Thiết kế và đánh giá thuật toán

Biên tập bởi:

Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

Thiết kế và đánh giá thuật toán

Biên tập bởi:

Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

Các tác giả:

Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

Phiên bản trực tuyến:
http://voer.edu.vn/c/018b828c

MỤC LỤC

Lời nói đầu

Lời nói đầu

Những kiến thức về thuật toán và cách thiết kế, đánh giá thuật toán đóng vai trò quan trọng trong việc đào tạo cử nhân, kỹ sư công nghệ thông tin. Ngoài việc học phân tích và thiết kế thuật toán, người học còn được cung cấp những kiến thức, kỹ năng cần thiết giải các bài toán hay gặp trong tin học để trở thành người lập trình viên chuyên nghiệp.

Về nội dung, cuốn sách này chia thành các bài tương ứng sát với chương trình học của sinh viên khoa Công nghệ thông tin. Sách trình bày những chiến lược thiết kế thuật toán quan trọng như: tham lam, chia-để-trị, quy hoạch động, nhánh cận, quay lui, và những thuật toán dựa trên kinh nghiệm. Trong mỗi chiến lược thiết kế, bên cạnh việc đào sâu phân tích, chúng còn được thảo luận về độ phức tạp thông qua các bài toán cụ thể. Ngoài ra, còn có các bài tập thực hành và hệ thống các bài kiểm tra cài đặt các thuật toán trên. Trong tài liệu này sử dụng ngôn ngữ C# để minh họa, cài đặt. Tuy nhiên người học dễ dàng cài đặt được bằng các ngôn ngữ lập trình khác như: VB.NET, C/C++, Pascal... do có mô tả thuật toán bằng mã giả.

Khoa Công nghệ thông tin

Bài 1: Thuật toán và độ phức tạp

Giới thiệu môn học, phương pháp học

Đây là module cung cấp cho người học những nguyên lý cơ bản về lập trình, các cấu trúc điều khiển, các kiểu dữ liệu, mô hình hướng chức năng, cách thức xây dựng chương trình con và một số bài toán trong khoa học kỹ thuật.

Module này sử dụng ngôn ngữ C# để minh họa, cài đặt. Tuy nhiên người học dễ dàng cài đặt được bằng các ngôn ngữ lập trình khác như: VB.NET, C/C++, Pascal...

Sau khi hoàn thành module này, người học có khả năng:

- Giải thích được các nguyên lý cơ bản về lập trình máy
- Giải thích và mô tả được cú pháp, nguyên tắc hoạt động và cách sử dụng các cấu trúc điều khiển, chương trình con. Chỉ ra được đặc điểm và cách sử dụng của các kiểu dữ liệu
- Mô tả được thuật toán và biểu diễn thuật toán dưới dạng lưu đồ
- Phân tích, thiết kế và cài đặt được bài toán theo mô hình hướng chức năng
- Vận dụng được các kiến thức đã học để cài đặt các bài toán đơn giản trong khoa học kỹ thuật
- Hình thành thái độ học tập nghiêm túc, kỹ năng làm việc độc lập và kỹ năng làm việc độc lập và làm việc theo nhóm.

Để học tốt môn học này mỗi người học phải tự xây dựng cho mình một phương pháp học thích hợp. Nhưng phương pháp chung để học môn học này là người học phải hiểu thật kỹ các phần lý thuyết cơ sở và vận dụng nó một cách linh hoạt vào các trường hợp cụ thể , phải làm nhiều bài tập….

Khái niệm thuật toán:

Thuật toán (algorithm) là một trong những khái niệm quan trọng trong lĩnh vực tin học. Thuật ngữ thuật toán được xuất phát từ nhà toán học Arập Abu Ja'far Mohammed ibn Musa al Khowarizmi (khoảng năm 825). Tuy nhiên lúc bấy giờ và trong nhiều thế kỷ sau, nó không mang nội dung như ngày nay chúng ta quan niệm. Thuật toán nổi tiếng nhất có từ thời cổ Hy lạp là thuật toán Euclid, thuật toán tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên. Có thể mô tả thuật toán đó như sau:

Thuật toán Euclid .

Input: **m, n** nguyên dương

Output: **g** (ước chung lớn nhất của m và n)

Phương pháp:

Bước 1: Tìm **r**, phần dư của **m** cho **n**

Bước 2: Nếu **r** = 0, thì **g:=n** (gán giá trị của n cho g),và dừng lại.

Trong trường hợp ngược lại (r≠0), thì **m:=n; n:=r** và quay lại bước 1.

Chúng ta có thể quan niệm các bước cần thực hiện để làm một món ăn, được mô tả trong các sách dạy chế biến món ăn, là một thuật toán. Cũng có thể xem các bước cần tiến hành để gấp đồ chơi bằng giấy, được trình bày trong sách dạy gấp đồ chơi bằng giấy là một thuật toán. Phương pháp cộng nhân các số nguuyên, chúng ta đã được học ở cấp I cũng là các thuật toán.

Vì vậy ta có định nghĩa không hình thức về thuật toán như sau:

Thuật toán là một dãy hữu hạn các bước, mỗi bước mô tả chính xác các phép toán, hoặc hành động cần thực hiện ... để cho ta lời giải của bài toán.

(Từ điểm Oxford Dictionary định nghĩa, Algorithm: set of well - defined rules for solving a problem in a finite number of steps.)

Các vấn đề liên quan đến thuật toán

Thiết kế thuật toán

Để giải một bài toán trên máy tính điện tử (MTĐT), điều trước tiên là chúng ta phải có thuật toán. Một câu hỏi đặt ra là làm thế nào để tìm ra được thuật toán cho một bài toán đã đặt ra? Lớp các bài toán được đặt ra từ các ngành khoa học kỹ thuật, từ các lĩnh vực hoạt động của con người là hết sức phong phú và đa dạng. Các thuật toán giải các lớp bài toán khác nhau cũng rất khác nhau. Tuy nhiên, có một số kỹ thuật thiết kế thuật toán chung như: Chia để trị (divide-and-conque), phương pháp tham ăn (greedy method), qui hoạch động (dynamic programming)... Việc nắm được các chiến lược thiết kế thuật toán này là hết sức quan trọng và cần thiết, nó giúp cho ta dễ tìm ra các thuật toán mới cho các bài toán mới được đưa ra.

Tính đúng đắn của thuật toán.

Khi một thuật toán được làm ra, ta cần phải chứng minh rằng, thuật toán khi được thực hiện sẽ cho ta kết quả đúng với mọi dữ liệu vào hợp lệ. Điều này gọi là chứng minh tính đúng đắn của thuật toán. Việc chứng minh tính đúng đắn của thuật toán là một công việc không dễ dàng. Trong nhiều trường hợp, nó đòi hỏi ta phải có trình độ và khả năng tư duy toán học tốt.

Sau đây ta sẽ chỉ ra rằng, khi thực hiện thuật toán Euclid, g sẽ là ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương bất kỳ m, n. Thật vậy, khi thực hiện bước 1, ta có $m = qn + r$,trong đó q là số nguyên nào đó . Nếu $r = 0$ thì n là ước của m và hiển nhiên n (do đó g) là ước chung lớn nhất của m và n. Nếu $r \neq 0$ thì một ước chung bất kỳ của m và n cũng là ước chung của n và r (vì $r=m-qn$). Ngược lại một ước chung bất kỳ của n và r cũng là ước chung của m và n (vì $m = qn + r$). Do đó ước chung lớn nhất của n và r cũng là ước chung lớn nhất của ma và n. Vì vậy, khi thực hiện lặp lại bước 1, với sự thay đổi giá trị của m bởi n, và sự thay đổi giá trị của n bởi r, cho tới khi $r=0$ ta nhận được giá trị của g là ước chung lớn nhất của các giá trị m và n ban đầu.

Phân tích thuật toán .

Giả sử, với một số bài toán nào đó chúng ta có một số thuật toán giải . Một câu hỏi mới xuất hiện là, chúng ta cần chọn thuật toán nào trong số các thuật toán đó để áp dụng. Việc phân tích thuật toán, đánh giá độ phức tạp của thuật toán là nội dung của phần dưới đây sẽ giải quyết vấn đề này.

Đánh giá hiệu quả của thuật toán.

Khi giải một vấn đề, chúng ta cần chọn trong số các thuật toán, một thuật toán mà chúng ta cho là "tốt" nhất .Vậy ta cần lựa chọn thuật toán dựa trên cơ sở nào? Thông thường ta dựa trên hai tiêu chuẩn sau đây:

Thuật toán đơn giản, dễ hiểu, dễ cài đặt (dễ viết chương trình)

Thuật toán sử dụng tiết kiệm nhất các nguồn tài nguyên của máy tính, và đặc biệt chạy nhanh nhất có thể được.

Khi ta viết một chương trình chỉ để sử dụng một số ít lần,và cái giá của thời gian viết chương trình vượt xa cái giá của chạy chương trình thì tiêu chuẩn (1) là quan trọng nhất. Nhưng có trường hợp ta cần viết các chương trình (hoặc thủ tục, hàm) để sử dụng nhiều lần, cho nhiều người sử dụng, khi đó giá của thời gian chạy chương trình sẽ vượt xa giá viết nó. Chẳng hạn, các thủ tục sắp xếp, tìm kiếm được sử dụng rất nhiều lần, bởi rất nhiều người trong các bài toán khác nhau . Trong trường hợp này ta cần dựa trên tiêu chuẩn (2). Ta sẽ cài đặt thuật toán có thể sẽ rất phức tạp, miễn là chương trình nhận được chạy nhanh hơn so với các chương trình khác.

Tiêu chuẩn (2) được xem là *tính hiệu quả* của thuật toán. Tính hiệu quả của thuật toán bao gồm hai nhân tố cơ bản:

Dung lượng không gian nhớ cần thiết để lưu giữ các dữ liệu vào, các kết quả tính toán trung gian và các kết quả của thuật toán .

Thời gian cần thiết để thực hiện thuật toán (ta gọi là thời gian chạy). Chúng ta chỉ quan tâm đến thời gian thực hiện thuậ toán, có nghĩa là ta nói đến đánh giá thời gian thực hiện. Một thuật toán có hiệu quả được xem là thuật toán có thời gian chạy ít hơn so với các thuật toán khác.

Biểu diễn thuật toán bằng phương pháp sơ đồ

Phương pháp liệt kê từng bước

Có nhiều phương pháp biểu diễn thuật toán. Có thể biểu diễn thuật toán bằng danh sách các bước, các bước được diễn đạt bằng ngôn ngữ thông thường và các ký hiệu toán học. Có thể biểu diễn thuật toán bằng sơ đồ khối. Tuy nhiên, để đảm bảo tính xác định của thuật toán như đã trình bày trên, thuật toán cần được viết trên các ngôn ngữ lập trình. Một chương trình là sự biểu diễn của một thuật toán trong ngôn ngữ lập trình đã chọn. Thông thường ta dùng ngôn ngữ lập trình Pascal, một ngôn ngữ thường được chọn để trình bày các thuật toán trong sách báo.

Ngôn ngữ thuật toán là ngôn ngữ dùng để miêu tả thuật toán. Thông thường ngôn ngữ thuật toán bao gồm ba loại:

+ Ngôn ngữ liệt kê từng bước;

+ Sơ đồ khối;

+ Ngôn ngữ lập trình;

Ngôn ngữ liệt kê từng bước nội dung như sau:

Thuật toán: Tên thuật toán và chức năng.

Vào: Dữ liệu vào với tên kiểu.

Ra: Các dữ liệu ra với tên kiểu.

Biến phụ (nếu có) gồm tên kiểu.

Hành động là các thao tác với các lệnh có nhãn là các số tự nhiên.

Ví dụ. Để giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, ta có thể mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ liệt kê như sau:

Bước 1: Xác định các hệ số a,b,c.

Bước 2 :Kiểm tra xem các hệ số a,b,c có khác 0 hay không ?

Nếu a=0 quay lại thực hiện bước 1.

Bước 3: Tính biểu thức $\Delta = b^2 - 4*a*c$.

Bước 4:Nếu $\Delta < 0$ thông báo phương trình vô nghiệm và chuyển sang bước 8.

Bước 5:Nếu $\Delta = 0$,tính $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2*a}$ và chuyển sang bước 7.

Bước 6: Tính $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ và chuyển sang bước 7.

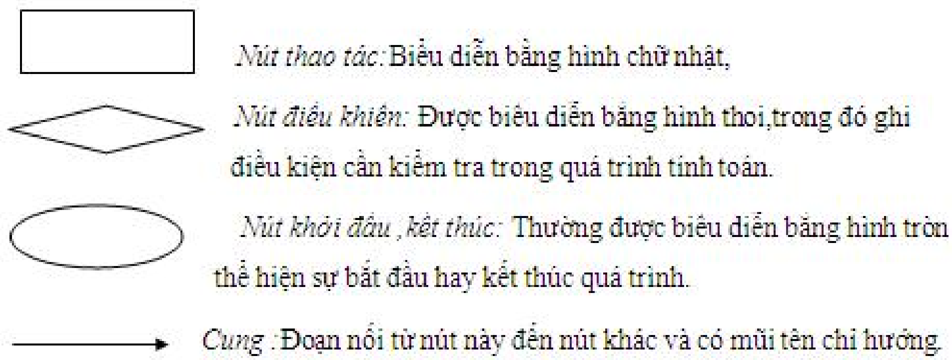
Bước 7: Thông báo các nghiệm x_1 , x_2 .

Bước 8: Kết thúc thuật toán.

Phương pháp sơ đồ

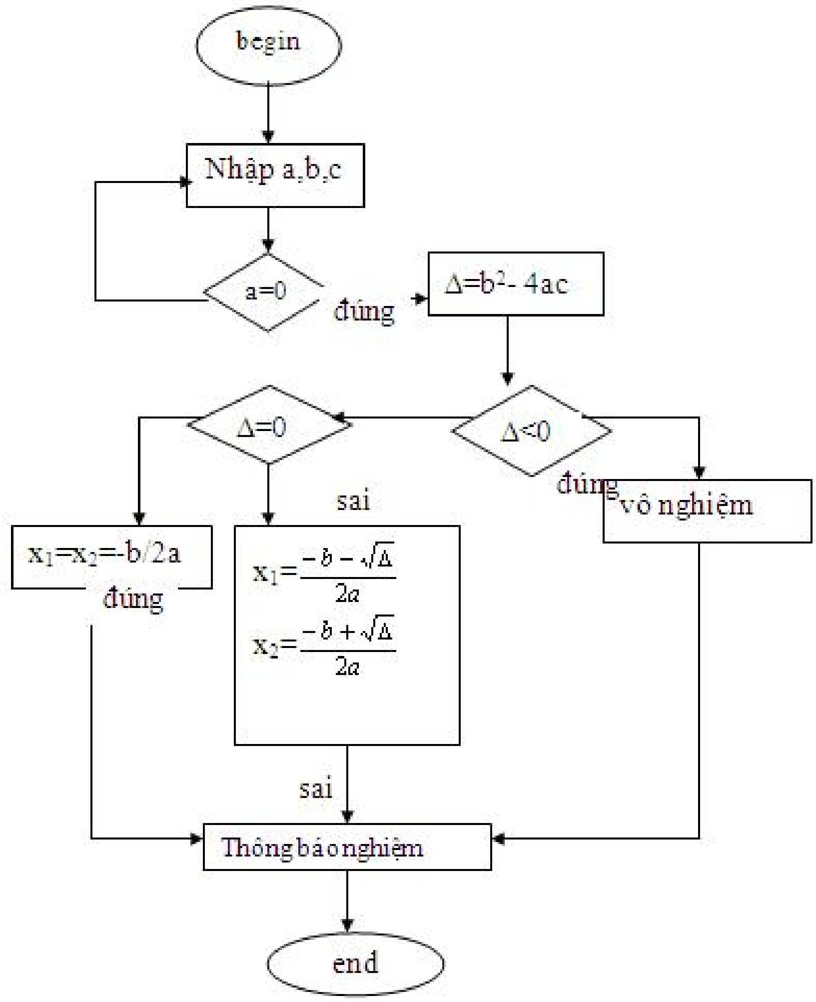
Phương pháp dùng sơ đồ khối mô tả thuật toán là dùng mô tả theo sơ đồ trên mặt phẳng các bước của thuật toán. Sơ đồ khối có ưu điểm là rất trực giác dễ bao quát.

Để mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối ta cần dựa vào các nút sau đây:

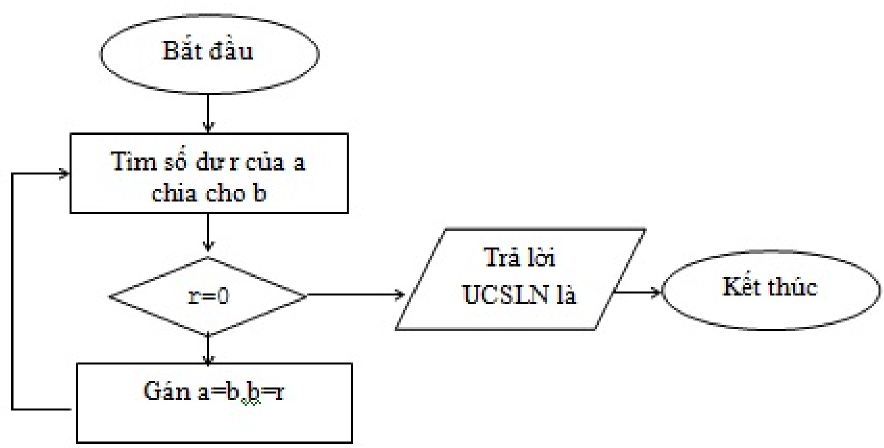


Hoạt động của thuật toán theo lưu đồ được bắt đầu từ nút đầu tiên. Sau khi thực hiện các thao tác hoặc kiểm tra điều kiện ở mỗi nút thì bộ xử lý sẽ theo một cung để đến nút khác. Quá trình thực hiện thuật toán dừng khi gặp nút kết thúc hay nút cuối.

Ví dụ. :Để giải phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ ta có thể mô tả thuật toán bằng sơ đồ khối sau:



Ví dụ biểu diễn bằng lưu đồ thuật toán Euclid:



Mã giả (pseudocode)

Để diễn đạt một giải thuật có thể sử dụng nhiều loại ngôn ngữ lập trình khác nhau. Thông thường người ta hay sử dụng các ngôn ngữ lập trình cấp cao như Pascal, C, C $^{++}$, C#, Java . . . Nhưng để sử dụng các ngôn ngữ đó ta gặp phải một số hạn chế sau :

+ Phải luôn tuân thủ các qui luật chặt chẽ về cú pháp của ngôn ngữ đó, khiến cho việc trình bày giải thuật và cấu trúc có thiên hướng nặng nề, gò bó.

+ Phải phụ thuộc vào cấu trúc dữ liệu tiền định của ngôn ngữ, nên có lúc không thể hiện đầy đủ các ý về cấu trúc mà ta muốn biểu đạt.

+ Ngôn ngữ nào được chọn cũng không hẳn đã được mọi người ưa thích và muốn sử dụng.

Để diễn đạt giải thuật một cách tự do hơn, phù hợp với tất cả mọi người sử dụng với một mức độ linh hoạt nhất định, không quá gò bó, không câu nệ về cú pháp và gần gũi với các ngôn ngữ chuẩn để khi cần thiết ta có thể dễ dàng chuyển đổi ta sử dụng ngôn ngữ gần giống với một ngôn ngữ lập trình nào đó gọi là "mã giả"

Ví dụ viết mã giả cho thuật toán giải phương trình bậc 2 như sau:

Read(a); {nhap cho den khi a=0}

Read(b);

Read(c);

*Δ =b*b-4*a*c;*

If Δ <0 then Phương trình vô nghiệm

Else if Δ =0 Phương trình có nghiệm kép

else Phương trình có hai nghiệm phân biệt

Bài 2:Phân tích thuật toán

Phân tích thuật toán

Đặt vấn đề

Khi xây dựng được thuật toán để giải bài toán thì có hằng loạt vấn đề được đặt ra để phân tích. Thường là các vấn đề sau:

- Yêu cầu về tính đúng đắn của thuật toán, thuật toán có cho lời giải đúng

- Tính đơn giản của thuật toán. Thường ta mong muốn có được một thuật toán đơn giản, dễ hiểu, dễ lập trình. Đặc biệt là những thuật toán chỉ dùng một vài lần ta cần coi trọng tính chất này, vì công sức và thời gian bỏ ra để xây dựng thuật toán thường lớn hơn rất nhiều so với thời gian thực hiện nó.

- Yêu cầu về không gian : thuật toán được xây dựng có phù hợp với bộ nhớ của máy

- Yêu cầu về thời gian : Thời gian chạy của thuật toán có nhanh không ? Một bài toán thường có nhiều thuật toán để giải, cho nên yêu cầu một thuật toán dẫn nhanh đến kết quả là một đòi hỏi đương nhiên. . . . . Trong phần này ta quan tâm chủ yếu đến tốc độ của thuật toán. Ta cũng lưu ý rằng thời gian chạy của thuật toán và dung lượng bộ nhớ nhiều khi không cân đối được để có một giải pháp trọn vẹn. Chẳng hạn, thuật toán sắp xếp trong sẽ có thời gian chạy nhanh hơn vì dữ liệu được lưu trữ trong bộ nhớ trong, và do đó không phù hợp trong trường hợp kích thước dữ liệu lớn. Ngược lại, các thuật toán sắp xếp ngoài phù hợp với kích thước dữ liệu lớn vì dữ liệu được lưu trữ chính ở các thiết bị ngoài, nhưng khi đó tốc độ lại chậm hơn.

Phân tích đánh giá thời gian chạy của thuật toán

- Bước đầu tiên phân tích thời gian chạy của thuật toán là quan tam đến kích thước dữ liệu như dữ liệu nhập của thuật toán và quyết định phân tích nào là thích hợp. Ta có thể xem thời gian chạy của thuật toán là một hàm theo kích thước của dữ liệu nhập. Nếu gọi n là kích thước của dữ liệu nhập thì thời gian thực hiện T của thuật toán được biểu diễn như một hàm theo n, ký hiệu là: T(n)

- Bước thứ hai trong việc phân tích đánh giá thời gian chạy của một thuật toán là nhận ra các thao tác trừu tượng của thuật toán để tách biệt sự phân tích và sự cài đặt. Bởi vì ta biết rằng tốc độ xử lý của máy tính và các bộ dịch của các ngôn ngữ lập trình cấp cao đều ảnh hưởng đến thời gian chạy của thuật toán, nhưng những yếu tố này ảnh hưởng không đồng đều với các lọai máy trên đó cài đặt thuật toán, vì vậy không thể dựa vào chúng để đánh giá thời gian chạy của thuật toán. Ta thấy rằng T(n) khôngt hể được biểu diễn bằng giây, phút...được; Cách tốt hơn là biểu diễn theo số chỉ thị của thuật toán

- Bước thứ ba trong việc phân tích đánh giá thời gian chạy của một thuật toán là phân tích về mặt toán học với mục đích tìm ra các giá trị trung bình và trường hợp xấu nhất cho mỗi đại lượng cơ bản. Chẳng hạn, khi sắp xếp một dãy các phần tử, thời gian chạy của thuật toán hiển nhiên còn phụ thuộc vào tính chất của dữ liệu nhập như:

Dãy có thứ tự đã sắp xếp

Dãy có thức tự ngược với thứ tự cần sắp xếp

Đã có thứ tự ngẫu nhiên

Độ phức tạp của thuật toán

O(f(x)) và đánh giá thời gian thực hiện thuật toán.

