Trường Đại học Nông nghiệp I

PGS. TS. NGUYỄN HẢI THANH

Tối ưu hóa

Giáo trình cho ngành Tin học và Công nghệ thông tin

Nhà xuất bản Bách khoa – Hà Nội

Mã số: 920 – 2006 / CBX / 01 – 130 / BKHN

MỤC LỤC

Mở đầu

Tối ưu hóa, được khởi nguồn như một ngành của Toán học, có rất nhiều ứng dụng hiệu quả và rộng rãi trong quy hoạch tài nguyên, thiết kế chế tạo máy, điều khiển tự động, quản trị kinh doanh, kiến trúc đô thị, công nghệ thông tin, trong việc tạo nên các hệ hỗ trợ ra quyết định trong quản lý và phát triển các hệ thống lớn. Chính vì vậy, các lĩnh vực của Tối ưu hóa ngày càng trở nên đa dạng, mang nhiều tên gọi khác nhau như Quy hoạch toán học, Điều khiển tối ưu, Vận trù học, Lý thuyết trò chơi… Hiện nay, môn học Tối ưu hóa được đưa vào giảng dạy trong nhiều chương trình đào tạo đại học cho các ngành khoa học cơ bản, kỹ thuật – công nghệ, kinh tế – quản lý, sinh học – nông nghiệp, xã hội – nhân văn, sinh thái – môi trường … với thời lượng thông thường từ ba cho tới sáu học trình. Đối với sinh viên các ngành Tin học, Công nghệ thông tin và Toán – Tin ứng dụng, môn học Tối ưu hóa là một môn học cơ sở không thể thiếu. Giáo trình "Tối ưu hóa" này được biên soạn với mục đích cung cấp cho sinh viên năm thứ hai ngành Tin học của Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Nông nghiệp I, một số kiến thức cơ bản về các lĩnh vực quan trọng của Tối ưu hóa. Qua giáo trình này, sinh viên cần nắm được cơ sở lý thuyết ở một mức độ nhất định, nắm chắc các thuật toán tối ưu cơ bản để áp dụng trong việc xây dựng các phần mềm tối ưu tính toán giải các bài toán kinh tế, công nghệ, kỹ thuật và quản lý.

Chương I giới thiệu tổng quan và ngắn gọn bài toán tối ưu tổng quát và phân loại các bài toán tối ưu cơ bản, cũng như giới thiệu một số ví dụ và mô hình tối ưu phát sinh trong thực tế. Phần đầu trình bày về Quy hoạch tuyến tính bao gồm chương II, III và IV. Phần này nhấn mạnh vào việc trình bày các phương pháp và thuật toán cổ điển của Quy hoạch tuyến tính, như phương pháp đơn hình (bao gồm cả phương pháp hai pha và phương pháp đơn hình cải biên dạng ma trận nghịch đảo), phương pháp đơn hình đối ngẫu, phương pháp thế vị giải bài toán vận tải, các phương pháp cắt Gomory và nhánh cận Land – Doig cũng như phương pháp quy hoạch động giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên. Phần sau của giáo trình bao gồm hai chương về Quy hoạch phi tuyến. Chương V trình bày một số phương pháp và thuật toán tối ưu phi tuyến không có ràng buộc và có ràng buộc, bao gồm phương pháp đường dốc nhất, phương pháp Newton, phương pháp hướng liên hợp, các phương pháp giải quy hoạch toàn phương thông dụng, phương pháp quy hoạch tách và quy hoạch hình học. Chương VI giới thiệu về cơ sở lý thuyết của quy hoạch lồi và quy hoạch phi tuyến. Phần giới thiệu về một lớp phương pháp điểm trong giải bài toán quy hoạch tuyến tính ở cuối giáo trình mang tính chất tham khảo, có thể dành cho sinh viên nghiên cứu theo nhóm và thảo luận. Việc chứng minh một số định lý khó nên để sinh viên tự nghiên cứu, không có tính bắt buộc. Khi biên soạn, chúng tôi luôn có một nguyện vọng là làm sao việc trình bày các phương pháp tối ưu đề cập tới trong giáo trình cũng phải đáp ứng được "tiêu chuẩn tối ưu", sinh viên phải hiểu được và làm được. Chính vì vậy, các phương pháp luôn được trình bày một cách cụ thể thông qua các ví dụ mẫu từ dễ tới khó, mà những ví dụ này có thể được sử dụng nhiều lần để tiết kiệm thời gian.

*Một số tài liệu người học có thể tham khảo thêm về Quy hoạch tuyến tính là: **Nguyễn Đức Nghĩa**, Tối ưu hóa, Nxb. Giáo dục, 2002; **Phan Quốc Khánh – Trần Huệ Nương**, Quy hoạch tuyến tính, Nxb. Giáo dục, 2003. Về Quy hoạch phi tuyến có thể đọc thêm một số chương liên quan trong các sách tham khảo sau: **Bazaraa M.S, Shetty C.M**,* Nonlinear programming: Theory *and algorithms, John Wiley and Sons, New York, 1990; **Horst R, Hoàng Tụy**, Global optimization: Deterministic approaches, Springer Verlag, Berlin, 1993; **Bùi Thế Tâm – Trần Vũ Thiệu**, Các phương pháp tối ưu hóa, Nxb. Giao thông vận tải, 1998. Người đọc cũng có thể sử dụng Internet để tìm kiếm các tạp chí và tài liệu liên quan.*

Chương I

Bài toán tối ưu tổng quát và ứng dụng

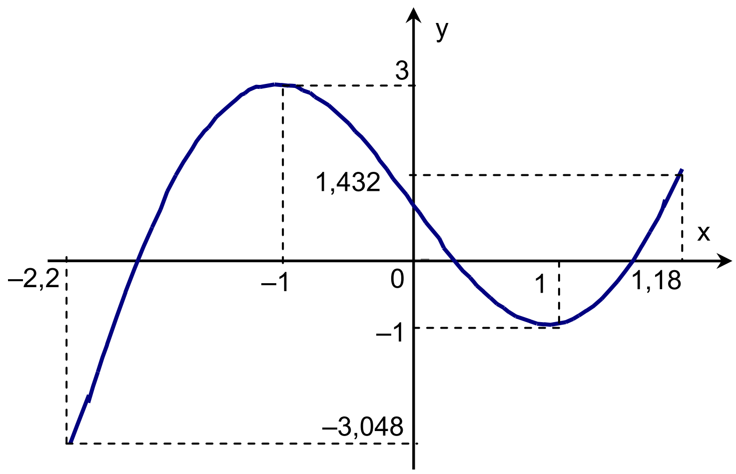
1. Bài toán tối ưu tổng quát và phân loại

1.1. Bài toán tối ưu tổng quát

Tối ưu hóa là một trong những lĩnh vực kinh điển của toán học có ảnh hưởng đến hầu hết các lĩnh vực khoa học – công nghệ và kinh tế – xã hội. Trong thực tế, việc tìm giải pháp tối ưu cho một vấn đề nào đó chiếm một vai trò hết sức quan trọng. Phương án tối ưu là phương án hợp lý nhất, tốt nhất, tiết kiệm chi phí, tài nguyên, nguồn lực mà lại cho hiệu quả cao.

Ví dụ 1. Tìm $x \in D = [-2,2,\ 1,8] \subset R^1$ sao cho $f(x) = x^3 - 3x + 1 \to$ Max.

Bài toán tối ưu trên có dạng cực đại hoá được giải như sau: Cho $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, ta có các điểm tới hạn là $x = -1$ và $x = +1$. Xét giá trị hàm số f(x) tại các điểm tới hạn vừa tìm được và tại các giá trị $x = -2,2$ và $x = 1,8$ (các điểm đầu mút của đoạn [–2,2, 1,8]), ta có f(–2,2) = –3,048 , f(–1) = 3, f(1) = –1, f(1,8) = 1,432. Vậy giá trị x cần tìm là x = –1. Kết quả của bài toán được minh hoạ trên hình I.1.



Hình I.1. *Đồ thị hàm f(x)*

Cho hàm số f: $D \subset R^n \to R$. Bài toán tối ưu tổng quát có dạng: Max (Min) f(x), với $x \in D \subset R^n$. Như vậy, cần tìm điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$ sao cho hàm mục tiêu f(x) đạt được giá trị lớn nhất đối với bài toán Max – cực đại hoá (giá trị bé nhất đối với bài toán Min – cực tiểu hoá).

Điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$ được gọi là phương án khả thi (hay phương án chấp nhận được hoặc phương án, nếu nói vắn tắt) của bài toán tối ưu: *Max (Min) f(x), với* $x \in D \subset R^n$. Miền D được gọi là miền ràng buộc. Các toạ độ thành phần của điểm x được gọi là các biến quyết định, còn x cũng được gọi là véc tơ quyết định.

Xét bài toán cực đại hoá: *Max f(x), với* $x \in D \subset R^n$. Điểm $x^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*\right) \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) toàn cục nếu $x^* \in D$ và $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$. Điểm $\overline{x} \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) địa phương nếu $\overline{x} \in D$ và tồn tại một lân cận N_ε đủ nhỏ của điểm $\overline{x}$ sao cho $f(\overline{x}) \geq f(x), \forall x \in N_\varepsilon \cap D$.

Đối với bài toán cực tiểu hoá *Min f(x), với* $x \in D \subset R^n$, điểm $x^* \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) toàn cục nếu $x^* \in D$ và $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$. Điểm $\overline{x} \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) địa phương nếu $\overline{x} \in D$ và tồn tại một lân cận N_ε đủ nhỏ của điểm $\overline{x}$ sao cho $f(\overline{x}) \leq f(x), \forall x \in N_\varepsilon \cap D$.

Dễ thấy, mọi phương án tối ưu toàn cục cũng là phương án tối ưu địa phương, trong khi đó một phương án tối ưu địa phương không nhất thiết là phương án tối ưu toàn cục. Trên hình I.1, điểm x = 1 chỉ là phương án tối ưu địa phương khi xét bài toán cực tiểu hoá.

Ví dụ 2. Xét bài toán tối ưu sau: Max $f(x) = 8x_1 + 6x_2$, với điều kiện ràng buộc

$$x \in D = \{ (x_1, x_2) \in R^2: 4x_1 + 2x_2 \leq 60;\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

Bài toán tối ưu trên đây còn được gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính. Người ta đã chứng minh được rằng mọi phương án tối ưu địa phương của bài toán quy hoạch tuyến tính cũng đồng thời là phương án tối ưu toàn cục.

1.2. Phân loại các bài toán tối ưu

Các bài toán tối ưu, cũng còn được gọi là các bài toán quy hoạch toán học, được chia ra thành các lớp sau:

– Bài toán quy hoạch tuyến tính (BTQHTT),

– Bài toán tối ưu phi tuyến hay còn gọi là bài toán quy hoạch phi tuyến (BTQHPT), bao gồm cả bài toán quy hoạch lồi (BTQHL) và bài toán quy hoạch toàn phương (BTQHTP),

– Bài toán tối ưu rời rạc, bài toán tối ưu nguyên và hỗn hợp nguyên.

– Bài toán quy hoạch động,

– Bài toán quy hoạch đa mục tiêu,

– Bài toán quy hoạch ngẫu nhiên / mờ ...

Các phương pháp toán học giải các lớp bài toán tối ưu tổng quát như nêu trên đây được gọi là các phương pháp tối ưu toán học (hay các phương pháp quy hoạch toán học). Trong giáo trình này, trước hết chúng ta nghiên cứu các phương pháp giải BTQHTT, bao gồm cả các BTQHTT nguyên và hỗn hợp nguyên. Sau đó, chúng ta sẽ xem xét các phương pháp giải một số dạng đặc biệt của BTQHPT. Các phương pháp được xem xét chủ yếu về khía cạnh thủ tục tính toán thông qua các ví dụ đơn giản, nhằm giúp cho sinh viên ngành Tin học, Công nghệ thông tin khi học giáo trình này vào năm học thứ hai có thể làm quen với tư duy lập trình tính toán. Phần cuối của giáo trình sẽ đề cập tới một số cơ sở lý thuyết của giải tích lồi và quy hoạch phi tuyến, là các vấn đề có tính chất nền tảng đối với những sinh viên quan tâm và có hướng tiếp tục nghiên cứu lĩnh vực Tối ưu hóa.

2. Ứng dụng bài toán tối ưu giải quyết các vấn đề thực tế

2.1. Phương pháp mô hình hoá toán học

Nhiều vấn đề phát sinh trong thực tế có thể giải được bằng cách áp dụng các phương pháp tối ưu toán học. Tuy nhiên, điểm mấu chốt ở đây là từ bài toán thực tế cần xây dựng được một mô hình tối ưu thích hợp dựa vào các dạng bài toán tối ưu đã biết. Sau đó cần áp dụng phương pháp tối ưu toán học và quy trình tính toán thích hợp để tìm ra lời giải cho mô hình đã đặt ra.

Các bước cần thiết tiến hành khi áp dụng phương pháp mô hình hoá toán học có thể được phát biểu một cách khái quát như sau:

– Trước hết phải khảo sát bài toán thực tế và phát hiện vấn đề cần giải quyết.

– Phát biểu các điều kiện ràng buộc và mục tiêu của bài toán dưới dạng định tính. Sau đó lựa chọn các biến quyết định / các ẩn số và xây dựng mô hình định lượng còn gọi là mô hình toán học.

– Thu thập dữ liệu và lựa chọn phương pháp toán học thích hợp để giải quyết mô hình trên. Trong trường hợp mô hình toán học là mô hình tối ưu, cần lựa chọn phương pháp tối ưu thích hợp để giải mô hình.

– Xác định quy trình giải / thuật toán. Có thể giải mô hình bằng cách tính toán thông thường trên giấy. Đối với các mô hình lớn, bao gồm nhiều biến và nhiều điều kiện ràng buộc cần tiến hành lập trình và giải mô hình trên máy tính để tìm ra phương án thỏa mãn mô hình.

– Đánh giá kết quả tính toán. Trong trường hợp phát hiện thấy có kết quả bất thường, cần xem xét nguyên nhân, kiểm tra và chỉnh sửa lại mô hình hoặc dữ liệu đầu vào hoặc quy trình giải / thuật toán / chương trình máy tính.

– Kiểm chứng các kết quả tính toán trên thực tế. Nếu các kết quả thu được được coi là hợp lý, phù hợp với thực tế hay được các chuyên gia đánh giá là có hiệu quả hơn so với các phương án trước đây thì cần tìm cách triển khai phương án tìm được trên thực tế.

Rõ ràng rằng để giải quyết các vấn đề phát sinh từ các bài toán thực tế cần có được sự hợp tác chặt chẽ giữa các chuyên gia trong lĩnh vực chuyên môn, các chuyên gia Toán, Toán ứng dụng và các chuyên gia Tin học, kỹ sư lập trình. Điều này là đặc biệt cần thiết khi giải quyết các bài toán cho các hệ thống lớn. Việc thiết lập được một mô hình hợp lý, phản ánh được bản chất của bài toán thực tế đồng thời khả thi về phương diện tính toán luôn vừa mang tính khoa học thuần túy, vừa có tính nghệ thuật. Các thuật ngữ sau thường gặp khi áp dụng phương pháp mô hình hoá toán học:

– Toán ứng dụng (*Applied Mathematics*).

– Vận trù học (*Operations Research* viết tắt là *OR*).

– Khoa học quản lý (*Management Science* viết tắt là *MS*).

– Ứng dụng máy tính (*Computer Applications*).

– Mô hình tối ưu (*Optimization Models*)…

2.2. Một số ứng dụng của bài toán tối ưu

Những năm gần đây, nhiều bài toán thực tế được giải quyết bằng phương pháp mô hình hóa toán học rất thành công. Trong số các mô hình toán học đã được áp dụng có nhiều mô hình tối ưu, được giải quyết thông qua các bài toán tối ưu kinh điển. Trong trường hợp hàm mục tiêu cũng như tất cả các ràng buộc đều là các hàm tuyến tính, thì bài toán tối ưu là BTQHTT. BTQHTT có thể giải được bằng một số phương pháp tối ưu quen biết (như phương pháp đơn hình, phương pháp đơn hình cải biên hay các phương pháp điểm trong). BTQHTT đã và đang được sử dụng rộng rãi trong quy hoạch tài nguyên, quản lý sử dụng đất cũng như nhiều lĩnh vực của quản lý, kinh tế và quản trị kinh doanh.

Trong trường hợp hoặc hàm mục tiêu hoặc một trong số các ràng buộc là phi tuyến, chúng ta có BTQHPT. Trong các mô hình tối ưu dựa trên BTQHPT nói chung, và trong các mô hình tối ưu trong lĩnh vực nông nghiệp nói riêng, lời giải tối ưu toàn cục có một ý nghĩa quan trọng. Chẳng hạn trong thiết kế máy nông nghiệp, sau khi dùng phương pháp phân tích hồi quy nhiều chiều, ta thường thu được hàm mục tiêu có dạng phi tuyến. Các bài toán tối ưu toàn cục cũng có thể nảy sinh trong quy hoạch kinh tế – sinh thái vùng, hay xác định cơ cấu đất canh tác – cây trồng. Bài toán đặt ra là phải tìm được lời giải tối ưu toàn cục. Có rất nhiều phương pháp giải các lớp bài toán tối ưu phi tuyến riêng biệt, nhưng chưa có phương pháp nào tỏ ra hữu hiệu cho mọi bài toán tối ưu phi tuyến, đặc biệt là cho các bài toán với một số hay tất cả các biến quyết định nhận các giá trị nguyên.

Sau đây là các ví dụ minh hoạ một số ứng dụng của bài toán tối ưu.

Ví dụ 3. Bài toán quy hoạch sử dụng đất *(Mô hình tối ưu tuyến tính giải bài toán quy hoạch sử dụng đất trên địa bàn xã Đông Dư, huyện Gia Lâm, tỉnh Hà Nội)*

Chúng ta xét mô hình tối ưu với mục tiêu cần cực đại hoá là hiệu quả kinh tế. Để thiết lập mô hình, trước hết chọn các biến quyết định. Dựa vào kết quả các dữ liệu đã thu được, ta chọn các biến quyết định như sau: x_j với $j = 1, 2, \ldots, 18$ là diện tích các loại cây trồng, đơn vị tính là ha (theo thứ tự là: lúa xuân, lúa mùa, ngô xuân, ngô đông, ngô bao tử đông, lạc xuân, đậu xanh xuân, đậu tương đông đất chuyên màu, đậu tương đông đất ba vụ, dưa chuột xuân, dưa chuột bao tử, mướp đắng xuân, rau mùi tàu, rau gia vị, đậu cô ve đông, ớt xuân, cà chua xuân, cà chua đông), x_{19} là diện tích ao hồ thả cá, x_j với $j = 20, \ldots, 23$ là số đầu vật nuôi trong năm (trâu, bò, lợn, gia cầm). Còn x_{24} là số công lao động thuê ngoài, x_{25} là lượng tiền vốn vay ngân hàng, đơn vị tính là nghìn đồng. Lúc đó chúng ta có BTQHTT sau với 33 ràng buộc (chưa kể điều kiện không âm của các biến).

Hiệu quả kinh tế cần cực đại hóa là: $f(x) = 4306{,}14x_1 + 4168{,}73x_2 + 3115{,}21x_3 + 3013{,}11x_4 + 4158{,}68x_5 + 4860{,}91x_6 + 4295{,}31x_7 + 3706{,}11x_8 + 3788{,}25x_9 + 12747{,}31x_{10} + 12752{,}96x_{11} + 12064{,}81x_{12} + 79228{,}88x_{13} + 35961{,}31x_{14} + 10823{,}91x_{15} + 7950{,}16x_{16} + 7928{,}06x_{17} + 5738{,}46x_{18} + 11129{,}50x_{19} + 429{,}00x_{20} + 674{,}00x_{21} + 219{,}50x_{22} + 11{,}10x_{23} - 15{,}50x_{24} - 0{,}12x_{25} \to \text{Max}$.

Các ràng buộc hay các điều kiện hạn chế được định lượng như sau:

$x_1 \le 80{,}88$; $x_2 \le 75{,}78$; $x_3 \le 64{,}89$; $x_4 \le 64{,}89$; $x_5 \le 10{,}50$; $x_6 \le 64{,}89$; $x_7 \le 64{,}89$; $x_8 \le 16{,}50$; $x_9 \le 45{,}30$; $x_{10} \le 5{,}50$; $x_{11} \le 8{,}50$; $x_{12} \le 6{,}80$; $x_{13} \le 13{,}70$; $x_{14} \le 14{,}50$; $x_{15} \le 4{,}80$; $x_{16} \le 4{,}50$; $x_{17} \le 4{,}20$; $x_{18} \le 10{,}20$; $x_{19} \le 33{,}11$; $x_{20} \le 40{,}00$; $x_{21} \le 180{,}00$; $x_{22} \le 4280$; $x_{23} \le 18800$;

$x_5 + x_9 + x_{11} + x_{13} + x_{18} \leq 45,30$; $x_3 + x_6 + x_7 + x_{10} + x_{12} + x_{16} + x_{17} \leq 64,89$; $x_4 + x_8 + x_{14} + x_{15} \leq 64,89$; $x_1 + x_{13} \leq 80,88$; $x_2 + x_{13} \leq 75,88$;

$205,5x_1 + 150x_3 + 75,75x_4 + 75x_5 + 225,5x_6 + 221,5x_7 + 102,7x_8 + 100,75x_9 + 360x_{10} + 140x_{11} + 385x_{12} + 1833,6x_{13} + 1446,3x_{14} + 210,25x_{15} + 410,5x_{16} + 360,5x_{17} + 176x_{18} + 67x_{19} + 20x_{20} + 16x_{21} + 9x_{22} + 0,3x_{23} - x_{24} \leq 226149,00$;

$201,5x_2 + 150x_3 + 75,25x_4 + 102,7x_8 + 100,75x_9 + 140x_{11} + 2475,4x_{13} + 1446,3x_{14} + 210,25x_{15} + 176x_{18} + 58x_{19} + 16x_{20} + 12x_{21} + 7x_{22} + 0,2x_{23} - x_{24} \leq 152190,00$;

$2871,89x_1 + 2691,89x_2 + 2243,62x_3 + 2243,66x_4 + 3630,89x_5 + 4780,06x_6 + 2229,11x_7 + 2401,41x_8 + 2326,88x_9 + 16440,61x_{10} + 16058,39x_{11} + 15960,61x_{12} + 68494,59x_{13} + 23146,11x_{14} + 13676,26x_{15} + 6061,76x_{16} + 11083,11x_{17} + 10391,89x_{18} + 18058x_{19} + 1223x_{20} + 1098,5x_{21} + 624,5x_{22} + 12x_{23} - 15,5x_{24} - x_{25} \leq 3881500$;

$3,5x_5 + 8x_6 + 3,5x_7 + 4,1x_8 + 3,5x_9 + 4,16x_{10} + 3,5x_{11} + 4x_{12} + 12,1x_{13} + 14,4x_{14} + 3,42x_{15} + 11,58x_{16} + 8x_{17} + 7,5x_{18} - 3x_{20} - 2x_{21} - 0,95x_{22} - 0,0052x_{23} \leq 0$; $5,1x_1 + 4,96x_2 + 3,85x_3 + 3,8x_4 \geq 921,25$;

Các biến đều phải thỏa mãn điều kiện không âm: $x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,25}$.

Bằng cách áp dụng phương pháp đơn hình để giải BTQHTT có thể tìm được phương án tối ưu của mô hình trên như sau:

$x_1 = 67,18$; $x_2 = 62,18$; $x_3 = 25,19$; $x_4 = 45,59$; $x_5 = 10,50$; $x_6 = 18,7$; $x_9 = 2,40$; $x_{10} = 5,50$; $x_{11} = 8,50$; $x_{12} = 6,80$; $x_{13} = 13,70$; $x_{14} = 14,50$; $x_{15} = 4,80$; $x_{16} = 4,50$; $x_{17} = 4,20$; $x_{18} = 10,20$; $x_{19} = 33,11$; $x_{20} = 40,00$; $x_{21} = 180$; $x_{22} = 4280$; $x_{23} = 18800$; $x_{25} = 2368646$. Hiệu quả kinh tế cực đại đạt được là 4325863 (nghìn đồng).

Ví dụ 4. Bài toán cực đại hoá giá trị sản xuất *(Mô hình tối ưu phi tuyến giải bài toán cực đại hoá giá trị sản xuất trên một héc ta nuôi cá tại huyện Văn Giang, tỉnh Hưng Yên)*

Sử dụng số liệu điều tra 112 hộ nuôi cá vùng đồng trong đê thuộc 4 xã thuộc huyện Văn Giang, Hưng Yên, để tìm phương trình hồi quy mũ, chúng ta nhận được hàm giá trị sản xuất (dạng Cobb – Douglas) chính là hàm mục tiêu cần cực đại hoá sau đây:

$$z = f(x) = 19,375\, x_1^{0,236} x_2^{0,104} x_3^{0,096} x_4^{0,056} x_5^{0,056} e^{0,168\, x6} e^{0,066\, x7} \to \text{Max}$$

trong đó:

z : giá trị sản xuất bình quân 1 ha 1 năm (triệu đồng / ha),

x_1 : chi phí giống bình quân 1 ha 1 năm (triệu đồng / ha),

x_2 : chi phí thức ăn bình quân 1 ha 1 năm (triệu đồng / ha),

x_3 : chi phí lao động bình quân 1 ha 1 năm (triệu đồng / ha),

x_4 : chi phí khấu hao và thuê đất bình quân 1 ha 1 năm (triệu đồng / ha),

x_5 : các chi phí khác bình quân 1 ha 1 năm (triệu đồng / ha),

x_6, x_7: các biến 0 – 1 giả định về hình thức nuôi,

$x_6 = 1$ đối với nuôi chuyên canh, $x_6 = 0$ đối với nuôi tổng hợp,

$x_7 = 1$ với hình thức nuôi 1 loại cá chính kết hợp với các loại cá khác,

$x_7 = 0$ với hình thức nuôi 2 loại cá chính kết hợp với các loại cá khác.

