



Thuật toán Prim

Bởi:

Khoa CNTT ĐHSP KT Hưng Yên

Thuật toán Prim

Thuật toán Kruskal làm việc kém hiệu quả với những đồ thị dày (đồ thị với số cạnh $m \approx n(n-1)/2$). Trong trường hợp đó thuật toán Prim tỏ ra hiệu quả hơn. Thuật toán Prim còn được gọi là phương pháp lân cận gần nhất. Trong phương pháp này bắt đầu từ một đỉnh tùy ý của đồ thị, đầu tiên ta nối s với đỉnh lân cận gần nó nhất, chẳng hạn là đỉnh y . Nghĩa là trong số các cạnh kề của đỉnh s , cạnh (s,y) có độ dài nhỏ nhất. Tiếp theo trong số các cạnh kề với hai đỉnh s hoặc y ta tìm cạnh có độ dài nhỏ nhất, cạnh này dẫn đến đỉnh thứ ba z , và ta thu được cây bộ phận gồm 3 đỉnh và 2 cạnh. Quá trình này sẽ tiếp tục cho đến khi ta thu được cây gồm n đỉnh và $n-1$ cạnh sẽ chính là cây khung nhỏ nhất cần tìm.

Giả sử đồ thị cho bởi ma trận trọng số $C = \{c[i,j], i, j= 1, 2, \dots, n\}$. trong quá trình thực hiện thuật toán, ở mỗi bước để có thể nhanh chóng chọn đỉnh và cạnh cần bổ sung vào cây khung, các đỉnh của đồ thị sẽ được gán cho các nhãn. Nhãn của một đỉnh v sẽ gồm hai phần và có dạng $[d[v], \text{near}[v]]$, trong đó $d[v]$ dùng để ghi nhận độ dài của cạnh có độ dài nhỏ nhất trong số các cạnh nối với đỉnh v với các đỉnh của cây khung đang xây dựng (ta sẽ gọi là khoảng cách từ đỉnh v đến tập đỉnh của cây khung), nói một cách chính xác

$$d[v] := \min \{c[v,w] : w \in V_H\} (= c[v,z]),$$

còn $\text{near}[v]$ ghi nhận đỉnh của cây khung gần v nhất ($\text{near}[v] := z$).

Thuật toán Prim được mô tả đầy đủ trong thủ tục sau:

Procedure Prim;

Begin

(* bước khởi tạo *)

chọn s là một đỉnh nào đó của đồ thị;

Thuật toán Prim

$VH := \{s\}$; $T := \emptyset$; $d[s] := 0$; $near[s] := s$.

For $v \in V \setminus VH$ do

Begin

$D[v] := c[s,v]$;

$near[v] := s$;

End;

(* buoc lap *)

$stop := false$;

while not stop do

begin

tim $u \in V \setminus VH$ thoa man:

$d[u] = \min \{d[v] : u \in V \setminus VH\}$;

$VH := VH \cup \{u\}$; $T := T \cup \{(u, near[u])\}$;

If $|VH| = n$ then

Begin

$H = (VH, T)$ la cay khung nho nhat cua do thi;

$Stop := true$;

End

Else

For $v \in V \setminus VH$ do

If $d[v] > c[u,v]$ then

Begin

Thuật toán Prim

$d[v] := c[u,v];$

$near[v] := u;$

End;

end;

End;

Ví dụ 5.2

Tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị xét trong ví dụ 5.1 theo thuật toán Prim. Ma trận trọng số của đồ thị có dạng

		1	2	3	4	5	6
	1	0	33	17	∞	∞	∞
	2	33	0	18	20	∞	∞
C =	3	17	18	0	16	4	∞
	4	∞	20	16	0	9	8
	5	∞	∞	4	9	0	14
	6	∞	∞	∞	8	14	0

Bảng dưới đây ghi nhận của các đỉnh trong các bước lặp của thuật toán, đỉnh đánh dấu * là đỉnh được chọn để bổ sung vào cây khung (khi đó nhãn của nó không còn bị biến đổi trong các bước lặp tiếp theo, vì vậy ta đánh dấu – để ghi nhận điều đó):

Bước lặp	Đỉnh 1	Đỉnh 2	Đỉnh 3	Đỉnh 4	Đỉnh 5	Đỉnh 6	V_H	T
Khởi tạo	[0,1]	[33,1]	[17,1]*	[∞ ,1]	[∞ ,1]	[∞ ,1]	1	\emptyset
1	-	[18,3]	-	[16,3]	[4,3]*	[∞ ,1]	1,3	(3,1)
2	-	[18,3]	-	[9,5]	-	[14,5]	1,3,5	(3,1), (5,3)
3	-	[18,3]	-	-	-	[8,4]	1,3,5,4	(3,1), (5,3), (4,5)
4	-	[18,3]*	-	-	-	-	1,3,5,4,6	(3,1), (5,3), (4,5), (6,4)

Thuật toán Prim

5	-	-	-	-	-	-	1,3,5,4,6,2	(3,1), (5,3), (4,5), 6,4), (2,3)
---	---	---	---	---	---	---	-------------	-------------------------------------