Khi đánh giá thời gian thực hiện bằng phương pháp toán học, chúng ta sẽ bỏ qua nhân tố phụ thuộc vào cách cài đặt chỉ tập trung vào xác định độ lớn của thời gian thực hiện T(n).

Giả sử n là số nguyên không âm. T(n) và f(n) là các hàm thực không âm. Ta viết T(n)=O(f(n)) (đọc T(n) là ô lớn của f(n)), nếu và chỉ nếu tồn tại các hằng số dương c và no sao cho $T(n) \leq c.f(n)$, với mọi $n \geq no$.

Nếu một thuật toán có thời gian thực hiện T(n) = O(f(n)) , ta nói thuật toán có thời gian thực hiện cấp f(n) .Từ định nghĩa ký hiệu ô lớn , ta có thể xem rằng hàm f(n) là cận trên của T(n).

Ví dụ. Giả sử $T(n) = 3n^2 + 4n +5$. Ta có

$3n^2 + 4n + 5 \leq 3n^2 + 4n^2 + 5n^2 = 12n^2$, với mọi $n \geq 1$.

Vậy $T(n) = O(n^2)$. Trong trường hợp này ta nói thuật toán có thời gian thực hiện cấp n^2, hoặc gọn hơn, thuật toán có thời gian thực hiện bình phương .

Dễ dàng thấy được, nếu T(n)= O(f(n)) và f(n)= $O(f_1(n))$, thì T(n) = $O(f_1(n))$. Thật vậy, vì T(n) là ô lớn của f(n) và f(n) là ô lớn của f1(n) nên tồn tại các hằng số c_o, n_o,c_1, n_1 sao cho $T(n) \leq c_0 f(n)$ với mọi $n \geq n_0$ và $f(n) \leq c_1 f_1(n)$ với mọi $n \geq n_1$. Từ đó ta có $T(n) \leq c_0c_1f_1(n)$ với mọi $n \geq \max(n_0, n_1)$.

Khi biểu diễn cấp của thời gian thực hiện thuật toán bởi hàm f(n), chúng ta sẽ chọn f(n) là hàm nhỏ nhất, đơn giản nhất có thể được sao cho T(n) = 0(f(n)). Thông thường f(n) là các hàm số sau đây: f(n)=1 ; f(n)= logn; f(n) =n; f(n) = nlog(n) ; f(n)= n^2; n^3 … ; f(n) = 2^n .

- Nếu T(n)= O(1) điều này có nghĩa là thời gian thực hiện thuật toán được chặn trên bởi một hằng nào đó, trong trường hợp này ta nói thuật toán có thời gian *thực hiện hằng* .

- Nếu T(n)= O(n), tức là bắt đầu từ một n_0 nào đó trở đi ta có $T(n) \leq cn$ với một hằng số c nào đó , trong trường hợp này ta nói thuật toán có thời gian *thực hiện tuyến tính.*

Bảng sau đây cho ta các cấp thời gian thực hiện thuật toán được sử dụng rộng rãi nhất và tên gọi của chúng .

Ký hiệu O(f(x)) của f(x)	Độ phức tạp loại
O(1)	Hằng
O(log)	Logarit
O(n)	Tuyến tính
O(nlogn)	n log n
$O(n^2)$	Bình phương
$O(n^3)$	Lập phương
$O(2^n)$	Mũ
O(n!)	Giai thừa

Danh sách trên sắp xếp theo thứ tự tăng dần của hàm thời gian thực hiện.

- Các hàm loại : 2^n, n!, nn thường được gọi là các hàm loại mũ. Thuật toán với thời gian chạy có cấp hàm loại mũ thì tốc độ rất chậm

- Các hàm n, n^3, n^2, nlog $_2$ n thường được gọi là các hàm đa thức. Thuật toán với thời gian chạy có cấp hàm đa thức thường chấp nhận được

Các qui tắc để đánh giá thời gian thực hiện thuật toán

Sau đây là qui tắc cần thiết về ô lớn để đánh giá thời gian thực hiện thuật toán.

Qui tắc tổng : Nếu $T_1(n)=O(f_1(n))$ và $T_2(n) = O(f_2(n))$ thì

$T_1(n) + T_2(n) = O(\max (f_1(n) , f_2(n)))$.

Thật vậy , vì $T_1(n)$, $T_2(n)$ lần lượt là ô lớn của $f_1(n)$ và $f_2(n)$ tương ứng do đó tồn tại hằng số c_1 , c_2 ,n_1 ,n_2 sao cho $T_1 (n) \le c_1f_1(n)$,$T_2(n) \le c_2f_2(n)$ với mọi $n \ge n_1$, mọi $n \ge n_2$. Đặt $n_0 = \max (n_1,n_2)$.

Khi đó, với mọi $n \ge n0$ ta có bất đẳng thức sau:

$T_1(n) + T_2(n) \le (c_1 + c_2) \max (f_1(n), f_2(n))$.

Qui tắc này thường được áp dụng như sau .Giả sử thuật toán của ta được phân thành ba phần tuần tự . Phần một có thời gian thực hiện $T_1(n)$ được đánh giá là O(1), phần hai có thời gian thực hiện là $T_2(n)$ và có thời gian đánh gía là $O(n^2)$, phần ba có thời gian thực hiện $T_3(n)$ có thời gian đánh giá là O(n) .Khi đó thời gian thực hiện thuật toán là T(n) = $T_1(n) + T_2(n) + T_3(n)$ là $O(n_2)$,vì $n_2 = \max(1, n^2, n)$.

Trong sách báo quốc tế các sách báo thường được trình bày dưới dạng các thủ tục hoặc hàm trong ngôn ngữ tựa Pascal. Để đánh giá thời gian thực hiện thuật toán ta cần biết cách đánh giá thời gian thực hiện các câu lệnh trong Pascal, các câu lệnh trong Pascal được định nghĩa đệ qui như sau:

1. Các phép gán ,đọc , viết , goto là câu lệnh .Các lệnh này được gọi là các lệnh đơn .

Thời gian thực hiện các lệnh đơn là O(1).

2. Nếu S1 , S2 , ... ,Sn là câu lệnh thì

begin S1, S2, ... ,Sn **end**

là câu lệnh.

Lệnh này được gọi là lệnh hợp thành (hoặc khối).

Thời gian thực hiện lệnh hợp thành được xác định bởi luật tổng .

3. Nếu S1 ,S2 là các câu lệnh và E là biểu thức logíc thì :

If E **then** S1 **else** S2

Và

if E **then** S1

là câu lệnh. Các lệnh này được gọi là lệnh **if.**

Đánh giá thời gian thực hiện các lệnh **if** : Giả sử thời gian thực hiện các lệnh S1,S2, là $O(f_1(n))$ và $O(f_2(n))$ tương ứng .Khi đó thời gian thực hiện lệnh if là : $O(max(f_1(n),f_2(n)))$.

4. Nếu S1,S2, ... ,Sn là các câu lệnh , E là biểu thức có kiểu thứ tự đếm được, và v1,v2, ... , vn là các giá trị có cùng kiểu với E thì :

Case E of

v1: S1 ;

v2: S2 ;

....

vn : Sn;;

end;

là các lệnh.

Lệnh này được gọi là lệnh **case.**

Đánh giá thời gian thực hiện lệnh case như lệnh if

5. Nếu S là các câu lệnh và E là biểu thức logíc thì

While E do S

Là câu lệnh. Lệnh này được gọi là lệnh while.

Thời gian thực hiện lệnh while được đánh giá : Giả sử thời gian thực hiện lệnh S (thân của lệnh while) là O(f(n)). Giả sử g(n) là số tối đa các lần thực hiện lệnh S , khi thực hiện lệnh while .Khi đó thời gian thực hiện lệnh while là O(f(n)g(n)).

Nếu S1, S2,....., Sn là các câu lệnh , E là biểu thức logíc thì

Repeat S1, S2, .., Sn until E

Là câu lệnh. Lệnh này được gọi là lệnh repeat.

Giả sử , thời gian thực hiện khối begin S1, S2,…Sn end; là O(f(n)). Giả sử g(n) là số tối đa các lần lặp. Khi đó thời gian thực hiện lệnh repeat là O(f(n),g(n)).

Với S là câu lệnh và E1,E2 là biểu thức cùng một kiểu thứ tự đếm được thì

For i:= E1 to E2 do S là câu lệnh ,và

for i:= E2 downto E1 do S là câu lệnh.

Các câu lệnh này được gọi là lệnh for .

Thời gian thực hiện lệnh for được đánh giá tương tự như thời gian thực hiện lệnh while và lệnh repeat.

Đánh giá thủ tục (hoặc hàm) đệ qui.

Ví dụ: Đánh giá thời gian thực hiện của hàm đệ qui sau:

(hàm tính n!)

```
Function fact(n:integer):integer;

Begin

If n<=1 then fact :=1

Else fact:=n*fact(n-1);

End;
```

Trong hàm này cỡ của dữ liệu vào là n. Giả sử thời gian thực hiện hàm là T(n) .Với n=1 chỉ cần thực hiện lệnh gán fact:=1; do đó T(1)= O(1). Với n>1 ,cần thực hiện lệnh gán fact:=n*(fact(n-1)). Do đó , thời gian T(n) sẽ là O(1) để thực hiện phép nhân (*) và phép gán(:=) cộng với thời gian T(n-1) để thực hiện lời gọi đệ qui fact(n-1). Tóm lại ta có quan hệ đệ qui như sau:

$T(1) = O(1);$

$T(n) = O(1) + T(n-1);$

Thay các O(1) bởi các hằng nào đó ta có quan hệ đệ qui như sau:

$T(1) = C1$;

$T(n) = C2 + T(n-1);$

Để giải phương trình đệ qui, tìm T(n), chúng ta áp dụng phương pháp thế lặp. Ta có phương trình đệ qui sau:

$T(m) = C2 + T(m-1)$; với $m > 1$

Thay m lần lượt bởi các 2, 3,..,n-1,n ta được hệ các quan hệ sau:

$T(2) = C2 + T(1);$

$T(3) = C2 + T(2);$

....

T(n-1) = C2 + T(n-2);

T(n) = C2 + (n-1) ;

Bằng các phép thế liên tiếp ta nhận được

T(n) = (n-1).C2 + T(1)

Hay T(n) = (n-1) C2 + C1;, trong đó C1, C2 là các hằng nào đó .

Do đó T(n) = O(n) ;

Từ đó ta có phương pháp tổng quát sau đây để đánh giá thời gian thực hiện các thủ tục (hàm) đệ qui. Ta giả thiết rằng các thủ tục (hàm)là đệ qui trực tiếp. Điều đó có nghĩa là các thủ tục (hàm) chỉ chứa các lời gọi đệ qui đến chính nó (không qua một thủ tục hoặc hàm nào khác cả). Giả sử thời gian thực hiện thủ tục (hàm) là T(n), với n là cỡ dữ liệu vào. Khi đó thời gian thực hiện các lời gọi đệ qui thủ tục sẽ là T(m), với m<n. Đánh giá thời gian $T(n_o)$ với n_0 là cỡ dữ liệu vào nhỏ nhất có thể được (trong ví dụ trên đó là T(1)). Sau đó đánh giá thân của thủ tục theo các qui tắc đã nêu trên ,ta sẽ nhận được quan hệ đệ qui như sau:

$T(n) = F(T(m_1),T(m_2),..,T(m_k))$

Trong đó m_1, m_2, ... , $m_k < n$. Giải phương trình đệ qui này ta sẽ nhận được sự đánh giá của T(n).

Bây giờ ta sử dụng những kiến thức trên để đánh giá hai ví dụ quen thuộc sau đây:

Ví dụ. Xác định độ phức tạp thuật toán của hàm tính dãy số Fibonaci:

Function Fibo (n : integer) : integer;

Var i , j , k : integer ;

Begin

i := 1;

j := 0 ;

for k := 1 to n do

Begin

j := i + j ;

i := j - i ;

End;

Fibo := j;

End;

Thời gian thực hiện của lệnh trên là O(n) .

Một bài toán thường có nhiều cách giải, hay nhiều thuật toán để giải, với mỗi thuật toán khác nhau có thể sẽ có độ phức tạp khác nhau. Đánh giá độ phức tạp thuật toán là một trong những cách phân tích, so sánh và tìm ra trong những thuật toán đó một thuật toán tối ưu.

Ví dụ. Xét bài toán : Tính giá trị đa thức :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, với $x = x_0$

Xét thuật toán 1 :

Tính giá trị từng hạng tử của đa thức :

1. Với i = 1 đến n tính $a_i x_0^i$.

2. Tính Đa thức P(x) có thể viết dưới dạng :

$P(x) = (...((a_n x + a_{n-1})x...)x + a_0$.

Xét Thuật toán 2:

1. $P := a_n$.

2. Với i=1 đến n : $P := Px_0 + a_{n-i}$

3. Gán kết quả $P(x_0)= P$.

Chẳng hạn với n = 3.

$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (((a_3x + a_2)x + a_1) + a_0)$

1. Tính $P := a_3$

2. $i = 1 : P = (a_3x_0 + a_2)$

$i = 2 : P = (a_3x_0 + a_2)x + a_1$

$i = 3 : P = ((a_3x_0 + a_2)x + a_1)x + a_0$

3. $P(x_0) = ((a_3x_0 + a_2)x + a_1)x + a_0$

Xét độ phức tạp của hai thuật toán trên :

Thuật toán 1: ở bước 1 ta có :

i = 1 : ta phải thực hiện 1 phép nhân.

i = 2 : ta phải thực hiện 2 phép nhân.

....

i = n : ta phải thực hiện n phép nhân.

Như vậy ở bước 1 ta sẽ phải thực hiện 1 + 2 + …+ n =

ở bước 2 ta có : ta phải thực hiện n phép cộng.

Vậy ở thuật toán 1 cần $\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$

Thuật toán 2: ta phải thực hiện n lần mỗi lần đòi hỏi 2 phép tính (một phép tính cộng và một phép tính nhân). Như vậy thuật toán 2 cần tất cả 2n phép tính. Nếu ta coi thời gian thực hiện mỗi phép tính nhân và tính cộng là như nhau và là một đơn vị thời gian thì thời gian thực hiện thuật toán 1 là , còn thời gian thực hiện thuật toán 2 là 2n .

Như vậy theo phân tích ở trên ta thấy rằng thời gian thực hiện thuật toán 2 ít hơn so với thời gian thực hiện thuật toán một. Thuật toán 2 có độ phức tạp là O(n), độ phức tạp tuyến tính, còn thuật toán 1 thì độ phức tạp là $O(n^2)$ độ phức tạp bậc hai.

Ta nhận thấy rằng việc đánh giá độ phức tạp của một thuật toán nào đó là việc không hề đơn giản nó đòi hỏi phải có phương pháp và cách tiếp cận riêng.

Ví dụ. Phân tích thuật toán Euclide tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên dương a, b.

Thuật toán Euclide :

Input : a, b là hai số nguyên dương.

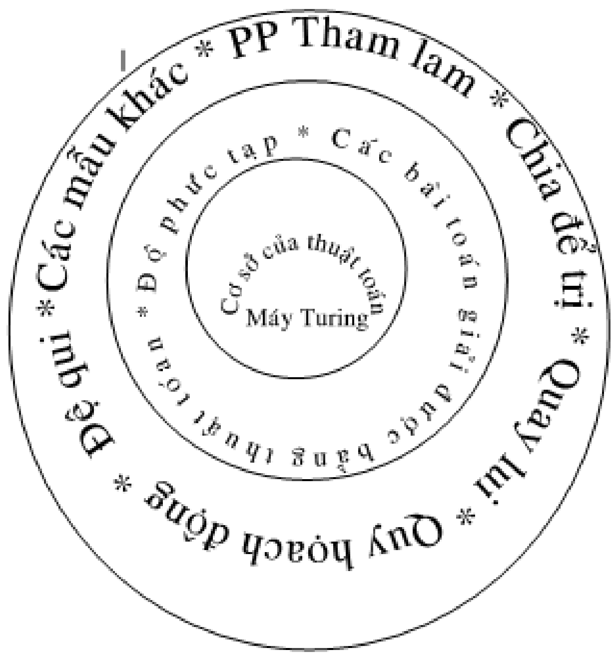
Output : ước số chung lớn nhất của hai số a, b.

```
Function USCLN(a, b)

Begin

x := a;

y := b;

While y <> 0

begin

r := x mod y

x := y;

y := r;

end;

USCLN := x;

End;
```

Để đánh giá độ phức tạp của thuật toán trên, ta đếm số phép chia thực hiện theo thuật toán.

Một số phương pháp thiết kế

Trên cơ sở lý thuyết máy Turing, ta chia được các bài toán thành 2 lớp không giao nhau : Lớp giải được bằng thuật toán , và lớp không giải được bằng thuật toán.



Đối với lớp các bài toán giải được bằng thuật toán, dựa vào các đặc trưng của quá trình thiết kế của thuật toán, ta có thể chỉ ra một số các phương pháp thiết kế thuật toán cơ bản sau đây :

Phương pháp chia để trị. (Divide-and-Conquer method).

Ý tưởng là : Chia dữ liệu thành từng miền đủ nhỏ, giải bài toán trên các miền đã chia rồi tổng hợp kết quả lại .

Chẳng hạn như thuật toán Quicksort.

Phương pháp quay lui (BackTracking method).

Ý tưởng là: Tìm kiếm theo ưu tiên. Đối với mỗi bước thuật toán, ưu tiên theo độ rộng hay chiều sâu để tìm kiếm.

Chẳng hạn thuật toán giải bài toán 8 hậu.

Phương pháp tham lam (Greedy Method).

Ý tưởng là : Xác định trật tự xử lý để có lợi nhất, Sắp xếp dữ liệu theo trật tự

đó, rồi xử lý dữ liệu theo trật tự đã nêu. Công sức bỏ ra là tìm ra trật tự đó.

Chẳng hạn thuật toán tìm cây bao trùm nhỏ nhất (Shortest spanning Trees).

Phương pháp Quy hoạch động (Dynamic Programming method).

Phương pháp quy hoạch động dựa vào một nguyên lý, gọi là nguyên lý tối ưu của Bellman :

- Nếu lời giải của bài toán là tối ưu thì lời giải của các bài toán con cũng tối ưu. Phương pháp này tổ chức tìm kiếm lời giải theo kiểu từ dưới lên. Xuất phát từ các bài toán con nhỏ và đơn giản nhất, tổ hợp các lời giải của chúng để có lời giải của bài toán con lớn hơn...và cứ như thế cuối cùng được lời giải của bài toán ban đầu.

Chẳng hạn thuật toán "chiếc túi xách" (Knapsack).

Bài 3: Cơ bản về thuật toán chia để trị

Cơ bản về thuật toán chia để trị

Chia để trị là một kỹ thuật thiết kế thuật toán bao gồm việc chia một bài toán cần giải ra thành những bài toán con nhỏ hơn có cùng một loại vấn đề, giải từng bài toán con đó một cách lần lượt và độc lập, sau đó kết hợp các lời giải con thu được nhờ cách đó để thu được lời giải của bài toán nguyên thuỷ. Hai câu hỏi tự nhiên nảy ra là "Vì sao ai đó làm việc này?" và "Chúng ta cần giải các bài toán con như thế nào?". Tính hiệu quả của kỹ thuật chia để trị nằm ở câu trả lời cho câu hỏi thứ hai.

Sơ đồ chung của thuật toán

Ý tưởng thuật toán:

Có lẽ quan trọng và áp dụng rộng rãi nhất là kỹ thuật thiết kế "Chia để trị". Nó phân rã bài toán kích thước n thành các bài toán con nhỏ hơn mà việc tìm lời giải của chúng là cùng một cách. Lời giải của bài toán đã cho được xây dựng từ các bài toán con này. Ta có thể nói vắn tắt ý tưởng chính của phương pháp này là : chia dữ liệu thành từng miền đủ nhỏ, giải bài toán trên các miền đã chia rồi tổng hợp kết quả lại.

Để có được mô tả chi tiết thuật toán chia để trị chúng ta cần phải xác định :

1. Kích thước tới hạn n_0 (Bài toán có kích thước nhỏ hơn n_0 sẽ không cần chia nhỏ)
2. Kích thước của mỗi bài toán con trong cách chia
3. Số lượng các bài toán con như vậy
4. Thuật toán tổng hợp lời giải của các bài toán con

Các phần xác định trong 2 và 3 phụ thuộc vào 4. Chia như thế nào để khi tổng hợp có hiệu quả (thường là tuyến tính)

Sơ đồ tổng quát thuật toán chia để trị

(Viết theo tựa Pascal):

Procedure D_and_C(n)

Begin

If n (n 0 Then

Giải bài toán một cách trực tiếp

Else

- Chia bài toán thành r bài toán con kích thước n/k
- For (Mỗi bài toán trong r bài toán con) Do D_and_C(n)
- Tổng hợp lời giải của r bài toán con để thu được lời giải của bài toán gốc

End;

(Viết theo tựa C#:)

Nếu gọi D&C (R) - R là miền dữ liệu - là hàm thể hiện cách giải bài toán theo phương pháp chia để trị thì ta có thể viết :

```
void D&C(R)

{ If ( R đủ nhỏ)

giải bài toán;

Else

{ Chia R thành R1 , ..., Rm ;

for (i = 1; i <=m; i++)

D&C(R);

Tổng hợp kết quả ;

}

}
```

Tìm kiếm nhị phân

Bài toán :

Cho mảng gồm n phần tử đã được sắp xếp tăng dần và một phần tử x. Tìm xem x có trong mảng hay không? Nếu có x trong mảng thì trả ra kết quả là 1, nếu không trả ra kết quả là 0.