Đặt: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = TC$, với TC là mức đầu tư / tổng chi phí.

Tùy theo từng mức đầu tư / tổng chi phí ta có một trong các ràng buộc:

– Với mức đầu tư dưới 40 triệu đồng / ha: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 40$,

– Với mức đầu tư 40–50 triệu đồng / ha: $40 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 50$,

– Với mức đầu tư 50–60 triệu đồng / ha: $50 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 60$,

– Với mức đầu tư 60–70 triệu đồng / ha: $60 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 70$,

– Với mức đầu tư trên 70 triệu đồng / ha: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 70$.

Với hình thức nuôi ta có ràng buộc: $x_6 + x_7 = 1$(x_6, x_7 chỉ nhận giá trị 0 hoặc 1).

Trên đây là BTQHPT, với 5 biến liên tục và 2 biến nguyên dạng 0 – 1. Sử dụng phương pháp tối ưu phi tuyến thích hợp có tên gọi là RST2ANU để giải BTQHPT toàn cục hỗn hợp nguyên đã thiết lập trên đây ta có kết quả trong bảng I.1.

Bảng I.1. Kết quả cơ cấu đầu tư tối ưu vùng đồng

Đầu tư (tr/ha)	*< 40*	*40 – 50*	*50 – 60*	*60 – 70*	*> 70*
x_1	35 – 45%	39 – 45%	39 – 45%	35 – 45%	35 – 40%
x_2	15 – 20%	17 – 25%	17 – 23%	15 – 20%	18 – 25%
x_3	15 – 20%	15 – 20%	15 – 20%	16 – 19%	17 – 23%
x_4	10 – 15%	7 – 15%	8 – 15%	9 – 13%	10 – 15%
x_5	10 – 15%	10 – 15%	9 – 15%	9 – 15%	10 – 15%
Giá trị sản xuất (tr đ / ha)	< 78,1	78,1 – 88,3	88,3 – 97,5	97,5– 106	> 106
Thu nhập ròng (tr đ / ha)	–	38,1–38,3	38,3–37,5	37,5–36	–

Việc thực hiện cơ cấu đầu tư tối ưu làm giá trị sản xuất (GO) cũng như thu nhập ròng (NI = GO – TC) ở từng mức đầu tư tăng lên rõ rệt so với thực tế sản xuất tại địa phương. Đặc biệt, mức đầu tư 50 triệu đồng / ha cho ta thu nhập hỗn hợp cao nhất là 38,3 triệu đồng / ha, lớn hơn 8 triệu đồng / ha so với trước khi áp dụng cơ cấu đầu tư tối ưu cũng như hình thức nuôi thích hợp. Tại mức đầu tư này, cơ cấu đầu tư tối ưu là x_1 từ 19,6 – 21,5 triệu đồng (chiếm 39,2 – 42,2%), x_2 từ 8,6 – 9,8 triệu đồng (17,2 – 19,6%), x_3 từ 8,6 – 9,9 triệu đồng (17,2 – 19,8%), x_4 từ 4,7 – 6,4 triệu đồng
(9,4 – 12,8%), x_5 từ 4,9 – 6,3 triệu đồng (9,8 –12,6%) với hình thức nuôi chuyên canh ($x_6 = 1$).

Một cách cụ thể hơn, khi áp dụng phương pháp tối ưu thích hợp tại mức đầu tư 50 triệu đồng / ha có thể tìm được phương án tối ưu sau: $z_{max} = 88,360733$ với $x_1 = 21,498072$, $x_2 = 9,528987$, $x_3 = 8,758034$, $x_4 = 5,138906$, $x_5 = 5,076000$, $x_6 = 1$ và $x_7 = 0$.

Ví dụ 5. Bài toán tối ưu thông số sàng phân loại *(Mô hình tối ưu phi tuyến giải quyết vấn đề tính toán một số thông số hình học và động học của cơ cấu sàng phân loại dao động)*

Ví dụ này chỉ nêu vắn tắt một ứng dụng của mô hình tối ưu phi tuyến một mục tiêu trong việc tìm nghiệm của hệ phương trình phi tuyến phát sinh trong quá trình tính toán một số thông số hình học và động học của cơ cấu sàng phân loại dao động (cần chú ý rằng nhiều phương pháp tính toán thông dụng khác của giải tích số đã tỏ ra không hiệu quả):

$$\begin{cases} r\cos\varphi_1 + v\cos\varphi_2 + v_3'' \cos\varphi_3 + v_4\cos\varphi_4 - x_{C1} = 0, \\ r\sin\varphi_1 + v\sin\varphi_2 + v_3''\sin\varphi_3 + v_4\sin\varphi_4 - y_{C1} = 0, \\ r\cos\varphi_1 + v\cos\varphi_2 + v_3'\cos(\varphi_3 - \alpha) + v_5\cos\varphi_5 - x_{D1} = 0, \\ r\sin\varphi_1 + v\sin\varphi_2 + v_3'\sin(\varphi_3 - \alpha) + v_5\sin\varphi_5 - y_{D1} = 0. \end{cases}$$

Trong hệ phương trình phi tuyến trên các thông số đã biết là: $r = 0{,}05$m; $v = 0{,}30$m; $v_3'' = 0{,}15$m; $v_3' = 1{,}075$m; $v_3 = 1{,}025$m; $v_4 = 0{,}50$m; $v_5 = 0{,}40$m; $x_{C1} = 0{,}365$m; $y_{C1} = 0{,}635$m; $x_{D1} = 1{,}365$m; $y_{D1} = 0{,}635$m; $\alpha = \pi/8$.

Để giải hệ phương trình phi tuyến khi $\varphi_1 = k\pi/8$ (k = 0, …, 9), chúng ta cần cực tiểu hoá hàm mục tiêu sau:

$$z = (r\cos\varphi_1 + v\cos\varphi_2 + v_3''\cos\varphi_3 + v_4\cos\varphi_4 - x_{C1})^2 + (r\sin\varphi_1 + v\sin\varphi_2 + v_3''\sin\varphi_3 + v_4\sin\varphi_4 - y_{C1})^2 + (r\cos\varphi_1 + v\cos\varphi_2 + v_3'\cos(\varphi_3 - \alpha) + v_5\cos\varphi_5 - x_{D1})^2 + (r\sin\varphi_1 + v\sin\varphi_2 + v_3'\sin(\varphi_3 - \alpha) + v_5\sin\varphi_5 - y_{D1})^2 \to \min$$

Kết quả tính toán được tổng hợp trong bảng I.2 với $z_{min} = 0$.

Bảng I.2. Kết quả tính toán giá trị các thông số của sàng phân loại

$\varphi_1 \in [0,2\pi]$	$\varphi_2 \in [0,\pi]$	$\varphi_3 \in [0,\pi]$	$\varphi_4 \in [0,\pi]$	$\varphi_5 \in [0,\pi]$
0	0,226128	0,551311	1,783873	1,666775
π/18	0,199269	0,550518	1,784628	1,670250
2π/18	0,170835	0,550590	1,782751	1,668853
3π/18	0,143343	0,550490	1,778826	1,663697
4π/18	0,112669	0,552073	1,770032	1,652171
5π/18	0,090986	0,551991	1,759350	1,639575
6π/18	0,066036	0,553576	1,745374	1,622823
7π/18	0,051284	0,554296	1,730174	1,602970
8π/18	0,039053	0,555262	1,713242	1,581813
9π/18	0,033773	0,556277	1,695605	1,560720

Ví dụ 6. Bài toán thiết kế trục máy *(Mô hình quy hoạch phi tuyến đa mục tiêu giải quyết bài toán thiết kế trục máy)*

Trong ví dụ này chúng ta đề cập tới một mô hình tối ưu phi tuyến hai mục tiêu.

Mục tiêu 1 là cực tiểu hoá thể tích của trục máy:

$$f_1(x) = 0{,}785\ [x_1(6400 - x_2^2) + (1000 - x_1)\ (1000 - x_2^2)]\ (mm^3),$$

Mục tiêu 2 là cực tiểu hoá độ nén tĩnh của trục:

$$f_2(x) = 3{,}298\times10^{-5}\left[\left(\frac{1}{4{,}096\times10^7 - x_2^4} - \frac{1}{10^8 - x_2^4}\right)x_1^3 + \frac{10^9}{10^8 - x_2^4}\right](mm/N).$$

Ở đây, $x = (x_1, x_2)$ là véc tơ quyết định, với x_1, x_2 là các biến quyết định sau: x_1 – độ dài phần giáp nối trục, x_2 – đường kính trong của trục. Các thông số khác đã được thể hiện trong các hàm mục tiêu $f_1(x)$ và $f_2(x)$.

Vậy cần phải chọn các giá trị cho các biến quyết định (còn gọi là các biến thiết kế) x_1, x_2 để tối ưu hoá đồng thời các mục tiêu 1 và 2 trong các điều kiện ràng buộc sau:

$$\begin{cases} g_1(x) = 180 - \dfrac{9{,}78\times10^6 x_1}{4{,}096\times10^7 - x_2^4} \geq 0 & (1.1) \\ g_2\ (x) = 75{,}2 - x_2 \geq 0 & (1.2) \\ g_3\ (x) = x_2 - 40 \geq 0 & (1.3) \\ g_4\ (x) = x_1 \geq 0 & (1.4) \end{cases}$$

Các điều kiện (1.2), (1.3), (1.4) là dễ hiểu, còn điều kiện (1.1) nảy sinh là do yêu cầu: Một mặt, trục máy phải chịu đựng được tới mức tối đa lực F_{max} = 12000 N. Mặt khác, độ nén kết nối cho phép là 180 N/mm.

Việc phát biểu bài toán tối ưu đa mục tiêu dưới dạng toán học (chính là việc lập mô hình toán học cho vấn đề phát sinh) là một khâu rất quan trọng nhằm mô tả tốt nhất hành vi của hệ thống đang được xem xét, mặt khác nhằm tìm ra được các phương pháp tối ưu hoá có hiệu quả để đi tới một phương án đủ tốt và mang lại lợi ích. Sau đây, với mục đích tìm hiểu bước đầu, việc áp dụng phương pháp tương tác người – máy tính giải bài toán tối ưu hai mục tiêu đã được thiết lập trên đây sẽ được trình bày một cách vắn tắt.

Trước hết, hai mục tiêu $f_1(x)$ và $f_2(x)$ được chuyển thành hai hàm thuộc mờ phản ánh độ thoả mãn của người ra quyết định đối với từng mục tiêu. Các hàm thuộc mờ này là các hàm tuyến tính từng khúc, được viết dưới dạng giản lược như sau cho một số nút nội suy:

$$\mu_1(f_1) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f_1 \geq 6{,}594\times10^6 = a_1 \\ 0{,}5 & \text{nếu } f_1 = 4\times10^6 = b_1 \\ 1 & \text{nếu } f_1 \leq 2{,}944\times10^6 = c_1, \end{cases}$$

$$\mu_2(f_2) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f_2 \geq 0{,}499\times10^{-3} = a_2 \\ 0{,}5 & \text{nếu } f_2 = 0{,}450\times10^{-3} = b_2 \\ 1 & \text{nếu } f_2 \leq 0{,}338\times10^{-3} = c_2. \end{cases}$$

Lúc đó có thể áp dụng phép nội suy tuyến tính để tính các giá trị của $\mu_1(f_1)$ hoặc $\mu_2(f_2)$ tại các giá trị khác của f_1 hay f_2. Các hàm thuộc mờ này cho phép quy các đơn vị đo khác nhau của f_1 và f_2 vào cùng một thang bậc đo, đó là độ thỏa dụng của người ra quyết định / người giải bài toán. Phân tích hàm thuộc mờ μ_1, có thể thấy: người ra quyết định sẽ có độ thoả mãn 0 đối với mọi phương án $x = (x_1, x_2)$ làm cho $f_1 \geq 6,594\times10^6$, độ thoả mãn 1 nếu $f_1 \leq 2,944\times10^6$ và độ thoả mãn 0,5 nếu $f_1 = 4\times10^6$. Độ thoả mãn 0,5 được coi là độ thoả mãn tối thiểu và mức $f_1 = 4\times10^{-6} = b_1$ được gọi là mức ưu tiên tương ứng đối với mục tiêu f_1. Tương tự chúng ta có thể phân tích về hàm thuộc μ_2 và mức ưu tiên b_2.

Chúng ta xét hàm phi tuyến $g(x) = \text{Min}\ \{\mu_1[f_1(x)], \mu_2[f_2(x)]\}$ và bài toán max–min được thiết lập cho hai hàm mục tiêu riêng rẽ trên dưới dạng BTQHPT: Max $g(x) = \text{MaxMin}\{\mu_1[f_1(x)], \mu_2[f_2(x)]\}$ với các ràng buộc (1.1), (1.2), (1.3) và (1.4).

Việc giải BTQHPT trên đây được thực hiện nhờ một phương pháp tối ưu phi tuyến thích hợp, được cài đặt tự động trên máy tính để tìm ra các phương án tối ưu của mô hình phi tuyến hai mục tiêu ban đầu. Điều chỉnh thích hợp giá trị của các mức ưu tiên b_1 và b_2, có thể tìm được các phương án tối ưu khác nhau. Chẳng hạn, với $b_1 = 3,6\times10^6$, $b_2 = 0,435\times10^{-3}$ sẽ nhận được phương án tối ưu $x = (x_1, x_2) = (235,67; 67,67)$ với $f_1(x) = 3,58\times10^6$ và $f_2(x) = 0,433\times10^{-3}$. Đây là phương án được các chuyên gia đánh giá là hợp lý và được lựa chọn để triển khai trong việc thiết kế trục máy.

Chương II

Phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính

1. Mô hình quy hoạch tuyến tính

1.1. Phát biểu mô hình

Với mục đích tìm hiểu bước đầu, xét mô hình toán học sau đây, còn gọi là mô hình quy hoạch tuyến tính hay bài toán quy hoạch tuyến tính (BTQHTT), mà trong đó chúng ta muốn tối ưu hoá / cực đại hoá hay cực tiểu hoá hàm mục tiêu:

$$z = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \text{Max (Min)},$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0 \text{ (điều kiện không âm).} \end{cases}$$

Ví dụ 1. Xét BTQHTT: Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Cần tìm các giá trị của các biến quyết định x_1, x_2 để các ràng buộc được thoả mãn và hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán này có ý nghĩa kinh tế như sau: Giả sử một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm I cần có 4 đơn vị nguyên liệu loại A và 2 đơn vị nguyên liệu loại B, các chỉ tiêu đó cho một đơn vị sản phẩm loại II là 2 và 4. Lượng nguyên liệu dự trữ loại A và B hiện có là 60 và 48 (đơn vị). Hãy xác định phương án sản xuất đạt lợi nhuận lớn nhất, biết lợi nhuận / đơn vị sản phẩm bán ra là 8 và 6 (đơn vị tiền tệ) cho các sản phẩm loại I và II.

1.2. Phương pháp đồ thị

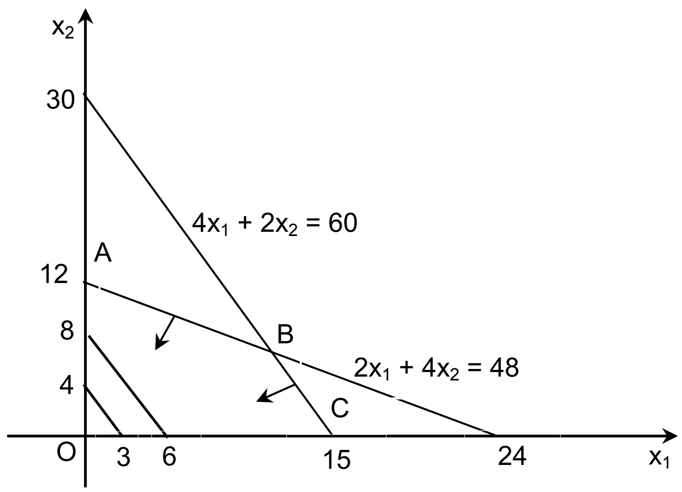
Phương pháp đồ thị có ý nghĩa minh họa và giúp hiểu bản chất vấn đề.

Bước 1: Vẽ miền các phương án khả thi (còn gọi là miền ràng buộc) là tập hợp các phương án khả thi (các phương án, nếu nói một cách ngắn gọn). Mỗi phương án được thể hiện qua bộ số (x_1, x_2), thoả mãn tất cả các ràng buộc đã có kể cả điều kiện không âm của các biến (xem hình II.1).

– Trước hết chúng ta vẽ đường thẳng có phương trình là $4x_1 + 2x_2 = 60$ bằng cách xác định hai điểm thuộc đường thẳng: $(x_1 = 0, x_2 = 30)$ và $(x_1 = 15, x_2 = 0)$.

Đường thẳng này chia mặt phẳng làm hai nửa mặt phẳng. Một phần gồm các điểm (x_1, x_2) thoả mãn: $4x_1 + 2x_2 \le 60$, phần còn lại thoả mãn: $4x_1 + 2x_2 \ge 60$. Ta tìm được nửa mặt phẳng thoả mãn: $4x_1 + 2x_2 \le 60$.

– Tương tự, có thể vẽ đường thẳng có phương trình là $2x_1 + 4x_2 = 48$ bằng cách xác định hai điểm thuộc đường thẳng là $(x_1 = 0, x_2 = 12)$ và $(x_1 = 24, x_2 = 0)$. Sau đó tìm nửa mặt phẳng thoả mãn: $2x_1 + 4x_2 \le 48$.



Hình II.1. *Phương pháp đồ thị giải bài toán quy hoạch tuyến tính*

– Lúc này, giao của hai nửa mặt phẳng tìm được trên đây cho ta tập hợp các điểm (x_1, x_2) thoả mãn các ràng buộc. Tuy nhiên, để thoả mãn điều kiện không âm của các biến, ta chỉ xét các điểm nằm trong góc phần tư thứ nhất. Vậy miền các phương án khả thi (nói vắn tắt hơn, miền phương án) là miền giới hạn bởi tứ giác OABC (còn gọi là tập lồi đa diện vì là miền tạo nên bởi giao của các nửa mặt phẳng).

Bước 2: Trong miền (OABC) ta tìm điểm (x_1, x_2) sao cho

$z = 8x_1 + 6x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Cách 1. Dùng đường đồng mức. Tùy theo giá trị của x_1, x_2 mà z có những mức giá trị khác nhau.

– Vẽ đường đồng mức: $8x_1 + 6x_2 = c$ ở mức c = 24, (ta có thể chọn giá trị c bất kỳ, nhưng chọn c = 24 là bội số chung của 6 và 8 để việc tìm tọa độ các điểm cắt hai trục tọa độ thuận lợi hơn). Dễ dàng tìm được hai điểm nằm trên đường đồng mức này là ($x_1 = 0$, $x_2 = 4$) và ($x_1 = 3$, $x_2 = 0$). Các điểm nằm trên đường đồng mức này đều cho giá trị hàm mục tiêu z = 24.

– Tương tự, có thể vẽ đường đồng mức thứ hai: $8x_1 + 6x_2 = 48$ đi qua hai điểm ($x_1 = 0$, $x_2 = 8$) và ($x_2 = 0$, $x_1 = 6$). Chúng ta nhận thấy, nếu tịnh tiến song song đường đồng mức lên trên theo hướng của véc tơ pháp tuyến $\vec{n}$ (8, 6) thì giá trị của hàm mục tiêu $z = 8x_1 + 6x_2$ tăng lên.

Vậy giá trị z lớn nhất đạt được khi đường đồng mức đi qua điểm B(12, 6) (tìm được $x_1 = 12$, $x_2 = 6$ bằng cách giải hệ phương trình $4x_1 + 2x_2 = 60$ và $2x_1 + 4x_2 = 48$).

Do đó, trong các phương án khả thi thì phương án tối ưu là ($x_1 = 12$, $x_2 = 6$). Tại phương án này, giá trị hàm mục tiêu là lớn nhất $z_{max} = 8 \times 12 + 6 \times 6 = 132$.

Nhận xét. Phương án tối ưu (nếu có) của một BTQHTT với miền phương án D, là một tập lồi đa diện có đỉnh, luôn đạt được tại ít nhất một trong các đỉnh của D. Các đỉnh này còn được gọi là các điểm cực biên của tập lồi đa diện D (chính xác hơn, điểm cực biên là điểm thuộc tập lồi đa diện, mà không thể tìm được một đoạn thẳng nào cũng thuộc tập lồi đa diện nhận điểm đó là điểm trong). Nhận xét trên đây là một định lý toán học (xem thêm chương VI) đã được chứng minh một cách tổng quát. Nói một cách hình ảnh, muốn đạt được phương án tối ưu cho các BTQHTT thì cần phải "mạo hiểm" đi xét các điểm cực biên của miền phương án.

Cách 2. Từ nhận xét trên, đối với BTQHTT có phương án tối ưu và có miền phương án D là tập lồi đa diện có đỉnh, ta có thể tìm phương án tối ưu bằng cách so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại các điểm cực biên của D. Quay lại ví dụ 1, ta có giá trị z tại O(0, 0): z (0, 0) = 0, tại A(0, 12): z(0, 12) = 72, tại C(15, 0): z(15, 0) = 120 và tại B(12, 6): z(12, 6) = 132 (đạt z_{max}).

Nhận xét. Xét BTQHTT có phương án tối ưu và có miền phương án D là tập lồi đa diện có đỉnh. Để tìm phương án tối ưu, ta xuất phát từ một điểm cực biên nào đó và tìm cách cải thiện hàm mục tiêu bằng cách đi tới điểm cực biên kề tốt hơn. Tiếp tục như vậy cho tới khi tìm được phương án tối ưu. Quy trình giải này bao gồm hữu hạn bước do số điểm cực biên là hữu hạn.

Đối với BTQHTT trong ví dụ 1, quy trình giải được minh hoạ như sau:

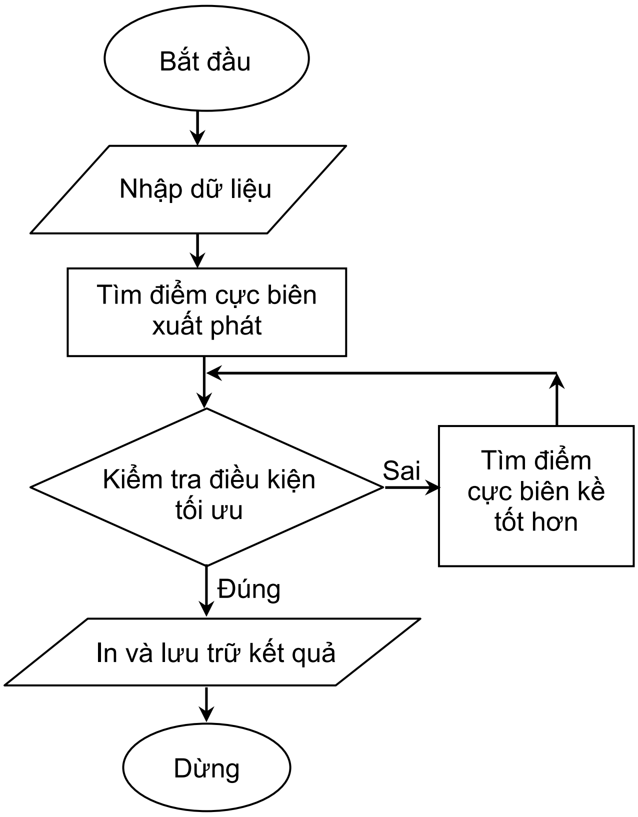
$$\begin{array}{ccccc} O(0, 0) & \rightarrow & A(0, 12) & \rightarrow & B(12, 6) \text{ dừng} \\ z = 0 & & z = 72 & & z = 132 \end{array}$$

hoặc:

$$\begin{array}{ccccc} O(0, 0) & \rightarrow & C(15, 0) & \rightarrow & B(12, 6) \text{ dừng} \\ z = 0 & & z = 120 & & z = 132 \end{array}$$

Quy trình giải BTQHTT tổng quát có sơ đồ khối giản lược như trình bày trên hình II.2. Trong sơ đồ trên, vì mục đích trình bày vấn đề đơn giản, chúng ta không đề cập tới các trường hợp khi BTQHTT có miền phương án là tập rỗng (lúc đó ta không tìm được phương án cực biên xuất phát) cũng như khi ta không tìm được điểm cực biên kề tốt hơn mặc dù điều kiện tối ưu chưa thoả mãn (lúc đó hàm mục tiêu z không bị chặn).

Sơ đồ khối



Hình II.2. *Sơ đồ khối giải BTQHTT*

2. Phương pháp đơn hình

2.1. Tìm hiểu quy trình tính toán

Phương pháp đơn hình là phương pháp số giải BTQHTT theo sơ đồ trên. Để giải ví dụ đã cho, trước hết chúng ta cần đưa BTQHTT về dạng chính tắc bằng các biến bù không âm x_3 và x_4 như sau:

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Chú ý. BTQHTT có dạng chính tắc là BTQHTT với các biến không âm, các ràng buộc có dấu “=”, hệ số vế phải của các ràng buộc không âm. Ngoài ra, mỗi phương trình bắt buộc phải có một biến đứng độc lập với hệ số +1.

Cách lập và biến đổi các bảng đơn hình

Để giải BTQHTT dạng chính tắc trên đây, cần lập một số bảng đơn hình như trong bảng II.1. Trước hết, cần điền số liệu của bài toán đã cho vào bảng đơn hình bước 1:

– Cột 1 là cột hệ số hàm mục tiêu ứng với các biến cơ sở đã chọn. Phương án xuất phát có thể chọn là $x_1 = x_2 = 0$ (đây chính là điểm gốc toạ độ O(0, 0) trên hình II.1), do đó $x_3 = 60$, $x_4 = 48$. Như vậy tại bước này chúng ta chưa bước vào sản xuất, nên trong phương án chưa có đơn vị sản phẩm loại I hay loại II nào được sản xuất ra (chỉ "sản xuất" ra các lượng nguyên liệu dư thừa, ta cũng nói là các "sản phẩm" loại III và IV), và giá trị hàm mục tiêu z tạm thời bằng 0.

