



Phát biểu bài toán

Bởi:

Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

Phát biểu bài toán

Cho $G=(V,E)$ là đồ thị vô hướng liên thông với tập đỉnh $V=\{1, 2, \dots, n\}$ và tập cạnh E gồm m cạnh. Mỗi cạnh E của đồ thị G được gán với một số không âm $c(e)$, gọi là độ dài của nó. Giả sử $H=(V,T)$ là cây khung của đồ thị G . Ta gọi độ dài $c(H)$ của cây khung H là tổng độ dài các cạnh của nó:

$$C(H) = \sum_{e \in T} c(e)$$

Bài toán đặt ra là trong tất cả cây khung của đồ thị G hãy tìm cây khung với độ dài nhỏ nhất. Cây khung như vậy như vậy được gọi là cây khung nhỏ nhất của đồ thị và bài toán đặt ra được gọi là bài toán cây khung nhỏ nhất.

Để minh họa cho những ứng dụng bài toán cây khung nhỏ nhất, dưới đây, ta phát biểu hai mô hình thực tế tiêu biểu của nó.

Bài toán xây dựng hệ thống đường sắt.

Giả sử ta muốn xây dựng một hệ thống đường sắt nối n thành phố sao cho hành khách có thể đi từ bất kỳ một thành phố nào đến bất kỳ một trong các thành phố còn lại. Mặt khác trên quan điểm kinh tế đòi hỏi là chi phí xây dựng hệ thống đường phải nhỏ nhất. Rõ ràng đồ thị mà đỉnh là các thành phố còn các cạnh là các tuyến đường sắt nối các thành phố tương ứng với phương án xây dựng tối ưu phải là cây. Vì vậy, bài toán đặt ra dẫn về bài toán tìm cây khung nhỏ nhất trên đồ thị đầy đủ n đỉnh, mỗi đỉnh tương ứng với một thành phố, với độ dài trên các các cạnh chính là chi phí xây dựng đường ray nối hai thành phố tương ứng (chú ý là trong bài toán này ta giả thiết là không xây dựng tuyến đường sắt có các nhà ga phân tuyến nằm ngoài các

thành phố).

Bài toán nối mạng máy tính.

Cần nối mạng một hệ thống gồm n máy tính đánh

Phát biểu bài toán

số từ 1 đến n . Biết chi phí nối máy i với máy j là $c[i,j]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ (thông thường chi phí này phụ thuộc vào độ dài cáp nối cần sử dụng). Hãy tìm cách nối mạng sao cho tổng chi phí nối mạng là nhỏ nhất.

Để giải bài toán cây khung nhỏ nhất, tất nhiên có thể liệt kê tất cả các cây khung của đồ thị và chọn trong số cây khung ấy cây khung nhỏ nhất. Phương pháp như vậy, trong trường hợp đồ thị đầy đủ, sẽ đòi hỏi thời gian cỡ n^{n-2} , và rõ ràng không thể thực hiện được ngay cả với những đồ thị với số đỉnh cỡ hàng chục. Rất may là đối với bài toán cây khung nhỏ nhất chúng ta đã có những thuật toán rất hiệu quả để giải chúng. Chúng ta xét hai trong số những thuật toán như vậy: Thuật toán Kruskal và Thuật toán Prim.