Dùng thuật toán tìm kiếm nhị phân,

Phân tích thuật toán :

Số x cho trước

+ Hoặc là bằng phần tử nằm ở vị trí giữa mảng

+ Hoặc là nằm ở nửa bên trái (x < phần tử ở giữa mảng)

+ Hoặc là nằm ở nửa bên phải (x > phần tử ở giữa mảng)

Mô tả thuật toán:

Input: mảng a[1..n]

Output: + 1 nếu x thuộc a

+ 0 nếu x không thuộc a

Từ nhận xét đó ta có giải thuật sau:

```
Tknp (a, x, Đầu, Cuối)
If (Đầu > Cuối)
  return  0 ; {dãy trống}
Else
{    Giữa = (Đầu + cuối) / 2;
     If (x == a[Giữa])
     Return 1;
else
              if (x > a[Giữa])
                        Tknp(a, x, Giữa + 1, Cuối) ;
              else
                        Tknp(a, x, Đầu, Giữa - 1) ;
}
```

Đánh giá độ phức tạp thời gian của thuật toán

Trường hợp tốt nhất: Tương ứng với sự tìm được y trong lần so sánh đầu tiên, tức là x= a[giữa] (x nằm ở vị trí giữa mảng)

=> Ta có : $T_{tốt}(n) = O(1)$

Trường hợp xấu nhất: Độ phức tạp là O(log n)

Thật vậy, Nếu gọi T(n) là độ phức tạp của thuật toán, thì sau khi kiểm tra điều kiện (x == a[giữa]) và sai thì gọi đệ qui thuật toán này với dữ liệu giảm nửa, nên thỏa mãn công thức truy hồi :

$T(n) = 1 + T(n/2)$ với $n>=2$ và $T(1) = 0$

Bài toán Min_Max

Bài toán

Tìm giá trị Min, Max của đoạn a[l..r] của mảng a[1..n]

Phân tích thuật toán

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a[i]	10	1	5	0	9	3	15	19

Tại mỗi bước, chia đôi đoạn cần tìm rồi tìm Min, Max của từng đoạn, sau đó tổng hợp lại kết quả . Nếu đoạn chia chỉ có 1 phần tử thì Min = Max và bằng phần tử đó

Minh họa :

Tìm giá trị Min, Max trong đoạn a[2..7] của mảng a[1..7] .

Ký hiệu :

MinMax(a,l,r,Min,Max) cho Min và Max trong đoạn a[l..r]

MinMax(a,2,7,Min,Max) cho Min =0 và Max=15 trong đoạn a[2..7]

Mô tả thuật toán:

Input : a[l..r], ($l \le r$)

Output: Min = Min (a[l],..,a[r]),

Max = Max (a[l],..,a[r]).

MinMax(a,l, r, Min, Max)

if (l == r)

{

Min = a[l];

Max = a[l];

```
}
Else
{
MinMax(a,l, (l+r) / 2, Min1, Max1);
MinMax(a,(l+r) /2 + 1, r , Min2, Max2);
If (Min1 < Min2)
Min = Min1;
Else
Min = Min2;
If (Max1 > Max2)
Max = Max1;
Else
Max = Max2;
}
```

Độ phức tạp thuật toán

Gọi T(n) là số phép toán so sánh cần thực hiện. Khi đó ta có:

$$T(n) = \begin{cases} T(n/2) + T(n/2) + 2; n > 2 \\ 1; n = 2 \\ 0; n = 1 \end{cases}$$

Với $n=2^k$, thì:

$T(n) = 2 + 2T(n/2) = 2 + 2^2 + 2^2\ T(n/2^2) = 2^{k-1}T(2) + \sum_{i=1}^{k-1} 2^i$

$= \sum_{i=1}^{k} 2^{i} - 2^{k-1} = 2^{k+1} - 2^{k-1} - 2 = \frac{3n}{2} - 2$

Vậy T(n) € O(n).

Bài 4: Các bài toán sử dụng thuật toán chia để trị (Divid and Conquer)

Thuật toán nhân 2 ma trận

Bài toán :

Cho hai ma trận A, B với kích thước n*n, ta có ma trận C chứa kết quả của phép nhân hai ma trận A và B. Thuật toán nhân ma trận cổ điển như công thức dưới đây:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

Phân tích thuật toán

Với mảng một chiều (kích thước n phần tử), ma trận C được tính trong thời gian (n), giả sử rằng phép cộng vô hướng và phép nhân là các phép tính cơ bản (có thời gian tính là hằng số). Với mảng hai chiều (kích thước n*n) thì thời gian để tính phép nhân ma trận AB là (n).

Đến cuối những năm 1960, Strassen đưa ra một giải pháp cải tiến thuật toán trên, nó có tính đột phá trong lịch sử của thuật toán chia để trị, thậm chí gây ngạc nhiên không kém thuật toán nhân số nguyên lớn được phát minh ở thập kỷ trước. ý tưởng cơ bản của thuật toán Strassen cũng tương tự như thuật toán trên. Ứng dụng thiết kế chia để trị, mỗi ma trận A, B, C ta chia thành 4 ma trận con và biểu diễn tích 2 ma trận AxB = C theo các ma trận con đó:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Trong đó :

$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$

$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$

$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}$

$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$

Nếu theo cách nhân thông thường, thì cách chia để trị này dẫn đến công hưc truy hồi : $T(n) = 8T(n/2) + O(n^2)$. Đáng tiếc là kết quả này cho lời giải T(n) thuộc $O(n^3)$

Nhưng theo khám phá của Strassen, chỉ cần 7 phép nhân đệ qui n/2x n/2 ma trận và $O(n^2)$ phép cộng trừ vô hướng theo công thức truy hồi :

$T(n) = 7T(n/2) + 18 (n/2)^2$ € $O(n^{\lg 7}) = O(n^{2.81})$

Cụ thể, để nhân 2 ma trận vuông cấp 2 , theo Strassen chỉ cần 7 phép nhân và 18 phép cộng (trừ) các sô. Để tính :

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

- Đầu tiên tính 7 tích :

$m_1 = (a_{12} - a_{22}) (b_{21} + b_{22})$

$m_2 = (a_{11} + a_{22}) (b_{11} + b_{22})$

$m_3 = (a_{11} - a_{21}) (b_{11} + b_{12})$

$m_4 = (a_{11} + a_{12}) b_{22}$

$m_5 = a_{11} (b_{12} - b_{22})$

$m_6 = a_{22} (b_{21} - b_{11})$

$m_7 = (a_{21} + a_{22}) b_{11}$

- sau đó tính c_{ij} theo công thức :

$c_{11} = m_1 + m_2 - m_4 + m_6$

$c_{12} = m_4 + m_5$

$c_{21} = m_6 + m_7$

$c_{22} = m_2 - m_3 + m_5 - m_7$

Mô tả thuật toán:

```
strass(a, b, c, n)
if ( n == 2 ) nhan2(a,b,c);
else
{
tach(a,a11,a12,a21,a22,n);
tach(b,b11,b12,b21,b22,n);
tach(c,c11,c12,c21,c22,n);
strass(a11,b11,d1,n/2);
strass(a12,b21,d2,n/2);
cong(d1,d2,c11,n/2);
strass(a11,b12,d1,n/2);
strass(a12,b22,d2,n/2);
cong(d1,d2,c12,n/2);
strass(a21,b11,d1,n/2);
strass(a22,b21,d2,n/2);
cong(d1,d2,c21,n/2);
strass(a21,b12,d1,n/2);
strass(a22,b22,d2,n/2);
cong(d1,d2,c22,n/2);
Hop(c11,c12,c21,c22,c,n);
```

}

Cùng với phát minh của Strassen, có một số nhà nghiên cứu cố gắng tìm kiếm thuật toán để xác định được hằng số ω, khi đó độ phức tạp tính toán phép nhân hai ma trận kích thước n*n là $O(n^{w})$. Để thực hiện được điều này, việc đầu tiên phải tiến hành là nhân hai ma trận kích thước 2*2 với 6 phép nhân cơ bản. Nhưng vào năm 1971 Hopcroft và Kerr đã chứng minh điều này là không thể vì phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán. Việc tiếp theo phải thực hiện là tìm cách nào để nhân hai ma trận 3*3 với nhiều nhất chỉ 21 phép nhân cơ bản. Nếu thực hiện được việc này có thể sử dụng thuật toán này để suy ra thuật toán đệ quy nhân hai ma trận n*n với thời gian là $O(n^{\log_3 21})$ nhanh hơn thuật toán của Strassen vì $\log_3 21 < \log_2 7$. Không may mắn là điều này không thể thực hiện. Trong suốt một thập kỷ trước khi Pan phát hiện ra cách để nhân hai ma trân kích thước 70*70 vớI 143640 phép nhân cơ bản – so sánh với 343000 phép nhân nếu sử dụng thuật toán cổ điển và quả thực là $\log_{70}143640$ bé hơn một chút so vớI lg7. Phát hiện này được gọi là cuộc chiến tranh của số thập phân (decimal war). Nhiều thuật toán, mà trong đó hiệu suất tiệm cận cao, được tìm ra sau đó. Ví dụ như ta đã biết cuốI năm 1979, phép nhân ma trận có thời gian tính toán là $O(n^{2525813})$. Hãy tưởng tượng rằng, ngay sau đó tháng 1 năm 1980 thờI gian tính của phép nhân ma trận là $O(n^{2525813)}$. Biểu thức tiệm cận thời gian tính toán tồi nhất của thuật toán nhân ma trận kích thước n*n được Coppersmith và Winograd phát minh ra năm 1986 là $O(n^{2376})$. Tại vì các hằng số liên quan bị ẩn nên không một thuật toán nào được tìm ra sau thuật toán của Strassen được nghiên cứu và sử dụng.

Thuật toán sắp xếp

Bài toán

Cho T[1..n] là một mảng n phần tử. Vấn đề đặt ra là sắp xếp các phần tử này theo thứ tự tăng. Chúng ta đã có thể giải quyết vấn đề này bằng các phương pháp *selection sort hay insertion sort hoặc là heapsort*

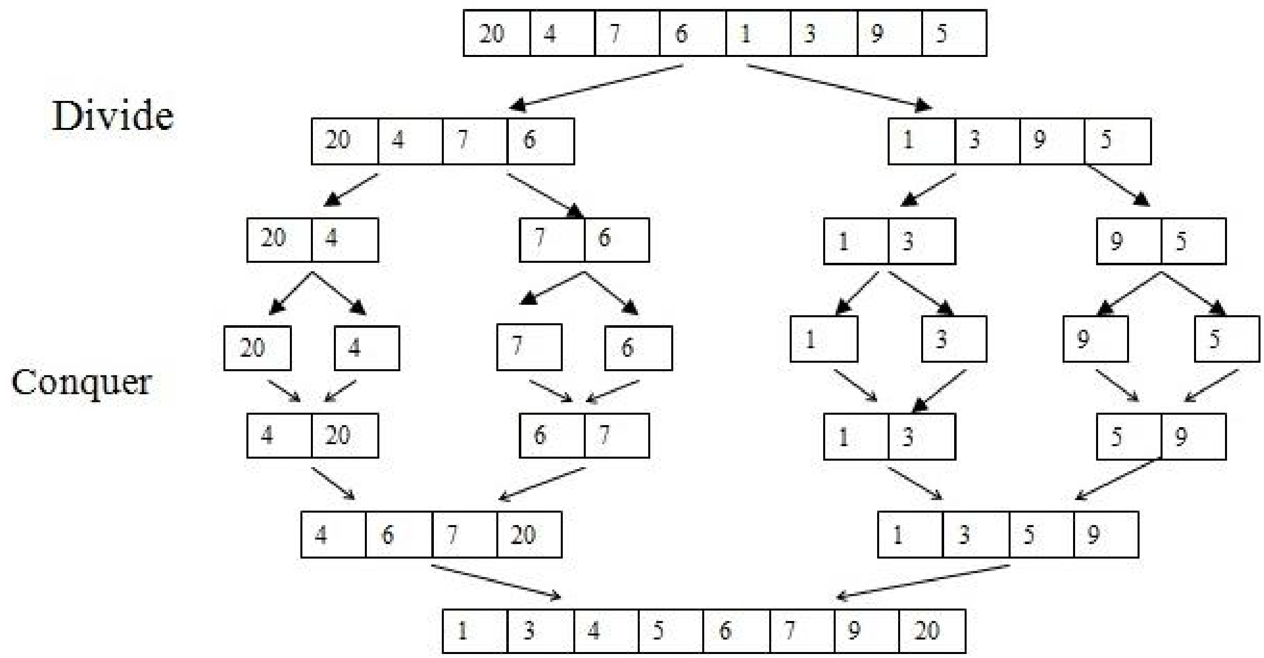
Như chúng ta đã biết thời gian dùng selection sort hay insertion sort để sắp xếp mảng T trong cả hai trường hợp: xấu nhất và trung bình đều vào cỡ n^2. Còn heapsort vào khoảng nlogn.

Có một số giải thuật đặc biệt cho bài toán này theo mô hình chia để trị đó là *mergesort và quicksort, chúng ta sẽ lần lượt đi nghiên cứu chúng.*

MergeSort

Chia để trị tiếp cận tới bài toán này bằng việc tách mảng T thành hai phần mà kích thước của chúng sai khác nhau càng ít càng tốt, sắp xếp các phần này bằng cách gọi đệ qui và sau đó trộn chúng lại (chú ý duy trì tính thứ tự). Để làm được điều này chúng ta cần một giải thuật hiệu quả cho việc trộn hai mảng đã được sắp U và V thành một mảng mới T mà kích thước của mảng T bằng tổng kích thước của hai mảng U và V. Vấn đề này có thể thực hiện tốt hơn nếu ta thêm vào các ô nhớ có sẵn ở cuối của mảng U và V các giá trị cầm canh (giá trị lớn hơn tất cả các giá trị trong U và V, giả sử là)

Hình sau chỉ ra các bước của mergesort.



Mảng đã được sắp theo thứ thự tăng

Giải thuật sắp xếp này minh hoạ tất cả các khía cạnh của chia để trị. Khi số lượng các phần tử cần sắp là nhỏ thì ta thường sử dụng các giải thuật sắp xếp đơn giản.

Khi số phần tử đủ lớn thì ta chia mảng ra 2 phần, tiếp đến trị từng phần một và cuối cùng là kết hợp các lời giải.

* Độ phức tạp thuật toán:

Bài toán chia thành các bước

Với mỗi lần merge thứ *i*, độ phức tạp bài toán là *O(n)*

Số lần merge là *O(log n)*

Thời gian tổng cộng: O(*n* log*n*)

Như vậy hiệu quả của mergesort tương tự heapsort. Trong thực tế sắp xếp trộn có thể nhanh hơn heapsort một ít nhưng nó cần nhiều hơn bộ nhớ cho các mảng trung gian U và V. Ta nhớ lại heapsort có thể sắp xếp tại chỗ (in-place), và cảm giác nó chỉ sử dụng một ít biến phụ mà thôi. Theo lý thuyết mergesort cũng có thể làm được như vậy tuy nhiên giá thành có tăng một chút ít.

Quicksort

Giải thuật này được phát minh bởi Hoare, nó thường được hiểu như là tên gọi của nó - sắp xếp nhanh, hơn nữa nó cũng dựa theo nguyên tắc chia để trị. Không giống như mergesort nó quan tâm đến việc giải các bài toán con hơn là sự kết hợp giữa các lời giải của chúng. Bước đầu tiên của giải thuật này là chọn 1 vật trung tâm (pivot) từ các phần tử của mảng cần sắp. Tiếp đến vật trung tâm sẽ ngăn mảng này ra 2 phần: các phần tử lớn hơn vật trung tâm thì được chuyển về bên phải nó, ngược lại thì chuyển về bên trái. Sau đó mỗi phần của mảng được sắp xếp độc lập bằng cách gọi đệ qui giải thuật này. Cuối cùng mảng sẽ được sắp xếp xong. Để cân bằng kích thước của 2 mảng này ta có thể sử dụng phần tử ở giữa (median) như là vật trung tâm . Đáng tiếc là việc tìm phần ở giữa cũng mất 1 thời gian đáng kể. Để giải quyêt điều đó đơn giản là chúng ta sử dụng 1 phần tử tuỳ ý trong mảng cần sắp như là vật *trung tâm và hi vọng nó là tốt nhất có thể.*

Việc thiết kế giải thuật ngăn cách mảng bằng vật trung tâm với thời gian tuyến tính không phải là sự thách đố (có thể làm được). Tuy nhiên điều đó là cần thiết để so sánh với các giải thuật sắp xếp khác như là heapsort. Vấn đề đặt ra là mảng con T[i..j] cần được ngăn bởi vật trung tâm p=T[i]. Một cách làm có thể chấp nhận được là: Duyệt qua từng phần tử của của nó chỉ một lần nhưng bắt đầu từ hai phía (đầu và cuối mảng). Khi đó khởi tạo k=i; l=j+1, k tăng dần cho đến khi T[k] > p, l giảm dần cho đến khi T[l] (l. Tiếp đến hoán vị T[k] và T[l]. Quá trình này tiếp tục cho đến khi k (l. Cuối cùng đổi chổ T[i] và T[l] cho nhau và lúc này ta xác định đúng vị trí của phần tử trung tâm.

* Mô tả thuật toán:

quicksort(L)

{

if (length(L) < 2) return L

else

{

pick some x in L // x là phần tử chốt

L1 = { y in L : y < x }

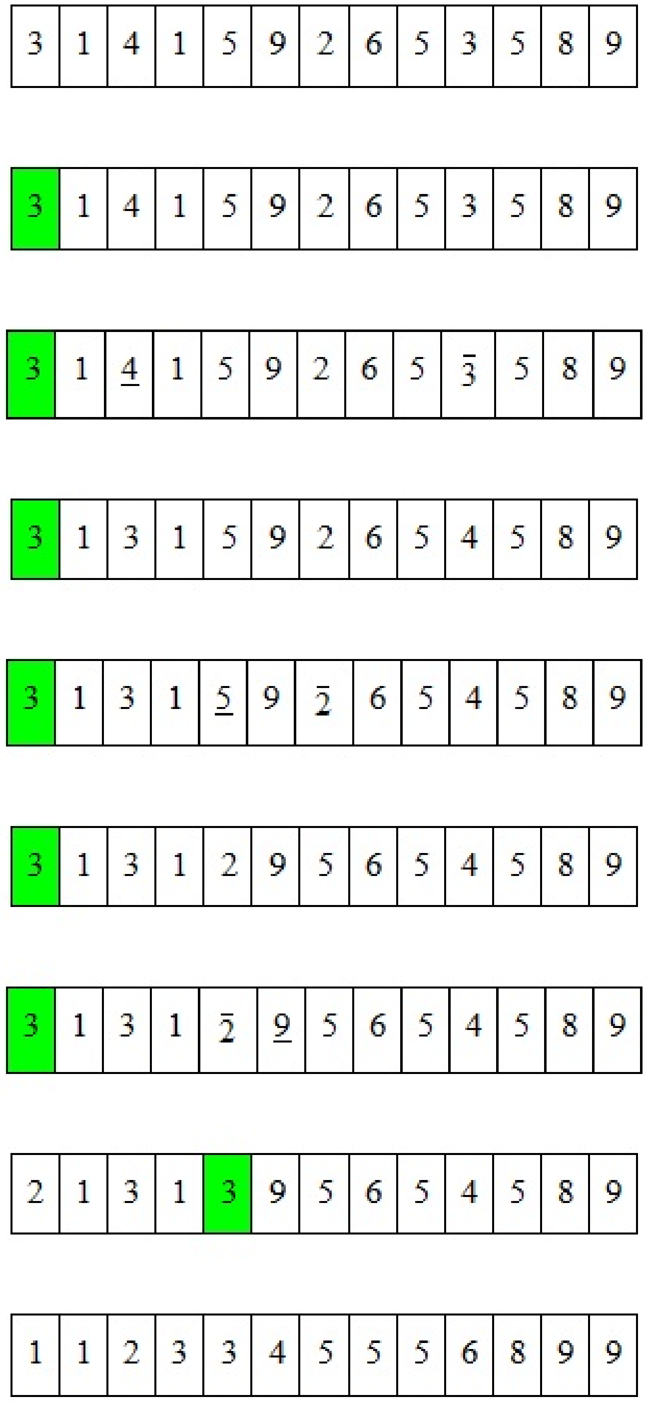
L2 = { y in L : y > x }

L3 = { y in L : y = x }

quicksort(L1)

```
quicksort(L2)

return concatenation of L1, L3, and L2

}

}
```

Hình vẽ sau cho thấy sự làm việc của pivot và quicksort.



Hình 4.2

Quicksort sẽ không hiệu quả nếu sử dụng việc gọi đệ quy của các bài toán con mà không chú ý đến sự cân bằng kích thước của chúng. Tình huống xấu nhất là khi T đã được sắp trước mà gọi quicksort và thời gian dùng quicksort để sắp là ((n2).

Gọi t(n) là thời gian trung bình dùng quicksort để sắp mảng n phần tử T[1..n]. l là giá trị trả về khi gọi pivot(T[1..n],l). Theo pivot() thì l nằm giữa 1 (n và xác suất là 1/n. Thời gian để tìm vật trung tâm g(n) là tuyến tính. Thời gian để dùng đệ qui để sắp xếp hai mảng con kích thước (l-1) và (n-l) tương ứng là t(n-1) và t(n-l). Như vậy với n đủ lớn ta có:

$$t(n) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(g(n) + t(n-1) + t(n-l)\right)$$

Hay rõ ràng hơn ta chọn n0 là giá trị đủ lớn để sử dụng công thức trên. Nghĩa là nếu n < n0 thì ta dùng sắp xếp chèn. Khi đó gọi d là hằng số sao cho g(n) ≤ dn với $n>n_0$.

$$\text{Ta có } t(n) \leq dn + \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\left(g(n) + t(n-1) + t(n-l)\right) \quad \text{với } n>n0$$

$$\leq dn + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} t(k) \quad \text{với } n>n_0 \qquad (2.4)$$

Với công thức kiểu như 2.4 quả là khó phân tích độ phức tạp. Ta dự đoán nó tương tự mergesort và hi vọng nó là như vậy tức là vào cỡ O(nlogn).

Thật vậy ta có định lý sau:

Định lý: Quicksort cần nlogn thời gian để sắp xếp n phần tử trong trường hợp trung bình.

Chứng minh

Gọi t(n) là thời gian cần thiết để sắp n phần tử trong trường hợp trung bình.

a, n_0 là các hằng số giống như công thức 2.4

Ta chứng minh t(n) = cnlogn với mọi n ≥ 2. với c là hằng số.