Bảng II.1. Các bảng đơn hình giải BTQHTT

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0	x_3	**60**	**4**	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = \mathbf{8}$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$
Bảng đơn hình bước 2						
8	x_1	**15**	1	**1/2**	1/4	0
0	x_4	18	0	3	–1/2	1
Hàng z		$z_0 = 120$	$z_1 = 8$	$z_2 = 4$	$z_3 = 2$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = \mathbf{2}$	$\Delta_3 = -2$	$\Delta_4 = 0$
Bảng đơn hình bước 3						
8	x_1	12	1	0	1/3	–1/6
6	x_2	6	0	1	–1/6	1/3
Hàng z		$z_0 = 132$	8	6	5/3	2/3
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	–5/3	–2/3

Các biến bù có giá trị lớn hơn 0 có nghĩa là các nguyên liệu loại tương ứng chưa được sử dụng hết. Ta gọi các biến x_3 và x_4 là các biến cơ sở vì chúng có giá trị lớn hơn 0 còn x_1 và x_2 là các biến ngoài cơ sở vì chúng có giá trị bằng 0. Với bài toán có hai ràng buộc, tại mỗi bước chỉ có hai biến cơ sở.

– Cột 2 là cột các biến cơ sở. Trong cột 3 (cột phương án) cần ghi các giá trị của các biến cơ sở đã chọn.

– Các cột tiếp theo là các cột hệ số trong các điều kiện ràng buộc tương ứng với các biến x_1, x_2, x_3 và x_4 của bài toán đã cho.

Phân tích bảng đơn hình bước 1

– Hệ số ứng với biến x_1 trên hàng thứ nhất là $a_{11} = 4$ có nghĩa là tỷ lệ thay thế riêng giữa một đơn vị sản phẩm loại I và một đơn vị sản phẩm loại III là 4 (giải thích: xét phương trình (hay ràng buộc) thứ nhất $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60$, x_1 tăng một đơn vị thì x_3 phải giảm bốn đơn vị nếu giữ nguyên x_2). Tương tự ta có thể giải thích được ý nghĩa của các hệ số a_{ij} khác cho trên hàng 1 và hàng 2 trong bảng đơn hình bước 1.

– Chúng ta xét hàng z của bảng đơn hình. Để tính z_1, cần áp dụng công thức z_1 = (cột hệ số của hàm mục tiêu)× (cột hệ số của biến x_1) = 0×4 + 0×2 = (giá một đơn vị sản phẩm loại III)×(tỷ lệ thay thế riêng loại I / loại III) + (giá một đơn vị sản phẩm loại IV)×(tỷ lệ thay thế riêng loại I / loại IV) = tổng chi phí phải bỏ ra khi đưa thêm một đơn vị sản phẩm loại I vào phương án sản xuất mới = 0. Các giá trị z_j, với j = 1, 2, 3, 4, được tính tương tự và chính là các chi phí khi đưa thêm một đơn vị sản phẩm loại x_j vào phương án sản xuất mới. Còn z_0 là giá trị của hàm mục tiêu đạt được tại phương án đang xét: z_0 = (cột hệ số của hàm mục tiêu)× (cột phương án) = 0×60 + 0 × 48 = 0.

– Trên hàng Δ_j cần ghi các giá trị Δ_j , j = 1, 2, 3, 4, tính theo công thức $\Delta_j = c_j - z_j$ = lợi nhuận / đơn vị sản phẩm – chi phí / đơn vị sản phẩm. Vậy Δ_j là "lãi biên" / một đơn vị sản phẩm khi đưa một thêm một đơn vị sản phẩm loại x_j vào phương án sản xuất mới. Nếu $\Delta_j > 0$ thì hàm mục tiêu còn tăng được khi ta đưa thêm các sản phẩm loại j vào phương án sản xuất mới. Có thể chứng minh được Δ_j chính là đạo hàm riêng $\partial z / \partial x_j$ của hàm mục tiêu z theo biến x_j . Như vậy, x_1 tăng lên 1 thì z tăng lên 8 còn x_2 tăng lên 1 thì z tăng lên 6 .

Do Δ_1 và Δ_2 đều lớn hơn 0 nên vẫn còn khả năng cải thiện hàm mục tiêu khi chuyển sang (hay “xoay sang”) một phương án cực biên kề tốt hơn (quay lại nhận xét ở mục 1.2, phần giải bài toán bằng phương pháp đồ thị: điểm cực biên kề của điểm O(0, 0) có thể là A(0, 12) hay C(15, 0)).

Thủ tục xoay *(pivotal procedure)*

Bước 1: Chọn cột xoay là cột bất kỳ có $\Delta_j > 0$. Lúc đó biến x_j tương ứng với cột xoay được chọn làm biến cơ sở mới do x_j tăng kéo theo hàm mục tiêu tăng. ở đây ta chọn đưa x_1 vào làm biến cơ sở mới.

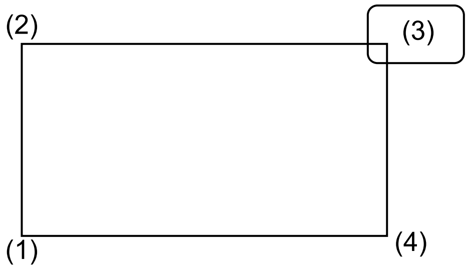
Bước 2: Chọn hàng xoay để xác định đưa biến nào ra khỏi tập các biến cơ sở (vì tại mỗi bước số biến cơ sở là không thay đổi). Để chọn hàng xoay, ta thực hiện quy tắc “tỷ số dương bé nhất” bằng cách lấy cột phương án $(60, 48)^T$ chia tương ứng cho cột xoay $(4, 2)^T$ để chọn tỷ số bé nhất. Một điều cần chú ý là ta chỉ xét các tỷ số có mẫu số dương.

Vì Min {60/4, 48/2} = 60/4 đạt được tại hàng đầu, nên hàng xoay là hàng đầu (hàng tương ứng với biến x_3). Do đó cần đưa x_3 ra khỏi tập các biến cơ sở.

Bước 3: Chọn phần tử xoay nằm trên giao của hàng xoay và cột xoay.

Bước 4: Xoay sang bảng đơn hình mới, xác định các biến cơ sở mới để điền vào cột biến cơ sở, đồng thời thay các giá trị trong cột hệ số hàm mục tiêu. Sau đó, tính lại các phần tử của hàng xoay bằng cách lấy hàng xoay cũ chia cho phần tử xoay để có hàng mới tương ứng.

Bước 5: Các phần tử còn lại của bảng đơn hình mới tính theo quy tắc “hình chữ nhật”: $(1)_{\textbf{mới}} = (1)_{\textbf{cũ}} - (2)_{\textbf{cũ}} \times (4)_{\textbf{cũ}}/(3)_{\textbf{cũ}}$, trong đó (3) là đỉnh tương ứng với phần tử xoay (xem hình I.3).



Chẳng hạn: nếu $(1)_{cũ} = 4, (2)_{cũ} = 2$, $(3)_{cũ}$ = phần tử xoay = 4, $(4)_{cũ} = 2$ thì $(1)_{mới} = 4 - 2\times2/4 = 3$

***Hình II.3.** Quy tắc hình chữ nhật*

Giải thích. Các bước xoay trên đây chỉ là phép biến đổi tương đương hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 & (2.1) \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 & (2.2) \end{cases}$$

để có hệ

$$\begin{cases} x_1 + (1/2)x_2 + (1/4)x_3 = 15 & (2.1') \\ 0x_1 + 3x_2 - (1/2)x_3 + x_4 = 18 & (2.2') \end{cases}$$

bằng cách lấy phương trình (2.1) chia cho 4 (phần tử xoay) để có (2.1'), rồi lấy (2.2) trừ bớt 2× (2.1)/4 để có (2.2'). Đây chính là nội dung của bước 4 và bước 5. Còn việc thực hiện bước 3 sẽ đảm bảo rằng giá trị của các biến cơ sở mới không âm ($x_1 = 15$, $x_4 = 18$).

Áp dụng thủ tục xoay cho các phần tử nằm trên hàng 1 và 2 của bảng đơn hình bước 1, sau đó tính các giá trị trên hàng z_j và Δ_j tương tự như khi lập bảng đơn hình bước 1, chúng ta sẽ nhận được bảng đơn hình bước 2.

Phân tích bảng đơn hình bước 2

Bảng bước 2 có thể được phân tích tương tự như bảng bước 1. Cần chú ý rằng lúc này ta đang ở vị trí của điểm C(15, 0) vì $x_1 = 15$ còn $x_2 = 0$ (xem hình II.1). Tại điểm này giá trị của hàm mục tiêu là $z_0 = 120$ đã được cải thiện hơn so với bước 1. Ta thấy $\Delta_2 = 2 > 0$ nên còn có thể cải thiện hàm mục tiêu bằng cách đưa biến x_2 vào làm biến cơ sở mới. Thực hiện các bước xoay sang phương án cực biên kề tốt hơn, chúng ta sẽ có bảng đơn hình bước 3.

Phân tích bảng đơn hình bước 3

Tại bảng đơn hình bước 3 ta thấy *điều kiện tối ưu* đã được thoả mãn ($\Delta_j \le 0, \forall j = \overline{1,4}$) nên không còn khả năng cải thiện phương án. Phương án tối ưu đã đạt được tại $x_1 = 12$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, tức là tại điểm cực biên B(12, 6) với giá trị $z_{max} = 132$ (xem thêm hình II.1).

Một số chú ý

– Điều kiện tối ưu cho các BTQHTT dạng Max là $\Delta_j \le 0, \forall j$.

– Đối với các BTQHTT cần cực tiểu hoá hàm mục tiêu thì điều kiện tối ưu (hay tiêu chuẩn dừng) là $\Delta_j \ge 0, \forall j$ (nếu $\exists$ j* sao cho $\Delta_{j*} < 0$ thì cần tiếp tục cải thiện hàm mục tiêu bằng cách chọn cột j* làm cột xoay).

– Trong thực tiễn giải các BTQHTT dạng tổng quát có thể xảy ra trường hợp không tìm được phương án xuất phát (tức là không có phương án khả thi). Lúc này có thể kết luận mô hình đã thiết lập có các điều kiện ràng buộc quá chặt chẽ, cần xem xét nới lỏng các điều kiện này.

– Trong trường hợp ta tìm được cột xoay mà không tìm được hàng xoay thì kết luận hàm mục tiêu không bị chặn trên (đối với các BTQHTT dạng Max) hoặc không bị chặn dưới (đối với các BTQHTT dạng Min).

Trong các trường hợp trên cũng phải dừng lại và kết luận mô hình quy hoạch tuyến tính đã thiết lập không phù hợp với thực tế.

2.2. Khung thuật toán đơn hình

Sau đây là khung thuật toán của phương pháp đơn hình được phát biểu cho BTQHTT cực đại hóa dạng chính tắc.

Bước khởi tạo

– Tìm một phương án cực biên ban đầu.

– Tính $\Delta_j = c_j - z_j$, $\forall j = \overline{1,n}$, trong đó n là số biến của bài toán đang xét.

Các bước lặp

Bước 1: Kiểm tra điều kiện tối ưu. Nếu điều kiện tối ưu $\Delta_j = c_j - z_j \le 0$, $\forall j = \overline{1,n}$ đã được thoả mãn thì in / lưu trữ kết quả của bài toán và chuyển sang bước kết thúc.

Bước 2: Nếu tồn tại một chỉ số j sao cho $\Delta_j > 0$ thì tiến hành thủ tục xoay gồm năm bước đã biết, tính lại các Δ_j, $\forall j = \overline{1,n}$ và quay lại bước 1 (*Chú ý:* Trong trường hợp ta tìm được cột xoay mà không tìm được hàng xoay thì kết luận hàm mục tiêu không bị chặn, in / lưu trữ kết quả của bài toán và chuyển sang bước kết thúc).

Bước kết thúc. Dừng.

3. Cơ sở toán học của phương pháp đơn hình

3.1. Phát biểu bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Xét BTQHTTdạng sau đây (với các ràng buộc đều có dấu =):

Max (Min) $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

với hệ điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \;...\; + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \;...\; + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \;...\; + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \ge 0,\ \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Chúng ta sử dụng các ký hiệu sau (T là ký hiệu chuyển vị):

– Véc tơ hệ số hàm mục tiêu $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T \in R^n$,

– Véc tơ quyết định $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$,

– Véc tơ hệ số vế phải $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in R^m$,

– Ma trận hệ số các điều kiện ràng buộc

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in R^{m\times n},$$

trong đó $a_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ là véc tơ cột j của ma trận A, $\forall j = \overline{1,n}$.

Với các ký hiệu trên, BTQHTT được viết ngắn gọn là:

$$\text{Max } z = c^Tx, \text{ với } x \in D = \{x \in R^n: Ax = b, x \geq 0\}. \quad (2.3)$$

BTQHTT trên đây được gọi là BTQHTT *dạng chuẩn tắc* nếu hạng của A bằng m và b ≥ 0 (các tọa độ của b đều không âm). Ngoài ra, nếu A có m véc tơ cột là các véc tơ đơn vị độc lập tuyến tính thì BTQHTT dạng chuẩn tắc trở thành BTQHTT *dạng chính tắc.* Trong trường hợp BTQHTT dạng chính tắc, không làm giảm tính tổng quát, chúng ta luôn có thể coi m véc tơ cột a_j, $\forall j = \overline{n-m+1,n}$ là các véc tơ đơn vị độc lập tuyến tính,

Ví dụ 2. Chúng ta xét lại ví dụ 1 của chương này.

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Đây là BTQHTT dạng chính tắc. Giả sử ma trận A được phân rã theo khối dưới dạng A = [N B] với B là ma trận khả nghịch. Chúng ta sẽ sử dụng các ký hiệu sau: J = {1, 2, ..., n} là tập các chỉ số, J_B = {j: a_j là véc tơ cột của B} là tập chỉ số các biến cơ sở, J_N = J \ J_B = {j : a_j là véc tơ cột của N} là tập các chỉ số các biến ngoài cơ sở. Lúc đó, có thể viết véc tơ quyết định dưới dạng $x = \left(x_N^T, x_B^T\right)^T$ và véc tơ hệ số hàm mục tiêu $c = \left(c_N^T, c_B^T\right)^T$.

Trong ví dụ 2, ta có: $J_N = \{1, 2\}$, $J_B = \{3, 4\}$. Dễ dàng thấy, phương án ban đầu $x = \left(x_N^T, x_B^T\right)^T = (0, 0, 60, 48)^T$, trong đó $x_N = (x_1, x_2)^T = (0, 0)^T$ và $x_B = (x_3, x_4)^T = (60, 48)^T$. Véc tơ hệ số hàm mục tiêu là $c = \left(c_N^T, c_B^T\right)^T = (8, 6, 0, 0)^T$ với $c_N = (8 \;\; 6)^T$, $c_B = (0 \;\; 0)^T$. Các véc tơ cột của ma trận ràng buộc A là:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = [N \;\; B]$ với $N = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Cần chú ý rằng: $Ax = b \Leftrightarrow [N\ B]\begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow Nx_N + Bx_B = b \Leftrightarrow Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b$.

Phương án cực biên

Đối với BTQHTT (2.3) dạng chính tắc luôn có thể tìm được một phương án xuất phát $x = (0, 0, \ldots, 0, b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$, trong đó n – m tọa độ đầu tiên đều bằng 0. Đây là một *phương án cực biên*. Một cách tổng quát, xét một phân rã tùy ý của ma trận $A = [N\quad B]$ với B là ma trận vuông được tạo nên từ m véc tơ cột độc lập tuyến tính của A, N là ma trận được tạo nên từ các véc tơ cột còn lại. Lúc đó, một *phương án cực biên* của BTQHTT tương ứng với sự phân rã trên của A là một phương án có dạng $x = \left(x_N^T, x_B^T\right)^T$ trong đó $x_N = 0$, $x_B \geq 0$. Ma trận B được gọi là ma trận cơ sở tương ứng với x (có thể xem thêm về vấn đề phương án cực biên trong chương VI). Như vậy, một phương án cực biên không có quá m tọa độ dương. Phương án cực biên có đúng m tọa độ dương được gọi là phương án cực biên không suy biến, nếu trái lại, đó là phương án cực biên suy biến.

3.2. Công thức số gia hàm mục tiêu

Xét BTQHTT (2.3) dạng chính tắc, giả sử x là phương án cực biên tương ứng với phân rã $A = [N\quad B]$, với B là ma trận cơ sở, còn $\overline{x}$ là một phương án khác. Đặt $\Delta x = \overline{x} - x$ là véc tơ số gia các biến quyết định. Chúng ta tìm cách thiết lập công thức số gia hàm mục tiêu:

$$c^T\overline{x} - c^Tx = c^T(\overline{x} - x) = c^T\Delta x.$$

Ta thấy ngay $A\overline{x} = Ax = b$ nên $A\Delta x = 0$. Ký hiệu $\Delta x = \begin{bmatrix} \Delta x_N \\ \Delta x_B \end{bmatrix}$, ta có $A\Delta x = 0 \Leftrightarrow [N\ B]\begin{bmatrix} \Delta x_N \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow N\Delta x_N + B\Delta x_B = 0 \Leftrightarrow B\Delta x_B = -N\Delta x_N \Leftrightarrow \Delta x_B = B^{-1}N\Delta x_N$.

$$\text{Vậy } c^T\Delta x = (c_N^T, c_B^T)\begin{bmatrix} \Delta x_N \\ \Delta x_B \end{bmatrix} = c_N^T\Delta x_N + c_B^T\Delta x_B = c_N^T\Delta x_N - c_B^TB^{-1}N\Delta x_N$$

$$= (c_N^T - c_B^TB^{-1}N)\Delta x_N = (c_N^T - c_B^TB^{-1}N)\Delta x_N + (c_B^T - c_B^TB^{-1}B)\Delta x_B$$

$$= [c_N^T - c_B^TB^{-1}N,\ c_B^T - c_B^TB^{-1}B]\begin{bmatrix} \Delta x_N \\ \Delta x_B \end{bmatrix}.$$

Đặt $\Delta = [c_N^T - c_B^TB^{-1}N,\ c_B^T - c_B^TB^{-1}B] = [\Delta_N, \Delta_B]$, thì $c^T\Delta x = \Delta\times\Delta x$. Đây chính là công thức số gia hàm mục tiêu cần thiết lập.

Quay lại ví dụ 2, trong bảng đơn hình bước 1, chúng ta có:

$$\Delta = \left[(8,6) - (0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ (0,0) - (0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$= (8, 6, 0, 0) = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4).$$

Nhận xét. Có thể chứng minh được rằng $\Delta_j = \dfrac{\partial z}{\partial x_j}, \forall j = \overline{1,n}.$ Chẳng hạn, tương ứng với bảng đơn hình bước 2 ta có: $\Delta z = z(x + \Delta x) - z(x) = c^T(x + \Delta x) - c^Tx = c^T\Delta x = \Delta\, \Delta x = \Delta_1\Delta x_1 + \Delta_2\Delta x_2 + \Delta_3\Delta x_3 + \Delta_4\Delta x_4 = 0\Delta x_1 + 2\Delta x_2 + (-2)\Delta x_3 + 0\Delta x_4$. Rõ ràng rằng, $\dfrac{\partial z}{\partial x_1} = \Delta_1 = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_2} = \Delta_2 = 2$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_3} = \Delta_3 = -2$, $\dfrac{\partial z}{\partial x_4} = \Delta_4 = 0$.

3.3. Tiêu chuẩn tối ưu

Xét phương án cực biên x của BTQHTT (2.3) dạng chính tắc: x = $\left(x_N^T, x_B^T\right)^T$ (tương ứng với phân rã A = [N B], với B là ma trận cơ sở). Lúc này, $\forall \bar{x} \in D$ ta có:

$$c^T\bar{x} \le c^Tx \Leftrightarrow c^T\bar{x} - c^Tx \le 0 \Leftrightarrow c^T\Delta x \le 0.$$

Vậy tiêu chuẩn để x là phương án tối ưu là: $c^T\Delta x \le 0, \forall \Delta x \Leftrightarrow \Delta \times \Delta x \le 0, \forall \Delta x$

$$\Leftrightarrow (\Delta_N, \Delta_B)\begin{bmatrix}\Delta x_N \\ \Delta x_B\end{bmatrix} = \Delta_N\Delta x_N + \Delta_B\Delta x_B \le 0, \forall \Delta x \Leftrightarrow \Delta_N\Delta x_N \le 0, \forall \Delta x \text{ (do } \Delta_B = 0).$$

Định lý 1. Xét BTQHTT (2.3) dạng chính tắc. Điều kiện đủ để một phương án cực biên x = $\left(x_N^T, x_B^T\right)^T$ (tương ứng với phân rã A = [N B], với B là ma trận cơ sở) là phương án tối ưu là $\Delta_N = c_N^T - c_B^T B^{-1}N \le 0$. Ngược lại, nếu x là phương án cực biên tối ưu không suy biến thì ta cũng có $\Delta_N = c_N^T - c_B^T B^{-1}N \le 0$.

Chứng minh

Điều kiện đủ. Nếu $\Delta_N \le 0$, thì $\Delta_N\Delta x_N \le 0$, $\forall \bar{x} \in D$, (chú ý rằng $x_N = 0$ luôn đúng, nên cũng luôn có $\Delta x_N = \bar{x}_N - x_N \ge 0$). Do $\Delta_B = 0$ nên $\Delta_N\Delta x_N + \Delta_B\Delta x_B \le 0$, $\forall \Delta x$ hay $\Delta \times \Delta x \le 0, \forall \Delta x$. Vậy $c^T\bar{x} \le c^Tx$, $\forall \bar{x} \in D$. Do đó x là phương án tối ưu.

Điều kiện cần. Sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng, giả sử x là phương án cực biên tối ưu không suy biến và điều kiện $\Delta_N \le 0$ không được thoả mãn. Lúc đó tồn tại chỉ số $j^* \in J_N$ sao cho $\Delta_{j^*} > 0$. Xét phương án $\bar{x} = x + \Delta x$. Chúng ta sẽ chỉ ra cách xây dựng $\bar{x}$ sao cho $\bar{x}$ là phương án khả thi thỏa mãn $c^T\bar{x} > c^Tx$ hay $c^T\Delta x < 0$, từ đó suy ra x không phải là phương án tối ưu.

Thật vậy, chọn Δx_N sao cho: $\Delta x_j = 0$, $\forall j \in J_N$, $j \ne j^*$ và $\Delta x_{j^*} = \theta > 0$.

Chọn Δx_B sao cho: $A\Delta x = 0 \Leftrightarrow [N \quad B]\begin{bmatrix}\Delta x_N \\ \Delta x_B\end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow N\Delta x_N + B\Delta x_B = 0 \Leftrightarrow B\Delta x_B = -N\Delta x_N$ $\Leftrightarrow \Delta x_B = -B^{-1}N\Delta x_N \Leftrightarrow \Delta x_B = -B^{-1}\theta a_{j^*}$.

Trong ví dụ 2, ta thấy: $N\Delta x_N = \begin{bmatrix}4 & 2 \\ 2 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\Delta x_1 \\ \Delta x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 2 \\ 2 & 4\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\theta \\ 0\end{bmatrix} = \theta \times \begin{bmatrix}4 \\ 2\end{bmatrix} = \theta \times a_1$, với $j^* = 1$.

Để $\bar{x}$ là phương án khả thi, cần phải có $\bar{x} \geq 0$. Dễ thấy $\bar{x}_N \geq 0$ theo cách xây dựng Δx_N. Còn $\bar{x}_B = x_B + \Delta x_B = x_B - B^{-1}\theta a_{j^*}$. Để $\bar{x}_B \geq 0$ phải chọn θ theo quy tắc tỷ số dương bé nhất (như đã biết ở mục 2.1 khi mô tả thủ tục xoay).

Trường hợp 1: $B^{-1}a_{j^*} \leq 0$. Lúc này, khi thực hiện "quy tắc tỷ số dương bé nhất" (lấy cột phương án chia cho cột a_{j^*}) ta không nhận được một tỷ số nào có mẫu số dương. Để $\bar{x}_B \geq 0$, chúng ta có thể chọn $\theta > 0$ và lớn tuỳ ý. Do đó $c^T\Delta x = \theta\,\Delta_{j^*} \to +\infty$ khi chọn $\theta \to +\infty$. Điều này chứng tỏ phương án x không phải là phương án tối ưu và BTQHTT (2.3) dạng chính tắc có hàm mục tiêu không bị chặn trên.

Trường hợp 2: Véc tơ $B^{-1}a_{j^*}$ có tọa độ dương. Để cho dễ hiểu, xét lại ví dụ 1 và bảng đơn hình II.1 (bước 2). Do x_1 và x_4 là các biến cơ sở và $j^* = 2$ nên:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1}a_{j^*} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Vậy: $$\bar{x}_B = x_B + \Delta x_B = x_B - B^{-1}\theta a_{j^*} = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \end{bmatrix} - \theta \times \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 15 - (1/2)\theta \geq 0 \\ 18 - 3\theta \geq 0. \end{cases}$$

Chọn $\theta = \text{Min}\left\{\dfrac{15}{1/2}, \dfrac{18}{3}\right\} = 6$ theo "quy tắc tỷ số dương bé nhất" sẽ đảm bảo $\bar{x}_B \geq 0$.

