên ta phải tìm thuật toán hiệu quả hơn để giải.

Đ2. Tính chất của bài toán vận tải.

Tính chất 1:

Bài toán vận tải có phương án tối ưu   cân bằng thu phát.

Nghĩa là: $n \qquad\qquad m$

$$a_j \quad = \qquad b_i$$

$$j=1 \qquad\qquad i=1$$

Chứng minh:

* Giả sử bài toán vận tải có phương án tối ưu:

$x_i = a_j$ $\quad x_{ij} = \quad a_j$ (1)

i $\quad$ i,j $\quad$ j

$x_{ij} = b_i$ $\quad x_{ij} = \quad b_j$ (2)

i $\quad$ i,j $\quad$ i

Từ (1) và (2) $\quad a_j = \quad b_j$

j $\quad$ i

* Bài toán có phương án tối ưu $\quad$ -Tập phương án khác rỗng

- f(X) bị chặn

$a_j b_i$

$X = (x_{ij}) : \quad x_{ij} = \qquad \geq 0$

n

a_j

$a_j b_i$ $\quad\quad\quad$ $a_j \quad b_i$

i $\quad\quad\quad$ i

$x_{ij} = \dfrac{}{n} = \dfrac{}{} = a_j$

I $\quad\quad$ a_j $\quad\quad\quad$ a_j

$j=1$ $\quad\quad\quad$ i

$a_j b_i$ $\quad\quad\quad$ $b_i \quad a_j$

j $\quad\quad\quad$ j

$x_{ij} = \dfrac{}{} = \dfrac{}{} = b_i$

i $\quad\quad$ n $\quad\quad\quad$ n

a_j $\quad\quad\quad$ a_j

$j=1$ $\quad\quad\quad$ $j=1$

$X = (x_{i\,j})$ là phương án tối ưu.

$f(X) = \quad c_{ij}\ x_{ij}$

i,j

$a_j \ = \quad b_i = L$

j $\qquad\qquad$ i

Ta có: $\quad x_{i\,j} \ = \quad a_j \ = L$

i,j $\qquad\qquad$ j

$x_{i\,j} < L$

Đặt Max $c_{i\,j} = c$

(i,j)

$f(X) = \quad c_{i\,j}\ x_{i\,j} \ \leq \ n*m*c*L$

i,j

f(X) bị chặn $\qquad\qquad$ đpcm.

Tính chất 2:

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_{ij} = a_j \\ i \\ x_{ij} = b_i \\ j \end{cases}$$

Có m + n – 1 phương trình độc lập tuyến tính.

Hệ quả: Phương án cực biên của bài toán vận tải có số toạ độ dương tối đa là m + n -1.

Đ3. Bài toán vận tải dạng bảng.

Ví dụ 1:

Cho bài toán vận tải dạng bảng:

a_j / b_i	5	7	8
3	3 1	\ 2	\ 3
6	2 1	4 2	\ 1
11	\ 3	3 4	8 2

<u>Ví dụ 2:</u> Cho bài toán vận tải dạng bảng:

a. Tìm k để bài toán có phương án tối ưu.

b. Tìm một phương án cực biên xuất phát.

b_i \ a_j	6	7	17	10
8	6 1	2 2	\ 3	\ 0

Giải:

a. Bài toán có phương án tối ưu :

$$8 + 9 + 10 + k = 6 + 7 + 17 + 10$$

$$k = 13$$

b.Tổng quát:

Tại O(i,j) :

- $x_{i\,j}$ là lượng hàng từ j đén i
- $c_{i\,j}$ là cước phí hoặc đơn vị hàng từ j đến i.

Nếu $x_{i\,j} > 0$ thì O(i,j) được chọn

$x_{i\,j} = 0$ thì O(i,j) bị loại.

Khái niệm chu trình:

Một tập được sắp thứ tự các ô được chọn của bảng vận tải được gọi là một chu trình nếu thoả mãn các điều kiện sau:

- Hai ô được chọn nằm trên cùng một hàng hay một cột.

- Ô đầu tiên và ô cuối cùng nằm trên một hàng hay một cột.

- Không có 3 ô nào nằm trên một hàng hay một cột.

Tính chất 3:

Phương án bài toán vận tải là phương án cực biên khi và chỉ khi các ô được chọn không lập thành chu trình.

Đ4. Các phương pháp tìm pacb xuất phát.

4.1 Phương pháp góc Tây Bắc.

Ví dụ 1: Cho bài toán vận tải dạng bảng. Tìm phương án cực biên xuất phát theo phương pháp góc Tây bắc và tính cước phí tại phương án này.

a_j / b_i	13	7	10
8	8 1	\ 9	\ 8
6	5 2	1 7	\ 1
16	\ 3	6 4	10 5

Các bước tìm phương án cực biên xuất phát:

Bước 1: Phân phối lượng hàng tối đa vào ô góc Tây Bắc

Bước 2: "Xoá " các hàng, các cột hết khả năng phân phối sau đó trở lại Bước 1 với các ô còn lại.