Dùng phương pháp qui nạp để c/m:

- Với mọi n nguyên dương: (2 ≤ n ≤ n0)

Dễ thấy t(n) ≤ cnlogn

Chọn c ≥ $\frac{t(n)}{n\log n}, \forall n;$ 2 ≤ n ≤ n0) (2.5)

- Bước qui nạp

Giả thiết rằng: t(k) ≤ cklogk với mọi 2≤ k < n

ta chỉ ra c sao cho t(n) ≤ cnlogn

Lấy a = t(0) +t(1)

Từ 7.2 ta có

$$t(n) = dn + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} t(k)$$

$$t(n) = dn + \frac{2}{n}\left(t(0) + t(1) + \sum_{k=0}^{n-1} t(k)\right)$$

Theo giả thiết qui nạp : t(k) = cklogk

$$\Rightarrow t(n) \le dn + \frac{2a}{n} + \frac{2}{n}\left(\sum_{k=2}^{n-1} ck\log k\right)$$

$$\le dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n}\int_{k=2}^{n} x\log x dx$$

$$= dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n}\left(\frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_{x=2}^{n}$$

$$\le dn + \frac{2a}{n} + \frac{2c}{n}\left(\frac{n^2\log n}{2} - \frac{n^2}{4}\right)$$

$$= dn + \frac{2a}{n} + cn\log n - \frac{cn}{2}$$

$$= cn\log n - \left(\frac{c}{2} - d - \frac{2a}{n^2}\right)n$$

t(n) = cnlogn với điều kiện là $\left(\frac{c}{2} - d - \frac{2a}{n^2}\right) \geq 0$, hay $c \geq 2d + 4a/n2$

Từ đó chúng ta chỉ xem xét với những $n > n_0$ thoả mãn:

$$c = 2d + \frac{4a}{(n_0+1)^2} \qquad (2.6)$$

Kết hợp cả 2 điều kiện trong (2.5) và (2.6) ta có

$$c = \max\left(2d + \frac{4(t(0)+t(1))}{(n_0+1)^2}, \max\left\{\frac{t(n)}{n\log n}, 2 \leq n \leq n_0\right\}\right) \qquad (2.7)$$

Hay ta có t(n) ≤ cnlogn với mọi n ≥ 2, và như vậy định lý được chứng minh.

Như vậy quicksort có thể sắp xếp 1 mảng n phần tử khác nhau trong trường hợp trung bình là O(nlogn). Câu hỏi đặt ra là liệu có thể sửa đổi quicksort để nó sắp xếp với thời gian O(nlogn) trong trương hợp xấu nhất hay không. Câu trả lời là có thể!!!. Tuy nhiên nếu việc tìm phần tử ở giữa của T[i..j] là tuyến tính và lấy nó làm vật trung tâm (pivot) (Finding the median) thì quicksort cũng cần O(n2) để sắp xếp n phần tử trong trường hợp xấu nhất (khi tất cả các phần tử của mảng cần sắp là bằng nhau).

Bài toán hoán đổi

Bài toán

a[1..n] là một mảng với phần gồm n phần tử. Ta cần chuyển m phần tử đầu tiên của mảng với phần còn lại của mảng (n-m phân tử) mà không dùng một mảng phụ .

Chẳng n, với n = 8 a[8] = (1, 2, 3, 4,5, 6, 7, 8)

Nếu m = 3, thì kết quả là : (4, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3)

Nếu m = 5, thì kết quả là : (6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, 5)

Nếu m = 4, thì kết quả là : (5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4)

Phân tích thuật toán

Nếu m = n- m : Hoán đổi các phần tử của 2 nửa mảng có độ độ dài bằng nhau :

Nếu m <> n-m :

- Nếu m < n - m : hoán đổi m phần tử đầu với m phân tử cuối của phần còn lại. Sau đó trong mảng a[1..n-m] ta chỉ cần hoán đổi m phần tử đầu với phần còn lại.

- Nếu m > n - m : hoán đổi n-m phần tử đầu tiên với n-m phần tử sau. Sau đó trong mảng a[n-m+1 . .n] ta hoán đổi n-m phần tử cuối mảng với các phần tử của phần đầu.

Như vậy, bằng cách áp dụng phương pháp chia để trị, ta chia bài toán thành 2 bài toán con:

- Bài toán thứ nhất là hoán đổi hai mảng con có độ dài bằng nhau, cụ thể là phần tử đầu và cuối của mảng cho nhau bằng cách đổi chỗ từng cặp phần tử tương ứng.

- Bài toán thứ hai cùng dạng với bài toán đã cho nhưng kích thước nhỏ hơn, nên có thể gọi thuật toán đệ qui để giải và quá trình gọi đệ qui sẽ dừng khi đạt tới sự hoán đổi 2 phần có độ dài bằng nhau

Thuật toán

// Hoán đổi m phần tử

Input : a[1..n], m. (m <=n)

Output : a[1..n] với tính chất m phần tử đầu mảng a (mảng nhập) nằm cuối mảng kết quả, n-m phần tử cuối mảng nhập nằm ở đầu mảng kết quả.

Độ phức tạp thuật toán

Kí hiệu : T(i, j) là số phần tử cần đổi chỗ để hoán đổi dãy i phần tử và dãy j phần tử, ta có công thức truy hồi sau:

$$T(i,j)=\begin{cases} i;\ \textit{nếu}\ i=j \\ j+T(i-j,j);\ \textit{nếu}\ i>j \\ i+T(i,j-i);\ \textit{nếu}\ i<j \end{cases}$$

=> T(i,j) = i + j – UCLN(i,j) (Ước chung lớn nhất của i, j)

Bài 5: Cơ bản về thuật toán Quay Lui (Back Tracking)

Sơ đồ chung của thuật toán quay lui

Ý tưởng

Nét đặc trưng của phương pháp quay lui là các bước hướng tới lời giải cuối cùng của bài toán hoàn toàn được làm thử

Tại mỗi bước, nếu có một lựa chọn thì ghi nhận lại lựa chọn này và tiến hành các bước thử tiếp theo. Còn ngược lại không có lựa chọn nào thích hợp thì quay lại bước thử trước, xóa bỏ sự ghi nhận và quay lại chu trình thử với các lựa chọn còn lại

Hành động này được gọi là quay lui, thuật toán thể hiện phương pháp này gọi là thuật toán quay lui

Điểm quan trọng của thuật toán là phải ghi nhớ tại mỗi bước đi qua để tránh trùng lặp khi quay lui. Dễ thấy là các thông tin này cần được lưu trữ vào một ngăn xếp, nên thuật toán thể hiện ý thiết kế một cách đệ quy.

Sơ đồ chung của thuật toán

Lời giải của bài toán thường biểu diễn bằng một vec tơ gồm n thành phần $x = (x_1,...,x_n)$ phải thỏa mãn các điều kiện nào đó. Để chỉ ra lời giải x, ta phải xây dựng dần các lời giải x_i

- Tại mỗi bước i:

+ Đã xây dựng xong các thành phần x1,.., xi-1

+ Xây dựng thành phần x_i bằng cách lần lượt thử tất cả các khả năng mà x_i

có thể chọn :

Nếu một khả năng j nào đó phù hợp cho xi thì xác định xi theo khả năng j. Thường phải có thêm thao tác ghi nhận trạng thái mới của bài toán để hỗ trợ cho bước quay lui. Nếu i = n thì ta có được một lời giải, ngược lại thì tiến hành bước i+1 để xác định x_{i+1} .

Nếu không có một khả năng nào chấp nhận được cho xi thì ta lùi lại bước trước (bước 1-1) để xác định lại thành phần xi-1.

Để đơn giản, ta giả định các khả năng chọn lựa cho các xi tại mỗi bước là như nhau, do đó ta phải có thêm một thao tác kiểm tra khả năng j nào là chấp nhận được cho x_i.

Mô hình của phương pháp quay lui có thể viết bằng thủ tục sau, với n là số bước cần phải thực hiện, k là số khả năng mà xi có thể chọn lựa.

Try(i)

for (j = 1 → k)

If (x_i chấp nhận được khả năng j)

{

Xác định x_i theo khả năng j;

Ghi nhận trạng thái mới;

if(i < n)

Try(i+1);

else

Ghi nhận nghiệm;

Trả lại trạng thái cũ của bài toán;

}

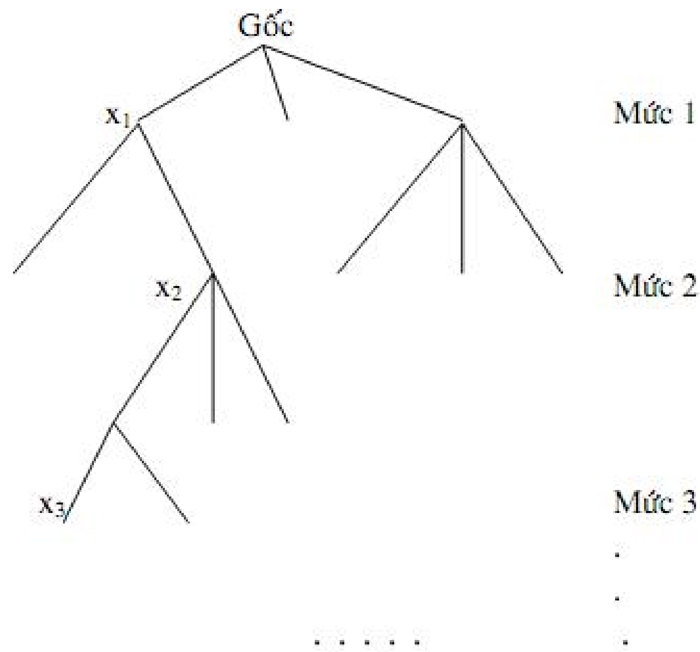
Ghi chú:

Tìm nghiệm bằng phương pháp quay lui có thể chuyển về việc tìm kiếm trên cây không gian các trạng thái, với cây được xây dựng từng mức như sau :

- Các con của gốc (thuộc mức 1) là khả năng có thể chọn cho x_1
- Giả sử x_{i-1} là một nút ở mức thứ i-1, khi đó các nút con của x_{i-1} là các khả năng mà xi có thể chọn, một khi đã tìm được các thành phần x_1,.., x_{i-1}.

Như vậy, mỗi nút xi của cây biểu diễn một lời giải bộ phận, đó là các nút nằm trên đường đi từ gốc đến nút đó

Ta có thể nói việc tìm kiếm nghiệm bằng phương pháp quay lui chính là tìm kiếm theo chiều sâu trên cây không gian các trạng thái.



Chúng ta sẽ nghiên cứu một số các ví dụ minh họa cho thuật toán quay lui

Bài toán ngựa đi tuần

Bài toán

Cho bàn cờ có n x n ô . Một con ngựa được phép đi theo luật cờ vua, đầu tiên được đặt ở ô có tọa độ x0 , y0. Vấn đề là hãy chỉ ra các hành trình (nếu có) của ngựa – Đó là ngựa đi qua tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô đi qua đúng một lần .

Phân tích thiết kế thuật toán

Cách giải quyết rõ ràng là xét xem có thể thực hiện một nước đi tiếp nữa hay không. Sơ đồ đầu tiên có thể phát thảo như sau:

Try(i)

for (j = 1 → k)

If (x_i chấp nhận được khả năng k)

{

Xác định x_i theo khả năng của k;

Ghi nhận trạng thái mới;

If ($i<n^2$)

Try(i+1);

Else

Ghi nhận nghiệm;

Trả lại trạng thái cũ của bài toán;

}

Để mô tả chi tiết thuật toán, ta quy định về kiểu dữ liệu lưu trữ và các thao tác:

- Biểu diễn bàn cờ .
- Các khả năng chọn lựa cho xi ?
- Cách thức xác định xi theo j.

- Cách thức ghi trạng thái mới, trả về trạng thái cũ
- Ghi nhận nghiệm….

* Ta sẽ biểu diễn bàn cờ bằng 1 ma trận vuông cấp n : int h[n][n]; Sở dĩ thể hiện mỗi ô cờ bằng 1 số nguyên thay cho giá trị boole (để đánh dấu ô đã được đi qua chưa) là vì ta muốn lần dò theo quá trình dịch chuyển của con ngựa

Ta qui ước như sau :

h[x][y] = 0 ≡ Ô <x,y> ngựa chưa đi qua;

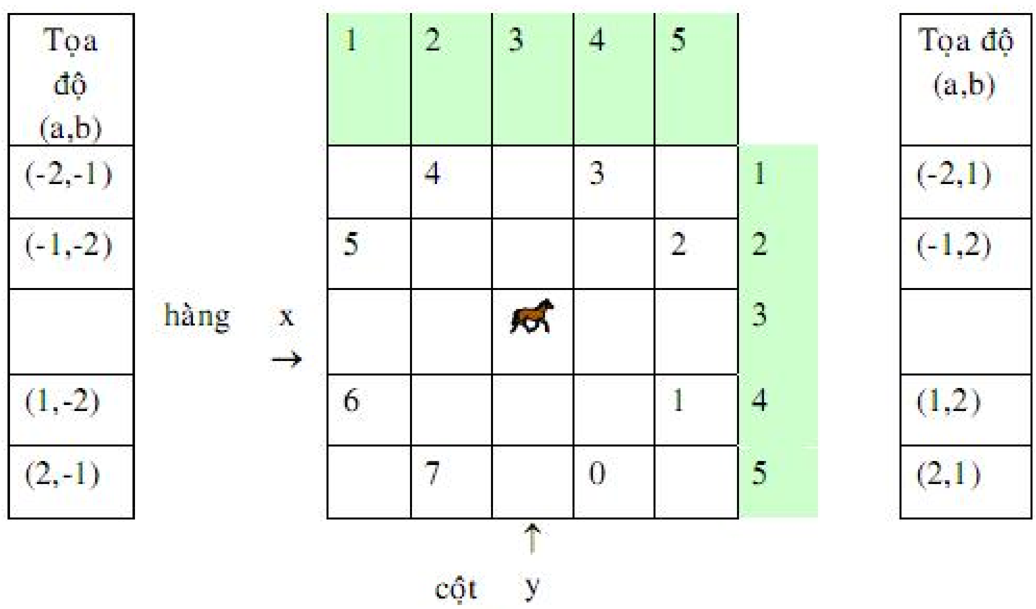
h[x][y] = I ≡ Ô <x, y> ngựa đã đi qua ở bước thứ i ($1 \le i \le n^2$).

* Các khả năng chon lựa cho x_i ? Đó chính là các nước đi của ngựa mà x_i có thể

chấp nhận được.

Với cặp tọa độ bắt đầu <x,y> như trong hình vẽ, có tất cả 8 ô <u,v> mà

con ngựa có thể đi đến. Giả sử chúng được đánh số từ 0 đến 7 như hình sau:



(8 bước đi có thể có của con ngựa)

Một phương pháp đơn giản để có được u, v từ x, y là ta dùng 2 mảng a và b lưu trữ các sai biệt về tọa độ. Nếu ta dùng một chỉ số k để đánh số "bước đi tiếp " thì chi tiết đó được thể hiện bởi : u = x +a[k]; v = y + b[k]; k = 0,7 .

Điều kiện "chấp nhận được" có thể được biểu diễn kết hợp của các điều kiện:

- Ô mới phải thuộc bàn cờ ($1 \leq u \leq n$ và $1 \leq v \leq n$) và chưa đi qua ô đó,

nghĩa là h[u,v] = 0;

* Để ghi nhận nước đi hợp lệ ở bước i, ta gán h[u][v] = i; và để hủy một nước đi thì

ta gán h[u][v] = 0.

* Ma trận h ghi nhận kết quả nghiệm. Nếu có <x,y> sao cho h<x,y> = 0 thì đó không phải là lời giải của bài toán , còn ngược là h chứa đường đi của ngựa. Vậy thuật toán có thể mô tả như sau :

Input n, //Kích thước bàn cờ

x, y;//Toạ độ xuất phát ở bước i

Output h;

Mô tả :

```
Try(i, x, y)

for(k = 0; k <= 7; k++)

{

u = x + a[k];

v = y + b[k];

if (1 <= u ,v <= n &&h[u][v] == 0)

{

h[u][v] = i;

if (i < n*n) Try(i+1,u,v);

else

xuat_h(); // In ma trận h
```

}

h[u][v] = 0;

}

}

Thủ tục này xuất tất cả các lời giải, nếu có.

Thủ tục đệ qui được khởi động bằng một lệnh gọi các tọa độ đầu x_0, y_0 là tham số. Ô xuất phát có trị 1, còn các ô khác được đánh dấu còn trống.

H[x_0][y_0] = 1; Try(2,x , y);

Các mảng a và b có thể khởi đầu như sau :

int a[8]= {2,1,-1,-2,-2,-1,1,2};

int b[8]= {1,2,2,1,-1,-2,-2,-1};

* Các lời giải sau là một số kết quả cho từ thuật toán trên :

	n=5	x=1	y=1	
1	6	15	10	21
14	9	20	5	16
19	2	7	22	11
8	13	24	17	4
25	18	3	12	23

	n=6	x=2	y=3		
36	17	6	29	8	11
19	30	1	10	5	28
16	35	18	7	12	9
23	20	31	2	27	4
34	15	22	25	32	13
21	24	33	14	3	26

* Với n = 5, các tọa độ xuất phát sau không có lời giải : (2,3), (3,2)...

Bài toán 8 quân hậu

Bài toán

Chúng ta cần đặt 8 con hậu vào bàn cờ 8 * 8 sao cho chúng không tấn công nhau, tức là không có cặp con hậu nào nằm cùng hàng, cùng cột, cùng đường chéo.

Bài toán này là một ví dụ nổi tiếng về việc dùng các phương pháp thử và sai và phương pháp quay lui.

Phân tích và thiết kế thuật toán

Mấu chốt của thuật toán rõ ràng là xét xem có thể đặt quân hậu tiếp theo như thế nào. Theo luật cờ vua, một quân hậu có thể ăn các quân khác nếu nằm trên cùng 1 đường, đường này có thể là :

- Hàng,

- Cột,

- Các đường chéo (đi qua tọa độ vị trí của hậu).

Suy ra rằng mỗi hàng chỉ có thể chứa 1 và chỉ 1 quân hậu. Nên việc chọn vị trí cho quân hậu thứ i có thể giới hạn được ở hàng thứ i. Như thế tham số i trở thành chỉ hàng, và quá trình chọn vị trí cho quân hậu tiến hành trên toàn giá trị có thể có của các cột j.

Ta quy ước :

x[i] // Chỉ quân hậu thứ i : nằm ở hàng i.

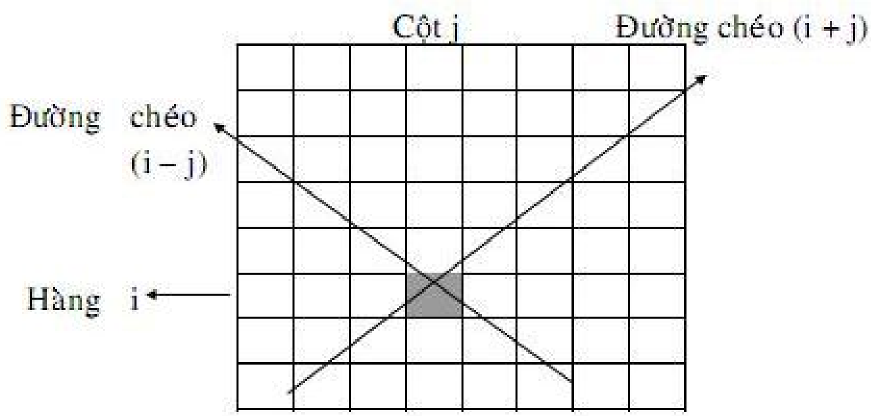
x[i] = j // quân hậu thứ i đặt ở cột j;

Để quân hậu i (trên hàng i) chấp nhận cột j thì cột j và 2 đường chéo qua ô <i,j> phải còn trống (tức là không có quân hậu khác chiếm lĩnh)

Lưu ý rằng trong 2 đường chéo :

- Đường chéo ngược (vuông góc với đường chéo chính) : tất cả các ô đều có tổng 2 tọa độ i và j là hằng số;

- Đường chéo thuận (song song với đường chéo chính) : gồm tất cả các ô(i,j) mà có hiệu các tọa độ (i-j) là hằng số.



Do đó ta sẽ chọn các mảng Boole 1 chiều để biểu diễn các trạng thái này :

a[j] = 1 : Có nghĩa là không có quân hậu nào ở cột.

b[i+j] = 1 : Có nghĩa là không có quân hậu nào ở đường chéo ngược (i+j) .

c[i -j] = 1 : Có nghĩa là không có quân hậu nào ở đường chéo thuận (i- j) .

Vì :

$1 \le i,j \le 8 \rightarrow 2 \le i+j \le 16$ Và $-7 \le i - j \le 7$.

Nên ta có thể khai báo :

int x[8],

a[8],

b[15],

c[15];

Với các dữ liệu đã cho, thì lệnh đặt quân hậu sẽ thể hiện bởi :

x[i] = j; // đặt quân hậu thứ i trên cột j.

a[j] = 0;//Khi đặt hậu tại cột j , thì cột j không còn trống nữa

b[i+ j] = 0;//Các đường chéo tương ứng cũng không còn c[i - j] = 0;//trống nữa .

Còn lệnh Dời quân hậu là :

//Làm cho hàng i và các đường chéo tương ứng trở thành trống

a[j]= 1;

b[i+ j] = 1;

c[i - j] = 1;

Còn điều kiện an toàn là ô có tọa độ (i, j) nằm ở hàng và các đường chéo chưa bị chiếm (được thể hiện bằng giá trị True). Do đó, có thể được thể hiện bởi biểu thức logic : a[ji] && b[i + j] && c[i - j]

Try (i)

{

for (j = 1; j <= 8; j++)

if (a[j] && b[i+j] && c i[-j])

{

x[i] = j; a[j] = 0; b[i+j] = 0;

c[i-j] = 0;

if (i < 8)

try (i+1);

else

Xuất(x);

/* Sau khi in 1 lời giải xong, trả lại tình trạng ban đầu còn trống cho hàng a[j], đường chéo i+j và đường chéo i-j, để tìm lời giải khác */

a[j] = 1;

b[i+j] = 1;

c[i-j] = 1;

}

}

Ghi chú :

Thuật toán này tìm được tất cả 92 lời giải. Thực ra là chỉ có 12 lời giải khác nhau thật sự, đó là vì thuật toán không ghi nhận tính đối xứng.

Bài toán tìm kiếm đường đi trên đồ thị

G = (V, U) là đơn đồ thị (có hướng hoặc vô hướng). V = {1,. ., n} là tập các đỉnh, U là tập cạnh (cung). Với s, t € V, tìm tất cả các đường đi từ s đến t.

Các thuật toán tìm kiếm cơ bản :

Thuật toán DFS : Tìm kiếm theo chiều sâu.

Thuật toán BFS : Tìm kiếm theo chiều rộng.