Do x là phương án cực biên không suy biến nên $x_B > 0$ kéo theo $\theta > 0$. Cuối cùng, ta có $c^T\Delta x = \Delta \times \Delta x = \Delta_N \Delta x_N + \Delta_B \Delta x_B = \Delta_N \Delta x_N = \Delta_{j^*}\,\Delta x_{j^*} = \theta \times \Delta_{j^*} > 0$. Do đó, phương án x không thể là phương án tối ưu (đpcm). ■

Nhận xét

– Nếu tồn tại chỉ số $i^* \in J_B$ sao cho $x_{i^*} = 0$ (như đã biết, phương án cực biên x lúc này được gọi là *phương án cực biên suy biến*), thì từ điều kiện $\bar{x}_B = x_B + \Delta x_B = x_B - B^{-1}\theta a_{j^*} \geq 0$ có thể xảy ra trường hợp chọn được $\theta = 0$. Do đó $c^T\Delta x = \theta\Delta_{j^*} = 0$, tức là hai phương án x và $\bar{x}$ cho cùng một giá trị hàm mục tiêu. Trong các trường hợp như vậy có thể xảy ra *hiện tượng xoay vòng*: Chẳng hạn, khi chuyển từ x sang $\bar{x}$, rồi lại chuyển từ $\bar{x}$ sang một phương án $\bar{\bar{x}}$ nào đó mà vẫn chưa cải thiện được giá trị của hàm mục tiêu. Sau đó, lại có thể xảy ra việc chuyển từ $\bar{\bar{x}}$ về x. Như vậy quá trình giải BTQHTT theo thuật toán đơn hình sẽ bị "treo" tại vòng lặp $x \to \bar{x} \to \bar{\bar{x}} \to x$. Để khắc phục hiện tượng xoay vòng có thể áp dụng một số thủ tục tính toán. Cách đơn giản nhất là áp dụng quy tắc tỷ số dương bé nhất với sự bổ sung sau: *Nếu có nhiều chỉ số ứng với tỷ số dương bé nhất, thì chọn ngẫu nhiên một trong các chỉ số đó để xác định hàng xoay tương ứng.*

– Trong quá trình giải BTQHTT (2.3) dạng chính tắc khi xuất phát từ một phương án cực biên, bằng thủ tục xoay ta luôn chuyển từ phương án cực biên này sang phương án cực biên khác cho tới khi các dấu hiệu dừng được thỏa mãn (tức là khi tiêu chuẩn tối ưu được thỏa mãn hay khi kết luận được BTQHTT đã cho có hàm mục tiêu không bị chặn trên).

3.4. Thuật toán đơn hình cho bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

Xét BTQHTT dạng chính tắc:

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} + \ldots + c_{n+m}x_{n+m}$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & = b_2 \\ ... & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} & = b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n, \; x_{n+1}, ..., x_{n+m} \geq 0 & \end{cases}$$

Bước khởi tạo

– Nhập các hệ số hàm mục tiêu c, ma trận ràng buộc A và các hệ số vế phải b.

– Đặt $d_1 = c_{n+1}, ..., d_m = c_{n+m}$, tức là $c_B = (d_1, ..., d_m)^T$.

– Đặt chỉ số biến cơ sở: r(1) = n + 1, ..., r(m) = n + m.

– Gán $x_{r(i)} = b_i$, $\forall i = \overline{1, m}$.

– Đặt flag = 2.

Các bước lặp

Bước 1:

– Tính $c^Tx = z = d_1x_{r(1)} + ... + d_mx_{r(m)}$.

– Tính $z_j = \sum_{p=1}^{m} a_{pj}d_p$, $\forall j = \overline{1, n+m}$.

– Tìm $\Delta = [\Delta_N, \Delta_B] = [c_N^T - c_B^T B^{-1}N, \; c_B^T - c_B^T B^{-1}B]$, trong đó $\Delta_B = 0$. Như vậy $\Delta_j = c_j - z_j$, với $z_j = \sum_{p=1}^{m} a_{pj}d_p$, $\forall j \in N$ và $\Delta_j = c_j - z_j = 0$, $\forall j \in B$, (tức là $z_N = c_B^T B^{-1}N$ và $z_B = c_B^T B^{-1}B$).

Bước 2: Nếu tồn tại chỉ số $j \in N$ sao cho $\Delta_j > 0$ thì thực hiện thủ tục xoay.

– Xác định cột xoay: chọn cột xoay s ứng với một chỉ số j có tính chất $\Delta_j > 0$. Thông thường chọn j ứng với $\Delta_j > 0$ lớn nhất, hoặc chọn ngẫu nhiên.

– Xác định hàng xoay q theo quy tắc tỷ số dương bé nhất:

$$\frac{x_{r(q)}}{a_{qs}} = \text{Min}\left\{\frac{x_{r(i)}}{a_{is}}\right\}, \forall a_{is} > 0.$$

Trong trường hợp không tồn tại $a_{is} > 0$, đặt flag = 0 và chuyển sang bước kết thúc.

– Xác định phần tử xoay a_{qs}.

– Tính lại (để chuyển sang bảng đơn hình mới): $b_q := b_q/a_{qs}$, $a_{qj} := a_{qj}/a_{qs}$, $\forall j$. $\forall i \neq q$ tính lại $b_i := b_i - b_qa_{is}$ và $a_{ij} = a_{ij} - a_{qj}\, a_{is}$, $\forall j$.

– Đặt lại chỉ số các biến cơ sở: $r(q) := s$, $d_q := c_s$, $x_{r(i)} = b_i$ $\forall i = \overline{1, m}$.

– Quay về bước 1.

Bước 3: Nếu $\Delta_j \leq 0$, $\forall j \in N$ thì đặt flag = 1 và chuyển sang bước kết thúc.

Bước kết thúc

Ghi lại dữ liệu đầu vào của BTQHTT và kết quả cuối cùng. Nếu flag = 0 thì kết luận BTQHTT có hàm mục tiêu không bị chặn trên. Còn nếu flag = 1 thì kết luận BTQHTT có phương án tối ưu đã tìm được. Dừng.

4. Bổ sung thêm về phương pháp đơn hình

Xét BTQHTT dạng tổng quát:

$$\textit{Max (Min)}\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \quad \Theta\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad \Theta\, b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ \ \Theta\, b_m \\ x_1\ \Theta\ 0,\ x_2 \Theta\ 0,\ ...,\ x_n\ \Theta\ 0. \end{cases}$$

Trong đó ký hiệu Θ có thể hiểu là ≤ , ≥ hoặc = đối với các ràng buộc. Đối với điều kiện về dấu của các biến Θ 0 có thể hiểu là ≥ 0, ≤ 0 hoặc có dấu tuỳ ý. Muốn giải một BTQHTT có dạng tổng quát, trước hết cần đưa nó về dạng chính tắc. Có thể nhắc lại vắn tắt, BTQHTT dạng chính tắc là bài toán với các biến không âm, các ràng buộc với dấu "=", hệ số vế phải của các ràng buộc không âm. Ngoài ra, mỗi phương trình bắt buộc phải có một biến đứng độc lập với hệ số +1.

4.1. Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc

Ví dụ 3. Xét lại ví dụ 1, trường hợp các ràng buộc đều có dấu ≤.

Max z = $8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Đưa BTQHTT về dạng chính tắc như đã biết bằng cách thêm hai biến bù (*slack variables*) x_3 và x_4. Ta có BTQHTT dạng chính tắc:

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Lúc này, trong hệ hai điều kiện ràng buộc đã có đủ hai biến đứng độc lập trong từng phương trình với hệ số +1, nên đã có thể tìm được phương án cực biên xuất phát để bắt đầu quá trình giải bài toán.

Ví dụ 4. Trường hợp có điều kiện ràng buộc với dấu ≥ hoặc =.

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Ta thêm hai biến bù x_3 (*slack variable*) mang dấu +, x_4 (*surplus variable*) mang dấu – để có hệ điều kiện ràng buộc (mang dấu =)

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Phải thêm biến giả x_5 (x_5 gọi là lượng vi phạm của phương trình thứ hai) để được hệ điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Lúc này, do đã có đủ hai biến đứng độc lập trong từng phương trình với hệ số +1, nên có thể tìm được phương án cực biên xuất phát để bắt đầu quá trình giải bài toán bằng phương pháp đơn hình với hàm mục tiêu là Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$, trong đó $M \approx +\infty$ và biểu thức $-Mx_5$ gọi là lượng phạt (đánh thuế). Bài toán đã được đưa về dạng chính tắc. Lượng vi phạm x_5 càng lớn thì hàm mục tiêu càng giảm, giá trị của hàm mục tiêu chỉ có thể đạt Max khi $x_5 = 0$.

Ví dụ 5. Trường hợp có biến không dương.

Max $z = 8x_1 - 6x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Lúc này muốn giải bài toán bằng phương pháp đơn hình ta phải đổi biến $x'_2 = -x_2$. Ta có BTQHTT với các biến đều không âm.

Max $z = 8x_1 + 6x'_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x'_2 + x_3 \le 60 \\ 2x_1 - 4x'_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x'_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Ví dụ 6. Trường hợp có biến với dấu tuỳ ý.

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \text{ có dấu tuỳ ý.} \end{cases}$$

Lúc này ta viết biến x_2 dưới dạng $x_2 = x'_2 - x''_2$ với

$$\begin{cases} x'_2 = \max\{0, x_2\} \\ x''_2 = \max\{0, -x_2\} \end{cases} \text{ thì đảm bảo } \begin{cases} x'_2 \ge 0 \\ x''_2 \ge 0. \end{cases}$$

Các ràng buộc sẽ là

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Bài toán với hàm mục tiêu Max $z = 8x_1 + 6x'_2 - 6x''_2 + 0x_3 + 0x_4$ và các điều kiện ràng buộc trên là BTQHTT dạng chính tắc.

Kết luận. Bao giờ cũng đưa được BTQHTT bất kỳ (các biến có dấu tuỳ ý, các ràng buộc có thể $\le$, $\ge$ hay =) về dạng chính tắc. Biến có dấu ≤ 0 được thay bằng một biến có dấu ≥ 0, biến có dấu tuỳ ý được thay bởi hiệu của hai biến đều có dấu ≥ 0. Ràng buộc $\le$ được đưa về = bằng cách thêm một biến bù (thiếu), ràng buộc $\ge$ đưa về ràng buộc = bằng cách thêm một biến bù (thừa) và một biến giả, mỗi ràng buộc có dấu = có thêm một biến giả. Số biến giả của BTQHTT dạng chính tắc nhận được chính là tổng số các ràng buộc $\ge$ và =.

4.2. Phương pháp đơn hình mở rộng

Phương pháp đơn hình mở rộng còn gọi là phương pháp đánh thuế M được áp dụng để giải BTQHTT có biến giả.

Ví dụ 7. Xét BTQHTT: Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

hay: Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

Ta có thể đưa bài toán về dạng chính tắc sau gọi là bài toán M:

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$ (trong đó $M \approx +\infty$)

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Cách 1. Có thể giải BTQHTT với các điều kiện ràng buộc (2.4) bằng phương pháp đồ thị để nhận được kết quả: phương án tối ưu là ($x_1 = 0$, $x_2 = 30$) và $z_{\mathbf{max}} = 180$.

Cách 2. Giải BTQHTT với các điều kiện ràng buộc (2.6) bằng cách lập bảng đơn hình như thông thường nhưng chú ý hệ số M ≈ +∞ (xem bảng II.2).

Tại bảng đơn hình cuối cùng, ta thấy $\Delta_j \le 0$, $\forall j$, nên phương án tối ưu đã đạt được với $x_2 = 30$, $x_4 = 72$, $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ và $z_{\mathbf{max}} = 180$.

Bảng II.2. Các bảng đơn hình giải bài toán M

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	8	6	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	60	4	2	1	0	0
–M	x_5	**48**	2	**4**	0	–1	+1
Hàng z		$z_0 = -48M$	$z_1 = -2M$	$z_2 = -4M$	$z_3 = 0$	$z_4 = M$	$z_5 = -M$
Hàng Δ_j			$\Delta_1 = 8 + 2M$	$\boldsymbol{\Delta_2 = 6+4M}$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = -M$	$\Delta_5 = 0$
0	x_3	**36**	3	0	1	**1/2**	–1/2
6	x_2	12	1/2	1	0	–1/4	1/4
Hàng z		72	3	6	0	–3/2	3/2
Hàng Δ_j			5	0	0	**3/2**	–M–3/2
0	x_4	72	6	0	2	1	–1
6	x_2	30	2	1	1/2	0	0
Hàng z		180	12	6	3	0	0
Hàng Δ_j			–4	0	–3	0	–M

Chú ý

– Một khi một biến giả đã được đưa ra khỏi cơ sở thì không bao giờ quay lại nữa (bạn đọc hãy tự chứng minh điều này). Do đó ta có thể xoá cột biến giả đó đi khỏi bảng đơn hình.

– Nếu dấu hiệu dừng xuất hiện ($\Delta_j \le 0$, $\forall j$) nhưng vẫn còn biến giả với giá trị dương trong số các biến cơ sở thì điều này chứng tỏ bài toán ban đầu không thể có phương án khả thi (có thể chứng minh điều này bằng phản chứng).

– Với ví dụ trên (xem bảng II.2) ta thấy quá trình giải chia làm hai pha: pha 1 nhằm giải bài toán M cho tới khi biến giả (x_5) được đưa ra khỏi tập các biến cơ sở để có được phương án cực biên xuất phát cho BTQHTT với các ràng buộc (2.5) và pha 2 nhằm tìm phương án tối ưu cho bài toán này.

4.3. Phương pháp đơn hình hai pha

Từ trước tới nay, chúng ta luôn giả sử rằng BTQHTT được xem xét luôn có phương án và có thể biết được một phương án (cực biên) ban đầu của nó để khởi tạo quá trình giải. Trong mục này chúng ta sẽ đi xét các trường hợp khi chưa biết BTQHTT có phương án hay không, cũng như chưa biết được phương án cực biên ban đầu. Đối với những trường hợp này có thể sử dụng phương pháp đơn hình hai pha. Chúng ta sẽ trình bày phương pháp đơn hình hai pha thông qua ví dụ sau.

Ví dụ 8. Xét lại ví dụ 7.

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

hay:

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Trước hết cần trả lời câu hỏi BTQHTT dạng chuẩn tắc trên đây có phương án hay không, nếu có thì cần tìm một phương án cực biên xuất phát của nó.

Pha 1. Tìm một phương án cực biên xuất phát bằng cách xét BTQHTT sau đây:

Min $\omega = x_5$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Mục đích của pha 1 là để giải BTQHTT với các ràng buộc (2.7) hay còn gọi là bài toán ω. Nếu tìm được phương án tối ưu của bài toán ω với các biến giả đều nhận giá trị bằng 0 thì điều này chứng tỏ BTQHTT với các ràng buộc (2.5) có phương án. Trong trường hợp đó dễ dàng tìm được một phương án cực biên của nó (xem bảng II.3).

Tại bảng đơn hình cuối cùng, ta thấy $\Delta_j \le 0, \forall j$, nên phương án tối ưu đã đạt được với $x_2 = 12$, $x_3 = 36$, $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ và $\omega_{\mathbf{min}} = 0$. Do đó chúng ta đưa ra kết luận là BTQHTT với các ràng buộc (2.5) có phương án $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 36$, $x_4 = 0$.

Nhận xét. Một cách tổng quát, có thể khẳng định được rằng, *nếu bài toán ω có phương án tối ưu với giá trị hàm mục tiêu là 0 thì BTQHTT ban đầu có phương án, trong trường hợp trái lại thì nó không có phương án. Nếu bài toán ω có giá trị tối ưu $\omega_{min} = 0$, thì ta có ngay phương án cực biên xuất phát cho BTQHTT ban đầu và chuyển sang pha 2 bằng cách bỏ các cột có biến giả (cũng như các hàng ứng với biến cơ sở là biến giả) và thay lại các hệ số hàm mục tiêu.*

Bảng II.3. Các bảng đơn hình giải bài toán pha 1

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	0	0	0	0	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0 1	x_3 x_5	60 **48**	4 2	2 **4**	1 0	0 –1	0 +1
Hàng ω		$\omega_0 = 48$	$\omega_1 = 2$	$\omega_2 = 4$	$\omega_3 = 0$	$\omega_4 = -1$	$\omega_5 = 1$
Hàng Δ_j			$\Delta_1 = -2$	$\Delta_2 = -4$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 1$	$\Delta_5 = 0$
0 0	x_3 x_2	36 12	3 1/2	0 1	1 0	1/2 –1/4	–1/2 1/4
Hàng ω		$\omega_0 = 0$	0	0	0	0	0
Hàng Δ_j			0	0	0	0	1

Pha 2. Giải BTQHTT với các ràng buộc (2.5) căn cứ phương án cực biên vừa tìm được ở pha 1 (xem bảng II.4): Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Nhận xét. Kết quả giải ví dụ trên bằng phương pháp đơn hình hai pha cũng giống với kết quả đạt được khi giải bằng phương pháp đơn hình mở rộng. Tuy nhiên, khi sử dụng phương pháp đơn hình hai pha, chúng ta tránh được sự phiền phức trong việc khai báo giá trị dương đủ lớn của tham số M như trong phương pháp đơn hình mở rộng.

Bảng II.4. Các bảng đơn hình giải bài toán pha 2

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	8	6	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0 6	x_3 x_2	**36** 12	3 1/2	0 1	1 0	**1/2** –1/4
Hàng z		$z_0 = 72$	$z_1 = 3$	$z_2 = 6$	$z_3 = 0$	$z_4 = -3/2$
Hàng Δ_j			$\Delta_1 = 5$	$\Delta_2 = 0$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = $ **3/2**
0 6	x_4 x_2	72 30	6 2	0 1	1 1/2	1 0
Hàng z		180	12	6	3	0
Hàng Δ_j			–4	0	–3	0

Tại bảng đơn hình cuối cùng, ta thấy $\Delta_j \leq 0, \forall j$, nên phương án tối ưu đã đạt được với $x_2 = 30$, $x_4 = 72$, $x_1 = x_3 = 0$ và $z_{\mathbf{max}} = 180$.

4.4. Phương pháp đơn hình cải biên

Bảng II.5 là bảng đơn hình tổng quát ở bước lặp thứ k. Để hiểu bảng này chỉ cần so sánh nó với các bảng đơn hình ngay trong bảng II.4 trên đây hoặc các bảng đơn hình của bảng II.1. Dễ dàng nhận thấy rằng các biểu thức tính toán đều xoay quanh ma trận B^{-1}, trong đó B là ma trận cơ sở ở bước k. Để chuyển sang bảng đơn hình ở bước lặp thứ k+1 tiếp theo, cần tính được B_{next}^{-1}, với B_{next} là ma trận cơ sở ở bước k + 1.

Bảng II.5. Bảng đơn hình dạng tổng quát

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	c_N^T	c_B^T
			x_N^T	x_B^T
c_B	x_B	$B^{-1}b$	$B^{-1}N$	$B^{-1}B$
Hàng z			$c_B^T B^{-1}N$	$c_B^T B^{-1}B$
Hàng Δ_j			$c_N^T - c_B^T B^{-1}N$	$c_B^T - c_B^T B^{-1}B$

Nội dung của phương pháp đơn hình cải biên (hay còn gọi là phương pháp đơn hình dạng ma trận nghịch đảo) là việc tính B_{next}^{-1} được dựa vào các thông tin cần thiết và tối thiểu nhất có được từ B^{-1}. Vì vậy các thông tin cần thiết, phải lưu trữ ở mỗi bước để tìm bảng đơn hình ở bước sau, là ít hơn nhiều so với phương pháp đơn hình thông thường. Chúng ta trình bày ngắn gọn phương pháp đơn hình qua ví dụ 9.

Ví dụ 9. Min $z = -3x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Xét bảng đơn hình bước 1 (bảng II.6), ta có

$$B = [a_3, a_4, a_5, a_6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = I,\ N = [a_1, a_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow c_N^T - c_B^T B^{-1}N = [-3, -2] - [0, 0, 0, 0] \times I \times N = [-3, -2] = [\Delta_1, \Delta_2].$$

Bảng II.6. Bảng đơn hình bước 1

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	–3	–2	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	6	1	2	1	0	0	0
0	x_4	8	**2**	1	0	1	0	0
0	x_5	1	–1	1	0	0	1	0
0	x_6	2	0	1	0	0	0	1
Hàng z			0	0	0	0	0	0
Hàng Δ_j			**–3**	–2	0	0	0	0

Do $\Delta_1 = –3$, ta có thể đưa biến x_1 vào cơ sở (ký hiệu $j_0 = 1$ là chỉ số cột của biến đưa vào cơ sở).

Để xác định biến đưa ra khỏi cơ sở, ta tính $x_B = B^{-1}b = Ib = [6, 8, 1, 2]^T$. Sau đó tính cột hệ số tương ứng với cột xoay $j_0 = 1$ đã xác định được ở trên là $\alpha = B^{-1}a_1 = Ia_1 = [1, 2, -1, 0]^T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T$. áp dụng quy tắc tỷ số dương bé nhất, xét các tỷ số 6/1, 8/2, 1/–1 và 2/0. Tỷ số dương bé nhất là 8/2, ứng với tọa độ thứ 2 nên cần đưa biến x_4 ra khỏi cơ sở. Vậy chỉ số của hàng xoay là $i_0 = 2$ (ở đây r(2) = 4, xem lại thuật toán đơn hình mục 3.4, nên hàng xoay là hàng 2) và biến đưa ra khỏi cơ sở là x_4.

Ta đi tìm B^{-1}_{next} . Có thể nhận thấy rằng $B_{next} = [a_3, a_1, a_5, a_6] = BV = [a_3, a_4, a_5, a_6]V$, trong đó $V = [e_1, \alpha, e_3, e_4]$, với e_i là véc tơ đơn vị dạng cột có tọa độ thứ i là 1, còn α là cột hệ số ứng với biến đưa vào cơ sở. Trong ví dụ trên, α là cột hệ số ứng với biến x_4. Có thể kiểm tra được:

$$B_{next} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V^{-1} có thể tìm được từ V theo quy tắc: thay cột $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T$ bởi cột $[-\alpha_1/\alpha_2, 1/\alpha_2, -\alpha_3/\alpha_2, -\alpha_4/\alpha_2]^T = [-1/2, 1/2, 1/2, 0]^T$. Dễ dàng kiểm tra được:

$$V \times V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I .$$

Một cách tổng quát hơn có thể kiểm nghiệm được rằng:

$$V \times V^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1/\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3/\alpha_2 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_4/\alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \Rightarrow V^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1/\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3/\alpha_2 & 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_4/\alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy V^{-1} là ma trận thu được từ V bằng cách thay cột 2 của V (cột có chỉ số trùng với chỉ số của hàng xoay $i_0 = 2$) bởi cột mới, thu được bằng cách lấy tất cả các phần tử của cột 2 nhân với $-1/\alpha_2$, riêng tọa độ thứ $i_0 = 2$ được thay bởi $1/\alpha_2$.

Từ phân tích trên, chúng ta nhận được công thức tính $B_{next}^{-1} = V^{-1}B^{-1}$, trong đó V^{-1} được xác định theo quy tắc nhất định (chỉ cần tổng quát hóa quy tắc đã biết). Với ví dụ 9, trong *bảng đơn hình bước 1* chúng ta có $B_{next} = [a_3, a_1, a_5, a_6]$ và:

$$B_{next}^{-1} = V^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sau đây chúng ta tìm cách tóm tắt phương pháp đơn hình cải biên dưới dạng bảng (xem bảng II.7). Trước hết, xét bảng đơn hình bước 1 (bảng II.6). Trong bảng này chúng ta bỏ đi hàng z_j, bỏ đi các cột tương ứng với các biến ngoài cơ sở x_1 và x_2 thì có bảng II.7. Cần thêm vào một hàng mới $\mathbf{c}_B^T B^{-1}$ và một cột mới có các phần tử đều bằng 0, trừ phần tử cuối bằng 1. Ngoài ra, viết thêm vào cột xoay α ứng với biến sẽ đưa vào cơ sở. Lúc đầu, ma trận cơ sở B là ma trận đơn vị nên $B^{-1} \equiv B$. Xét ma trận $\overline{B^{-1}}$ (đọc là ma trận B^{-1} bao), thu được từ B bằng cách thêm vào cột mới và các phần tử tương ứng của hàng Δ_j.

Bảng II.7. Bảng đơn hình cải biên bước 1

Hệ số hàm mục tiêu c_B	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$\overline{B^{-1}}$		Cột α (x_1)
			B^{-1}	Cột mới	
0	x_3	6	1 0 0 0	0	1
0	x_4	8	0 1 0 0	0	**2**
0	x_5	1	0 0 1 0	0	–1
0	x_6	2	0 0 0 1	0	0
$z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = 0$		Hàng $\mathbf{c}_B^T B^{-1}$	0 0 0 0	1	**–3**

Để tìm các số gia hàm mục tiêu, ta lấy –1 nhân với hàng cuối của ma trận B^{-1} bao, rồi lại nhân với các cột tương ứng a_1 và a_2 trong ma trận $\overline{A}$ (đọc là ma trận A mở rộng), thu được bằng cách thêm vào ma trận A hàng cuối là hàng $-c^T$:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\Delta_1, \Delta_2] = -[0, 0, 0, 0, 1] \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [-3, -2].$$

Thật vậy, do $\Delta_1 = c_1 - \mathbf{c}_B^T B^{-1} a_1$ và $\Delta_2 = c_2 - \mathbf{c}_B^T B^{-1} a_2$ nên

$$[\Delta_1, \Delta_2] = [c_1, c_2] - \mathbf{c}_B^T B^{-1}[a_1, a_2] = [-\mathbf{c}_B^T B^{-1}, -1] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -c_1 & -c_2 \end{bmatrix} = [-3, -2].$$

Vậy cột α là cột ứng với biến x_1, $\alpha = B^{-1}a_1 = Ia_1 = [1, 2, -1, 0]^T = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T$ có $\Delta_1 = -3$. Với cột xoay đã xác định được, ta tìm được hàng xoay và phần tử xoay theo quy tắc thông thường. Sau đó xoay sang bảng đơn hình cải biên mới dựa trên phần tử xoay đã tìm được, ma trận B^{-1} ở bước mới cũng có thể tìm theo các quy tắc của thủ tục xoay. Riêng hàng $\mathbf{c}_B^T B^{-1}$ được tính bằng cách lấy cột c_B nhân (theo kiểu tích vô hướng) với các cột của B^{-1}(xem bảng II.8).

