



sinh các hoán vị và tổ hợp

Bởi:

Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

SINH CÁC HOÁN VỊ VÀ TỔ HỢP. Sinh các hoán vị:

Có nhiều thuật toán đã được phát triển để sinh ra $n!$ hoán vị của tập

$\{1, 2, \dots, n\}$. Ta sẽ mô tả một trong các phương pháp đó, phương pháp liệt kê các hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ theo thứ tự từ điển. Khi đó, hoán vị $a_1 a_2 \dots a_n$ được gọi là đi trước hoán vị $b_1 b_2 \dots b_n$ nếu tồn tại k ($1 \leq k \leq n$), $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ và a_k

$< b_k$.

Thuật toán sinh các hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ dựa trên thủ tục xây dựng

hoán vị kế tiếp, theo thứ tự từ điển, từ hoán vị cho trước $a_1 a_2 \dots a_n$. Đầu tiên nếu a_{n-1}

$< a_n$ thì rõ ràng đổi chỗ a_{n-1} và a_n cho nhau thì sẽ nhận được hoán vị mới đi liền sau

hoán vị đã cho. Nếu tồn tại các số nguyên a_j và a_{j+1} sao cho $a_j < a_{j+1}$ và $a_{j+1} > a_{j+2} >$

...

$> a_n$, tức là tìm cặp số nguyên liền kề đầu tiên tính từ bên phải sang bên trái của hoán vị mà số đầu nhỏ hơn số sau. Sau đó, để nhận được hoán vị liền sau ta đặt vào vị trí thứ j số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j của tập $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n$, rồi liệt kê theo thứ tự tăng dần của các số còn lại của $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_n$ vào các vị trí $j+1, \dots, n$. Dễ thấy không có hoán vị nào đi sau hoán vị xuất phát và đi trước hoán vị vừa tạo ra.

Thí dụ 11: Tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 4736521.

Cặp số nguyên đầu tiên tính từ phải qua trái có số trước nhỏ hơn số sau là a_3

$= 3$ và $a_4 = 6$. Số nhỏ nhất trong các số bên phải của số 3 mà lại lớn hơn 3 là số 5. Đặt số 5 vào vị trí thứ 3. Sau đó đặt các số 3, 6, 1, 2 theo thứ tự tăng dần vào bốn vị trí còn lại. Hoán vị liền sau hoán vị đã cho là 4751236.

procedure Hoán vị liền sau (a_1, a_2, \dots, a_n) (hoán vị của $\{1, 2, \dots, n\}$ khác $(n, n-1, \dots,$

sinh các hoán vị và tổ hợp

2, 1))

$j := n - 1$

while $a_j > a_{j+1}$

$j := j - 1$ { j là chỉ số lớn nhất mà $a_j < a_{j+1}$ }

$k := n$

while $a_j > a_k$

$k := k - 1$ { a_k là số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j và bên

phải a_j }

$r := n$

đổi chỗ (a_j, a_k)

$s := j + 1$

while $r > s$

đổi chỗ (a_r, a_s)

$r := r - 1 ; s := s + 1$

{Điều này sẽ xếp phần đuôi của hoán vị ở sau vị trí thứ j theo thứ tự tăng dần.}

Sinh các tổ hợp :

Làm thế nào để tạo ra tất cả các tổ hợp các phần tử của một tập hữu hạn? Vì tổ hợp chính là một tập con, nên ta có thể dùng phép tương ứng 1-1 giữa các tập con của $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ và xâu nhị phân độ dài n .

Ta thấy một xâu nhị phân độ dài n cũng là khai triển nhị phân của một số

nguyên nằm giữa 0 và $2^n - 1$. Khi đó 2^n xâu nhị phân có thể liệt kê theo thứ tự tăng dần của số nguyên trong biểu diễn nhị phân của chúng. Chúng ta sẽ bắt đầu từ xâu nhị phân nhỏ nhất 00...00 (n số 0). Mỗi bước để tìm xâu liền sau ta tìm vị trí đầu tiên tính từ phải qua trái mà ở đó là số 0, sau đó thay tất cả số 1 ở bên phải số này bằng 0 và đặt số 1 vào chính vị trí này.

sinh các hoán vị và tổ hợp

procedure Xâu nhị phân liên sau ($b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0$): xâu nhị phân khác (11...11)

$i := 0$

while $b_i = 1$

begin

end

$b_i := 1$

$b_i := 0$

$i := i + 1$

Tiếp theo chúng ta sẽ trình bày thuật toán tạo các tổ hợp chập k từ n phần tử

$\{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi tổ hợp chập k có thể biểu diễn bằng một xâu tăng. Khi đó có thể liệt kê các tổ hợp theo thứ tự từ điển. Có thể xây dựng tổ hợp liên sau tổ hợp $a_1a_2\dots a_k$ bằng cách sau. Trước hết, tìm phần tử đầu tiên a_i trong dãy đã cho kể từ phải qua trái sao cho $a_i \neq n - k + i$. Sau đó thay a_i bằng $a_i + 1$ và a_j bằng $a_j - 1$ với $j = i + 1, i + 2, \dots, k$.

Thí dụ 12: Tìm tổ hợp chập 4 từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ đi liên sau tổ hợp $\{1, 2, 5, 6\}$.

Ta thấy từ phải qua trái $a_2 = 2$ là số hạng đầu tiên của tổ hợp đã cho thỏa mãn

điều kiện $a_i \neq n - k + i$. Để nhận được tổ hợp tiếp sau ta tăng a_i lên một đơn vị, tức

$a_2 = 3$, sau đó đặt $a_3 = 3 + 1 = 4$ và $a_4 = 3 + 2 = 5$. Vậy tổ hợp liên sau tổ hợp đã cho là $\{1, 3, 4, 5\}$. Thủ tục này được cho dưới dạng thuật toán như sau.

procedure Tổ hợp liên sau ($\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$: tập con thực sự của tập $\{1, 2, \dots, n\}$

không bằng $\{n - k + 1, \dots, n\}$ với $a_1 < a_2 < \dots < a_k$)

$i := k$

while $a_i = n - k + i$ $i := i - 1$

$a_i := a_i + 1$

sinh các hoán vị và tổ hợp

forj := i + 1 **tok**

aj := ai + j ? i