Thuật toán DFS (Depth First Search)

Ý tưởng

Thuật toán DFS tiến hành tìm kiếm trong đồ thị theo chiều sâu. Thuật toán thực hiện việc thăm tất cả các đỉnh có thể đạt được cho tới đỉnh t từ đỉnh s cho trước. Đỉnh được thăm càng muộn sẽ càng sớm được duyệt xong (cơ chế LIFO -Vào Sau Ra Trước). Nên thuật toán có thể tổ chức bằng một thủ tục đệ quy quay lui

Mô tả thuật toán

Input G = (V,U), s, t

Output Tất cả các đường đi từ s đến t (nếu có). DFS (int s) ?

for (u = 1; u <= n; u++)

{

if (chấp nhận được)

{

Ghi nhận nó;

if (u ≠ t) DFS(u);

else In đường đi;

bỏ việc ghi nhận;

}

}

Thuật toán BFS (Breadth First Search)

Ý tưởng

Thuật toán BFS tiến hành tìm kiếm trên đồ thị theo chiều rộng. Thuật toán thực hiện việc thăm tất cả các đỉnh có thể đạt được cho tới đỉnh t từ đỉnh s cho trước theo từng mức kề. Đỉnh được thăm càng sớm thì sẽ càng sớm được duyệt xong (cơ chế FIFO - Vào Trước Ra Trước).

Mô tả thuật toán

Input G = (V,E), s, t € V;

Output

Đường đi từ s đến t.

Mô tả :

\- . . .

Thuật toán có không quá n bước lặp; một trong hai trường hợp sau xảy ra :

\- Nếu với mọi i, t ? Ai : không có đường đi từ s đến t;

\- Ngược lại, t ? A(m) với m nào đó. Khi đó tồn tại đường đi từ s tới t, và đó là

một đường đi ngắn nhất từ s đến t.

Trong trường hợp này, ta xác định được các đỉnh trên đường đi bằng cách

quay ngược lại từ t đến các đỉnh trước t trong từng các tập trước cho đến khi gặp s.

Minh hoạ :

Cho đơn đồ thị có hướng :

Một số bài toán khác

Bài toán liệt kê các dãy nhị phân độ dài n

Bài toán:

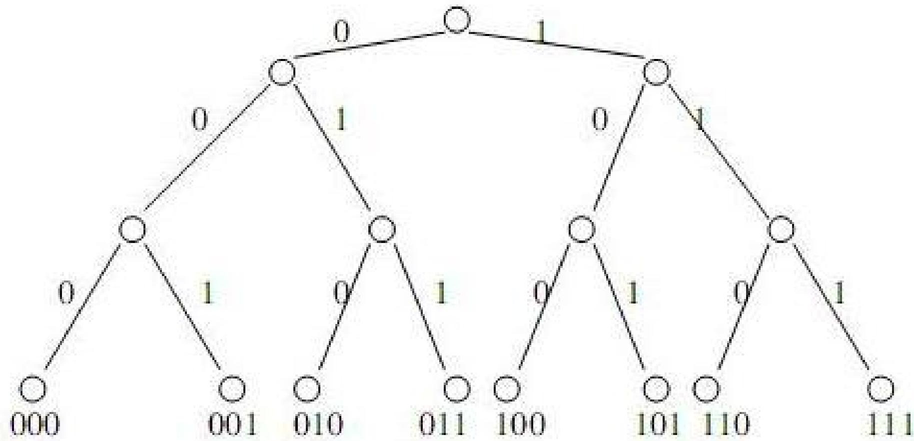
Liệt kê các dãy có chiều dài n dưới dạng $x_1x_2...x_n$, trong đó xi €{ 0,1 }.

Phân tích, thiết kế thuật toán:

Ta có thể sử dụng sơ đồ tìm tất cả các lời giải của bài toán. Hàm Try(i) xác định xi, trong đó xi chỉ có 1 trong 2 giá trị là 0 hay 1. Các giá trị này mặc nhiên được chấp nhận mà không cần phải thoả mãn điều kiện gì. Nên Hàm try(i) có thể viết như sau :

```
Try ( i) ≡

{

for (j = 0; j <= 1; j++)

{

x[i] = j;

if (i < n )

Try (i+1);

else

Xuất(x);

}

}
```

Cây không gian các trạng thái của bài toán có thể mô tả bởi



Bài toán liệt kê các hoán vị

Bài toán:

Liệt kê hoán vị của n số nguyên dương đầu tiên

Phân tích, thiết kế thuật toán:

Ta biểu diễn các hoán vị dưới dạng $a_1 \ldots a_n$; a_i €{1,..,n} và $a_i \neq a_j$ nếu $i \neq j$. Với mọi i, a_i chấp nhận giá trị j nếu j chưa được sử dụng, và vì vậy ta cần ghi nhớ j đã được sử dụng hay chưa khi quay lui. Để làm điều này ta dùng một dãy các biến logic b_j với quy ước :

$$\forall j = \overline{1,n} : b_j = \begin{cases} 1; \textit{nếu } j \textit{ chưa sử dụng} \\ 0; \textit{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Sau khi gán j cho ai , ta cần ghi nhớ cho bj (bj = 0) và phải trả lại trạng thái cũ cho bj (bj = True) khi thực hiện việc in xong một hoán vị. Ta chú ý rằng dãy các biến bj sẽ được khởi động bằng 1

Thuật toán có thể viết như sau :

Try(i)

{

for (j = 1; j <= n; j++)

if (b[j])

{

a[i] = j;

b[j] = 0; // Ghi nhận trạng thái mới

if (i < n)

Try(i+1);

else

Xuất();

b[j] = True; // Trả lại trạng thái cũ

}

}

Bài toán liệt kế tổ hợp

Bài toán:

Liệt kê các tổ hợp chập k của n phần tử

Phân tích, thiết kế thuật toán:

Ta sẽ biểu diễn tổ hợp dưới dạng x1...xk ; Trong đó :

$1 <= x_1, x_2, \ldots, x_n <= n$

Ta nhận xét rằng với mọi j €{1,..n}: x_i chấp nhận j ≡ j €{ c_{i-1}+1, . ., n-k+i}.Các giá trị j thỏa điều kiện trên mặc nhiên được chấp nhận, nên ta không cần dùng các biến booole để ghi nhớ nữa.

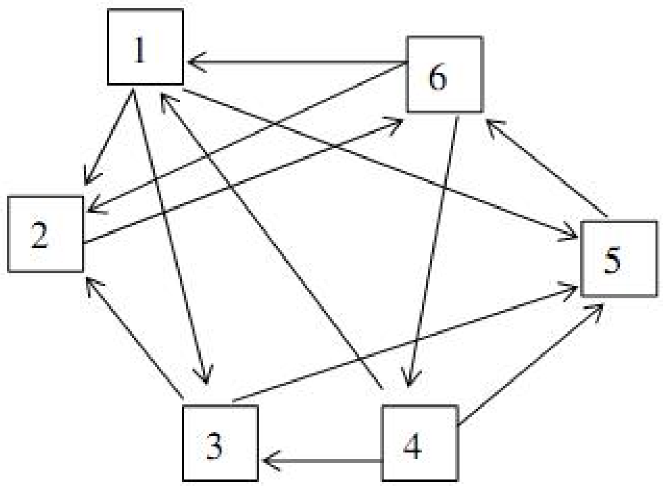
Thuật toán có thể viết như sau :

Try(i)

for (j = 1; j <= n ; j++)

if(x[i-1] + 1 <= j <= n - k + i)

```
{
x[i] = j;
if (i < k) Try(i+1);
else
Xuất(x);
}
```



Tìm đường đi từ đỉnh (1) đến đỉnh (4) : A(0) = {1};

A(1) = {2,3,5} A(2) = {6} A(3) = {4}

Đường đi ngắn nhất tìm được là 4 ? 6 ? 5 ? 1 , có chiều dài là 3.

Bài 6: Cơ bản về thuật toán nhánh cận và các bài toán

Sơ đồ chung của thuật toán

Ý tưởng:

Với các bài toán tìm phương án tối ưu, nếu chúng ta xét hết tất cả các phương án thì mất rất nhiều thời gian, nhưng nếu sử dụng phương pháp tham ăn thì phương án tìm được chưa hẳn đã là phương án tối ưu. Nhánh cận là kỹ thuật xây dựng cây tìm kiếm phương án tối ưu, nhưng không xây dựng toàn bộ cây mà sử dụng giá trị cận để hạn chế bớt các nhánh. Cây tìm kiếm phương án có nút gốc biểu diễn cho tập tất cả các phương án có thể có, mỗi nút lá biểu diễn cho một phương án nào đó. Nút n có các nút con tương ứng với các khả năng có thể lựa chọn tập phương án xuất phát từ n. Kỹ thuật này gọi là phân nhánh.Ý tưởng chính của nó như sau :

Trong quá trình duyệt ta luôn giữ lại một phương án mẫu (có thể xem là lời giải tối ưu cục bộ - chẳng hạn có giá nhỏ nhất tại thời điểm đó). Đánh giá nhánh cận là phương pháp tính giá của phương án ngay trong quá trình xây dựng các thành phần của phương án theo hướng đang xây dựng có thể tốt hơn phương án mẫu hay không. Nếu không ta lựa chọn theo hướng khác.

Với mỗi nút trên cây ta sẽ xác định một giá trị cận. Giá trị cận là một giá trị gần với giá của các phương án. Với bài toán tìm **min** ta sẽ xác định **cận dưới** còn với bài toán tìm **max** ta sẽ xác định **cận trên**. Cận dưới là giá trị nhỏ hơn hoặc bằng giá của phương án, ngược lại cận trên là giá trị lớn hơn hoặc bằng giá của phương án.

Mô hình chung

Giả sử bài toán tối ưu cho là :

Tìm Min{f(x) : x ? D};

Tìm Min{f(x) : x $\in$ D};

Với $X = \left\{ a = (a_1, \cdots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} A_i : P(x) \right\}$; $|A_i| < \infty; \forall i = \overline{1,n}$. P là một tính chất trên $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Nghiệm của bài toán nếu có sẽ được biểu diễn dưới dạng :x = (x_1,...,x_n). Trong quá trình liệt kê theo phương pháp quay lui, ta xây dựng dần các thành phần của nghiệm.

Một bộ phận i thành phần (x_1, .., x_i) sẽ gọi là một lời giải (phương án) bộ phận cấp i. Ta gọi X_i là tập các lời giải bộ phận cấp i, mọi i= 1, n .

Đánh giá cận là tìm một hàm g xác định trên các Xi sao cho :

g (x1,…, xi) ≤ Min {f(a) : a = (a1,.., an) € X , xi = ai , mọi i= 1, n .

Thủ tục quay lui sửa lại thành thủ tục nhánh cận như sau :

Try (i)

for (j = 1 -> n)

if(Chấp nhận được)

{

Xác định xi theo j;

Ghi nhận trạng thái mới;

If (i == n)

Cập nhật lời giải tối ưu ;

else

{

Xác định cận g (x_1,…,x_i)

If g (x_1,…,x_i) ≤ f^*

Try (i+1);

}

// Trả bài toán về trạng thái cũ

Bài toán người du lịch

Bài toán:

Một người du lịch muốn tham quan n thành phố T1,.., Tn . Xuất phát từ một thành phố nào đóngười du lịch muốn đến tất cả các thành phố còn lại, mỗi thành phố đi qua đúng 1 lần rồi quay trở lại thành phố xuất phát.

Gọi C_{ij} là chi phí đi từ thành phố Ti đến thành phố Tj. Hãy tìm một hành trình thỏa yêu cầu bài toán sao cho chi phí là nhỏ nhất.

Phân tích, thiết kế thuật toán

Gọi ∏ là một hoán vị của {1,.., n} thì một thành phố thỏa mãn yêu cầu bài toán có dạng : T∏(1) → T∏(2) → … → T∏(n) .

Nếu ta cố định một thành phố xuất phát, chẳng hạn T1, thì có (n-1)! Hành trình

Bài toán chuyển về dạng :

Tìm Min{$f(a_2,.., a_n)$: $(a_2,.., a_n)$ là hoán vị của {2,..,n}}.

Với $f(a1,…, an) = C_{1, a2} + C_{a2,a3}+…+ C_{an-1,an} + C_{an,1}$

Cách giải bài toán sẽ kết hợp đánh giá nhánh cận trong quá trình liệt kê phương án của thuật toán quay lui.

Thiết kế thuật toán:

Input C = (Cij)

Output - x* = (x1,...,xn) // Hành trình tối ưu

- f* = f(x*) // Giá trị tối ưu

Try (i)

for (j = 1 -> n)

if(Chấp nhận được)

{

Xác định x_i theo j;

Ghi nhận trạng thái mới;

if(i == n)

Cập nhật lời giải tối ưu;

else

{

Xác định cận $g(x_1,.., x_i)$

If $g(x_1,.., x_i) \leq f^*$)

Try (i+1);

}

// Trả bài toán về trạng thái cũ

}

o Nếu ta cố định xuất phát tư T1, ta duyệt vòng lặp từ j = 2.

o Đánh giá nhánh cận :

Đặt : CMin = Min{Cij : i, j € {1,..,n}

Giả sử vào bước i ta tìm được lời giải bộ phận cấp i là (x1,..,xi), tức là đã đi

qua đoạn đường T1 -> T2 -> . . . ->Ti , tương ứng với chi phí :

$S_i = C_{1,\, x2} + C_{x2,x3} + \ldots + C_{xn-1,xn} + C_{xn,1}$

Để phát triển hành trình bộ phận này thành một hành trình đầy đủ, ta còn phải đi qua n-i+1 đoạn đường nữa, gồm n-i thành phố còn lại và đoạn quay lại T1. Do chi phí mỗi một trong n-i+1 đoạn còn lại không nhỏ hơn CMin, nên hàm đánh giá cận có thể xác định như sau :

$g (x_1 ,\ldots, x_i) = S_i + (n - i + 1)CMin$

o Điều kiện chấp nhận được của j là thành phố Tj chưa đi qua.

Ta dùng một mảng logic Daxet[] để biểu diễn trạng thài này

Daxet[j] = ? 1 ; T j đã được đi qua

0 ; T j chưa được đi qua

Mảng Daxet[ ] phải được bằng 0 tất cả.

o Xác định xi theo j bằng câu lệnh gán : xi = j

Cập nhật trạng thái mới : Daxet[j] = 1.

Cập nhật lại chi phí sau khi tìm được xi : S = S+ C

o Cập nhật lời giải tối ưu :

Tính chi phí hành trình vừa tìm được :

Tong = S + $C_{xn,1}$;

Nếu (Tong < f*) thì

Lgtu = x;

f* = Tong;

o Thao tác huỷ bỏ trạng thái : Daxet[j] = 0.

Trả lại chi phí cũ : S = S- C_{x-1xi}

Thủ tục nhánh cận viết lại như sau :

Try(i)

for (j = 2 -> n)

if(!Daxet[j])

{

x[i] = j; Daxet[j] = 1;

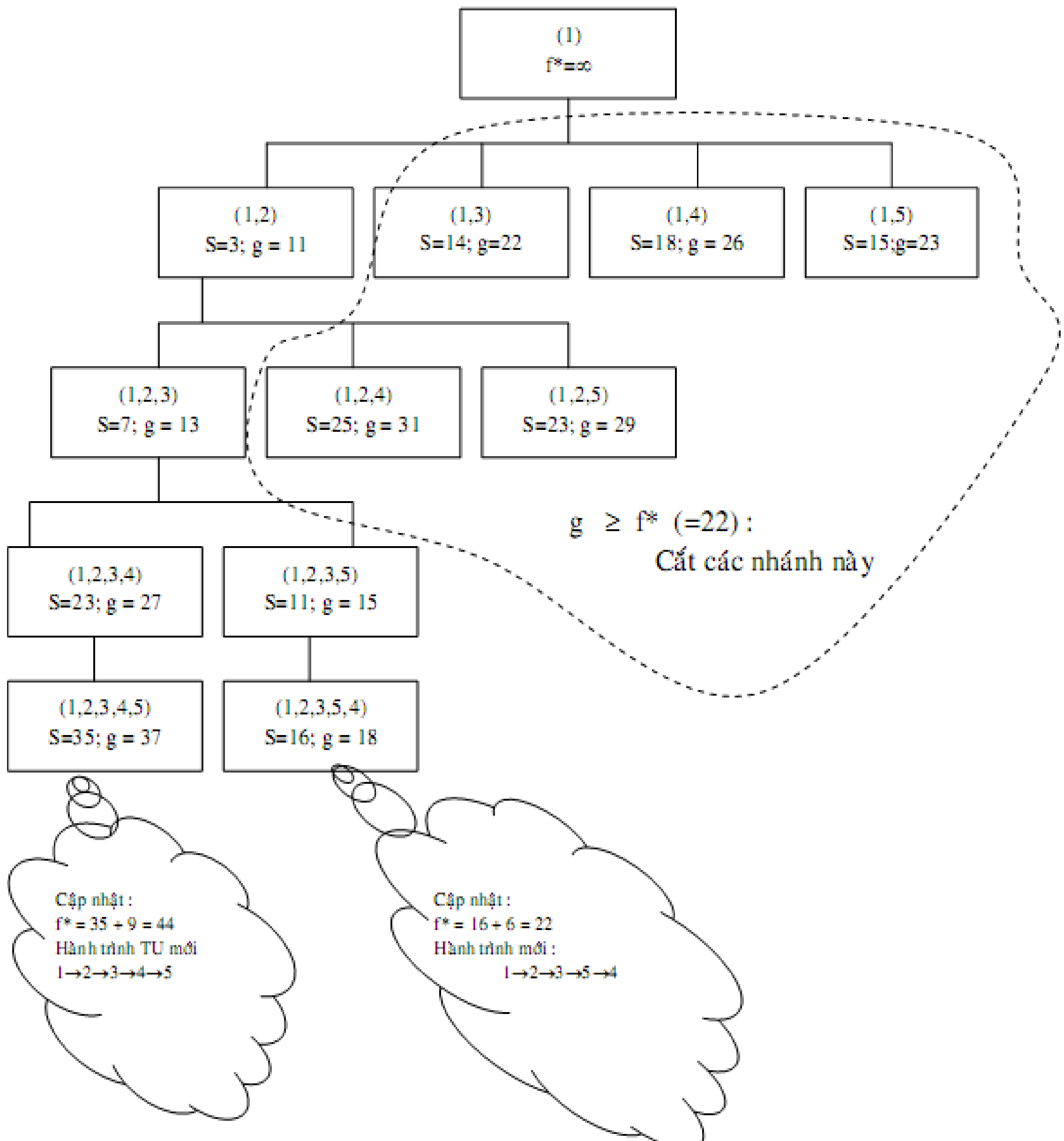
S = S + C[x[i-1]][x[i]];

```
if(i==n)
{
//Cap nhat toi uu
Tong = S + C[x[n]][x[1]];
if(Tong < f*)
{
Lgtu = x;
f* = Tong;
}
}
else
{
g = S + (n-i+1)*Cmin; //Danh gia can
if ( g < f*)
Try(i+1);
}
S = S - C[x[i-1]][x[i]];
Daxet[j] = 0;
}
```

Minh họa

Ma trận chi phí:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 14 & 18 & 15 \\ 3 & \infty & 4 & 22 & 20 \\ 17 & 9 & \infty & 16 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & \infty & 12 \\ 9 & 15 & 11 & 5 & \infty \end{bmatrix}$$



4. Cài đặt

Bài toán cái túi xách

Bài toán

Có n loại đồ vật, mỗi loại có số lượng không hạn chế. Đồ vật loại i, đặc

trưng bởi trọng lượng Wi và giá trị sử dụng Vi , với mọi i € {1,..,n}.

Cần chọn các vật này đặt vào một chiếc túi xách có giới hạn trọng lượng m, sao cho tổng giá trị sử dụng các vật được chọn là lớn nhất.

Phân tích và thiết kế thuật toán :

$$(u_1,\cdots,u_n) \mapsto f(u_1,\cdots,u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \;;(u_1,\cdots,u_n) \in D$$

Đặt : $D = \left\{ u = (u_1,\cdots,u_n) \in N^n : \sum_{i=1}^{n} u_i w_i \le m \right\}$

và : $f : D \to R^+$

Bài toán chiếc túi xách chuyển về bài toán sau :

$$\text{Tìm } x^* \in D : f^* = f(x^*) = \{ f(u) : u \in D \}$$

Cho nên ta sẽ kết hợp đánh giá nhánh cận trong quá trình liệt kê các lời giải theo phương pháp quay lui.

Mô hình ban đầu có thể sử dụng như sau :

Try(i)

for(j = 1 -> t)

if(Chấp nhận được)

{

Xác định xi theo j;

Ghi nhận trạng thái mới;

if(i==n)

Cập nhật lời giải tối ưu;

else

{

Xác định cận trên g;

if(g(x1,..., xi) <= f*)

Try(i+1);

}

Trả lại trạng thái cũ cho bài toán;

}

o Cách chọn vật :

$$\text{Xét mảng đơn giá : } Dg = \left(\frac{v_1}{w_1}, \cdots, \frac{v_n}{w_n} \right)$$

Ta chọn vật theo đơn giá giảm dần.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các loại vật cho theo thứ tự giảm dần của đơn giá.

o Đánh giá cận trên :

Giả sử đã tìm được lời giải bộ phận : (x1,…,xi)

$$S = \sum_{j=1}^{i} x_j v_j = S + x_j v_j.$$

Khi đó :

- Giá trị của túi xách thu được :

- Tương ứng với trọng lượng các vật đã được xếp vào chiếc túi :

$$m - TL = m - \sum_{j=1}^{i} x_j w_j \ .$$

$$TL = \sum_{j=1}^{i} x_j w_j = TL + x_i w_i \ .$$

- Do đó, giới hạn trọng lượng của chiếc túi còn lại là :

Ta thấy đây là một bài toán tìm max. Danh sách các đồ vật được sắp xếp **theo thứ tự giảm** của đơn giá để xét phân nhánh. 1. Nút gốc biểu diễn cho trạng thái ban đầu của ba lô, ở đó ta chưa chọn một vật nào. Tổng giá trị (TGT) được chọn TGT=0. Cận trên của nút gốc CT = W * Đơn giá lớn nhất. 2. Nút gốc sẽ có các nút con tương ứng với các khả năng chọn đồ vật có đơn giá lớn nhất. Với mỗi nút con ta tính lại các thông số: · TGT = TGT (cũ) + số đồ vật được chọn * giá trị mỗi vật. · W = W (cũ) - số đồ vật được chọn * trọng lượng mỗi vật. · CT = TGT + W (mới) * Đơn giá của vật sẽ xét kế tiếp.