Bảng II.8. Bảng đơn hình cải biên bước 2

Hệ số hàm mục tiêu c_B	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$\overline{B^{-1}}$		Cột α (x_2)
			B^{-1}	Cột mới	
0	x_3	2	1 −1/2 0 0	0	**3/2**
−3	x_1	4	0 1/2 0 0	0	1/2
0	x_5	5	0 1/2 1 0	0	3/2
0	x_6	2	0 0 0 1	0	1
$z = \mathbf{c}_B^T \mathbf{x}_B = -4/3$		Hàng $\mathbf{c}_B^T B^{-1}$	0 −3/2 0 0	1	**−1/2**

Để tìm cột α trong bảng II.8, trước hết cần tìm số gia hàm mục tiêu cho các biến ngoài cơ sở:

$$[\Delta_2, \Delta_4] = [c_2, c_4] - \mathbf{c}_B^T B^{-1}[a_2, a_4] = [-\mathbf{c}_B^T B^{-1}, -1] \begin{bmatrix} a_2 & a_4 \\ -c_2 & -c_4 \end{bmatrix}$$

$$= -[0, -3/2, 0, 0, 1] \times \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = [-1/2,\ 3/2].$$

Vậy ta xác định được biến đưa vào cơ sở là biến x_2 và cột α để điền vào bảng II.8:

$$\alpha = B^{-1}a_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sau đó chuyển sang bước tiếp theo (xem bảng II.9).

Bảng II.9. Bảng đơn hình cải biên bước 3

Hệ số hàm mục tiêu c_B	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$\overline{B^{-1}}$		Cột α
			B^{-1}	Cột mới	
–2	x_2	4/3	2/3 –1/3 0 0	0	
–3	x_1	10/3	–1/3 2/3 0 0	0	
0	x_5	3	–1 1 1 0	0	
0	x_6	2/3	–2/3 1/3 0 1	0	
$z = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B = -38/3$		Hàng $\mathbf{c}_B^T B^{-1}$	–1/3 –4/3 0 0	1	

Chúng ta đi tính các số gia hàm mục tiêu ứng với các biến ngoài cơ sở:

$$[\Delta_3, \Delta_4] = [c_3, c_4] - c_B^T B^{-1}[a_3, a_4] = [-\ c_B^T B^{-1}, -1]\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ -c_3 & -c_4 \end{bmatrix}$$

$$= -[-1/3, -4/3, 0, 0, 1]\times\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [1/3, 4/3].$$

Vậy phương án tối ưu đã tìm được là $x_1 = 10/3$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2/3$, với giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu là $z_{\mathbf{min}} = -38/3$.

Chú ý

– Phương pháp đơn hình cải biên cho phép tính ma trận nghịch đảo của ma trận cơ sở ở bước k+1 theo công thức $B_{k+1}^{-1} = V_k^{-1}B_k^{-1} = \ldots = V_k^{-1}V_{k-1}^{-1}\ldots V_1^{-1}B_1^{-1}$. Hơn nữa dạng của các ma trận V_i^{-1}, $\forall$i cũng rất đơn giản. Do đó có thể thấy, phương pháp đơn hình cải biên giảm được khối lượng tính toán khá nhiều khi so sánh với phương pháp đơn hình.

– Có thể áp dụng phương pháp hai pha cho phương pháp đơn hình cải biên. Lúc này các dấu hiệu dừng không có gì thay đổi: Nếu pha 1 kết thúc với phương án tối ưu chứa biến giả nhận giá trị dương thì bài toán không có phương án. Nếu trong khi tiến hành pha 2, ta tìm được cột xoay mà không tìm được hàng xoay thì bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn. Bài toán sẽ có phương án tối ưu nếu pha 2 kết thúc với dấu hiệu tối ưu (với BTQHTT dạng Min thì dấu hiệu tối ưu là $\Delta_j \geq 0$, $\forall$j). Để trình bày vấn đề đơn giản, sau đây chúng ta phát biểu thuật toán đơn hình cải biên một cách sơ bộ cho trường hợp đã biết một phương án xuất phát (BTQHTT dạng Min).

Khung thuật toán đơn hình cải biên

Bước khởi tạo

– Tìm một phương án cực biên ban đầu.

– Xác định các biến cơ sở x_B, các hệ số hàm mục tiêu tương ứng c_B. Xác định chỉ số của m biến cơ sở: r(1), r(2), ..., r(m).

– Tìm ma trận cơ sở B ứng với các cột với chỉ số: r(1), r(2), ..., r(m), ma trận nghịch đảo B^{-1}, ma trận bao $\overline{B^{-1}}$ với $c_B^T B^{-1}$ là hàng cuối của ma trận bao.

– Thiết lập ma trận mở rộng $\overline{A} = [\overline{N}, \overline{B}]$ và tính các số gia hàm mục tiêu ứng với các biến ngoài cơ sở theo công thức: $\Delta_N = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = [-c_B^T B^{-1}, -1] \times \overline{N}$.

– Đặt k := 1.

Các bước lặp (bước lặp thứ k)

Bước 1: Kiểm tra điều kiện dừng.

– Nếu $\Delta_N \ge 0$ thì bài toán có phương án tối ưu, ghi lại kết quả và chuyển sang bước 3.

– Nếu trái lại, tồn tại $j \in J_N$ sao cho $\Delta_j < 0$ thì chọn x_j là biến đưa vào cơ sở.

– Thiết lập cột $\alpha = B^{-1}a_j$. Tìm hàng xoay bằng quy tắc tỷ số dương bé nhất. Nếu không chọn được hàng xoay (khi $\alpha \le 0$) thì bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn dưới, ghi lại kết quả và chuyển sang bước 3.

Bước 2:

– Chọn được hàng i làm hàng xoay, đưa biến $x_{r(i)}$ ra khỏi cơ sở và tìm chỉ số của biến cơ sở mới đưa vào r(i) := j. Xác định lại x_B và c_B, B và N.

– Thực hiện thủ tục xoay để tính lại B^{-1}, tính lại $c_B^T B^{-1}$ và ma trận bao $\overline{B^{-1}}$. Tính các số gia hàm mục tiêu ứng với các biến ngoài cơ sở theo công thức $\Delta_N = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = [-c_B^T B^{-1}, -1]\ \overline{N}$.

– Đặt k := k + 1, sau đó quay về bước 1.

Bước 3: Dừng và in ra kết quả.

Bài tập chương II

Bài 1. Xét BTQHTT dạng Max:

$$\text{Max } z = 6x_1 + 4x_2$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

c. Minh họa ý nghĩa kinh tế của bài toán trong một tình huống thực tế.

Bài 2. Xét BTQHTT dạng Min:

$$\text{Min } z = 3x_1 - x_2$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 20 \\ 4 \le x_1 \le 8 \\ x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

Bài 3. Xét BTQHTT dạng Max:

$$\text{Max } z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \le 44 \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 36 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

b. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình cải biên.

c. Giải bài toán bằng phần mềm Excel hay phần mềm Lingo.

Bài 4. Xét BTQHTT dạng Min:

$$\text{Min } z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng (phương pháp M).

b. Giải bài toán bằng phần mềm Excel hay phần mềm Lingo.

Bài 5. Xét BTQHTT dạng Min:

$$\text{Min } z = 3x_1 + 2x_2 + 8x_3$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 12x_3 \geq 12 \\ x_1 + 4x_3 \leq 6 \\ x_2 - x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

a. Hãy đưa bài toán về dạng chính tắc.

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình mở rộng (phương pháp M).

c. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình hai pha.

d. Giải bài toán bằng phương pháp đơn hình cải biên.

e. Giải bài toán bằng phần mềm Excel hay phần mềm Lingo.

Bài 6. Xét BTQHTT dạng Max:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Xét phương án $(0, 1, 0, 2, 1)^T$.

a. Tìm ma trận cơ sở B tương ứng với phương án.

b. Hãy viết công thức số gia hàm mục tiêu cho phương án trên và cho biết phương án đã cho có phải là phương án tối ưu không?

c. Nếu phương án đã cho không phải là phương án tối ưu, hãy thực hiện thủ tục xoay và cho biết ma trận cơ sở ở bước tiếp theo. Tìm số gia hàm mục tiêu tương ứng.

d. Giải thích tại sao bài toán trên có hàm mục tiêu không bị chặn trên?

Bài 7. Xét BTQHTT dạng chính tắc. Giả sử chúng ta đã biết một phương án tối ưu của nó là x* và B là ma trận cơ sở tương ứng với x*. Chứng minh rằng nếu tồn tại chỉ số $j \in J_N$ sao cho: $c_j - c_B B^{-1} a_j = 0$ thì bài toán đã cho có vô số phương án tối ưu. Hãy chọn một ví dụ đơn giản minh họa trường hợp trên.

Bài 8. Hãy kiểm tra lại kết quả của ví dụ 3 chương I (Bài toán quy hoạch sử dụng đất trên địa bàn xã Đông Dư, huyện Gia Lâm, tỉnh Hà Nội) bằng phần mềm Excel hay Lingo.

Bài 9. Hãy lập chương trình máy tính bằng ngôn ngữ Pascal hay ngôn ngữ C để giải BTQHTT dạng chính tắc theo thuật toán đơn hình giải BTQHTT đã được phát biểu tại mục 3.4 của chương II.

Bài 10. Hãy phát biểu thuật toán hai pha và lập chương trình máy tính bằng ngôn ngữ Pascal hay ngôn ngữ C để giải BTQHTT dạng tổng quát. Chạy kiểm thử chương trình trên một số ví dụ đã biết.

Chương III

Bài toán đối ngẫu và một số ứng dụng

1. Phát biểu bài toán đối ngẫu

1.1. Phát biểu bài toán

Tương ứng với mỗi BTQHTT (còn gọi là bài toán gốc) có một bài toán đối ngẫu. Bài toán đối ngẫu của BTQHTT cũng là một BTQHTT. Như vậy, bài toán gốc và bài toán đối ngẫu của nó lập thành một cặp BTQHTT, tính chất của bài toán này có thể được khảo sát thông qua bài toán kia. Nhiều quy trình tính toán hay phân tích được hoàn thiện khi xem xét cặp bài toán trên trong mối liên quan chặt chẽ của chúng, mang lại lợi ích trong việc giải quyết các vấn đề phát sinh từ thực tế. Với mục đích tìm hiểu bước đầu, chúng ta xét bài toán gốc là bài toán quy hoạch tuyến tính (BTQHTT) dạng Max với các ràng buộc chỉ có dấu ≤ và các biến đều thoả mãn điều kiện không âm.

Bài toán gốc

$$Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0. \end{cases}$$

Lúc đó BTQHTT sau đây được gọi là bài toán đối ngẫu của BTQHTT trên.

Bài toán đối ngẫu

$$Min\ u = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n \\ y_1, y_2, ..., y_m \geq 0. \end{cases}$$

Các biến $y_1, y_2, ..., y_m$ được gọi là các biến đối ngẫu. Trong trường hợp này, do bài toán gốc có m ràng buộc, nên bài toán đối ngẫu có m biến đối ngẫu. Biến đối ngẫu y_i tương ứng với ràng buộc thứ i của bài toán gốc.

1.2. Ý nghĩa của bài toán đối ngẫu

Ví dụ 1. Xét *bài toán gốc*

$$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Cần tìm các giá trị của các biến quyết định x_1, x_2, x_3 để các ràng buộc được thoả mãn và hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất.

Bài toán này có ý nghĩa kinh tế như sau: Giả sử một xí nghiệp sản xuất ba loại sản phẩm I, II và III. Để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm I cần có 3 đơn vị nguyên liệu loại A, 2 đơn vị nguyên liệu loại B và 1 đơn vị nguyên liệu loại C. Các chỉ tiêu đó cho một đơn vị sản phẩm loại II là 4, 1 và 3. Còn cho đơn vị sản phẩm loại III là 2, 2 và 2. Lượng nguyên liệu dự trữ loại A và B hiện có là 60, 40 và 80 (đơn vị). Hãy xác định phương án sản xuất đạt lợi nhuận lớn nhất, biết lợi nhuận / đơn vị sản phẩm bán ra là 2, 4 và 3 (đơn vị tiền tệ) cho các sản phẩm loại I, II và III.

Giả sử có một khách hàng muốn mua lại các đơn vị nguyên liệu loại A, B và C. Bài toán đặt ra là *cần định giá các đơn vị nguyên liệu*. Rõ ràng rằng giá các nguyên liệu được quy định bởi giá trị của sản phẩm mà chúng tạo nên. Nếu các sản phẩm này mang lại lợi nhuận lớn trên thị trường thì giá ước định của các nguyên liệu này phải cao, còn nếu trái lại thì giá ước định của chúng là thấp. Mặt khác, lợi nhuận của các sản phẩm thu được trên thị trường lại phụ thuộc vào nhiều yếu tố như: giá cả các sản phẩm được bán trên thị trường (đã được thị trường chấp nhận), lượng dự trữ nguyên liệu hiện có, hệ số chi phí sản xuất …

Như vậy, giá ước định của các nguyên liệu A, B và C phụ thuộc vào:

– Hệ số hàm mục tiêu của bài toán gốc: $c_1 = 8$, $c_2 = 4$ và $c_3 = 63$.

– Ma trận ràng buộc các hệ số chi phí sản xuất:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

– Hệ số dự trữ các loại nguyên liệu:

$$b = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Tuy nhiên, mối phụ thuộc đó không dễ dàng xác định được. Để giải quyết vấn đề này hoàn toàn có thể dựa vào việc phân tích bài toán đối ngẫu. Gọi y_1 là giá ước định một đơn vị nguyên liệu loại A, y_2 là giá ước định một đơn vị nguyên liệu loại B, còn y_3 là giá ước định một đơn vị nguyên liệu loại C ($y_1, y_2, y_3 \geq 0$).

Chúng ta hãy đi xét *bài toán đối ngẫu*:

$$\text{Min } u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Thật vậy, $u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$ chính là tổng chi phí phải bỏ ra nếu người khách hàng muốn mua 60 đơn vị nguyên liệu loại A, 40 đơn vị nguyên liệu loại B và 80 đơn vị nguyên liệu loại C. Tất nhiên người khách hàng muốn tổng chi phí u càng bé càng tốt.

Xét ràng buộc thứ nhất. Vế trái là $3y_1 + 2y_2 + y_3$ chính là số tiền khách hàng phải bỏ ra để mua 3 đơn vị nguyên liệu loại A, 2 đơn vị nguyên liệu loại B và 1 đơn vị nguyên liệu loại C. Đây là số nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm loại I. Rõ ràng rằng, người khách hàng không thể mua được số nguyên liệu này thấp hơn lợi nhuận mà một đơn vị sản phẩm loại A mang lại khi được bán ra trên thị trường (2 đơn vị tiền tệ). Điều này dẫn đến ràng buộc thứ nhất $3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2$. Tương tự chúng ta có thể lập luận được ý nghĩa kinh tế của ràng buộc thứ hai cũng như ràng buộc thứ ba của bài toán đối ngẫu.

1.3. Quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát

Xét cặp bài toán gốc và bài toán đối ngẫu trong ví dụ 1 được cho trong bảng III.1.

Nhận xét. BTG là bài toán Max $\Rightarrow$ BTĐN là bài toán Min.

– Các hệ số hàm mục tiêu của BTG $\Rightarrow$ Các hệ số vế phải của BTĐN.

– Các hệ số vế phải của BTG $\Rightarrow$ Các hệ số hàm mục tiêu của BTĐN.

– Ma trận hệ số của BTG là A $\Rightarrow$ Ma trận hệ số của BTĐN là A^T.

– Biến ≥ 0 của BTG (3.2) $\Rightarrow$ Ràng buộc $\geq$ của BTĐN (3.2’).

– Ràng buộc ≤ BTG (3.1) ⇒ Biến ≥ 0 của BTĐN (3.1’).

Bảng III.1. Cặp bài toán gốc và bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc (BTG)	*Bài toán đối ngẫu (BTĐN)*
$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \quad (3.1) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \quad (3.2) \end{cases}$	$\text{Min } u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 4 \quad (3.2') \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \quad (3.1') \end{cases}$

Từ các nhận xét trên đây, chúng ta xem xét các quy tắc viết bài toán đối ngẫu cho một BTQHTT dạng tổng quát.

Xét bài toán gốc là BTQHTT dạng tổng quát sau đây:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \text{Max}$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \quad \Theta \ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad \Theta \ b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad \Theta \ b_m \\ x_1 \ \Theta \ 0, x_2 \Theta \ 0, \quad ..., x_n \ \Theta \ 0 . \end{cases}$$

Trong đó, ký hiệu Θ có thể hiểu là ≤ , ≥ hoặc = đối với các ràng buộc. Đối với điều kiện về dấu của các biến, ký hiệu Θ 0 có thể hiểu là ≥ 0, ≤ 0 hoặc có dấu tuỳ ý.

Sau đây là *các quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát:*

Quy tắc 1: BTG là bài toán Max ⇒ BTĐN là bài toán Min.

Quy tắc 2: Các hệ số hàm mục tiêu của BTG ⇒ Các hệ số vế phải của BTĐN.

Quy tắc 3: Các hệ số vế phải của BTG ⇒ Các hệ số hàm mục tiêu của BTĐN.

Quy tắc 4: Ma trận hệ số của BTG là A ⇒ Ma trận hệ số của BTĐN là A^T.

Quy tắc 5:

– Biến ≥ 0 của BTG ⇒ Ràng buộc ≥ của BTĐN.

– Biến ≤ 0 của BTG ⇒ Ràng buộc ≤ của BTĐN.

– Biến có dấu tuỳ ý của BTG ⇒ Ràng buộc = của BTĐN.

Quy tắc 6:

– Ràng buộc ≤ BTG ⇒ Biến ≥ 0 của BTĐN.

– Ràng buộc ≥ BTG ⇒ Biến ≤ 0 của BTĐN.

– Ràng buộc = BTG ⇒ Biến có dấu tuỳ ý của BTĐN.

Chú ý. Các quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát trên đây được áp dụng khi bài toán gốc đã cho là BTQHTT dạng Max. Trong mục 1.4 (tính chất 1) ngay tiếp theo, chúng ta sẽ mở rộng các quy tắc này cho BTQHTT dạng Min. Bảng III.2 sau đây cho biết cách viết bài toán đối ngẫu trong một trường hợp cụ thể.

Bảng III.2. Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán gốc dạng Max

Bài toán gốc (BTG)	*Bài toán đối ngẫu (BTĐN)*
Max $z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 40 \quad (3.3) \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 80 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \text{ dấu tuỳ ý.} \quad (3.4) \end{cases}$	Min $u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \le 4 \quad (3.4') \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 3 \\ y_1 \ge 0, y_2 \text{ dấu tuỳ ý, } y_3 \le 0. \quad (3.3') \end{cases}$

1.4. Các tính chất và ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu

Trong phần này chúng ta sẽ nghiên cứu các tính chất của cặp bài toán đối ngẫu đã được phát biểu ở mục 1.1 và ý nghĩa kinh tế của chúng thông qua một ví dụ đơn giản.

Ví dụ 2. Xét lại cặp bài toán gốc và bài toán đối ngẫu trong ví dụ 1 (bảng III.1).

Tính chất 1. Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu lại chính là bài toán gốc.

Tính chất này có thể được chứng minh một cách tổng quát. Tuy nhiên, để trình bày vấn đề đơn giản, hãy xét *bài toán gốc* sau:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Lúc đó, bài toán đối ngẫu là:

$$\text{Min } u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

hay:

$$\text{Max } t = -60y_1 - 40y_2 - 80y_3$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3(-y_1) + 2(-y_2) + (-y_3) \le -2 \\ 4(-y_1) + (-y_2) + 3(-y_3) \le -4 \\ 2(-y_1) + 2(-y_2) + 2(-y_3) \le -3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Chúng ta đi tìm *bài toán đối ngẫu* cho BTQHTT trên theo các quy tắc đã biết, với các biến đối ngẫu được ký hiệu là x_1, x_2 và x_3.

$$\text{Min } v = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \ge -60 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -40 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge -80 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Đặt $z = -v$, dễ thấy rằng đây chính là *bài toán gốc* đã cho ban đầu:

$$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

với các ràng buộc:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Bảng III.3. Viết bài toán đối ngẫu cho bài toán gốc dạng Min

Bài toán gốc (BTG)	*Bài toán đối ngẫu (BTĐN)*
$z = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3 \to \text{Min}$ với các điều kiện ràng buộc: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4 \quad (3.5) \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ dấu tuỳ ý},\ x_3 \le 0. \quad (3.6) \end{cases}$	$u = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \to \text{Max}$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 \le 60 \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 = 40 \quad (3.6') \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ge 80 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \text{ dấu tuỳ ý}. \quad (3.5') \end{cases}$

Tính chất 1 khẳng định vai trò bình đẳng của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu. Bởi vậy, có thể gọi các BTQHTT này là *cặp bài toán đối ngẫu* (mà không cần phải phân biệt đâu là bài toán gốc, còn đâu là bài toán đối ngẫu). Hơn nữa, có thể bổ sung vào các quy tắc viết bài toán đối ngẫu như trong nhận xét sau đây.

Nhận xét. Các quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát ở mục 1.3 cũng có thể đọc theo chiều ngược lại. Chẳng hạn, quy tắc 1 cũng có thể được hiểu là "BTG là bài toán Min $\Rightarrow$ BTĐN là bài toán Max". Đối với các quy tắc khác cũng có điều tương tự (ví dụ minh họa trong bảng III.3).

Tính chất 2. Với mọi phương án x của bài toán gốc (bài toán Max) và với mọi phương án y của bài toán đối ngẫu (bài toán Min), ta luôn có $z(x) \le u(y)$.

Tiếp tục xét ví dụ 2 để minh hoạ tính chất này. Bảng III.4 sau đây cho biết phương án tối ưu của bài toán gốc (sau khi đưa bài toán gốc về dạng chính tắc bằng cách sử dụng 3 biến bù "thiếu" x_4, x_5 và x_6). Còn bảng III.5 trình bày kết quả giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình mở rộng (sau khi thêm vào ba biến bù "thừa" y_4, y_5, y_6 và ba biến giả y_7, y_8, y_9).

Bảng III.4. Phương án tối ưu của bài toán gốc

Hệ số c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 2$	$c_2 = 4$	$c_3 = 3$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$	$c_6 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_2	$6\frac{2}{3}$	1/3	1	0	1/3	– 1/3	0
3	x_3	$16\frac{2}{3}$	5/6	0	1	– 1/6	2/3	0
0	x_6	$26\frac{2}{3}$	– 5/3	0	0	– 2/3	– 1/3	1
Hàng z		$76\frac{2}{3}$	23/6	4	3	5/6	2/3	0
Hàng Δ_j			– 11/6	0	0	– 5/6	– 2/3	0

Tính chất 2 có thể được minh hoạ trong hai bảng III.4 và III.5. Với mọi phương án x của bài toán gốc và mọi phương án y của bài toán đối ngẫu ta đều có $z(x) \le 76\frac{2}{3} \le u(y)$.

Về mặt ý nghĩa kinh tế, có thể lập luận để lý giải tính chất này như sau: *Với mọi phương án định giá nguyên liệu thì "tổng chi phí (phía muốn mua) phải bỏ ra để mua các đơn vị nguyên liệu đó không bao giờ thấp hơn được tổng lợi nhuận mang lại khi dùng các đơn vị nguyên liệu đó để sản xuất ra sản phẩm và tiêu thụ chúng trên thị trường*". Thật vậy, $z(x) = 60x_1 + 40x_2 + 80x_3$ chính là tổng lợi nhuận mang lại trong một phương án sản xuất. Còn $u(y) = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3$ là tổng giá trị ước định của nguồn dự trữ nguyên liệu được sử dụng trong các phương án sản xuất. Rõ ràng, một phương án định giá hợp lý nguồn nguyên liệu sẽ phải thoả mãn $u(y) \ge z(x)$. Trong trường hợp tổng quát, chúng ta có thể thay cụm từ "nguồn dự trữ nguyên liệu" bởi cụm từ "nguồn dự trữ tài nguyên" có ý nghĩa tổng quát hơn.