Ví dụ 2: Cho bài toán vận tải dạng bảng:

Tính cước phí vận chuyển tại phương án cực biên xuất phát theo phương pháp góc Tây Bắc.

a_j b_i	5	7	18
14	5 2	7 3	2 6
6	\ 9	\ 2	6 4
10	\ 3	\ 8	10 5

Cước phí vận chuyển: 5*2 +7*3 + 2*6 + 4*6 + 10*5 = 117

4.2 Phương pháp góc Cước phí tối thiểu.

Ví dụ 1: Cho bài toán vận tải dạng bảng.

a. Tìm k để bài toán có phương án tối ưu?

b. Với k tìm được ở câu a, tính cước phí vận chuyển tại phương án cực biên xuất phát theo phương pháp cước phí tối thiểu toàn bảng.

a_j / b_i	6	4	10
7	\ 10	4 2	3 4
8	6 1	\ 8	2 3
K	\ 15	\ 9	5 5

Các bước tìm phương án cực biên xuất phát:

Bước 1: Phân phối lượng hàng tối đa vào ô có cước phí bé nhất.

Bước 2: "Xoá" các hàng các cột vào hết khả năng phân phối sau đó trở lại Bước 1 đối với các ô còn lại.

Ví dụ 2: Cho bài toán vận tải dạng bảng:

Tính cước phí vận chuyển tại phương án cực biên xuất phát theo phương pháp cước phi tối thiểu toàn bảng.

a_j / b_i	6	4	10
3	3 1	\ 10	\ 15
9	\ 4	4 1	5 3
8	3 2	\ 5	5 7

Cước phí: 3*1 + 4*1 + 5*3 + 3*2 + 5*7 = 63

4.3 PHƯƠNG PHÁP VAUGEN.

Ví dụ 1: Cho bài toán vận tải dạng bảng:

a_j / b_i	6	4	10
3	3 1	\ 7	\ 9
9	3 5	4 3	2 4
8	\ 6	\ 4	8 1

6

1 1

3 3

4 1 3

1 1 3

Các bước tìm phương án cực biên xuất phát:

Bước 1: Với mỗi hàng và mỗi cột tính độ chênh lệch của 2 cước phí bé nhất, chọn hàng hay cột có độ chênh lệch lớn nhất, phân phối lượng hàng tối đa cho ô có cước phí bé nhất.

Bước 2: "Xoá" các hàng các cột hết khả năng phân phối sau đó trở lại Bước 1 với những ô còn lại.

Ví dụ 2: Cho bài toán vận tải dạng bảng:

a_j / b_i	7	5	18		
10	7 1	\ 8	3 9	7	1
11	\ 5	5 2	6 2	0	0
9	\ 6	\ 4	9 3	1	1
	4	2	1		
		2	1		

Tính cước phí tại pacb xuất phát theo phương pháp Vaugen:

Cước phí: 7*1 + 5*2 + 3*9 + 6*2 + 9*3 =83

Đ5. Cơ sở lý luận của phương pháp phân phối.

Xét bài toán vận tải:

$$\mathrm{Min}(f(x) = \quad c_{i\,i}\, x_{i\,j}\ )$$

$$i,j$$

ĐK:

$$\begin{cases} x_{i\,j} = a_j \\ i \\ x_{i\,j} = b_i \\ j \\ x_{i\,j},\ a_j,\ b_i \geq 0,\ i=1..m \qquad j = 1..n \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu của bài toán trên:

$$\mathrm{Max}(g(u,v) = \quad a_j u_j + \quad b_i v_i)$$

Đk: $\quad u_j + v_i \le c_{i\,j}$

Đặt $\quad {}_{i\,j} = u_j + v_i - c_{i\,j}$

Tại O(i,j) được chon $\quad {}_{i\,j} = 0$

Xét $\quad {}_{i\,j}$ tại các ô bị loại.

Giải tìm u_j , $v_{i:}$

tại các ô được chọn $u_j + v_i = c_{i\,j}$

Hệ phương trình trên có tối đa m + n – 1 phương trình, số ẩn m+n. Do đó có vô số nghiệm phụ thuộc lẫn nhau. Ta chỉ cần một bộ nghiệm để tính $\quad {}_{i\,j}$ các ô bị loại. Để cho đơn giản chọn u_j , v_i nào đó bằng 0.

<u>Ví dụ 1:</u> Cho bài toán vận tải dạng bảng.

Tính $_{i\,j}$ tại pacb xuất phát theo phương pháp góc Tây Bắc.