3. Trong các nút con, ta sẽ **ưu tiên phân nhánh cho nút con nào có cận trên lớn hơn** trước. Các con của nút này tương ứng với các khả năng chọn đồ vật có đơn giá lớn tiếp theo. Với mỗi nút ta lại phải xác định lại các thông số TGT, W, CT theo công thức đã nói trong bước 2. 4. Lặp lại bước 3 với chú ý: đối với những nút có **cận trên nhỏ hơn hoặc bằng giá lớn nhất tạm thời** của một phương án đã được tìm thấy thì ta không cần phân nhánh cho nút đó nữa. 5. Nếu tất cả các nút đều đã được phân nhánh hoặc bị cắt bỏ thì phương án có giá lớn nhất là phương án cần tìm. **Ví dụ :** Với bài toán cái ba lô đã cho, sau khi tính đơn giá cho các đồ vật và sắp xếp các đồ vật theo thứ tự giảm dần của đơn giá ta được bảng sau.

Loại đồ vật	Trọng lượng	Giá trị	Đơn giá
b	10	25	2.5
a	15	30	2.0
d	4	6	1.5
c	2	2	1

Gọi x1, x2, x3, x4 là số lượng cần chọn tương ứng của các đồ vật b, a, d, c. Nút gốc A biểu diễn cho trạng thái ta chưa chọn bất cứ một đồ vật nào. Khi đó tổng giá trị TGT =0, trọng lượng của ba lô W=37 (theo đề ra) và cận trên CT = 37*2.5 = 92.5, trong đó 37 là W, 2.5 là đơn giá của đồ vật b. Với đồ vật b, ta có 4 khả năng: chọn 3 đồ vật b (X1=3), chọn 2 đồ vật b (X1=2), chọn 1 đồ vật b (X1=1) và không chọn đồ vật b (X1=0). Ứng với 4 khả năng này, ta phân nhánh cho nút gốc A thành 4 con B, C, D và E. Với nút con B, ta có TGT = 0+ 3*25 = 75, trong đó 3 là số vật b được chọn, 25 là giá trị của mỗi đồ vật b. W = 37- 3*10 = 7, trong đó 37 là trọnh lượng ban đầu của ba lô, 3 là số vật b được, 10 là trọng lượng mõi đồ vật b. CT = 75 + 7*2 = 89, trong đó 75 là TGT, 7 là trọng lượng còn lại của ba lô và 2 là đơn giá của đồ vật a. Tương tự ta tính được các thông số cho các nút C, D và E, trong đó cận trên tương ứng là 84, 79 và 74. Trong các nút B, C, D và E thì nút B có cận trên lớn nhất nên ta sẽ phân nhánh cho nút B trước với hy vọng sẽ có được phương án tốt từ hướng này. Từ nút B ta chỉ có một nút con F duy nhất ứng với X2=0 (do trọng lượng còn lại của ba lô là 7, trong khi trọng lượng của mỗi đồ vật a là 15). Sau khi xác định các thông số cho nút F ta có cận trên của F là 85.5. Ta tiếp tục phân nhánh cho nút F. Nút F có 2 con G và H tương ứng với X3=1 và X3=0. Sau khi xác định các thông số cho hai nút này ta thấy cận trên của G là 84 và của H là 82 nên ta tiếp tục phân nhánh cho nút G. Nút G có hai con là I và J tương ứng với X4=1 và X4=0. Đây là hai nút lá (biểu diễn cho phương án) vì với mỗi nút thì số các đồ vật đã được chọn xong. Trong đó nút I biểu diễn cho phương án chọn X1=3, X2=0, X3=1 và X4=1 với giá 83, trong khi nút J biểu diễn cho phương án chọn X1=3, X2=0, X3=1 và X4=01 với giá 81. Như vậy giá lớn nhất tạm thời ở đây là 83. Quay lui lên nút H, ta thấy cận trên của H là 82<83 nên cắt tỉa nút H. Quay lui lên nút C, ta thấy cận trên của C là 84>83 nên tiếp tục phân nhánh cho nút C. Nút C có hai con là K và L ứng với X2=1 và X2=0. Sau khi tính các thông số cho K và L ta thấy ận trên của K là 83 và của L là 75.25. Cả hai giá trị này đều không lớn hơn 83 nên cả hai nút này đều bị cắt tỉa. Cuối cùng các nút D và E cũng bị cắt tỉa. Như vậy tất cả các nút trên cây đều đã được phân nhánh hoặc bị cắt tỉa nên phương án tốt nhất tạm thời là phương án cần tìm. Theo đó ta cần chọn 3 đồ vật loại b, 1 đồ vật loại d và một đồ vật loại c với tổng giá trị là 83, tổng trọng lượng là 36.

Bài 7: Cơ bản về thuật toán Tham Lam

Thuật toán Tham Lam

Đặc trưng của chiến lược tham lam

Sơ đồ thuật toán

Đặc trưng của chiến lược tham lam

Phương pháp tham lam là kỹ thuật thiết kế thường được dùng để giải các bài toán tối ưu. Phương pháp được tiến hành trong nhiều bước. Tại mỗi bước, theo một chọn lựa nào đó (xác định bằng một hàm chọn), sẽ tìm một lời giải tối ưu cho bài toán nhỏ tương ứng. Lời giải của bài toán được bổ sung dần từng bước từ lời giải của các bài toán con. Lời giải được xây dựng như thế có chắc là lời giải tối ưu của bài toán ?

Các lời giải theo phương pháp tham lam thường chỉ là chấp nhận được theo điều kiện nào đó, chưa chắc là tối ưu.

Cho trước một tập A gồm n đối tượng, ta cần phải chọn một tập con S của A. Với một tập con S được chọn ra thỏa mãn các yêu cầu của bài toán, ta gọi là một nghiệm chấp nhận được . Một hàm mục tiêu gắn mỗi nghiệm chấp nhận được với một giá trị. Nghiệm tối ưu là nghiệm chấp nhận được mà tại đó hàm mục tiêu đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất).

Đặc trưng tham lam của phương pháp thể hiện bởi : trong mỗi bước việc xử lí sẽ tuân theo một sự chọn lựa trước, không kể đến tình trạng không tốt có thể xảy ra khi thực hiện lựa chọn lúc đầu.

Sơ đồ chung của thuật toán

. Đặc điểm chung của thuật toán tham lam

- Mục đích xây dựng bài toán giải nhiều lớp bài toán khác nhau, đưa ra quyết định dựa ngay vào thuật toán đang có, và trong tương lai sẽ không xem xét lại quyết định trong quá khứ. - > thuật toán dễ đề xuất, thời gian tính nhanh nhưng thường không cho kết quả đúng.

- Lời giải cần tìm có thể mô tả như là bộ gồm hữu hạn các thành phần thoả mãn điều kiện nhất định, ta phải giải quyết bài toán một cách tối ưu -> hàm mục tiêu

- Để xây dựng lời giải ta có một tập các ứng cử viên

- Xuất phát từ lời giải rỗng, thực hiện việc xây dựng lời giải từng bước, mỗi bước sẽ lựa chọn trong tập ứng cử viên để bổ xung vào lời giải hiện có.

- Xây dựng được một hàm nhận biết được tính chấp nhận được của lời giải hiện có -> Hàm Solution(S) -> Kiểm tra thoả mãn điều kiện .

- Một hàm quan trọng nữa : Select(C) cho phép tại mỗi bước của thuật toán lựa chọn ứng cử viên có triển vọng nhất để bổ xung vào lời giải hiện có -> dựa trên căn cứ vào ảnh hởng của nó vào hàm mục tiêu, thực tế là ứng cử viên đó phải giúp chúng ta phát triển tiếp tục bài toán.

- Xây dựng hàm nhận biết tính chấp nhận được của ứng cử viên được lựa chọn, để có thể quyết định bổ xung ứng cử viên được lựa chọn bởi hàm Select vào lời giải -> Feasible(S ẩ x).

Sơ đồ thuật toán

* input A[1..n]

* output S //lời giải;

greedy (A,n)

S = 0;

while (A <> 0)

{

x= Chọn(A); A = A-{x}

if(S U {x} chấp nhận được)

S = S U {x};

Return S;

}

Bài toán người du lịch

Bài toán

Một người du lịch muốn tham quan n thành phố T1,.., Tn . Xuất phát từ một thành phố nào đó, người du lịch muốn đi qua tất cả các thành phố còn lại, mỗi thành phố đi qua đúng 1 lần rồi quay trở lại thành phố xuất phát.

Gọi Cij là chi phí đi từ thành phố Ti đến Tj . Hãy tìm một hành trình thỏa yêu

cầu bài toán sao cho chi phí là nhỏ nhất.

Phân tích, thiết kế thuật toán:

Đây là bài toán tìm chu trình có trọng số nhỏ nhất trong một đơn đồ thị có hướng có trọng số. Thuật toán tham lam cho bài toán là chọn thành phố có chi phí nhỏ nhất tính từ thành phố hiện thời đến các thành phố chưa qua

Input C= (Cij)

output TOUR // Hành trình tối ưu,

Mô tả :

COST;//Chi phí tương ứng

TOUR := 0; COST := 0; v := u; // Khởi tạo

Mọi k := 1 -> n ://Thăm tất cả các thành phố

// Chọn cạnh kề)

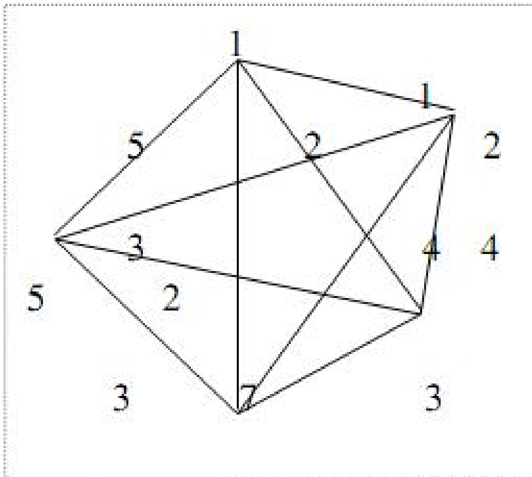
- Chọn <v, w> là đoạn nối 2 thành phố có chi phí nhỏ nhất tính từ thành phố v đến các thành phố chưa qua.

- TOUR := TOUR + <v, w>; //Cập nhật lời giải

- COST := COST + Cvw ; //Cập nhật chi phí

// Chuyến đi hoàn thành TOUR := TOUR + <v, u>; COST := COST + C_{vw}

Minh họa:



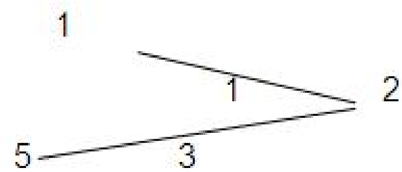
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

1. TOUR := 0; COST := 0; u := 1;

=> w = 2;

2. TOUR := <1,2>; COST := 1; u := 2;

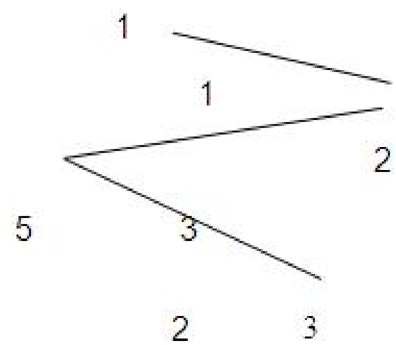
=> w = 5;



3. TOUR := {<1,2>, <2,5>}

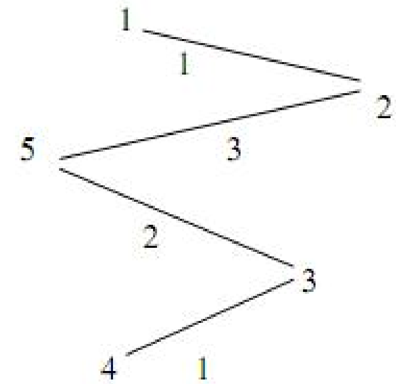
COST := 4; u := 5;

=> w = 3;

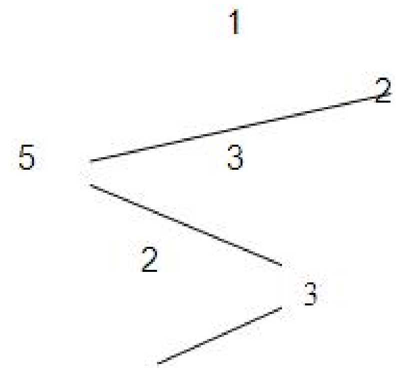


4. TOUR := {<1,2>, <2,5>,<5,3>}

COST := 6; u := 3;



=> w = 4;



5. TOUR := {<1,2>, <2,5>,<5,3>,<3,4>}

COST := 7; u = 1;

TOUR := {<1,2>, <2,5>,<5,3>,<3,4>,<4,1>}

COST := 14

Độ phức tạp thuật toán

Thao tác chọn đỉnh thích hợp trong n đỉnh được tổ chức bằng một vòng lặp để duyệt. Nên chi phí cho thuật toán xác định bởi 2 vòng lặp lồng nhau, nên $T(n) \in O(n^2)$.

Cài đặt thuật toán

int GTS (mat a, int n, int TOUR[max], int Ddau)

{

int v, //Dinh dang xet

k, //Duyet qua n dinh de chon

w; //Dinh duoc chon trong moi buoc

int mini; //Chon min cac canh(cung) trong moi buoc int COST; //Trong so nho nhat cua chu trinh

int daxet[max]; //Danh dau cac dinh da duoc su dung

for(k = 1; k <= n; k++)

daxet[k] = 0; //Chua dinh nao duoc xet

COST = 0; //Luc dau, gia tri COST == 0

int i; // Bien dem, dem tim du n dinh thi dung

v = Ddau; //Chon dinh xuat phat la 1

i = 1;

TOUR[i] = v; //Dua v vao chu trinh daxet[v] = 1; //Dinh v da duoc xet

while(i < n)

{

mini = VC;

for (k = 1; k <= n; k++)

if(!daxet[k])

if(mini > a[v][k])

{

mini = a[v][k];

w = k;

}

v = w;

```
i++;
TOUR[i] = v;
daxet[v] = 1;
COST += mini;
}
COST += a[v][Ddau];
return COST;
}
```

Thuật toán Dijkstra – Tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số

Bài toán

Cho G = (V,E) là đơn đồ thị liên thông (vô hướng hoặc có hướng) có trọng số

V = {1,.., n} là tập các đỉnh , E là tập các cạnh (cung).

Cho s_0 € E. Tìm đường đi ngắn nhất đi từ s_0 đến các đỉnh còn lại. Giải bài toán trên bằng thuật toán Dijkstra .

Phân tích, thiết kế thuật toán

Thuật toán Dijkstra cho phép tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh s đến các đỉnh còn lại của đồ thị và chiều dài (trọng số) tương ứng. Phương pháp của thuật toán là xác định tuần tự đỉnh có chiều dài đến s theo thứ tự tăng dần. Thuật toán được xây dựng trên cơ sở gán cho mỗi đỉnh các nhãn tạm thời. Nhãn tạm thời của các đỉnh cho biết cận trên của chiều dài đường đi ngắn nhất từ s đến đỉnh đó. Nhãn của các đỉnh sẽ biến đổi trong các bước lặp, mà ở mỗi bước lặp sẽ có một nhãn tạm thời trở thành chính thức. Nếu nhãn của một đỉnh nào đó trở thành chính thức thì đó cũng chính là chiều dài ngắn nhất của đường đi từ s đến đỉnh đó.

Ký hiệu :

* L(v) để chỉ nhãn của đỉnh v, tức là cận trên của chiều dài đường đi ngắn

nhất từ s0 đến v.

* d(s0 ,v) : chiều dài đường đi ngắn nhất từ s0 đến v.

* m(s0 ,v) là trọng số của cung (cạnh) (s,v).

Thuật toán Dijkstra tìm chiều dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh s đến n-1 đỉnh

còn lại được mô tả như sau:

input: G, s0

Output : d(s0,v), mọi v ≠ s0 ;

Mô tả :

o Khởi động :

$L(v) = \infty$, mọi $v \neq s0$; //Nhãn tạm thời

$S = \{s_0\}$; //Tập lưu trữ các đỉnh có nhãn chính thức

o Bước 0 :

$d(s0 ,s0) = L(s0) = 0$;

$S = \{s0\}$; // s0 có Nhãn chính thức

o Bước 1:

- Tính lại nhãn tạm thời L(v), v không thuộc S :

Nếu v kề với s0 thì

$L(v) = Min\{L(v), L(s0) + m(s0,v)\}$;

- Tìm s1 thuộc S và kề với s0 sao cho :

$L(s_1) = Min\{L(v) : \forall v \notin S, \}$;

(Khi đó : $d(s_0,s_1) = L(s_1))$

- $S = S \cup \{s_1\}$; // $S = \{s_0, s_1 \}$; s_1 có nhãn chính thức

o Bước 2:

- Tính lại nhãn tạm thời L(v), v? S :

- Tìm $s_2 \notin S$ và kề với s_1 hoặc s_0 sao cho :

$L(s_2) = Min\{L(v) : \forall v \notin S\}$;

(Khi đó : $d(s,s_2) = L(s_2))$; //$0 = d(s_0,s_1) \leq d(s_0,s_2)$

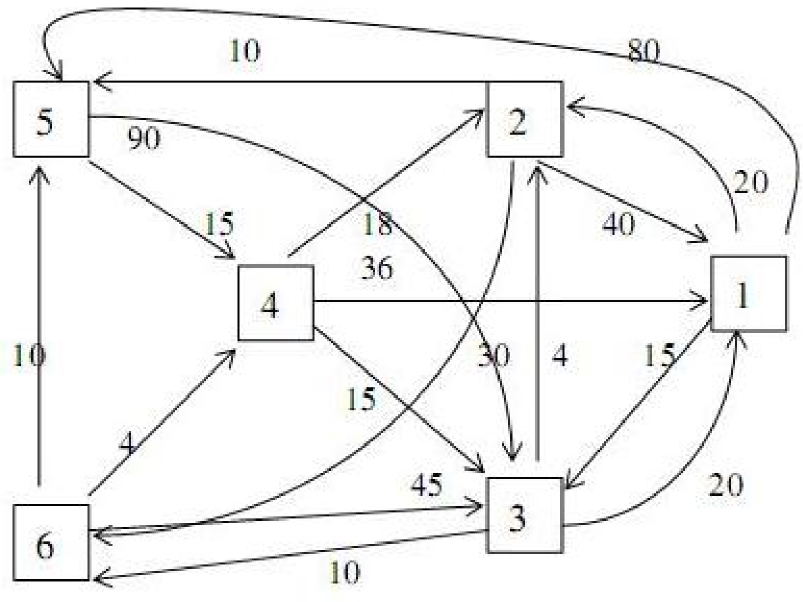
Nếu $L(s_2) = Min\{L(s_j), L(s_j) + m(s_j,s_2)\}$ thì đường đi từ s đến s_2 đi qua đỉnh s_j là ngắn nhất, và s_j là đỉnh đứng kề trước s_2.

- $S = S \cup \{s_2\}$; // $S = \{s_0, s_1, s_2 \}$; //s_2 có nhãn chính thức

. . .

Nếu v kề với s1 thì $L(v) = Min\{L(v), L(s1) + m(s1,v)\}$;

Tính chất tham lam của thuật toán Dijkstra là tại mỗi bước, chọn si không thuộc S và si là đỉnh kề với sj, với j = 0,i-1 sao cho L(si) = Min{L(v) : v ? S }. Minh hoạ : Xét đồ thị có hướng G :



Đường đi ngắn nhất từ đỉnh s = 1 đến các đỉnh còn lại :

Bảng các bước đi.

Bước lặp	Đường đi ngắn nhất là đường đi từ đỉnh 1	đến đỉnh	Chiều dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh s (=1) đến các đỉnh khác : tsnn[]					
			1	2	3	4	5	6
Bước1	1→ 3	3	-	20	15	∞	80	∞
Bước2	1→3→ 2	2	-	19	-			25
Bước3	1→3→ 6	6	-	-	-		29	25
Bước4	1→3→ 6→4	4	-	-	-	29		-
Bước5	1→3→ 2→5	5	-	-	-	-	29	-

Bài 8: Cơ bản về thuật toán Quy hoạch động

Sơ đồ chung của thuật toán

Quy hoạch động có những nét giống như phương pháp “Chia để trị”, nó đòi hỏi việc chia bài toán thành những bài toán con kích thước nhỏ hơn. Như chúng ta đã thấy trong chương trước, phương pháp chia để trị chia bài toán cần giải ra thành các bài toán con độc lập, sau đó các bài toán con này được giải một cách đệ quy, và cuối cùng tổng hợp các lời giải của các bài toán con ta thu được lời giải của bài toán đặt ra. Điểm khác cơ bản của quy hoạch động với phương pháp chia để trị là các bài toán con là không độc lập với nhau, nghĩa là các bài toán con cùng có chung các bài toán con nhỏ hơn. Trong tình huống đó, phương pháp chia để trị sẽ tỏ ra không hiệu quả, khi nó phải lặp đi lặp lại việc giải các bài toán con chung đó. Quy hoạch động sẽ giải một bài toán con một lần và lời giải của các bài toán con sẽ được ghi nhận, để thoát khỏi việc giải lại bài toán con mỗi khi ta đòi hỏi lời giải của nó.

Quy hoạch động thường được áp dụng để giải các bài toán tối ưu. Trong các bài toán tối ưu, ta có một tập các lời giải, mà mỗi lời giải như vậy được gán với một giá trị số. Ta cần tìm lời giải với giá trị số tối ưu (nhỏ nhất hoặc lớn nhất). Lời giải như vậy ta sẽ gọi là lời giải tối ưu.

Việc phát triển giải thuật dựa trên quy hoạch động có thể chia làm 3 giai đoạn:

- Phân rã: Chia bài toán cần giải thành những bài toán con nhỏ hơn có cùng dạng với bài toán ban đầu sao cho bài toán con kích thước nhỏ nhất có thể giải một cách trực tiếp. Bản thân bài toán xuất phát có thể coi là bài toán con có kích thước lớn nhất trong họ các bài toán con này.
- Ghi nhận lời giải: Lưu trữ lời giải của các bài toán con vào một bảng. Việc làm này là cần thiết vì lời giải của các bài toán con thường được sử dụng lại rất nhiều lần, và điều đó nâng cao hiệu quả của giải thuật do không phải giải lặp lại cùng một bài toán nhiều lần.
- Tổng hợp lời giải: Lần lượt từ lời giải của các bài toán con kích thước nhỏ hơn tìm cách xây dựng lời giải của bài toán kích thước lớn hơn, cho đến khi thu được lời giải của bài toán xuất phát (là bài toán con có kích thước lớn nhất). Kỹ thuật giải các bài toán con của quy hoạch động là quá trình đi từ dưới lên (bottom – up) là điểm khác quan trọng với phương pháp chia để trị, trong đó các bài toán con được trị một cách đệ quy (top – down).