Bảng III.5. Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu

Hệ số C_B	Biến cơ sở B	Phương án y_B	60	40	80	0	0	0	M	M	M
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
M	y_7	2	**3**	2	1	– 1	0	0	1	0	0
M	y_8	4	4	1	3	0	– 1	0	0	1	0
M	y_9	3	2	2	2	0	0	– 1	0	0	1
Hàng u_j		9M	9M	5M	6M	– M	– M	– M	M	M	M
Hàng Δ_j			60–9M	40–5M	80–6M	M	M	M	0	0	0
60	y_1	2/3	1	2/3	1/3	– 1/3	0	0	1/3	0	0
M	y_8	4/3	0	– 5/3	5/3	**4/3**	– 1	0	– 4/3	1	0
M	y_9	5/3	0	2/3	4/3	2/3	0	– 1	– 2/3	0	1
Hàng u_j		40+3M	60	40–M	20 +3M	– 20 +2M	– M	– M	20–2M	M	M
Hàng Δ_j			0	M	60–3M	20–2M	M	M	– 20 +3M	0	0
60	y_1	1	1	1/4	3/4	0	– 1/4	0	0	1/4	0
0	y_4	1	0	– 5/4	5/4	1	– 3/4	0	– 1	3/4	0
M	y_9	1	0	3/2	**1/2**	0	1/2	– 1	0	– 1/2	1
Hàng u_j		60+M	60	15+ 3M/2	45+ M/2	0	– 15 +M/2	– M	0	15– M/2	M
Hàng Δ_j			0	25– 3M/2	35– M/2	0	15– M/2	M	M	–15+ 3M/2	0
60	y_1	5/6	1	0	2/3	0	– 1/3	1/6	0	1/3	– 1/6
0	y_4	11/6	0	0	5/3	1	– 1/3	– 5/6	– 1	1/3	5/6
40	y_2	2/3	0	1	1/3	0	1/3	– 2/3	0	– 1/3	2/3
Hàng u_j		$76\frac{2}{3}$	60	40	$53\frac{1}{3}$	0	$-6\frac{2}{3}$	$-16\frac{2}{3}$	0	$6\frac{2}{3}$	$16\frac{2}{3}$
Hàng Δ_j			0	0	$26\frac{2}{3}$	0	$6\frac{2}{3}$	$16\frac{2}{3}$	M	M–$6\frac{2}{3}$	M–$16\frac{2}{3}$

Tính chất 3. Nếu tồn tại hai phương án x* của bài toán gốc và y* của bài toán đối ngẫu sao cho z(x*) = u(y*) thì x* chính là phương án tối ưu của bài toán gốc, còn y* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Ngược lại, nếu x* là phương án tối ưu của bài toán gốc, còn y* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu thì z(x*) = u(y*).

Tính chất này được minh hoạ rõ trong các bảng III.4 và III.5. Lúc này, z(x*) = u(y*) = $76\frac{2}{3}$. Về mặt ý nghĩa kinh tế, tính chất này chỉ ra rằng *tổng chi phí thấp nhất phải bỏ ra nếu* *muốn mua các đơn vị nguyên liệu (trong một phương án định giá tối ưu) chính bằng tổng lợi nhuận cao nhất khi sử dụng các đơn vị nguyên liệu đó (trong một phương án sản xuất tối ưu).* Không thể tồn tại một phương án định giá cho phép tổng giá ước định nhỏ hơn được tổng lợi nhuận lớn nhất.

Một cách tổng quát, giá trị các tài nguyên của một công ty được ước định dựa trên trình độ tổ chức sản xuất, trình độ công nghệ và giá trị thị trường của các sản phẩm mà các tài nguyên này tạo nên tại thời điểm hiện tại. Quy tắc này tỏ ra đặc biệt cần thiết trong việc đánh giá tài nguyên / tài sản của một công ty. Đối với các công ty làm ăn thua lỗ thì giá ước định các tài nguyên thường khá thấp, còn các công ty làm ăn phát đạt thì giá ước định các tài nguyên thường cao.

Tính chất 4. Xét cặp phương án tối ưu (x*, y*) của cặp bài toán đối ngẫu. Nếu một điều kiện ràng buộc hay điều kiện về dấu được thoả mãn không chặt (không xảy ra dấu =) trong một bài toán, thì điều kiện tương ứng trong bài toán kia phải được thoả mãn chặt (xảy ra dấu =). Tính chất này còn được gọi là tính chất *độ lệch bù*: Nếu trong một điều kiện xảy ra độ lệch dương thì trong điều kiện tương ứng độ lệch là bằng 0.

Trước hết, chúng ta hãy minh hoạ tính chất này qua ví dụ 2. Từ bảng III.4 ta thấy $x_1^* = 0$, $x_2^* = 6\frac{2}{3}$, $x_3^* = 16\frac{2}{3}$. Còn bảng III.5 cho biết $y_1^* = \frac{5}{6}$, $y_2^* = \frac{2}{3}$, $y_3^* = 0$.

Đối với bài toán gốc ta có

$$\begin{cases} 3x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^* = 60 \text{ (thoả mãn chặt)} & (3.7) \\ 2x_1^* + x_2^* + 2x_3^* = 40 \text{ (thoả mãn chặt)} & (3.8) \\ x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* < 80 \text{ (thoả mãn không chặt)} & (3.9) \\ x_1^* = 0 \text{ (thoả mãn chặt),} & (3.10) \\ x_2^* = 6\frac{2}{3} > 0 \text{ (thoả mãn không chặt)} & (3.11) \\ x_3^* = 16\frac{2}{3} > 0 \text{ (thoả mãn không chặt).} & (3.12) \end{cases}$$

Còn đối với bài toán đối ngẫu ta có

$$\begin{cases} 3y_1^* + y_2^* + y_3^* > 2 \text{ (thoả mãn không chặt)} & (3.10') \\ 4y_1^* + y_2^* + 3y_3^* = 4 \text{ (thoả mãn chặt)} & (3.11') \\ 2y_1^* + 2y_2^* + 2y_3^* = 3 \text{ (thoả mãn chặt)} & (3.12') \\ y_1^* = \frac{5}{6} > 0 \text{ (thoả mãn không chặt),} & (3.7') \\ y_2^* = \frac{2}{3} > 0 \text{ (thoả mãn không chặt),} & (3.8') \\ y_3^* = 0 \text{ (thoả mãn chặt).} & (3.9') \end{cases}$$

Chúng ta đi phân tích ý nghĩa kinh tế của các cặp điều kiện tương ứng. Xét cặp điều kiện tương ứng: $x_1^* + 3x_2^* + 2x_3^* < 80$ (3.9) thoả mãn không chặt nên $y_3^* = 0$ (3.9') thoả mãn chặt. Điều này có nghĩa là trong phương án sản xuất tối ưu lượng nguyên liệu loại C chưa được sử dụng hết. Do đó giá ước định của các đơn vị dư thừa ra được coi là bằng 0. Xét cặp điều kiện tương ứng: $x_2^* = 6\frac{2}{3} > 0$ thoả mãn không chặt (3.11) nên $4y_1^* + y_2^* + y_3^* = 4$ thoả mãn chặt (3.11'). Điều này có nghĩa là nếu một loại sản phẩm được đưa vào sản xuất trong phương án sản xuất tối ưu thì tổng giá ước định các đơn vị của các loại nguyên liệu tạo nên một đơn vị sản phẩm loại này chính bằng lợi nhuận mà đơn vị sản phẩm đó mang lại.

Ngược lại, xét cặp điều kiện tương ứng: $y_1^* = \frac{5}{6} > 0$ (3.7') thoả mãn không chặt nên $3x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^* = 60$ (3.7) thoả mãn chặt. Như vậy, nếu giá ước định tối ưu cho mỗi đơn vị nguyên liệu loại A là dương thì điều này chứng tỏ nguyên liệu loại A đang được sử dụng hết (vét cạn) trong một phương án sản xuất tối ưu. Còn khi xét cặp điều kiện tương ứng: $3y_1^* + y_2^* + y_3^* > 2$ (3.10') thoả mãn không chặt nên $x_1^* = 0$ (3.10) thoả mãn chặt. Điều này chứng tỏ rằng, nếu tổng giá ước định các đơn vị của các loại nguyên liệu tạo nên một đơn vị sản phẩm loại nào đó cao hơn lợi nhuận mà một đơn vị sản phẩm loại này mang lại thì loại sản phẩm này không được sản xuất ra trong phương án sản xuất tối ưu.

Tính chất 5. Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tìm được trong bảng đơn hình tối ưu của bài toán gốc và ngược lại.

Xét ví dụ 2. Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu $y_1^* = \frac{5}{6}$, $y_2^* = \frac{2}{3}$, $y_3^* = 0$ có thể tìm được trong hàng z_j của bảng III.4 ứng với các cột biến bù x_4, x_5 và x_6. Điều này có thể được giải thích như sau: Tại tình huống phương án sản xuất tối ưu, nếu chúng ta muốn "sản xuất thêm" một đơn vị nguyên liệu nào đó (xem lại chương II, mục 2.1), thì phải bỏ ra một chi phí tương ứng cho trong hàng z_j. Đó chính là giá ước định (biên) của mỗi đơn vị nguyên liệu (còn gọi là giá bóng *shadow price*).

Tương tự, phương án tối ưu của bài toán gốc $x_1^* = 0$, $x_2^* = 6\frac{2}{3}$, $x_3^* = 16\frac{2}{3}$ có thể tìm được trong hàng cuối (hàng Δ_j) của bảng III.5 ứng với các cột biến bù y_4, y_5 và y_6.

2. Chứng minh một số tính chất của cặp bài toán đối ngẫu

Để trình bày vấn đề đơn giản, xét cặp bài toán đối ngẫu sau đây.

Bài toán gốc: Max $z = c^T x$, với $x \in D = \{x \in R^n: Ax \le b, x \ge 0\}$.

Bài toán đối ngẫu: Min $u = b^T y$, với $y \in E = \{y \in R^m: A^T y \ge c, y \ge 0\}$.

Các ký hiệu được sử dụng như sau:

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ là ma trận hệ số các điều kiện ràng buộc.

2.1. Định lý đối ngẫu yếu

Định lý 1. Với mọi phương án x của bài toán gốc và với mọi phương án y của bài toán đối ngẫu ta luôn có $z(x) \le u(y)$. Hơn nữa, nếu tồn tại hai phương án x* của bài toán gốc và y* của bài toán đối ngẫu sao cho $z(x^*) = u(y^*)$ thì x* chính là phương án tối ưu của bài toán gốc, còn y* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Chứng minh

Từ $Ax \le b$, $x \ge 0$ và $A^T y \ge c$, $y \ge 0$ suy ra $y^T(Ax - b) \le 0$ hay $y^TAx \le y^Tb$. Mặt khác: $x^T(A^Ty - c) \ge 0 \Rightarrow x^TAy \ge x^Tc \Rightarrow yA^Tx = (x^TAy)^T \ge (x^Tc)^T = c^Tx$. Vậy $y^Tb \ge y^TAx \ge c^Tx$. Do đó $u(y) \ge z(x)$ với mọi phương án x và y của cặp bài toán đối ngẫu.

Để chứng minh phần sau của định lý, giả sử x* là phương án của bài toán gốc, còn y* là phương án của bài toán đối ngẫu với $z(x^*) = u(y^*)$. Cần chứng minh x* và y* là các phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu. Giả sử x* không là phương án tối ưu của bài toán gốc thì phải tồn tại phương án x của bài toán gốc sao cho $z(x^*) < z(x)$. Từ đó ta có $u(y^*) < z(x)$, mâu thuẫn với phần đầu của định lý (đpcm). ■

Như vậy, tính chất 2 của cặp bài toán đối ngẫu đã được chứng minh.

2.2. Định lý đối ngẫu mạnh

Định lý 2. Nếu x* là phương án tối ưu của bài toán gốc, còn y* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu thì $z(x^*) = u(y^*)$.

Chứng minh

Trước hết xét bài toán gốc: Max $z = c^Tx$, với $x \in D = \{x \in R^n: Ax \le b, x \ge 0\}$, có thể đưa được về dạng chính tắc bằng cách sử dụng các biến bù. Với ký hiệu véc tơ biến bù là x_S, bài toán gốc dạng chính tắc được viết như sau: Max $z = \overline{c}^T\overline{x}$ với các ràng buộc $Ax + Ix_S = b$, $\overline{x}^T = (x^T, x_S^T) \ge 0$, trong đó $\overline{c}^T = (c^T, c_S^T)$ với c_S là véc tơ 0.

Ký hiệu $\overline{A} = [A \quad I]$, bài toán gốc dạng chính tắc được viết lại dưới dạng sau:

Max $z = \overline{c}^T\overline{x}$, với các ràng buộc: $\overline{A}\,\overline{x} = b$, $\overline{x} \ge 0$.

Ví dụ 3. Để hình dung việc chứng minh cụ thể hơn, chúng ta xét lại BTQHTT ở ví dụ 1, chương II.

Bài toán gốc: Max $z = 8x_1 + 6x_2$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Phương án tối ưu của bài toán gốc là $(x_1^*,\ x_2^*)^T = (12, 6)^T$.

Dạng chính tắc của bài toán gốc là:

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Phương án tối ưu của bài toán trên là $(x_1^*, x_2^*,\ x_3^*, x_4^*)^T = (12, 6, 0, 0)^T$.

Bài toán đối ngẫu: Min $u = 60y_1 + 48y_2$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 \geq 8 \\ 2y_1 + 4y_2 \geq 6 \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu là $(y_1^*, y_2^*)^T = (5/3, 2/3)^T$.

Như vậy, trong ví dụ 3 ta có $\overline{x}^T = (x^T, x_S^T) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ với $x^T = (x_1, x_2)$, $x_S^T = (x_3, x_4)$, $\overline{c} = (c^T, c_S^T) = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ với $c = (c_1, c_2)^T = (8, 6)^T$, $c_S^T = (c_3, c_4)^T = (0, 0)^T$ và

$$\overline{A} = [A \quad I] = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các véc tơ cột của ma trận ràng buộc $\overline{A}$ là:

$$\overline{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \overline{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \overline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \overline{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vẫn sử dụng các ký hiệu ở mục 3 chương II, chúng ta có $\overline{A} = [N \quad B]$ và $\overline{c} = [\overline{c}_N^T,\ \overline{c}_B^T]$. Do đó $\Delta = [\Delta_N,\ \Delta_B] = [\overline{c}_N^T - \overline{c}_B^T B^{-1}N,\ \overline{c}_B^T - \overline{c}_B^T B^{-1}B]$ với $\Delta_N = \overline{c}_N^T - \overline{c}_B^T B^{-1}N$ và $\Delta_B = \overline{c}_B^T - \overline{c}_B^T B^{-1}B$. Đối với cột j thì $\Delta_j = \overline{c}_j - \overline{c}_B^T B^{-1}\overline{a}_j$.

Vì x* là phương án tối ưu của bài toán gốc (với B là ma trận cơ sở tương ứng), nên ta có: $\Delta_j \leq 0, \forall j \Rightarrow \overline{c}_B^T B^{-1}\overline{a}_j \geq \overline{c}_j, \forall j = \overline{1, n+m}$

$$\Rightarrow \overline{c}_B^T B^{-1}\overline{a}_j \geq \overline{c}_j, \forall j = \overline{1,n} \Rightarrow \overline{c}_B^T B^{-1}A \geq c^T$$

$$\Rightarrow (\overline{c}_B^T B^{-1}A)^T = A^T(\overline{c}_B^T B^{-1})^T \geq c.$$

Đặt $\overline{y} = (\overline{c}_B^T B^{-1})^T$ thì $A^T\overline{y} \geq c$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\overline{y}$ là phương án của bài toán đối ngẫu: Min $u = b^Ty$, với các ràng buộc $A^T y \geq c$, $y \geq 0$. Do $\overline{y}$ thoả mãn điều kiện $A^T\overline{y} \geq c$, chỉ còn cần chứng minh $\bar{y} \geq 0$. Thật vậy, do $\bar{c}_B^T B^{-1}\bar{a}_j \geq \bar{c}_j$, $\forall j = \overline{n+1, n+m}$ nên $\bar{y}^T = \bar{c}_B^T B^{-1} I \geq c_S^T \equiv 0$. Như trong ví dụ 3, với $\bar{a}_3 = (1, 0)^T$ và $\bar{a}_4 = (0, 1)^T$ ta có $\bar{c}_B B^{-1}\bar{a}_j \geq \bar{c}_j$ với j = 3, 4, trong đó $c_S = (c_3, c_4)^T = (0, 0)^T$. Vậy $\bar{y} \geq 0$.

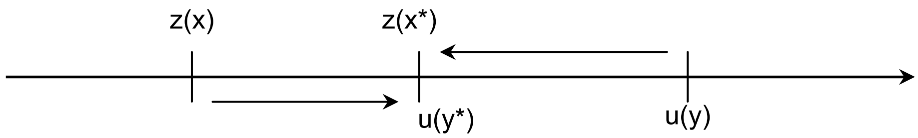
Bước tiếp theo, ta đi chứng minh rằng z(x*) = u($\bar{y}$) hay cần chứng minh: $\bar{c}^T x^* = b^T\bar{y} = \bar{y}^T b \Leftrightarrow c^T x^* = \bar{c}_B^T B^{-1} b \Leftrightarrow c^T x^* = \bar{c}_B^T\ x_B^*$ (do $x_B^* = B^{-1}b$). Điều này là đúng. Do đó, theo phần 2 của định lý 1, $\bar{y}$ phải là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Vậy, nếu x* và y* là các phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu thì z(x*) = u($\bar{y}$) = u(y*) (đpcm). ■

Như vậy, tính chất 3 của cặp bài toán đối ngẫu đã được chứng minh.

Nhận xét

– Ta có: $(y^*)^T = \bar{y}^T = \bar{c}_B^T B^{-1} I \geq c_S^T \equiv 0 \Leftrightarrow z_S = \bar{c}_B^T B^{-1} I = (z_{n+1}, ..., z_{n+m}) \geq c_S^T = (c_{n+1}, ..., c_{n+m})^T = (0, ..., 0)$. Như vậy, tính chất 5 cũng đã được chứng minh: Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tìm được trong bảng đơn hình tối ưu của bài toán gốc (trên hàng z_j).

– Ta có minh hoạ hình học cho định lý 1 và 2 về giá trị các hàm mục tiêu của cặp bài toán đối ngẫu trên trục số (xem hình III.1). Ta có thể thấy ngay, nếu bài toán gốc có phương án tối ưu thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án tối ưu (định lý 2). Hơn nữa, nếu bài toán gốc có phương án và hàm mục tiêu không bị chặn trên miền phương án thì bài toán đối ngẫu sẽ không có phương án (định lý 1). Cần nhắc lại rằng, ta có thể chọn tuỳ ý một trong hai bài toán của cặp bài toán đối ngẫu là bài toán gốc, bài toán còn lại là bài toán đối ngẫu.



Hình III.1. *Giá trị các hàm mục tiêu của cặp bài toán đối ngẫu*

2.3. Định lý độ lệch bù

Định lý 3. Giả sử x* và y* là các phương án tối ưu của cặp bài toán đối ngẫu. Lúc đó (x*, y*) thoả mãn hệ

$$\begin{cases} y^T(Ax - b) = 0, \\ x^T(c - A^T y) = 0. \end{cases}$$

Chứng minh

Với x = x* và y = y*, theo định lý 2 ta có z(x) = u(y) hay $y^T b = b^T y = c^T x = x^T c$. Mặt khác: $y^T Ax = x^T A^T y$

$$\Rightarrow y^T(Ax - b) = x^T(A^T y - c) \Rightarrow y^T(Ax - b) + x^T(c - A^T y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^T(Ax - b) = 0 \\ x^T(c - A^T y) = 0 \end{cases}$$

Chú ý rằng: $y^T \geq 0, Ax - b \leq 0, x^T \geq 0, c - A^T y \leq 0$. Vậy chúng ta có điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. Định lý 3 chính là hệ quả của định lý 2. Ngoài ra, từ định lý 3 sẽ suy ra được tính chất 4 của cặp bài toán đối ngẫu. Với mục đích minh hoạ, chúng ta xét ví dụ 3 trên đây. Lúc này, điều kiện: $y^T(Ax - b) = 0$

$$\Leftrightarrow (y_1, y_2)\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 60 \\ 48 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (y_1, y_2)\begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - 48 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1(4x_1 + 2x_2 - 60) + y_2(2x_1 + 4x_2 - 48) = 0.$$

Do $4x_1 + 2x_2 \leq 60$, $2x_1 + 4x_2 \leq 48$, $y_1 \geq 0$ và $y_2 \geq 0$ nên nếu $4x_1 + 2x_2 < 60$ thì $y_2 = 0$, còn nếu $y_1 > 0$ thì $4x_1 + 2x_2 = 60$ ... Thật vậy, do $y_1^* = 5/3 > 0$ nên ta có $4x_1^* + 2x_2^* = 60$, do $y_2^* = 2/3 > 0$ nên ta có $2x_1^* + 4x_2^* = 48$.

Tương tự, điều kiện:

$$x^T(c^T - A^T y) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2)\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 8 - 4y_1 + 2y_2 \\ 6 - 2y_1 + 4y_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \quad x_1(8 - 4y_1 - 2y_2) + x_2(6 - 2y_1 - 4y_2) = 0.$$

Do $4y_1 + 2y_2 \geq 8$, $2y_1 + 4y_2 \geq 6$, $x_1 \geq 0$ và $x_2 \geq 0$ nên nếu $4y_1 + 2y_2 > 8$ thì $x_2 = 0$, còn nếu $x_1 > 0$ thì $2y_1 + 4y_2 = 6$ ... Thật vậy, do $x_1^* = 12 > 0$ nên ta có $4y_1^* + 2y_2^* = 8$, do $x_2^* = 6 > 0$ nên ta có $2y_1^* + 4y_2^* = 6$.

3. Thuật toán đơn hình đối ngẫu

Trong mục này chúng ta xét một phương pháp cho phép giải một lớp BTQHTT một cách khá tiện lợi. Phương pháp này được xây dựng dựa trên tính chất của cặp bài toán đối ngẫu.

3.1. Quy trình tính toán và phát biểu thuật toán

Trước hết, chúng ta trình bày thuật toán thông qua một ví dụ minh họa để thấy được mối liên quan giữa cặp bài toán đối ngẫu, đồng thời nắm được bản chất của phương pháp đơn hình đối ngẫu.

Ví dụ 4. Xét cặp bài toán đối ngẫu.

Bài toán gốc:

$$\text{Min } z = 3x_1 + 2x_2$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Nếu giải trực tiếp bài toán trên bằng phương pháp đơn hình, thì cần đưa bài toán về dạng chính tắc với 8 biến (thêm ba biến bù "thừa" và ba biến giả). Một phương pháp khác như đã biết là, trước hết tìm cách giải bài toán đối ngẫu (chỉ với 5 biến), sau đó sẽ tìm được phương án tối ưu của bài toán gốc.

Bài toán đối ngẫu:

Max u = $4y_1+3y_2+4y_3$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \le 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \le 2 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Viết bài toán đối ngẫu dưới dạng chính tắc:

Max u = $4y_1+3y_2+4y_3+0y_4+0y_5$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0. \end{cases}$$

Cách 1. Giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình. Kết quả được cho trong bảng III.6. Theo tính chất 5 của cặp bài toán đối ngẫu, ta có phương án tối ưu của bài toán gốc là $x_1^* =$ 1, $x_2^* = 2$ với $z_{min} = 7$.

Bảng III.6. Giải bài toán đối ngẫu

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 4$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_4	3	1	1	**2**	1	0
0	y_5	2	2	1	1	0	1
u_j		0	0	0	0	0	0
Δ_j'			4	3	4	0	0
4	y_3	3/2	1/2	1/2	1	1/2	0
0	y_5	1/2	**3/2**	1/2	0	– 1/2	1
u_j		6	2	2	4	2	0
Δ_j'			2	1	0	– 2	0
4	y_3	4/3	0	1/3	1	2/3	– 1/3
4	y_1	1/3	1	**1/3**	0	– 1/3	2/3
u_j		20/3	4	8/3	4	4/3	4/3
Δ_j'			0	1/3	0	– 4/3	– 4/3
4	y_3	1	– 1	0	1	1	– 1
3	y_2	1	3	1	0	– 1	2
u_j		7	5	3	4	1	2
Δ_j'			– 1	0	0	– 1	– 2

Cách 2. Giải bài toán gốc bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu.

Trước hết đưa *Bài toán gốc* về dạng sau:

$$\text{Min } z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -3 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 = -4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Nội dung tóm tắt của phương pháp đơn hình đối ngẫu: Trong phương pháp đơn hình, chúng ta dịch chuyển dần từ *phương án khả thi*, tức là $x_j \ge 0, \forall j$ nhưng điều kiện $\Delta_j \ge 0, \forall j$ chưa được thoả mãn, tới phương án tối ưu, tức là $x_j \ge 0$ và $\Delta_j \ge 0, \forall j$. Trong phương pháp đơn hình đối ngẫu, chúng ta dịch chuyển dần từ phương án không khả thi (nhưng *đối ngẫu khả thi*), tức là điều kiện $x_j \ge 0, \forall j$ không được thoả mãn nhưng luôn có $\Delta_j \ge 0, \forall j$, tới phương án tối ưu, tức là có $x_j \ge 0$ và $\Delta_j \ge 0, \forall j$. Minh họa hình học của vấn đề này sẽ được trình bày ở mục 1, chương IV, trong phần phương pháp cắt Gomory giải BTQHTT nguyên.

Quy trình giải bài toán gốc dạng chuẩn tắc trên đây bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu được mô tả trong bảng III.7.

Bảng III.7. Giải bài toán gốc bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	3	2	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	– 4	– 1	– 2	1	0	0
0	x_4	– 3	– 1	– 1	0	1	0
0	x_5	– 4	**– 2**	– 1	0	0	1
z_j		0	0	0	0	0	0
Δ_j			3	2	0	0	0
0	x_3	– 2	0	**– 3/2**	1	0	– 1/2
0	x_4	– 1	0	– 1/2	0	1	– 1/2
3	x_1	2	1	1/2	0	0	– 1/2
z_j		6	3	3/2	0	0	– 3/2
Δ_j			0	1/2	0	0	3/2
2	x_2	4/3	0	1	– 2/3	0	1/3
0	x_4	– 1/3	0	0	**– 1/3**	1	– 1/3
3	x_1	4/3	1	0	1/3	0	– 2/3
z_j		20/3	4	2	– 1/3	0	– 4/3
Δ_j			0	0	1/3	0	4/3
2	x_2	2	0	1	0	– 2	1
0	x_3	1	0	0	1	– 3	1
3	x_1	1	1	0	0	1	– 1
z_j		7	3	2	0	– 1	– 1
Δ_j			0	0	0	1	1

Sau đây là khung thuật toán của phương pháp đơn hình đối ngẫu được phát biểu cho BTQHTT: Min $z = c^T x$, với $x \in D = \{x \in R^n: Ax = b, x \ge 0\}$.