$u_1 = 1$ $u_2 = 2$ $u_3=0$

b_i \ a_j	7	5	18
10	7 1	3 2	\ 3
11	\ 3	2 4	9 2
9	\ 4	\ 5	9 4

$v_1=0$

$v_2=2$

$v_3=4$

- Tìm phương án cực biên xuất phát theo phương pháp góc Tây Bắc.

- Tìm u_j , v_i

- Tính $_{i\,j}$

<u>Định lý 1:</u> *(Tiêu chuẩn tối ưu)*

Nếu tại phương án cực biên $X = (x_{ij})$ có $\;_{ij} \leq 0$ thì X là phương án tối ưu.

<u>Định lý 2:</u> Nếu tại pacb $X = (x_{ij})$ $\;_{pq} > 0$ thì có thể xây dựng phương án cực biên mới $X' = (x'_{ij})$.

Ví dụ 2: Giải bài toán bằng phương pháp Phân phối.

(I)

		$u_1 = 6$	$u_2 = 5$	$u_3 = 7$	$u_4 = 2$
	a_j / b_i	8	10	9	5
$v_1 = 0$	12	3 \ 3	3 5	4 7	5 2
$v_2 = -5$	13	8 1	-4 \ 4	5 2	-9 \ 6
$v_3 = -4$	7	0 \	7 1	-6 \ 9	\-7

Giải:

- Tìm phương án cực biên xp theo phương pháp cước phí tối thiểu toàn bảng.

- Tìm u_j ,v_i

- Tính $_{i\,j}$ tại các ô bị loại.

Chon ô(1,1) vào chu trình.

Lập chu trình V = {(1,1),(1, 3),(2,3),(2,1)}

L C L C

$V_L = \{(1,1),(2,3)\}$

$V_C = \{(1,3), (2,1)\}$

Chọn $\operatorname{Min} x_{i\,j} = x_{13} = 4$

$(i,j)\ \ V_C$

•

(II)

		$u_1 = 3$	$u_2 = 5$	$u_3 = 4$	$u_4 = 2$
	a_j / b_i	8	10	9	5
$v_1 = 0$	12	4 3	3 5	--3 \ 7	5 2
$v_2 = -2$	13	4 1	-1 \ 4	9 2	-6 \ 6
$v_3 = -4$	7	-3 \	7 1	-9 \ 9	-7 \

Tại bảng 2: $\quad_{i\,j} \le 0$

F(X*) = 4*3 + 3*5 + 5*2 + 4*! + 9*2 +7*1 = 66

G(U,V) = (g(3,5,4,2),(0,-2,-4)) =66

Thuật toán phân phối:

Bước 0: Tìm phương án cực biên xuất phát X= (x_{ij}) theo 1 phương pháp đã biết.

Bước 1: Tìm u_j , v_i . Tính $_{ij}$ tại các ô bị loại.

Kiểm tra $_{ij} \leq 0$?

Nếu đúng X là phương án tối ưu.

Nếu sai sang bước 2.

Bước 2: Max $_{ij}$ = $_{pq}$ Ô(p,q) vào chu trình

$_{ij>} \geq 0$

Lập chu trình V, V_L,V_C .

Chọn Min $x_{ij} = x_{rs}$

(i,j) V_C

Xây dựng phương án cực biên mới $X' = (x'_{ij})$

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & \text{nếu } (i,j) \quad V \\ x_{ij} + x_{rs} & \text{nếu } (i,j) \quad V_L \\ x_{ij} - x_{rs} & \text{nếu } (i,j) \quad v_C \end{cases}$$

$X = X'$ trở lại Bước 1.

Câu hỏi ôn tập:

☞Viết mô hình toán học của bài toán vận tải dạng tổng quát. Cho ví dụ minh hoạ bài toán vận tải dạng bảng.

☞Viết cặp bài toán đối ngẫu của bài toán vận tải trong trường hợp tổng quát. Cho ví dụ bài toán vận tải dạng bảng 2x2. Viết bài toán đối ngẫu của bài toán đó.

☞Nêu các tính chất của bài toán vận tải.

☞Nêu điều kiện để xây dựng phương án cực biên mới X'. Công thức tính phương án cực biên mới X' từ phương án cực biên X.

☞Giải bài toán bằng phương pháp phân phối.

Bài tập

☞***Bài 1:*** **Giả sử đã có tệp Mta.txt, Mtb.txt, Mtc.txt chứa các số nguyên là a_{ij}, b_i, c_j của bài toán vận tải. Lập chương trình đọc dữ liệu từ tệp vào các mảng a,b,c và in ra màn hình các mảng đó. Kiểm tra pacb xuất phát theo phương pháp cước tối thiểu toàn bảng có phải là patư?**

☞***Bài 2:*** **Lập chương trình giải bài toán vận tải.**