Yêu cầu quan trọng nhất trong việc thiết kế thuật toán nhờ quy hoạch động là thực hiện khâu phân rã, tức là xác định được cấu trúc của bài toán con. Việc phân rã cần được tiến hành sao cho không những bài toán con kích thước nhỏ nhất có thể giải được một cách trực tiếp mà còn có thể dễ dàng việc thực hiện tổng hợp lời giải.

Không phải lúc nào việc áp dụng phương pháp quy hoạch động đối với bài toán tối ưu hoá cũng dẫn đến thuật toán hiệu quả. Có hai tính chất quan trọng mà một bài toán tối ưu cần phải thoả mãn để có thể áp dụng quy hoạch động để giải nó là:

- Cấu trúc con tối ưu: Tính chất này còn được gọi là tiêu chuẩn tối ưu và có thể phát biểu như sau: Để giải đực bài toán đặt ra một cách tối ưu, mỗi bài toán con cũng phải được giải một cách tối ưu. Mặc dù sự kiện này có vẻ là hiển nhiên, nhưng nó thường không được thoả mãn do các bài toán con là giao nhau. Điều đó dẫn đến là một lời giải có thể là "kém tối ưu hơn" trong một bài toán con này nhưng lại có thể là lời giải tốt trong một bài toán con khác.
- Số lượng các bài toán con phải không quá lớn. Rất nhiều các bài toán NP – khó có thể giải được nhờ quy hoạch động, nhưng việc làm này là không hiệu quả do số lượng các bài toán con tăng theo hàm mũ. Một đòi hỏi quan trọng đối với quy hoạch động là tổng số các bài toán con cần giải là không quá lớn, cùng lắm phải bị chặn bởi một đa thức của kích thước dữ liệu vào.

Bài toán thực hiện dãy phép nhân ma trận

Như đã biết, tính của ma trận A = (a_{ik}) kích thước p x q với ma trận B = (b_{kj}) kích thước q x r là ma trận C = (c_{ij}) kích thước p x r với các phần tử được tính theo công thức:

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{ki}$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le q$.

Chúng ta có thể sử dụng đoạn chương trình sau đây để tính tích của hai ma trận A,B:

```
for i =1 -> p

for j =1 -> r

{

c [i,j] = 0

for k = 1 -> q do

c[i,j] =c[i,j] +a[i,k] *b[k,j];

}
```

Rõ ràng , đoạn chương trình trên đòi hỏi thực hiện tât cả pqr phép nhân để tính tích của hai ma trận.

Giả sử ta phải tích tích của nhiều hơn là hai ma trận. Do phép nhân ma trận có tính kết hợp, ta có thể tích tích của các ma trận.

$M = M_1 M_2 \ldots Mn$

Theo nhiều cách khác nhau, chẳng hạn

$M =(\ldots((M_1M_2)M_3)\ldots Mn)$

$= (M1(M_2(M_3\ldots(Mn_{-1}Mn)\ldots)))$

$=(\ldots((M_1M_2)(M_3M_4))\ldots)$,v.v…

Mặt khác, do tích ma trận không có tính chất giao hoán, nên ta không được thay đổi thứ tự của các ma trận trong biểu thức đã cho.

Mỗi cách tính tích các ma trận đó cho đòi hỏi một thời gian tính khác nhau. Để đánh giá hiệu quả của các phương pháp chúng ta đếm số phép nhân cần phải thực hiện. Trong đoạn chương trình trên, ta thấy để tính tích của hai ma trận ta còn phải thực hiện cùng một số như vậy các phép cộng và một số phép gán và tính chỉ số, vì thế, số lượng phép nhân là một chỉ số đánh giá khá chính xác hiệu quả của phương pháp.

Ví dụ: Tính tích M = ABCD của bốn ma trận, trong đó A có kích thước 13 x 5, B có kích thước 5 x 89, C có kích thước 89 x 3 và D có kích thước 3 x 34. Sử dụng cách tính

M = ((AB)C)D),

Ta phải thực hiện lần lượt tính

AB 5785 phép nhân

(AB)C 3271 phép nhân

((AB)C)D 1326 phép nhân

Và tổng cộng là 10582 phép nhân

Tất cả có 5 phương pháp khác nhau để tính tích ABCD:

1. ((AB)C)D 10582

2. (AB)(CD) 54201

3. (A(BC))D 2856

4. A((BC)D) 4055

5. A(B(CD)) 26418

Phương pháp hiệu quả nhất (phương pháp 3) đòi hỏi khối lượng phép nhân ít hơn gần 19 lần so với phương pháp tồi nhất (phương pháp 5).

Để tìm phương pháp hiệu quả nhất, chúng ta có thể liệt kê tất cả các cách điền dấu ngoặc vào biểu thức tích ma trận đã cho và tính số lượng phép nhân đòi hỏi theo mỗi cách. Ký hiệu T (n) là số cách điền các dấu ngoặc vào biểu thức tích của n ma trận. Giả sử ta định đặt dấu ngoặc phân tách đầu tiên vào giữa ma trận thứ i và ma trận thứ (i + 1) trong biểu thức tích, tức là:

$M = (M_1 M_2 \dots M_i)(M_{i+1} M_{i+2} \dots M_n)$

Khi đó có T(i) cách đặt dấu ngoặc cho thừa số thứ nhất (M_1 M_2 … Mi) và T(n-i) cách đặt dấu ngoặc cho thừa số thứ hai (Mi_{+1} Mi_{+2} … Mn) và từ đó T(i)T(n-i) cách tính biểu thức (M_1 M_2 … Mi)(Mi_{+1} Mi_{+2} … Mn). Do i có thể nhận bất cứ giá trị nào trong khoảng từ 1 đến n-1, suy ra ta có công thức truy hồi sau để tính T(n):

Kết hợp với điều kiện đầu hiển nhiên T(1) = 1, ta có thể tính các giá trị của T(n) với mọi n. Bảng dưới đây cho một số giá trị của T(n).

n	1	2	3	4	5	10	15
T(n)	1	1	2	5	14	4862	267444 0

Giá trị của T(n) được gọi là số Catalan. Công thức sau đây cho phép tính T(n) qua hệ số tổ hợp:

$T(n) = \frac{1}{n}C_{2n-2}^{n-1}$, n ≥ 2

Từ đó T(n) = T(n) = 4^{nn2}. Như vậy, phương pháp duyệt toàn bộ không thể sử dụng để tìm cách tính hiệu quả biểu thức tính của n ma trận, khi n lớn.

Bây giờ, ta xét cách áp dụng quy hoạch động để giải bài toán đặt ra.

* Phân rã (Xác định cấu trúc con tối ưu).

Bước đầu tiên phải thực hiện khi muốn áp dụng quy hoạch động để giải bài toán đặt ra là tiến hành phân rã bài toán hay phát hiện cấu trúc con tối ưu. Nhận thấy rằng: Nếu cách tính tối ưu tích của n ma trận đòi hỏi dặt dấu ngoặc tách đầu tiên giữa ma trận thứ i và thứ (i+1) của biểu thức tích, thì khi đó cả hai tích con (M_1 M_2 … Mi) và (Mi_{+1} Mi_{+2} … Mn) cũng phải được tính một cách tối ưu. Khi đó số phép nhân cần phải thực hiện để nhân dãy ma trận sẽ bằng tổng số phép nhân cần thực hiện để nhân hai dãy con ((M_1 M_2 … Mi) và (Mi_{+1} Mi_{+2} … Mn) cộng với số phép nhân cần thực hiện để nhân hai ma trận kết quả tương ứng với hai dãy con này. Vì vậy để xác định cách thực hiện nhân tối ưu ta cần giải quyết hai vấn đề sau:

- Cần đặt dấu ngoặc phân tách đầu tiên vào vị trí nào (xác định i);

- Thực hiện việc tính tối ưu hai tích con (M_1 M_2 … Mi) và (Mi_{+1} Mi_{+2} … Mn) bằng cách nào.

Việc tính mỗi tích con rõ ràng có dạng giống như bài toán ban đầu, vì thế có thể giải một cách đệ quy bằng cách áp dụng cách giải như đối với dãy xuất phát. Vấn đề thứ nhất có thể được giải bằng cách xét tất cả các giá trị có thể của i. Như vậy, bài toán nhân dãy ma trận thoả mãn đòi hỏi về cấu trúc con tối ưu: Để tìm cách tính tối ưu việc nhân dãy ma trận (M_1 M_2 .. M_n) chúng ta có thể sử dụng cách tính tối ưu của hai tích con (M_1 M_2 … Mi) và (Mi_{+1} Mi_{+2} … Mn). Nói cách khác, những bài toán con phải được giải một cách tối ưu cũng như bài toán ban đầu. Phân tích này cho phép ta sử dụng quy hoạch động để giải bài toán đặt ra. Xét họ các bài toán:

Tìm m_{ij} là số phép nhân ít nhất cần thực hiện để tính tích

(Mi_{+1} Mi_{+2} … Mj), $1 \le i \le j \le n$

Lời giải cần tìm sẽ là m_{1n}

* Tổng hợp lời giải.

Giả sử kích thước của các ma trận được cho bởi véc tơ d[0 … n], trong đó ma trận Mi có kích thước $di_{-1}xdi$, i = 1, 2, 3, … n. Ta sẽ xây dựng bảng giá trị mi j lần lượt theo từng đường chéo của nó, trong đó đường chéo thứ s chứa các phần tử mi j với chỉ số thoả mãn j - i = s. Khi đó, đường chéo s = 0 sẽ chứa các phần tử mi_{j} (i = 1, 2, … n) tương ứng với tích có một phần tử Mi. Do đó, $mi_{j} = 0$, i = 1, 2, … n. Đường chéo s = 1 chứa các phần tử m_{ij+1} tương ứng với tích M_iM_{i+1}, do ở đây không có sự lựa chọn nào khác, nên ta phải thực hiện $d_{i-1}d_id_{i+1}$ phép nhân. Giả sử s > 1, khi đó đường chéo thứ s chứa các phần tử mij+s tương ứng với tích Mi Mi+1 … Mi+s. Bây giờ ta có thể lựa chọn việc đặt dấu ngoặc tách đầu tiên sau một trong số các ma trận Mi, Mi+1, …, Mi+s-1. Nếu đặt dấu ngoặc đầu tiên sau Mk, $i \le k < i+s$, ta cần thực hiện mik phép nhân để tính thừa số thứ nhất, mk+1,i+s phép nhân để tính thừa số thứ hai, và cuối cùng là di-1dkdi+s phép nhân để tính tích của hai ma trận thừa số để thu được ma trận kết quả. Để tìm cách tính tối ưu, ta cần chọn cách đặt dấu ngoặc tách đòi hỏi ít phép nhân nhất.

Như vậy, để tính bảng giá trị mi j ta có thể sử dụng quy tắc sau đây:

s = 0; $mi_{j} = 0$ i = 1, 2, …, n

s = 1; $mi_{j+1} = di_{-1}didi_{+1}$, i = 1, 2, …, n - 1

1 < s < n; $mi_{j+s} = \min\{mik + mk_{+1,\ i+s} + di_{-1}dkdi_{+s}: 1 \le k < i+s\}$, i = 1, 2, …, n – s.

Lưu ý rằng, để dễ theo dõi ta viết cả công thức cho trường hợp s = 1, mà dễ thấy là công thức cho trường hợp tổng quát vẫn đúng cho s = 1.

Ví dụ 2: Tìm cách tính tối ưu cho tích của bốn ma trận cho trong ví dụ 1.

Ta có d = (13, 5, 89, 3, 34). Với s = 1, m12 = 5785, m23 = 1335 và m34 = 9078. Tiếp theo, với s = 2 ta thu được

$m_{13} = \min(m_{11} + m_{23} + 13 \text{ x } 5 \text{ x } 3, m_{12} + m_{33} + 13 \text{ x } 89 \text{ x } 3)$

$= \min(1530, 9256) = 1530$

$m_{24} = \min(m_{22} + m_{34} + 5 \text{ x } 89 \text{ x } 34, m_{23} + m_{44} + 5 \text{ x } 3 \text{ x } 34)$

$= \min(24208, 1845) = 1845$

Cuối cùng với s = 3 ta có

$m_{14} = \min(m_{11} + m_{24} + 13 \text{ x } 5 \text{ x } 34)$, {k = 1}

$m_{12} + m_{34} + 13 \text{ x } 89 \text{ x } 34$, {k = 2}

$m_{13} + m_{44} + 13 \text{ x } 3 \text{ x } 34$, {k = 3}

$= \min(4055, 54201, 2856) = 2856$.

Bảng giá trị m được cho trong hình vẽ dưới đây

	j=1	2	3	4	
i=1	0	5785	1530	2856	
2		0	1335	1845	s=3
3			0	9078	s=2
4				0	s=1
					s=0

Để tìm lời giải tối ưu, ta sử dụng bảng hi j ghi nhận cách đặt dấu ngoặc tách đầu tiên cho giá trị mi j.

Ví dụ 3: Các giá trị của hi j theo ví dụ 1 được cho trong bảng dưới đây:

	j=1	2	3	4	
i=1	1	2	1	3	
2		2	3	3	s=3
3			3	4	s=2
4				4	s=1
					s=0

Ta có số phép nhân cần thực hiện là m14 = 2856. Dấu ngoặc đầu tiên cần đặt sau vị trí h14 = 3, tức là M = (ABC)D. Ta tìm cách đặt dấu ngoặc đầu tiên để có m13 tương ứng với tích ABC. Ta có h13 = 1, tức là tích ABC được tính tối ưu theo cách: ABC = A(BC). Từ đó suy ra, lời giải tối ưu là: M = (A(BC))D.

Bây giờ, ta tính số phép toán cần thực hiện theo thuật toán vừa trình bày. Với mỗi s > 0, có n – s phần tử trên đường chéo cần tính, để tính mỗi phần tử đó ta cần so sánh s giá trị số tương ứng với các giá trị có thể của k. Từ đó suy ra số phép toán cần thực hiện theo thuật toán là cỡ

$$\sum_{s=1}^{n-1}(n-s)s = n\sum_{s=1}^{n-1}s - \sum_{s=1}^{n-1}s^2$$

$$n^2(n-1)/2 - n(n-1)(2n-1)/6$$

$$\left(n^3 - n\right)/6$$

$$0\left(n^3\right)$$

Thuật toán trình bày có thể mô tả trong hai thủ tục sau:

procedure Matrix-Chain(d,n)

{m[i,j] - chi phí tối ưu thực hiện nhân dãy Mi . . . Mj;

h[i,j] - ghi nhận vị trí đặt dấu ngoặc đầu tiên trong cách thực hiện nhân dãy Mi . . . Mj}

begin

for i: = 1 to n do m[i,j]: = 0; //khởi tạo

for s: = 1 to n do // s = chỉ số của đường chéo

for i: = 1 to n - s do

begin

```
j: = i + s - 1; m[i,j] = +?;
for k: = i to j - 1 do
begin
q: = m[i,k] + m[k+1,j] + d[i-1]*d[k]*d[j];
if(q<m[i,j]) then
begin
m[i,j] = q; h[i,j] = k;
end;
end;
end;
end;
```

Thủ tục đệ quy sau đây sử dụng mảng ghi nhận h để đưa ra trình tự nhân tối ưu.

```
procedure Mult(i,j);
begin
if(i<j) then
begin
k = h[i,j];
X = Mult(i,k); { X = M[i] / . . . M[k] }
Y = Mult(k+1,j); { Y = M[k+1] . . . M[j] }
return X*Y; { Nhân ma trận X và Y }
end
else
```

```
return M[i];

end;
```

Bài 9: Các bài toán sử dụng thuật toán Quy hoạch động

Tập độc lớn nhất trên cây

Để phát biểu bài toán ta cần nhắc lại một số khái niệm. Giả sử G = (V,E) là đơn đồ thị vô hướng với trọng số trên đỉnh c(), V. Một tập con các đỉnh của đồ thị được gọi là tập độc lập, nếu như hai đỉnh bất kỳ trong U là không kề nhau trên G.

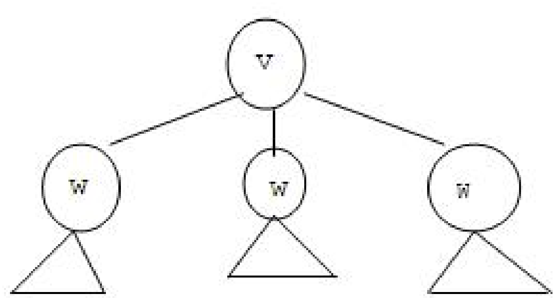
Nếu U là tập độc lập, thì ta gọi trọng số của U là tổng trọng số của các đỉnh trong nó. Ta sẽ gọi tập độc lập với trọng số lớn nhất là tập độc lập lớn nhất. Bài toán tập độc lập lớn nhất trên đồ thị là một bài toán khó. Tuy nhiên, khi đồ thị G là cây bài toán này có thể giải hiệu quả bởi thuật toán quy hoạch động.

Bài toán phát biểu như sau: Cho cây T = (V,E) với trọng số trên các đỉnh c(), V. Hãy tìm tập độc lập lớn nhất của T.

Dựng cây T có gốc tại đỉnh r, và duyệt cây theo thứ tự sau (postorder). Xét đỉnh tuỳ ý với k con w1, w2, …, wk. Ta có thể tạo tập độc lập của cây con gốc tại theo hai cách, phụ thuộc vào việc ta có chọn đỉnh vào tập độc lập hay không:

• Nếu ta không chọn vào tập độc lập, thì ta có thể kết hợp các tập độc lập của các cây con gốc tại w1, w2, …, wk để tạo tập độc lập gốc tại , bởi vì không có cạnh nối giữa các cây con này.

• Còn nếu ta chọn vào tập độc lập thì ta chỉ có thể sử dụng các tập độc lập không chứa gốc của các cây con tương ứng với w1, w2, …, wk, do và bất kỳ con wi nào của nó không cùng chọn vào tập độc lập



Do đó, với mỗi đỉnh thuật toán phải tính các thông tin sau:

1. big() = trọng lượng lớn nhất của tập độc lập của cây con có gốc tại .

2. bibnotroot() = trọng lượng lớn nhất của tập độc lập không chứa của cây con có gốc tại .

Tại đỉnh , thuật toán sẽ gọi đệ quy tính big(wi) và bignotroot(wi) với mỗi cây con gốc tại các con w1, w2, …, wk của . Sau đó tính bignotroot() và big() sử dụng công thức đệ quy tương ứng với hai tình huống mô tả ở trên:

$$bign\text{otroot}(v) = \sum_{i=1}^{k} big(w_i)$$

$$big(v) = \max\{bignotroot(v), c(v) + \sum_{i=1}^{k} bignotroot(w_i)\}$$

Nếu là lá thì bignotroot() = 0 và big() = c().

Từ các phân tích trên dễ dàng xây dựng thuật toán tính big(), V với thời gian O(n), trong đó n = .

Ta xét cách thực hiện đệ quy của thuật toán. Rõ ràng trọng số của tập độc lập lớn nhất tại đỉnh sẽ hoặc là bằng trọng lượng của tất cả các tập độc lập của các cây con gốc tại w1, w2, …, wk hoặc bằng tổng trọng lượng của và trọng lượng của các cây con gốc tại các đỉnh là cháu của . Từ đó ta có thuật toán đệ quy sau:

function MaxISTree(r);

(* Tìm tập độc lập lớn nhất của cây con gốc tại r *)

(* Con(r) - danh sách các con của root *)

(Cháu(r) - danh sách các cháu của root *)*

begin

if Con(r) = then return c(r) (* r lµ l¸ *)

else

begin

bignotroot: = 0;

for w Con(r) do

bignotroot: = bignotroot + MaxISTree(w);

bigr: = c(r);

for u Chau(r) do

bigr: = bigr + MaxISTree(u);

return max(bignotroot, bigr);

end;

end;

Lệnh gọi MaxISTree(root) (root là gốc của cây T) sẽ thực hiện thuật toán. Tất nhiên thủ tục đệ qui này là không hiệu quả. Do ở đây chỉ có O(n) bài toán con cần giải, ta có thể viết lại nó dưới dạng thủ tục đệ qui có nhớ để có được thuật toán với thời gian tính O(n).

Bài toán dãy con lớn nhất

Trong chương 2 ta đã trình bày thuật toán chia để trị để giả bài toán dãy con lớn nhất với thời gian tính 0 (n log n). Bây giờ ta xét thuật toán quy hoạch động để giải bài toán này. Để đơn giản ta chỉ xét cách tính tổng của dãy con lớn nhất.

Phân rã. Gọi si là tổng của dãy con lớn nhất trong dãy

a1, a2, …., ai,

i = 1,2,…, n.Rõ ràng sn là giá trị cần tìm.

Tổng hợp lời giải. Trước hết, ta có sn = a1. Bây giờ giả sử i > 1 và sk là đã biết với k = 1,2,…, i - 1. Ta cần tính si là tổng của dãy con lớn nhất của dãy con lớn nhất của dãy a1, a2, …, ai-1, ai.

Rõ ràng dãy con lớn nhất của dãy này hoặc là có chứa phần tử ai hoặc là không chứa phần tử ai, vì thế chỉ có thể là một trong hai dãy sau đây:

• Dãy con lớn nhất của dãy a1, a2, …, ai-1.

• Dãy con lớn nhất của dãy a1, a2, …, ai kết thúc tại ai.

Từ đó suy ra

si = max {si-1,ei },

Trong đó ei là tổng của dãy con lớn nhất của dãy a1, a2, …, ai kết thúc tại ai.

Lưu ý rằng để tính ei, i = 1, 2, …, n, ta cũng có thể sử dụng công thức đệ quy sau:

e1 = a1;

ei = max {ai, ei-1 + ai }, i > 1.

Từ đó, ta có thuật toán sau để giải bài toán đặt ra:

procedure Maxsub(a);

begin

smax: = a[1]; (smax - tổng của dãy con lớn nhất *)*

```
maxendhere: = a[1];
imax: = 1; (* imax - vị trí kết thúc của dãy con lớn nhất )
for i: = 2 to n do
begin
u: = maxendhere + a[i];
v: = a[i];
if (u > v) then maxendhere = u else maxendhere = v;
if (maxendhere > smax) then
begin
smax: = maxendhere;
imax: = i;
end;
end;
end;
```

Dễ thấy thuật toán Maxsub có thời gian tính là O(n).