Bước khởi tạo

– Tìm một phương án đối ngẫu khả thi $x = B^{-1}b$ tương ứng với ma trận cơ sở B trong một phân rã nào đó A = [N B]: điều kiện $x_j \geq 0, \forall j$ có thể không được thoả mãn nhưng luôn có $\Delta_j \geq 0, \forall j$.

– Tính $\Delta_j = c_j - z_j, \forall j = \overline{1,n}$, trong đó n là số biến của bài toán đang xét.

Các bước lặp

Bước 1: Kiểm tra điều kiện tối ưu. Nếu điều kiện tối ưu $x_j \geq 0, \forall j = \overline{1,n}$ đã được thoả mãn thì in / lưu trữ kết quả của bài toán và dừng.

Bước 2: Nếu tồn tại một chỉ số j sao cho $x_j < 0$ thì tiến hành thủ tục xoay gồm năm bước tương tự với năm bước đã biết trong thủ tục xoay của phương pháp đơn hình với các khác biệt sau:

– Trước tiên chọn hàng xoay là hàng với biến x_j có giá trị âm (thông thường với trị tuyệt đối lớn nhất, hoặc chọn ngẫu nhiên).

– Sau đó chọn cột xoay theo quy tắc tỷ số âm lớn nhất (các tỷ số được tạo ra bằng cách lấy hàng Δ_j "chia" cho hàng x_j và chỉ xét các tỷ số có mẫu số âm). Nếu không tìm được cột xoay thì kết luận bài toán không có phương án khả thi, in / lưu trữ kết quả của bài toán và chuyển sang bước kết thúc.

– Nếu tìm được cột xoay thì thực hiện các bước tiếp theo của thủ tục xoay.

– Tính lại các $\Delta_j, \forall j = \overline{1,n}$ và quay lại bước 1.

Nhận xét

– Ký hiệu các số gia hàm mục tiêu cho bài toán gốc và bài toán đối ngẫu lần lượt là Δ_j và Δ_1'. So sánh hai bảng III.6 và III.7, ta thấy tại mỗi bảng đơn hình của các bước tương ứng luôn có:

$$\begin{cases} x_1 = -\Delta_4' \\ x_2 = -\Delta_5' \\ x_3 = -\Delta_1' \\ x_4 = -\Delta_2' \\ x_5 = -\Delta_3' \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y_1 = \Delta_3 \\ y_2 = \Delta_4 \\ y_3 = \Delta_5 \\ y_4 = \Delta_1 \\ y_5 = \Delta_2. \end{cases}$$

Chẳng hạn trong bảng đơn hình bước 1 của bảng III.7 và III.6 có

$$\begin{cases} x_1 = -\Delta_4' = 0 \\ x_2 = -\Delta_5' = 0 \\ x_3 = -\Delta_1' = -4 \\ x_4 = -\Delta_2' = -3 \\ x_5 = -\Delta_3' = -4 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} y_1 = \Delta_3 = 0 \\ y_2 = \Delta_4 = 0 \\ y_3 = \Delta_5 = 0 \\ y_4 = \Delta_1 = 3 \\ y_5 = \Delta_2 = 2. \end{cases}$$

– Việc thực hiện giải bài toán gốc bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu theo bảng III.7 thực chất là việc giải bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình. Điều này cũng giải thích lí do tại sao khi thực hiện thủ tục xoay của phương pháp đơn hình đối ngẫu cần trước hết xác định hàng xoay rồi sau đó mới xác định cột xoay.

3.2. Cơ sở của phương pháp đơn hình đối ngẫu

Phương pháp đơn hình đối ngẫu có thể được chứng minh một cách chặt chẽ như trình bày sau đây.

Xét bài toán gốc: Min z = f(x) = c^Tx với $x \in D = \{x \in R^n: Ax \geq b, x \geq 0\}$. Dễ dàng đưa bài toán này về dạng chính tắc: Min z = $\overline{c}^T\overline{x}$ với các ràng buộc $\overline{A}\,\overline{x} = b$, $\overline{x} \geq 0$, trong đó $\overline{A} = [A \ -I]$, $\overline{c}^T = (c^T, c_s^T)$ và $\overline{x} = (x^T, x_s^T)^T$, với chỉ số dưới s dùng để ký hiệu các chỉ số bù (xem lại các ký hiệu ở định lý 2, ví dụ 3).

Chúng ta xét một véc tơ $\overline{x}$ thỏa mãn $\overline{A}\,\overline{x} = b$. Bằng cách phân rã $\overline{A} = [N \quad B]$, $\overline{x} = (\overline{x}_N^T, \overline{x}_B^T)^T$ và cho $\overline{x}_N = 0$, chúng ta có $\overline{x}_B = B^{-1}b$. Các véc tơ cột $\overline{a}_j$, $\forall j \in J_B$, của B được gọi là:

– *Cơ sở gốc chấp nhận* nếu $\overline{x}_B = B^{-1}b \geq 0$, nhưng không nhất thiết

$$\overline{c}_B^T B^{-1}\overline{A} \leq \overline{c}^T, \tag{3.13}$$

– *Cơ sở đối ngẫu chấp nhận* nếu $\overline{c}_B^T B^{-1}\overline{A} \leq \overline{c}^T$, nhưng không nhất thiết $\overline{x}_B = B^{-1}b \geq 0$.

Chúng ta kiểm tra lại các bước của thuật toán đơn hình đối ngẫu đã biết ở trên (bạn đọc tự đối chiếu với bảng III.7). Giả sử, $\overline{x} = (\overline{x}_N^T, \overline{x}_B^T)^T$ là một phương án đối ngẫu khả thi, tức là các véc tơ cột $\overline{a}_j, \forall j \in J_B$, là cơ sở đối ngẫu chấp nhận. Do (3.13) nên $\Delta_j = c_j - \overline{c}_B^T B^{-1}\overline{a}_j \geq 0$. Nếu $\overline{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ thì $\overline{x}$ là phương án tối ưu. Chú ý rằng, thuật toán đơn hình đối ngẫu được bắt đầu với ma trận $B \equiv -I$, do đó có $\overline{x}_B = B^{-1}b = -Ib$. Trong ví dụ 4, ta có:

$$\overline{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Nếu $\overline{x}_B = B^{-1}b \geq 0$ chưa được thỏa mãn thì tồn tại $\overline{x}_q < 0$ với $q \in J_B$ (như trong ví dụ 4, bảng III.7). Lúc đó chúng ta cần thực hiện thủ tục xoay.

Trường hợp 1: $\forall j \in J$ (J là tập các chỉ số của các véc tơ cột của ma trận $\overline{A}$), $\overline{x}_{qj} \geq 0$. Điều này có nghĩa là tất cả các tọa độ thứ q của các véc tơ $B^{-1}\overline{a}_j, \forall j \in J$ đều không âm. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng bài toán gốc không có phương án, hay bài toán đối ngẫu có hàm mục tiêu không bị chặn trên. Xét véc tơ $\overline{y} = (\overline{c}_B^T B^{-1})^T$. Dễ dàng chứng minh được đây đúng là phương án của bài toán đối ngẫu. Thật vậy, theo (3.13) ta có:

$$\overline{A}^T\overline{y} \le \overline{c}\ . \tag{3.14}$$

Đặt U_q^T là véc tơ hàng q trong ma trận B^{-1} và xét $\overline{y}' = \overline{y} - \theta U_q$ với $\theta > 0$ nào đó. Thế thì $(\overline{y}')^T\overline{a}_j = (\overline{y}^T - \theta U_q^T)\ \overline{a}_j = \overline{y}^T\overline{a}_j - \theta U_q^T\overline{a}_j \le \overline{y}^T\overline{a}_j$ (do $U_q^T\overline{a}_j = \overline{x}_{qj} \ge 0$). Theo (3.14), ta có $\overline{y}^T\overline{a}_j \le \overline{c}_j$, nên $(\overline{y}')^T\overline{a}_j \le \overline{c}_j$. Do đó $\overline{A}^T\overline{y}' \le \overline{c}$ hay $\overline{y}'$ cũng là phương án của bài toán đối ngẫu. Mặt khác, giá trị của hàm mục tiêu trong bài toán đối ngẫu là $u(\overline{y}') = (\overline{y}')^Tb = (\overline{y}^T - \theta U_q^T)b = \overline{y}^Tb - \theta U_q^Tb = u(\overline{y}) - \theta\overline{x}_q \to +\infty$ khi $\theta \to +\infty$.

Để chứng minh bài toán gốc không có phương án có thể lập luận ngắn gọn hơn. Thật vậy, ta có $\sum_{j\in J}\overline{x}_{qj}\overline{x}_j = \overline{x}_q < 0$ (do $B^{-1}\overline{A}\ \overline{x} = B^{-1}b$). Nếu bài toán gốc có phương án với các tọa độ không âm thì đây là điều vô lý vì $\overline{x}_{qj}, \overline{x}_j \ge 0, \forall j \in J$.

Trường hợp 2: $\exists j \in J$ sao cho $\overline{x}_{qj} \ge 0$. Ta chọn cột xoay theo "quy tắc tỷ số âm lớn nhất", tức là chọn chỉ số s sao cho:

$$\frac{\Delta_s}{\overline{x}_{qs}} = \underset{x_{qj}<0}{\mathrm{Min}}\left\{\frac{\Delta_j}{\overline{x}_{qj}}\right\}.$$

Tiếp tục thực hiện thủ tục xoay như đã phát biểu trong thuật toán đơn hình đối ngẫu, chúng ta sẽ chuyển được sang phương án đối ngẫu khả thi mới (bạn đọc tự chứng minh). Trong phương án mới $\overline{x}_s$ sẽ là biến cơ sở thay chỗ cho biến $\overline{x}_q$.

Vì mỗi phương án đối ngẫu khả thi tìm được trong quá trình giải tương ứng với một ma trận cơ sở B trong một phân rã nào đó A = [N B], nên số phương án đối ngẫu khả thi được xem xét là một số hữu hạn. Do đó, sau một số hữu hạn bước, chúng ta sẽ kết thúc việc giải BTQHTT bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu.

4. Bài toán vận tải

4.1. Phát biểu bài toán vận tải

Bài toán vận tải được áp dụng rất rộng rãi trong lĩnh vực lập kế hoạch phân bổ sản phẩm hàng hoá (dịch vụ) từ một số địa điểm cung / cấp phát tới một số địa điểm cầu / tiêu thụ. Thông thường, tại mỗi địa điểm cung (nơi đi) chỉ có một số lượng giới hạn hàng, còn mỗi địa điểm cầu (nơi đến) cần một số lượng nhất định hàng để đáp ứng nhu cầu tiêu thụ. Với các cung đường vận chuyển hàng đa dạng, với cước phí vận tải khác nhau, mục tiêu đặt ra là xác định phương án vận tải tối ưu. Nói cách khác, vấn đề đặt ra là cần xác định nên vận chuyển từ mỗi địa điểm cung tới mỗi địa điểm cầu bao nhiêu đơn vị hàng nhằm thoả mãn nhu cầu của từng địa điểm tiêu thụ đồng thời đạt tổng chi phí vận tải là nhỏ nhất.

Ví dụ 5. Ta có 3 điểm cung cấp hàng C, D, E và 4 điểm cầu S, T, U và V với lượng hàng cung và cầu tại mỗi điểm cũng như cước phí vận tải trên một đơn vị hàng cho mỗi cung đường như trong bảng III.8.

Từ điểm cung i đến điểm cầu j ta có cước phí vận tải / một đơn vị hàng là c_{ij} đã biết, chẳng hạn như c_{11} là 3 USD / một đơn vị hàng. Cần thiết lập phương án vận tải hàng đáp ứng được cung cầu và tổng chi phí vận tải là nhỏ nhất. Chú ý rằng bài toán vận tải đang xét có tổng cung bằng tổng cầu, nên được gọi là bài toán vận tải cân bằng thu phát. Đây là dạng đơn giản nhất trong các dạng bài toán vận tải.

Bảng III.8. *Các dữ liệu của bài toán vận tải*

Điểm cung	*Lượng hàng*
C	5000
D	6000
E	2500
Tổng	13500

Điểm cầu	*Lượng hàng*
S	6000
T	4000
U	2000
V	1500
Tổng	13500

Nơi đi	*Cước phí vận tải / đơn vị hàng c_{ij} (USD) đến*			
	S	T	U	V
C	3	2	7	6
D	7	5	2	3
E	2	5	4	5

Khái niệm bảng vận tải

Bảng vận tải có m hàng, n cột gồm $m \times n$ ô, m là số điểm cung, n là số điểm cầu với cước phí c_{ij} được ghi trong ô (i, j) cho cung đường (i, j). Khi m = 3, n = 4 như trong ví dụ trên, ta có bảng vận tải III.9.

Bảng III.9. Bảng vận tải

3	2	7	6	Cung 1: 5000
7	5	2	3	Cung 2: 6000
2	5	4	5	Cung 3: 2500
Cầu1: 6000	Cầu 2: 4000	Cầu 3: 2000	Cầu4: 1500	Tổng: 13500

Ta cần tìm phương án phân hàng vào các ô (i, j) sao cho tổng theo hàng hay cột đều khớp với các lượng cung, cầu và tổng chi phí vận tải là nhỏ nhất. Mỗi ô (i, j) biểu diễn một cung đường vận chuyển hàng từ điểm cung i về điểm cầu j.

Các phương pháp tạo phương án xuất phát

Có một số phương pháp tạo phương án xuất phát. Ta nghiên cứu hai phương pháp sau đây.

Phương pháp "góc tây bắc"

Phương pháp này được phát biểu như sau:

– Phân phát hàng tối đa vào góc tây bắc của bảng vận tải.

– Sau khi (hàng) cung hoặc (cột) cầu đã thoả mãn thì ta thu gọn bảng vận tải bằng cách bỏ bớt hàng cung hoặc cột cầu đó đi (chỉ bỏ một trong hai thứ "hoặc" hàng "hoặc" cột, ở đây là toán tử "hoặc" loại trừ, *OR exlusive*).

– Tiếp tục lặp lại hai bước trên đây cho tới khi hàng được phân phối hết vào các ô.

Bằng phương pháp "góc tây bắc" ta tạo được phương án trong bảng III.10.

Bảng III.10. Phương án xuất phát với phương pháp "góc tây bắc"

3 5000	2	7	6
7 1000	5 4000	2 1000	3
2	5	4 1000	5 1500

Tổng chi phí vận tải: Σ CPVT = $(3\times 5 + 7\times 1 + 5\times 4 + 2\times 1 + 4\times 1 + 5\times 1{,}5)\times 1000 =$ 55500.

Phương pháp cước phí tối thiểu

Phương pháp này được phát biểu tương tự như phương pháp "góc tây bắc" nhưng ưu tiên phân phát hàng vào ô có cước phí bé nhất (nếu có nhiều ô như vậy thì chọn ô bất kì trong số đó). Lúc này ta có phương án xuất phát là phương án cho trong bảng III.11.

Bảng III.11. Phương án xuất phát với phương pháp cước phí tối thiểu

3 1000	2 4000	7	6
7 2500	5	2 2000	3 1500
2 2500	5	4	5

Tổng chi phí vận tải: Σ CPVT = $(3\times 1 + 2\times 4 + 7\times 2{,}5 + 2\times 2 + 3\times 1{,}5 + 2\times 2{,}5) \times 1000 =$ 42000.

Một số nhận xét

– Phương pháp cước phí tối thiểu thường cho phương án xuất phát tốt hơn phương pháp "góc tây bắc".

– Bảng vận tải tương ứng với ví dụ 5 có số ô sử dụng là 3 + 4 – 1 = 7 – 1 = 6. Một cách tổng quát bảng vận tải m hàng, n cột có số ô sử dụng là m + n – 1.

– Bài toán vận tải cũng là BTQHTT. Trong ví dụ đang xét, nếu ký hiệu x_{ij} là lượng hàng cần được vận chuyển trên cung đường (i, j), chính là lượng hàng cần điền vào ô (i, j), thì chúng ta BTQHTT sau:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 7x_{21} + 5x_{22}$$

$$+ 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 6000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2500 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1,3}, \forall j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Đổi tên biến: $X_1 = x_{11}$, $X_2 = x_{12}$, $X_3 = x_{13}$, $X_4 = x_{14}$, $X_5 = x_{21}$, ..., $X_{12} = x_{34}$, thì bài toán trên đây là BTQHTT 12 biến, với ma trận A các hệ số ràng buộc như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ma trận A gồm 12 véc tơ cột được ký hiệu là A_{11}, A_{12}, ..., A_{34})

Hệ các ràng buộc có 7 phương trình. Nếu lấy tổng 4 phương trình cuối trừ đi tổng các phương trình thứ 2 và 3 thì được phương trình đầu. Mặt khác, do bài toán vận tải là có phương án, nên nếu gọi $\overline{A}$ là ma trận mở rộng của ma trận A ($\overline{A}$ thu được từ A bằng cách thêm một cột các hệ số vế phải của hệ (3.15)) thì hạng A = hạng $\overline{A} \leq 6$. Sau đây, chúng ta sẽ chỉ ra rằng, hạng A = hạng $\overline{A}$ = 6.

Mỗi phương án xuất phát (xem bảng III.10 và III.11) tìm được của bài toán vận tải trên đây chính là một phương án cực biên xuất phát khi giải BTQHTT. Bài toán vận tải có thể hoàn toàn giải được bằng phương pháp đơn hình. Tuy nhiên, do có cấu trúc đặc biệt, bài toán vận tải có thể được giải bằng các phương pháp khác với các thuật toán chuyên dụng. Đó là các phương pháp phân phối và phương pháp thế vị.

Phát biểu bài toán vận tải tổng quát

Trong một mạng lưới cung cấp và tiêu thụ một mặt hàng có m điểm cung, với các lượng cung là $a_1, a_2, \ldots, a_m$ và n điểm cầu, với các lượng cầu là $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Giả sử $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, tức là tổng cung và tổng cầu bằng nhau, thì ta có bài toán vận tải cân bằng cung cầu hay còn gọi là bài toán vận tải cân bằng thu phát.

Cho biết c_{ij} là cước phí / trên một đơn vị hàng vận chuyển từ điểm cung i tới điểm cầu j. Ký hiệu x_{ij} là lượng hàng cần vận chuyển từ điểm cung i tới điểm cầu j, chúng ta có bài toán vận tải cân bằng thu phát tổng quát sau đây:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{ij=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n}\ . \end{cases}$$

4.2. Các tính chất của bài toán vận tải

Tính chất 1. Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu.

Chứng minh

Chúng ta đã chỉ ra rằng bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án xuất phát (tìm được chẳng hạn bằng phương pháp "góc tây bắc" như trong ví dụ 5 và bảng III.10). Hơn nữa, ứng với mọi phương án vận tải thì hàm mục tiêu (hay tổng chi phí vận tải tương ứng) luôn luôn bị chặn dưới bởi 0. Theo nhận xét ở cuối mục 2.2, đối với một BTQHTT chỉ có thể xảy ra ba trường hợp: i) bài toán có phương án tối ưu, ii) bài toán không có phương án và iii) bài toán có phương án nhưng hàm mục tiêu không bị chặn. Từ đó suy ra, bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn có phương án tối ưu (đpcm). ■

Để nghiên cứu tính chất 2 của bài toán vận tải, trước hết chúng ta xem xét các định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1. Một tập hợp các ô trong bảng vận tải được nói là tạo nên một chu trình khép kín nếu có thể tìm được một đường đi khép kín xuất phát từ một ô nào đó thuộc tập hợp trên lại trở về ô xuất phát sau khi lần lượt đi qua các ô khác trong tập hợp (mỗi ô đi qua đúng một lần) dọc theo các hàng hay các cột của bảng vận tải, bước này theo hàng thì bước sau phải theo cột hoặc ngược lại. Như vậy, số ô tối thiểu trong một chu trình khép kín là 4.

Xét *ví dụ 5 và bảng III.9,* lúc đó các ô (1,1), (1,2), (2,2), (2,1) tạo nên một chu trình khép kín vì chúng ta có thể tạo nên một đường đi qua 4 ô này như sau: ô (1,1) → ô (1,2) → ô (2,2) → ô (2,1) → ô (1, 1).

Định nghĩa 2. Một tập hợp một số ô của bảng vận tải được nói là không tạo nên được một chu trình khép kín nào là một tập hợp các ô có tính chất: không một tập con nào của nó có thể tạo nên một chu trình khép kín.

Để lấy ví dụ về tập hợp một số ô của bảng vận tải không tạo nên được một chu trình khép kín nào, chúng ta tiếp tục xét *ví dụ 5 và các ô sử dụng trong phương án ở bảng III.10.* Đó là các ô (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3) và (3, 4). Đây là các ô không tạo nên được một chu trình khép kín nào. Thật vậy, giả sử có một số ô nào đó trong tập hợp 6 ô trên tạo nên một chu trình khép kín, thì chu trình này không thể đi qua ô (1, 1) (vì trong số 6 ô trên ô (1, 1) đứng một mình trên hàng 1, ta nói ô (1, 1) là ô treo trên hàng 1). Xét tiếp 5 ô còn lại là các ô (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3) và (3, 4), thì chu trình cũng không thể đi qua ô (2, 1) (vì trong số 5 ô trên ô (2, 1) đứng một mình trên cột 1, ta nói ô (2, 1) là ô treo trên hàng 1). Tương tự, có thể lập luận rằng ô tiếp theo (2, 3) không thể nằm trong chu trình cho tới khi còn lại 3 ô cuối cùng (2, 3), (3, 3) và (3, 4). Do ba ô này không thể tạo nên được chu trình khép kín nào (vì số ô tối thiểu trong một chu trình khép kín là 4), nên điều giả sử ban đầu vô lý. Vậy các ô (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3) và (3, 4) không tạo nên được một chu trình khép kín nào.

Tính chất 2. Nếu tập hợp gồm một số ô của bảng vận tải không tạo nên được một chu trình khép kín nào thì các véc tơ cột của ma trận A tương ứng với các ô trên là các véc tơ độc lập tuyến tính và ngược lại.

Chứng minh

Trước hết ta đi chứng minh chiều ngược lại, tức là nếu tập hợp gồm một số ô của bảng vận tải không thoả mãn giả thiết của tính chất 2 (từ một số ô trong số chúng có thể tạo nên được một chu trình khép kín nào đó) thì các véc tơ cột của ma trận A tương ứng với các ô trên là các véc tơ phụ thuộc tuyến tính

Để hình dung cụ thể hãy xét lại *ví dụ 5* và các véc tơ cột tương ứng với các ô (1,1), (1,2), (2,2), (2,1) tạo nên một chu trình khép kín là A_{11}, A_{12}, A_{22} và A_{21}. Dễ thấy rằng véc tơ này phụ thuộc tuyến tính vì rằng $A_{11} - A_{12} + A_{22} - A_{21} = 0$. Hơn nữa, nếu có bổ sung vào 4 ô trên đây một số ô nữa để tạo thành một tập hợp mới thì các véc tơ cột tương ứng với các ô của tập hợp này cũng phụ thuộc tuyến tính vì chúng chứa một tập con các véc tơ phụ thuộc tuyến tính. Với các ô tạo nên một chu trình khép kín bất kì chúng ta cũng có lập luận tương tự.

Bây giờ chúng ta đi chứng minh nếu tập hợp gồm một số ô của bảng vận tải không tạo nên được một chu trình khép kín nào thì các véc tơ cột của ma trận A tương ứng với các ô trên là các véc tơ độc lập tuyến tính. Để hình dung cụ thể, xét *ví dụ 5 và các ô (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3) và (3, 4) không tạo nên được một chu trình khép kín nào trong bảng III.10.* Cần phải chỉ ra rằng các véc tơ cột tương ứng A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{33} và A_{34} của ma trận A, là độc lập tuyến tính. Xét đẳng thức véc tơ sau:

$$\alpha_{11}A_{11} + \alpha_{21}A_{21} + \alpha_{22}A_{22} + \alpha_{23}A_{23} + \alpha_{33}A_{33} + \alpha_{34}A_{34} = 0. \qquad (3.16)$$

Do ô (1, 1) là ô treo trên hàng 1 trong số những ô trên nên toạ độ thứ nhất của A_{11} là 1, còn toạ độ thứ nhất của tất các các véc tơ còn lại phải bằng 0 (hãy quan sát lại cấu trúc đặc biệt của ma trận A và hệ (3.15)). Từ (3.16) suy ra rằng $\alpha_{11} = 0$. Vậy (3.16) trở thành $\alpha_{21}A_{21} + \alpha_{22}A_{22} + \alpha_{23}A_{23} + \alpha_{33}A_{33} + \alpha_{34}A_{34} = 0$. Lập luận tương tự, do ô (2, 1) là ô treo trên cột 1 trong số 5 ô còn lại nên toạ độ thứ n + 1 (n =3 trong ví dụ 5) của nó bằng 1, còn toạ độ thứ n+1 của 4 véc tơ khác bằng 0. Do đó $\alpha_{21} = 0$. Cứ như vậy, cuối cùng sẽ chứng minh được các hệ số α_{ij} trong (3.16) đều bằng 0. Chúng ta đã chỉ ra rằng A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{33} và A_{34} là các véc tơ độc lập tuyến tính. ■

Tính chất 3. Một phương án cực biên của bài toán vận tải là một phương án ứng với m + n – 1 ô sử dụng không tạo nên một chu trình khép kín nào.