Bài toán dãy con chung dài nhất

Ta gọi dãy con của một dãy cho trước là dãy thu được từ dãy đã cho bằng việc loại bỏ một số phần tử. Một cách hình thức, giả sử cho dãy X = <x1, x2, …, xm>, dãy Z = <z1, z2, …, zk> được gọi là dãy con của dãy X nếu tìm được dãy các chỉ số 1? i1 < i2 < … < ik ? n sao cho zi = xi j, j = 1, 2, …, k. Chẳng hạn dãy Z = < B, C, D, B> là dãy con của dãy X = <A, A, B, C, B, C, D, A, B, D, A, B> với dãy chỉ số là <3, 4, 7, 9>.

Cho hai dãy X và Y ta nói dãy Z là dãy con chung của hai dãy X và Y nếu Z là dãy con của cả hai dãy này. Ví dụ, nếu X = <A, B, C, D, E, F, G> và Y = <C, C, E, D, E, G, F> thì dãy Z = <C, D, F> là dãy con chung của hai dãy X và Y, còn dãy <B, F, G> không là dãy con chung của chúng. Dãy <C, D, F> không là dãy con chung dài nhất vì nó có độ dài 3 (số phần tử trong dãy), trong khi đó dãy <C, D, E, G> là dãy con chung của X và Y có độ dài 4. Dãy <C, D, E, G> là dãy con chung dài nhất vì không tìm được dãy con chung có độ dài 5.

Bài toán dãy con chung dài nhất được phát biểu như sau: Cho hai dãy X = <x1,x2,…,xm> và Y = <y1,y2,…,yn>. Cần tìm dãy con chung dài nhất của hai dãy X và Y.

Thuật toán trực tiếp để giải bài toán đặt ra là: Duyệt tất cả các dãy con của dãy X và kiểm tra xem mỗi dãy như vậy có là dãy con của dãy Y, và giữ lại dãy con dài nhất. Mỗi dãy con của X tương ứng với dãy chỉ số <i1,i2, …, ik> là tập con k phần tử của tập chỉ số {1, 2, …, m}, vì thế có tất cả 2m dãy con của X.Như vậy thuật toán trực tiếp đòi hỏi thời gian hàm mũ và không thể ứng dụng được trên thực tế. Ta xét áp dụng quy hoạch động để xây dựng thuật toán giải bài toán này.

Phân rã . Với mỗi 0 ? i ? m và 0 ? j ? n xét bài toán C(i,j); tính C[i,j] là độ dài của dãy con chung dài nhất của hai dãy.

Xi=<x1,x2,…,xi>

và

yi=<y1,y2,…yi>

Như vậy ta đã phân bài toán cần giải ra thành (m+1)x(n+1) bài toán con. Bản thân bài toán xuất phát là bài toán con có kích thước lớn nhất C(m,n).

Tổng hợp lời giải. Rõ ràng

c[o,j]=0,j =0,1,…,n và c[i,0]=0,i=0,1,…,m.

Giả sử i>0,j>0 ta cần tính c[i,j] là độ dài của dãy con chung lớn nhất của hai dãy Xi và Yi có hai tình huống:

Nếu Xi =Yi thì dãy con chung dài nhất của Xi vàYi sẽ thu được bằng việc bổ sung Xi vào dãy con chung dài nhất của hai dãy Xi-1và Yj-1

Nếu Xi Yi thì dãy con chung dài nhất của Xi và Yj sẽ là dãy con dài nhất trong hai dãy con chung dài nhất của (Xi và Yi) và của (Xi-1 và Yj) . Từ đó ta có công thức sau để tính C[i,j].

$c[i,j]$

0,

$c[i-1,j-1]+1$

$\max\{c[i,j-1],c[i-1,j]\}$ nÕu i=0 hoÆc j=0nÕu i,j >0 vµ xi=yjnÕu i,j >0 vµ xi yj

,

{{

ThuËt to¸n t×m d·y con chung dµi nhÊt cã thÓ m« t¶ nh sau.

```
Procedure LCS(X,Y);

begin

for i :=1 to m do c[i,0]:=0;

forj: =1 to n do c[0,j:=0;

for i: =1 to m do

for j: = 1to n do

if xi = yi then

begin

c[i,j]:=c[i-1,j-1]+1;

b[i,j]:=/;

end
```

else

if c [i-1,j] ≥ c[i,j-1] then

begin

c[i,j]:=c[i-1,j];

b[i,j]:= ? ;

end

else

begin

c[i,j]:=c[i,j-1];

b[i,j]:= ? ;

end;

end;

Trong thủ tục mô tả ở trên ta sử dụng biến b[i,j] để ghi nhận tình huống tối ưu khi tính giá trị c[i,j]. Sử dụng biến này ta có thể đưa ra dãy con chung dài nhất của hai dãy X và Y nhờ thủ tục sau đây:

Procedure Print LCS (b,X,i,j);

begin

if(i=0)or (j=0) then return;

if b[i,j]=/ then

begin

print LCS (b,X,i-1,j-1);

print xi; (* §a ra ph©n tö xi *)

end

else

if b[i,j]= ? then

PrintLCS (b,X,i-1,j)

else

Print LCS (b,X,i,j-1);

end;

Dễ dàng đánh giá được thời gian tính của thuật toán LCS là 0(mn).

Bài 10: Bài tập và tổng kết

Bài tập tổng kết

Thảo luận về khái niệm thuật toán

- Người học đưa ra một số bài toán trong thực tế được giải quyết như quá trình thực hiện của một thuật toán.

- Phân tích các đặc trưng của thuật toán qua các ví dụ trên.

- Chọn một bài toán để biểu diễn thuật toán bằng một số phương pháp.

Thảo luận về tư tưởng thiết kế thuật toán chia để trị

- Người học tìm một số bài toán trong thực tế, sau đó thảo luận phân tích thành các bài toán nhỏ theo tư tưởng của thuật toán chi để trị.

- Nhận xét công việc thực hiện các bài toán nhỏ so với bài toán ban đầu

- Nhận xét về việc tổng hợp kết quả từ những bài toán nhỏ

=> Từ đó rút ra kết luận về sơ đồ chung của thuật toán chia để trị.

Thảo luận về độ phức tạp tính toán trong thuật toán chia để trị

- Phân tích độ phức tạp thuật toán của các bài toán con

- So sánh với độ phức tạp tính toán của bài toán ban đầu

=> Từ đó rút ra kết luận về ưu điểm của thuật toán chia để trị.

Các bài toán sử dụng phương pháp chia để trị

Các nhóm báo cáo các bài toán đã được phân công

Bài toán tìm kiếm nhị phân

* So sánh tìm kiếm tuần tự và tìm kiếm nhị phân:

- Nhắc lại phương pháp tìm kiếm tuần tự

- So sánh ưu nhược điểm của 2 phương pháp, chỉ rõ qua ví dụ cụ thể.

* Cài đặt thuật toán:

```
int tknp(int a[max],int x,int l, int r)

{

int mid;

if( l > r) return 0;

mid = (l+r)/2

if ( x == a[mid] ) return 1;

if ( x > a[mid] ) return tknp(a,x,mid+1,r);

return tknp(a,x,l,mid-1);

}
```

* Đánh giá độ phức tạp thuật toán:

a) Trường hợp tốt nhất: Tương ứng với sự tìm được y trong lần so sánh đầu tiên, tức là y= x[Middle] (y nằm ở vị trí giữa mảng)

=> Ta coù : $T_{toát}(n) = O(1)$

b) Trường hợp xấu nhất: Độ phức tạp là O(log n)

Thật vậy, Nếu gọi T(n) là độ phức tạp của thuật toán , thì sau khi kiểm tra điều kiện (x == a[giữa]) và sai thì gọi đệ qui thuật toán này với dữ liệu giảm nửa, nên thỏa mãn công thức truy hồi :

$T(n) = 1 + T(n/2)$ với $n>=2$ và $T(1) = 0$

Bài toán mảng con lớn nhất

- Phát biểu bài toán

- Tư tưởng giải thuật

- Cài đặt

- Đánh giá độ phức tạp thuật toán

Thuật toán nhân 2 ma trận

- Phát biểu bài toán

- Tư tưởng giải thuật

- Cài đặt

- Đánh giá độ phức tạp thuật toán

Thuật toán sắp xếp

- Phát biểu bài toán

- Tư tưởng giải thuật

- Cài đặt

- Đánh giá độ phức tạp thuật toán

Bài toán hoán đổi

- Phát biểu bài toán

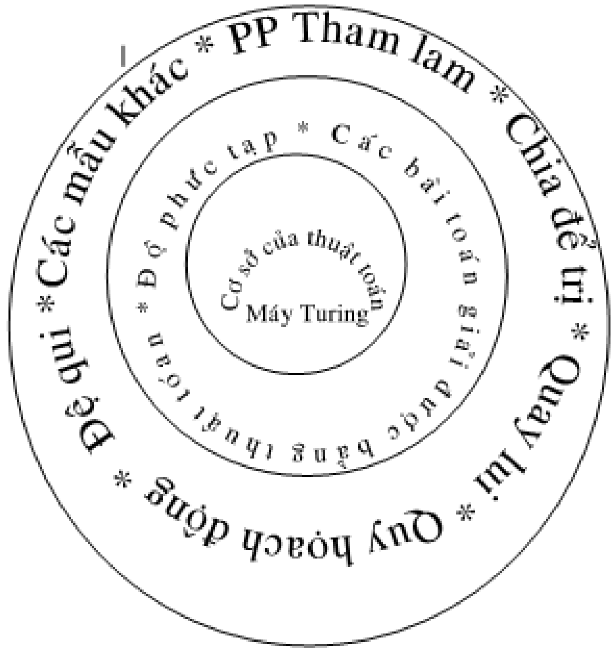
- Tư tưởng giải thuật

- Cài đặt

- Đánh giá độ phức tạp thuật toán

Nhắc lại các thuật toán khác và các bài toán

Trên cơ sở lý thuyết máy Turing, ta chia được các bài toán thành 2 lớp không giao nhau : Lớp giải được bằng thuật toán , và lớp không giải được bằng thuật toán.



Đối với lớp các bài toán giải được bằng thuật toán, dựa vào các đặc trưng của quá trình thiết kế của thuật toán, ta có thể chỉ ra một số các phương pháp thiết kế thuật toán cơ bản sau đây :

a) Phương pháp chia để trị. (Divide-and-Conquer method).

Ý tưởng là : Chia dữ liệu thành từng miền đủ nhỏ, giải bài toán trên các miền đã chia rồi tổng hợp kết quả lại .

Chẳng hạn như thuật toán Quicksort.

b) Phương pháp quay lui (BackTracking method).

Ý tưởng là: Tìm kiếm theo ưu tiên. Đối với mỗi bước thuật toán, ưu tiên theo độ rộng hay chiều sâu để tìm kiếm.

Chẳng hạn thuật toán giải bài toán 8 hậu.

c) Phương pháp tham lam (Greedy Method).

Ý tưởng là : Xác định trật tự xử lý để có lợi nhất, Sắp xếp dữ liệu theo trật tự

đó, rồi xử lý dữ liệu theo trật tự đã nêu. Công sức bỏ ra là tìm ra trật tự đó.

Chẳng hạn thuật toán tìm cây bao trùm nhỏ nhất (Shortest spanning Trees).

d) Phương pháp Quy hoạch động (Dynamic Programming method).

Phương pháp quy hoạch động dựa vào một nguyên lý, gọi là nguyên lý tối ưu của Bellman :

- Nếu lời giải của bài toán là tối ưu thì lời giải của các bài toán con cũng tối ưu. Phương pháp này tổ chức tìm kiếm lời giải theo kiểu từ dưới lên. Xuất phát từ các bài toán con nhỏ và đơn giản nhất, tổ hợp các lời giải của chúng để có lời giải của bài toán con lớn hơn...và cứ như thế cuối cùng được lời giải của bài toán ban đầu.

Chẳng hạn thuật toán "chiếc túi xách" (Knapsack).

Các bài tập

Viết chương trình cài đặt thuật toán tìm kiếm nhị phân

- *Bài toán* **:** Cho mảng a[1..n] được sắp xếp theo thứ tự không giảm và x. Tìm x trong mảng a, nếu có trả về giá trị 1, nếu không có trả về giá trị 0

- *Phân t ích thuật toán :*

Số x cho trước

+ Hoặc là bằng phần tử nằm ở vị trí giữa mảng a

+ Hoặc là nằm ở nửa bên trái (x < phần tử ở giữa mảng a)

+ Hoặc là nằm ở nửa bên phải (x > phần tử ở giữa mảng xa)

- *Cài đặt thuật toán:*

```
int tknp(int a[max],int x,int l, int r)

{

int mid;

if( l > r) return 0;

mid = (l+r)/2

if ( x == a[mid] ) return 1;

if ( x > a[mid] ) return tknp(a,x,mid+1,r);
```

return tknp(a,x,l,mid-1);

- Mở rộng:

Sửa đổi đoạn chương trình trên với yêu cầu trả về vị trí tìm được của x trong mảng a, nếu không tìm thấy trả về giá trị -1

Viết chương trình cài đặt thuật toán mảng con lớn nhất

- Bài toán:

Tìm giá trị Min, Max trong đoạn a[l..r] của mảng a[1..n].

- Phân tích thuật toán:

+ Tại mỗi bước, chia đôi đoạn cần tìm rồi tìm Min, Max của từng đoạn, sau đó tổng hợp lại kết quả.

+ Nếu đoạn chia chỉ có 1 phần tử thì Min =Max và bằng phần tử đó

Ví dụ:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a[i]	10	1	5	0	9	3	15	19

MinMax(a,2,6,Min,Max) cho Min = 0, Max = 9 trong đoạn a[2..6]

- Cài đặt thuật toán:

Input : a[l..r], (l <= r)

Output: Min = Min(a[l]..a[r])

Max = Max(a[l]..a[r])

```
void MinMax(int a[.], int  l, int  r, int &Min, int &Max )
{
        int Min1,Min2,Max1,Max2;
        if (l == r )
        {
                Min = a[l];
                Max= a[l];
        }
        else
        {
                MinMax(a,l,(l+r)/2 , Min1, Max1);
                MinMax(a,(l+r) /2 + 1,r, Min2, Max2);
                if (Min1 < Min2)
                        Min = Min1;
                else
                        Min = Min2;
                if (Max1 > Max2)
                        Max = Max1;
                else
                        Max = Max2;
        }
}
```

Bài 3. Viết chương trình cài đặt thuật toán sắp xếp QuickSort

- Bài toán:

Dùng thuật toán QuickSort (QS) để sắp xếp các giá trị trong một mảng các số theo thứ tự,chẳng hạn tăng dần.

- Phân tích thuật toán:

Chọn ngẫu nhiên một phần tử x.

Duyệt dãy từ bên trái (theo chỉ số i) trong khi còn $a_i < x$.

Duyệt dãy từ bên phải (theo chỉ số j) trong khi còn $a_j > x$.

Đổi chỗ ai và aj nếu hai phía chưa vượt qua nhau.

. . . tiếp tục qúa trình duyệt và đổi chỗ như trên trong khi hai phía còn chưa vượt qua nhau (tức là còn có i = j).

Kết qủa phân hoạch dãy thành 3 phần :

+ a_k <= x với k = 1, .., j (Dãy con thấp);

+ a_m >= x với với m = i, ...,n (Dãy con cao);

+ a_h = x với h = j+1, …, i+1

(Vì thế phương pháp này còn gọi là phương pháp sắp xếp bằng phân hoạch)

Tiếp tục phân hoạch cho phần trái (dãy con thấp nhỏ hơn x), cho phần phải (lớn hơn x) . . . cho đến khi các phân hoạch chỉ còn lại một phần tử, là sắp xếp xong.

Thuật toán thể hiện ý tưởng đệ qui và cách thiết kế chia để trị.

- Thuật toán QuickSort

Input : a[1..n]

Output : a[1..n] không giảm.

BÀI TOÁN THUẬT TOÁN NHÁNH CẬN

Bài 1 :

Có n đồ vật, mỗi vật i đặc trưng bởi trọng lượng wi và giá trị sử dụng vi, với mọi i thuộc {1,..,n}. Cần chọn các vật này đặt vào một chiếc túi xách có giới hạn trọng lượng m, sao cho tổng giá trị sử dụng các vật được chọn là lớn nhất.

Bài 2 :

Cho 3 ký tự A, B, C và n là một số nguyên dương.

Xác định chuỗi tạo ra từ 3 ký tự trên, với chiều dài n, thỏa điều kiện không có 2 chuỗi con liên tiếp nào giống nhau và sao cho số ký tự B là ít nhất.

Bài 3:

Tìm lời giải tối ưu cho bài toán:

$$\begin{cases} 10x \ + 5x_2 + 3x_3 + 6x_4 \rightarrow Max \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in N \end{cases}$$

Bài 4:

Giả sử có n công việc và n thợ. Chi phí trả cho người thợ i để làm công việc j là Cij . Mỗi công việc chỉ do một thợ thực hiện và ngược lại.

Tìm cách thuê các thợ làm việc sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất.

Tài liệu tham khảo

Tài liệu tham khảo

[1] Cấu trúc dữ liệu và thuật toán, Đinh Mạnh Tường, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 2000

[2] Thiết kế và đánh giá thuật toán, Trần Tuấn Minh, Khoa Toán Tin, Trường Đại học Đà Lạt

[3] Thiết kế thuật toán, Vũ Đình Hóa, Đỗ Trung Kiên, Đại học sư phạm Hà Nội

[4] Cẩm nang thuật toán, Robert Sedgewick, Chủ biên dịch: GS. Hoàng Kiếm, NXB KH-KT, 1996.

[5] Data Structures & Algorithms in Java – SAMS, Robert Lafore, 2001.

[6] Algorithms, Robert Sedgewick, Addison-Wesley Publishing, 1983

[7] Garey M.R., Johnson D.S. Computer and intractability.

[8] NIKLAUS WIRTH , “Algorithms + data structures = Programs”,

Prentice-Hall INC,1976

Tham gia đóng góp

Tài liệu: Thiết kế và đánh giá thuật toán

Biên tập bởi: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://voer.edu.vn/c/018b828c

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Lời nói đầu

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/e172a546

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Giới thiệu môn học, phương pháp học

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/22d8cab1

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Khái niệm thuật toán:

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/831f7a7e

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Các vấn đề liên quan đến thuật toán

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/afe7c577

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Phương pháp liệt kê từng bước

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/e86a25c0

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Phương pháp sơ đồ

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/7c66c8e4

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Mã giả (pseudocode)

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/b9271c28

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Phân tích thuật toán

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/ea2dcea4

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: O(f(x)) và đánh giá thời gian thực hiện thuật toán.

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/58f62913

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Các qui tắc để đánh giá thời gian thực hiện thuật toán

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/cbf4ebdf

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Đánh giá thủ tục (hoặc hàm) đệ qui.

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/0b68f842

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Một số phương pháp thiết kế

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/f7896daf

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Cơ bản về thuật toán chia để trị

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/a0b79e29

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Sơ đồ chung của thuật toán

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/61b5ac67

Module: Tìm kiếm nhị phân

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/73ca63fa

Module: Bài toán Min_Max

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/cc6375ea

Module: Thuật toán nhân 2 ma trận

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/9c1d5a11

Module: Thuật toán sắp xếp

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/ff96502c

Module: Bài toán hoán đổi

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/17f63522

Module: Sơ đồ chung của thuật toán quay lui

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/f648aacc

Module: Bài toán ngựa đi tuần

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/d17c1b89

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán 8 quân hậu

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/a5a1e2a6

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán tìm kiếm đường đi trên đồ thị

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/78261337

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Một số bài toán khác

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/524d191a

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Sơ đồ chung của thuật toán

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/5631b6e2

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán người du lịch

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/c2e097f6

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán cái túi xách

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/f702460d

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Thuật toán Tham Lam

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/b658e813

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán người du lịch

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/fc6110ad

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Thuật toán Dijkstra – Tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/483d2e18

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Sơ đồ chung của thuật toán

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/4b084e80

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán thực hiện dãy phép nhân ma trận

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/a3625765

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Tập độc lớn nhất trên cây

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/67dc577e

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán dãy con lớn nhât

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/9807ec5f

Giấy phép: http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

Module: Bài toán dãy con chung dài nhất

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/43b6c702

Module: Bài tập tổng kết

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/e4dda311

Module: Tài liệu tham khảo

Các tác giả: Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

URL: http://www.voer.edu.vn/m/8ead09dc

Chương trình Thư viện Học liệu Mở Việt Nam

Chương trình Thư viện Học liệu Mở Việt Nam (Vietnam Open Educational Resources – VOER) được hỗ trợ bởi Quỹ Việt Nam. Mục tiêu của chương trình là xây dựng kho Tài nguyên giáo dục Mở miễn phí của người Việt và cho người Việt, có nội dung phong phú. Các nội dung đều tuân thủ Giấy phép Creative Commons Attribution (CC-by) 4.0 do đó các nội dung đều có thể được sử dụng, tái sử dụng và truy nhập miễn phí trước hết trong trong môi trường giảng dạy, học tập và nghiên cứu sau đó cho toàn xã hội.

Với sự hỗ trợ của Quỹ Việt Nam, Thư viện Học liệu Mở Việt Nam (VOER) đã trở thành một cổng thông tin chính cho các sinh viên và giảng viên trong và ngoài Việt Nam. Mỗi ngày có hàng chục nghìn lượt truy cập VOER (www.voer.edu.vn) để nghiên cứu, học tập và tải tài liệu giảng dạy về. Với hàng chục nghìn module kiến thức từ hàng nghìn tác giả khác nhau đóng góp, Thư Viện Học liệu Mở Việt Nam là một kho tàng tài liệu khổng lồ, nội dung phong phú phục vụ cho tất cả các nhu cầu học tập, nghiên cứu của độc giả.

Nguồn tài liệu mở phong phú có trên VOER có được là do sự chia sẻ tự nguyện của các tác giả trong và ngoài nước. Quá trình chia sẻ tài liệu trên VOER trở lên dễ dàng như đếm 1, 2, 3 nhờ vào sức mạnh của nền tảng Hanoi Spring.

Hanoi Spring là một nền tảng công nghệ tiên tiến được thiết kế cho phép công chúng dễ dàng chia sẻ tài liệu giảng dạy, học tập cũng như chủ động phát triển chương trình giảng dạy dựa trên khái niệm về học liệu mở (OCW) và tài nguyên giáo dục mở (OER) . Khái niệm chia sẻ tri thức có tính cách mạng đã được khởi xướng và phát triển tiên phong bởi Đại học MIT và Đại học Rice Hoa Kỳ trong vòng một thập kỷ qua. Kể từ đó, phong trào Tài nguyên Giáo dục Mở đã phát triển nhanh chóng, được UNESCO hỗ trợ và được chấp nhận như một chương trình chính thức ở nhiều nước trên thế giới.