Chứng minh

Cho A là ma trận các hệ số ràng buộc của bài toán vận tải, trước hết chúng ta đi chứng minh: hạng A = hạng $\overline{A}$ = m + n –1. Thật vậy, do bài toán vận tải luôn có phương án nên hạng A = hạng $\overline{A}$. Chúng ta còn phải chỉ ra rằng: hạng A = hạng $\overline{A}$ = m + n –1. Để hình dung cụ thể, xét lại ví dụ 5 với hệ ràng buộc (3.15) gồm 7 phương trình. Ta thấy ngay, phương trình đầu là hệ quả của 6 phương trình sau. Từ hệ ràng buộc, sau khi bỏ bớt đi phương trình đầu, có thể biểu diễn được:

$$\begin{cases} x_{21} = a_2 - (x_{22} + x_{23} + x_{24}) \\ x_{31} = a_3 - (x_{32} + x_{33} + x_{34}) \\ x_{11} = b_1 - (x_{21} + x_{31}) \\ x_{12} = b_2 - (x_{22} + x_{32}) \\ x_{13} = b_3 - (x_{23} + x_{33}) \\ x_{14} = b_4 - (x_{24} + x_{34}). \end{cases}$$

Như vậy, trong hệ phương trình ràng buộc đã cho có thể coi 6 biến x_{21}, x_{31}, x_{11}, x_{12}, x_{13} và x_{14} là các biến cơ sở, các biến còn lại là biến ngoài cơ sở. Do đó hạng A = hạng $\overline{A}$ = 6. Trong bài toán vận tải tổng quát, có thể chọn các biến x_{21}, x_{31}, ..., x_{m1}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, ...và x_{1n} là các biến cơ sở. Vậy ta có hạng A = hạng $\overline{A}$ = m + n – 1.

Do hạng A = m + n – 1, nên một phương án cực biên của bài toán vận tải có các biến cơ sở ứng với m + n – 1 véc tơ cột độc lập tuyến tính của ma trận A. Vậy tính chất 3 được suy ra từ tính chất 2. ■

Xét *ví dụ 5* và *các bảng III.10, bảng III.11*. Các phương án xuất phát tạo nên bằng phương pháp "góc tây bắc" hay phương pháp cước phí cực tiểu là các phương án cực biên vì các ô sử dụng của chúng không tạo nên chu trình khép kín nào.

4.3. Phương pháp phân phối giải bài toán vận tải

Chúng ta có thể áp dụng phương pháp "nhảy trên đá" (tạm dịch từ *Stepping Stone Method*), hay chính thức hơn còn gọi là phương pháp phân phối (*Distribution Method*) để giải bài toán vận tải.

Phương pháp "nhảy trên đá" là một quy trình tính toán nhằm từng bước cải thiện phương án vận tải đã có để cuối cùng tìm được phương án vận tải tối ưu.

Xác định hiệu suất của các ô chưa sử dụng

Quay lại bảng vận tải III.10 với phương án xuất phát tìm được theo phương pháp "góc tây bắc". Trong bảng đó chỉ có một số ô đã sử dụng, ta coi chúng như các hòn đá nhô lên trong một cái ao. Xét một ô (i, j) bất kỳ chưa sử dụng trong phương án đã có. Ta cần tính hiệu suất e_{ij} (e là viết tắt của từ effect) của ô (i, j) theo các bước sau:

– Đầu tiên ta cần tìm một đường đi có tính chất: đi qua đúng một ô chưa sử dụng là ô (i, j) (ô xuất phát) và một số ô đã sử dụng khác, mỗi bước phải đi theo hàng hoặc theo cột xen kẽ nhau (không được đi liền hai bước trên một hàng hay một cột) để cuối cùng quay về ô (i, j). Điều này giống như đang ở trên thuyền, muốn ra khỏi thuyền mà không ướt ta phải nhảy qua các hòn đá nhô lên trong ao để cuối cùng lại quay về thuyền (vì vậy phương pháp có tên là phương pháp "nhảy trên đá"). Một điều thú vị nữa là con đường nhảy trên các hòn đá như vậy là duy nhất.

Tóm lại xuất phát từ ô (1, 2) chẳng hạn, ta sẽ có đường đi như sau: (1, 2) → (2, 2) → (2, 1) → (1, 1) → (1, 2). Trên đường đi này chỉ duy nhất có một ô chưa sử dụng (xem bảng III.12).

Bảng III.12. Tính hiệu suất các ô chưa sử dụng

3 5000	2	7	6	5000
7 1000	5 4000	2 1000	3	6000
2 (– 7)	5 (– 2)	4 1000	5 1500	2500
6000	4000	2000	1500	13500

– Đánh dấu cộng trừ xen kẽ tại các đỉnh trên đường đi mà trong đó ô chưa sử dụng được đánh dấu +. Giả sử ta cần luân chuyển một đơn vị hàng theo đường đi đã xác định mà vẫn thoả mãn được cung cầu (tức là các ô mang dấu +: ô (1, 2) và ô (2, 1) có thêm một đơn vị hàng, các ô mang dấu –: ô (2, 2) và ô (1, 1) rút bớt đi một đơn vị hàng). Lúc này tổng chi phí sẽ thay đổi một lượng tiền là: $e_{12} = +c_{12} - c_{22} + c_{21} - c_{11} = 2 - 5 + 7 - 3 = +1$. Nói cách khác, tổng chi phí vận tải sẽ tăng thêm lên 1 USD cho mỗi một đơn vị hàng luân chuyển theo đường đi trên. Như vậy ta đã tính được *hiệu suất* của ô(1, 2): $e_{12} = 1$. Một cách tương tự, ta có:

$$e_{13} = 7 - 2 + 7 - 3 = +9,\ e_{14} = 6 - 5 + 4 - 2 + 7 - 3 = +7,$$

$$e_{24} = 3 - 5 + 4 - 2 = 0,\ e_{31} = 2 - 7 + 2 - 4 = -7,\ e_{32} = 5 - 5 + 2 - 4 = -2.$$

Chỉ có hai ô với hiệu suất âm là ô (3, 1) và ô (3, 2) (xem bảng III.12) có thể lựa chọn để đưa vào sử dụng trong phương án mới (để làm giảm tổng chi phí vận tải). Ta quyết định trong phương án mới sẽ chọn ô (3, 2) để đưa vào sử dụng, mỗi đơn vị hàng đưa vào sử dụng tại ô (3, 2) sẽ làm tổng chi phí giảm 2 USD. Ký hiệu $e = e_{32}$.

Chú ý. Có thể chứng minh được $e_{ij} = \Delta_{ij}$ với Δ_{ij} là giá trị trên hàng Δ ứng với cột x_{ij} nếu giải bài toán vận tải bằng phương pháp đơn hình (xem thêm mục 4.5 cùng chương).

Xác định lượng hàng đưa vào ô chọn

Như trên đã phân tích, một đơn vị hàng đưa vào ô (3, 2) làm giảm tổng chi phí vận tải 2 USD. Ta cần tìm q, lượng hàng tối đa có thể đưa vào ô (3, 2). Đường đi qua ô (3, 2) và một số ô đã được sử dụng là: (3, 2) → (2, 2) → (2, 3) → (3, 3) → (3, 2), với các ô được đánh dấu cộng trừ xen kẽ (ô (3, 2) mang dấu +). Lượng hàng q được tính theo quy tắc:

q = min {các lượng hàng tại các ô mang dấu –} = min {lượng hàng tại ô (2, 2), lượng hàng tại ô (3, 3)} = min {4000, 1000} = 1000.

Vậy trong phương án mới, lượng hàng tại các ô mang dấu + (các ô (3, 2), ô (2, 3)) được tăng thêm 1000 đơn vị, còn tại các ô mang dấu – (các ô (2, 2) và ô (3, 3)) lượng hàng giảm đi 1000 đơn vị (xem bảng III.13). Phương án mới gồm 6 ô sử dụng (ô (3, 3) ứng với q = 1000 đã bị loại ra).

Bảng III.13. Phương án vận tải sau hai bước

3 5000	2	7	6	500
7 1000	5 3000	2 2000	3	6000
2 (– 5)	5 1000	4	5 1500	2500
6000	4000	2000	1500	13500

Tổng chi phí vận tải được tính bởi: Σ CPVT = $(3\times5 + 7\times1 + 5\times3 + 2\times2 + 5\times1 + 5\times1{,}5)\times1000 = 53500$, hoặc Σ CPVT mới = Σ CPVT cũ – e×q = 55500 – 2× 1000 = 53500.

Điều kiện tối ưu

Quy trình trên được thực hiện cho tới khi tất cả các hiệu suất $e_{ij} \geq 0$, ∀ ô (i, j) là các ô chưa sử dụng. Đây chính là điều kiện tối ưu hay điều kiện dừng. Điều kiện này thực chất là điều kiện $\Delta_{ij} \geq 0$ đúng với mọi biến ngoài cơ sở x_{ij} khi giải bài toán bằng phương pháp đơn hình (xem mục 4.5 cùng chương).

Chúng ta đi kiểm tra điều kiện tối ưu đối với phương án vận tải trong bảng III.13. Cần tính các hiệu suất cho các ô chưa sử dụng trong phương án mới:

$e_{12} = 2 - 5 + 7 - 3 = +1$; $\quad e_{13} = 7 - 2 + 7 - 3 = +19$;

$e_{14} = 6 - 5 + 5 - 5 + 7 - 3 = +5$; $\quad e_{24} = 3 - 5 + 5 - 5 = -2$;

$e_{31} = 2 - 7 + 5 - 5 = -5$; $\quad e_{33} = 4 - 5 + 5 - 2 = +2$.

Do đó phương án trong bảng III.13 chưa phải là phương án tối ưu. Chúng ta quyết định sử dụng ô chọn (3, 1) trong phương án mới vì $e_{31} = -5$. Tìm được q = 1000 theo quy tắc đã biết. Có hai ô ứng với q tìm được, chúng ta chỉ bỏ đi ô (2, 1) còn phải giữ lại ô (3, 2) để đưa vào sử dụng. Phương án vận tải tìm được sau ba bươc được cho trong bảng III.14.

Bảng III.14. Phương án vận tải sau ba bước

3 5000	2	7	6	5000
7	5 4000	2 2000	3 (– 2)	6000
2 1000	5 0	4	5 1500	2500
6000	4000	2000	1500	13500

Tổng chi phí vận tải: Σ CPVT = 53500 – 5 $\times$ 1000 = 48500.

Tiếp tục tính các hiệu suất: $e_{12} = +1$; $e_{13} = 7 - 2 + 5 - 5 + 4 = 9$; $e_{14} = 6 - 5 + 2 - 3 = 0$; $e_{21} = 7 - 2 + 5 - 5$; $e_{24} = 3 + 5 + 5 - 5 = -2$; $e_{33} = 4 - 5 + 5 - 2 = +2$.

Chọn ô (2, 4) đưa vào sử dụng và tính q = 1500. Từ đó có phương án mới sau bốn bước như trong bảng III.15

Bảng III.15. Phương án vận tải sau bốn bước

3 5000	2 (– 4)	7	6	5000
7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
2 1000	5 1500	4	5	2500
6000	4000	2000	1500	13500

Tổng chi phí vận tải: Σ CPVT = 48500 – 2 $\times$ 1500 = 45500.

Tiếp tục tính các hiệu suất:

$e_{12} = 2 - 5 + 2 - 3 = -4$; $e_{13} = 7 - 2 + 5 - 5 + 2 - 3 = +4$;

$e_{14} = 6 - 3 + 5 - 5 + 2 - 3 = 2$; $e_{21} = 7 - 2 + 5 - 5 = +5$;

$e_{33} = 4 - 5 + 5 - 2 = +2$; $e_{34} = 5 - 5 + 5 - 2 = +3$.

Ta có $e_{12} = -4$ và chọn ô (1, 2) làm ô chọn với q = 1500 và chuyển sang phương án mới như trong bảng III.16

Bảng III.16. Phương án vận tải sau năm bước

3 3500	2 1500	7	6	5000
7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
2 2500	5	4	5	2500
6000	4000	2000	1500	13500

Tổng chi phí vận tải: Σ CPVT = 45500 – 4×1500 = 39500.

Lúc này $e_{ij} \geq 0$, $\forall$ ô (i, j) chưa sử dụng. Điều kiện tối ưu đã được thoả mãn. Phương án vận tải tối ưu cho trong bảng III.16 với tổng chi phí nhỏ nhất là 39500.

Bài toán vận tải không cân bằng thu phát

Trường hợp tổng lượng cung lớn hơn tổng lượng cầu, cần bố trí thêm một điểm (cột) cầu giả mà mọi chi phí vận tải đến đó đều được coi bằng 0. Tương tự, nếu cầu vượt cung thì cần bố trí một điểm (hàng) cung giả và coi mọi chi phí vận chuyển từ đó đi đều bằng 0. Lúc đó ta có bài toán vận tải cân bằng thu phát với các cước phí trong các ô trên cột cầu giả hoặc trên các hàng cung giả đều bằng 0. Chú ý rằng lúc này, bảng vận tải mới sẽ có thêm một cột cầu giả (nằm bên phải cùng) hoặc một hàng cung giả (nằm dưới cùng). Để tìm phương án xuất phát, chúng ta vẫn thực hiện các phương pháp "góc tây bắc" hoặc phương pháp cước phí tối thiểu nhưng cần ưu tiên phân hàng vào các ô của bảng vận tải ban đầu trước khi phân hàng vào các ô trên cột giả hay hàng giả.

4.4. Phương pháp thế vị giải bài toán vận tải

Phương pháp "nhảy trên đá" hay phương pháp phân phối có một nhược điểm là việc tính hiệu suất của các ô khá dài dòng. Vì vậy, ta sẽ nghiên cứu phương pháp thế vị nhằm tính các hiệu suất e_{ij} ngắn gọn hơn.

Xét phương án xuất phát tìm được bằng phương pháp cước phí cực tiểu cho trong bảng III.17 (với tổng chi phí vận tải là 42000).

Bảng III.17. Phương án vận tải xuất phát

3 1000	2 4000	7	6	5000
7 2500	5	2 2000	3 1500	6000
2 2500	5	4	5	2500
6000	4000	2000	1500	13500

Ta có $e_{13} = 7 - 2 + 7 - 3 = +9$. Ta tìm cách tính e_{13} bằng cách khác nhanh hơn như trình bày sau đây.

Trước hết cần xây dựng hệ thống số thế vị hàng và cột $\{u_i, v_j\}$, trong đó u_i với $i = 1, 2, 3$ là các thế vị hàng, còn v_j với $j = 1, 2, 3, 4$ là các thế vị cột. Có thể gán cho một thế vị bất kỳ giá trị 0 (hoặc một giá trị bất kỳ khác), thế vị này thường được chọn ở hàng hay cột có nhiều ô sử dụng nhất. Chẳng hạn chọn $u_2 = 0$. Các thế vị khác được tính bởi công thức:

$$u_i + v_j = c_{ij}, \forall \text{ ô } (i, j) \text{ sử dụng.}$$

Chọn $u_2 = 0 \Rightarrow$ $v_1 = 7$ $(= c_{21} - u_2)$; $v_3 = 2$ $(= c_{23} - u_2)$; $v_4 = 3$ $(= c_{24} - u_2)$;
$u_1 = -4$ $(= c_{11} - v_1)$; $u_3 = -5$ $(= c_{37} - v_1)$; $v_2 = 6$ $(= c_{12} - u_1)$.

Công thức tổng quát để tính các hiệu suất cho các ô (i, j) chưa sử dụng là: $e_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$. Chẳng hạn ta có $e_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (-4 + 2) = 9$. Các hiệu suất khác được tính tương tự (xem bảng III.18).

Bảng III.18. Tính toán các thế vị và các hiệu suất

	$v_1 = 7$	$v_2 = 6$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	
$u_1 = -4$	3 1000	2 4000	7	6	5000
$u_2 = 0$	7 2500	5 (– 1)	2 2000	3 1500	6000
$u_3 = -5$	2 2500	5	4	5	2500
	6000	4000	2000	1500	13500

Trong bảng III.18 ta thấy $e_{22} = -1 < 0$. Chọn ô (2,2) để đưa vào sử dụng ứng với $q = 2500$, ta chuyển sang phương án mới và tính lại các hệ thống số thế vị như trong bảng III.19.

Bảng III.19. Tính toán các thế vị và các hiệu suất cho phương án mới

	$v_1 = 6$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	
$u_1 = -3$	3 3500	2 1500	7	6	5000
$u_2 = 0$	7	5 2500	2 2000	3 1500	6000
$u_3 = -4$	2 2500	5	4	5	2500
	6000	4000	2000	1500	13500

Chọn $u_2 = 0 \Rightarrow v_2 = 5$ (= 5 – 0); $v_3 = 2$ (= 2 – 0); $v_4 = 3$ (= 3 – 0); $u_1 = -3$ (= 2 – 5); $v_1 = 6$ (= 3 – (–3)); $u_3 = -4$ (= 2 – 6).

Tổng chi phí vận tải: Σ CPVT = $(3 \times 3{,}5 + 2 \times 1{,}5 + 5 \times 2{,}5 + 2\times 2 + 3 \times 1{,}5 + 2\times 2{,}5) \times 1000 = 39500$ (tính cách khác, Σ CPVT mới = $42000 - 1 \times 2500$).

Tiếp tục tính toán các hiệu suất:

$e_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (-3 + 2) = 8;$

$e_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 6 - (-3 + 3) = 6;$

$e_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 7 - (0 + 6) = 1;$

$e_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - (-4 + 5) = 4;$

$e_{33} = c_{33} - (u_3 + v_4) = 4 - (-4 + 2) = 6;$

$e_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 5 - (-4 + 3) = 6.$

Ta thấy $e_{ij} \geq 0$, $\forall$ ô (i, j) chưa sử dụng nên điều kiện tối ưu đã được thoả mãn. Phương án tối ưu cho trong bảng III.19, với tổng chi phí vận tải nhỏ nhất là 39500.

Chú ý

– Đối với bài toán vận tải cần cực đại hoá hàm mục tiêu thì tiêu chuẩn dừng sẽ là $e_{ij} \leq 0$, $\forall$ô (i, j) chưa sử dụng.

– Đối với bài toán vận tải có ô cấm (cung đường không được sử dụng) thì đặt cước phí M =+ ∞ cho các ô cấm với bài toán Min hoặc M = – ∞ với bài toán Max.

4.5. Cơ sở của phương pháp phân phối và phương pháp thế vị

Xét lại ví dụ 5 với bài toán vận tải được cho trong bảng III.20. Viết bài toán dưới dạng BTQHTT như sau:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 7x_{21} + 5x_{22}$$

$$+ 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 5000 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 6000 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 2500 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500 \\ x_{ij} \geq 0, \forall i = \overline{1,3}, \forall j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Bảng III.20. Bảng vận tải trong ví dụ 5

3	2	7	6	Cung 1: 5000
7	5	2	3	Cung 2: 6000
2	5	4	5	Cung 3: 2500
Cầu1: 6000	Cầu 2: 4000	Cầu 3: 2000	Cầu4: 1500	Tổng: 13500

Cơ sở của phương pháp phân phối

Chọn phương án tìm được bằng phương pháp góc tây bắc (xem bảng III.10) làm phương án cực biên xuất phát, chúng ta có bảng đơn hình xuất phát như sau (bảng III.21).

Bảng III.21. Bảng đơn hình xuất phát giải bài toán vận tải

c_B	x_B		3	2	7	6	7	5	2	3	2	5	4	5
			x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
3	x_{11}	5000	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
7	x_{21}	1000	0	– 1	– 1	– 1	1	0	0	0	1	0	0	0
5	x_{22}	4000	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
2	x_{23}	1000	0	0	1	+1	0	0	1	1	– 1	– 1	0	0
4	x_{33}	1000	0	0	0	– 1	0	0	0	– 1	1	1	1	0
5	x_{34}	1500	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
$\Delta_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$			0	1	9	7	0	0	0	0	– 7	– 2	0	0

Chúng ta sẽ chứng minh rằng các hiệu suất e_{ij} của các ô (i, j) chưa sử dụng chính là các giá trị $\Delta_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$ được tính ở hàng cuối của bảng III.21. Chẳng hạn, chúng ta sẽ chỉ ra rằng $e_{12} = \Delta_{12}$.

Thật vậy, cột hệ số của x_{12} là các hệ số mà A_{12} biểu thị tuyến tính qua các véc tơ cơ sở A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{33} và A_{34}. Xét véc tơ cột α ứng với x_{12}, ta có: $\alpha^T = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)^T = (1, -1, 1, 0, 0, 0)$ và ma trận cơ sở $B = [A_{11} \quad A_{21} \quad A_{22} \quad A_{23} \quad A_{33} \quad A_{34}]$.

Theo các phân tích ở chương II, mục 3.3, ta có $\alpha = B^{-1}A_{12}$ hay $A_{12} = B\alpha$. Vậy có thể viết $A_{12} = \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{21} + \alpha_3 A_{22} + \alpha_4 A_{23} + \alpha_5 A_{33} + \alpha_6 A_{34}$ và cách biểu diễn A_{12} dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các véc tơ cột cơ sở (trong ma trận B) là duy nhất.

Xét chu trình đi qua ô (1, 2) và một số ô trong các ô đã sử dụng (1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3) và ((3, 4). Chu trình này là duy nhất: (1,2) → (2,2) → (2,1) → (1,1) → (1,2). Do đó ta có ngay: $A_{12} - A_{22} + A_{21} - A_{11} = 0$

$$\Rightarrow A_{12} = A_{11} - A_{21} + A_{22} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1 \\ \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta_{12} = c_{12} - z_{12} = c_{12} - (c_{11}\alpha_1 + c_{21}\alpha_2 + c_{22}\alpha_3 + c_{23}\alpha_4 + c_{33}\alpha_5 + c_{34}\alpha_5)$$

$$= 2 - (3\times 1 - 7\times 1 + 5\times 1) = 2 - 3 + 7 - 5 = 1$$

$$\Rightarrow \Delta_{12} = c_{12} - c_{11} + c_{21} - c_{22} = e_{12}.$$

Tương tự, khi xét chu trình đi qua ô chưa sử dụng (3,1) và các ô (2,1), (2,3) và (3,3) thì có $A_{31} = A_{21} - A_{23} + A_{33}$. Từ đó cũng chỉ ra được $\Delta_{31} = c_{31} - c_{21} + c_{23} - c_{33} = e_{31} \Rightarrow \Delta_{31} = 2 - 7 + 2 - 4 = -7$.

Theo bảng đơn hình III.21, ta có $\Delta_{31} = -7$ và $\Delta_{32} = -2$, các Δ_{ij} còn lại đều không âm. áp dụng thủ tục xoay, chọn cột xoay là cột tương ứng với biến x_{32}, tức là sẽ đưa ô (3,2) vào sử dụng. Theo quy tắc tỷ số dương bé nhất, hàng xoay được chọn là hàng ứng với biến x_{33} ứng với lượng hàng Min trong các ô mang dấu – trong chu trình đi qua các ô (3,2), (2,2), (2,3) và (3,3). Kết quả này cũng đã được chỉ ra trong bảng III.12. Sau đó chúng ta sẽ chuyển sang bảng đơn hình ở bước tiếp theo cho kết quả tính toán trùng với kết quả trong bảng III.13 khi giải bài toán vận tải theo phương pháp phân phối.

Cơ sở của phương pháp thế vị

Xét bài toán vận tải trong *ví dụ 5*:

$$\text{Min } z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 7x_{21} + 5x_{22}$$

$$+ 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} = 5000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} = 6000 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} = 2500 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6000 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4000 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2000 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1500 \\ x_{ij} \ge 0, \forall i = \overline{1,3}, \forall j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Đây là BTQHTT với phương trình cuối cùng là hệ quả của các phương trình đứng trên. Gọi u_1, u_2, u_3 là các biến đối ngẫu của 3 phương trình đầu và v_1, v_2, v_3, v_4 là các biến đối ngẫu của 4 phương trình sau. Lúc đó ta có bài toán đối ngẫu sau của BTQHTT đã cho.

$$\text{Max } w = 5000u_1 + 6000u_2 + 2500u_3 + 6000v_1 + 4000v_2 + 2000v_3 + 1500v_4$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} u_1 + v_1 \le 3 \\ u_1 + v_2 \le 2 \\ u_1 + v_3 \le 7 \\ u_1 + v_4 \le 6 \\ \ldots \\ u_3 + v_4 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \{u_i + v_j \le c_{ij}, \forall i = \overline{1,3}, \forall j = \overline{1,4}.$$

Các biến đối ngẫu u_i, v_j được gọi là các thế vị.

Định lý 4. Điều kiện cần và đủ để một phương án vận tải $\{x_{ij} \ge 0, \forall i = \overline{1,m}$ và $\forall j = \overline{1,n}\}$ là phương án tối ưu, là tồn tại một hệ thống số thế vị $\{u_i, \forall i = \overline{1,m}, v_j, \forall j = \overline{1,n}\}$ thỏa mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij}, \ \forall i = \overline{1,m}, \forall j = \overline{1,n} \\ u_i + v_j = c_{ij}, \ \forall (i,j): \quad x_{ij} > 0. \end{cases}$$

Chứng minh

Trước hết, chúng ta sẽ chỉ rằng với hệ thống thế vị {u_i, $\forall i = \overline{1,m}$, v_j, $\forall j = \overline{1,n}$} thu được ứng với phương án vận tải {x_{ij}} đã cho, ta luôn có $\Delta_{ij} = e_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$, $\forall$ô (i, j).

Để cho dễ hiểu, chúng ta xét lại ví dụ 5 và bảng III.12. Lúc này, hệ thống thế vị được xác định từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_2 + v_1 = 7 \\ u_2 + v_2 = 5 \\ u_2 + v_3 = 2 \\ u_3 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_4 = 5. \end{cases}$$

Bảng III.12. Tính hiệu suất các ô chưa sử dụng

3 5000	2	7	6	5000
7 1000	5 4000	2 1000	3	6000
2 (– 7)	5 (– 2)	4 1000	5 1500	2500
6000	4000	2000	1500	13500

Hệ phương trình gồm 6 phương trình và 7 ẩn, hạng của ma trận hệ số (như đã biết) là hạng $A^T = 6$. Vậy hệ có vô số nghiệm phụ thuộc vào một tham số (tức là, các giá trị của các ẩn cơ sở xác định duy nhất khi cho ẩn ngoài cơ sở / ẩn tự do nhận một giá trị tùy ý). Giả sử $v_4 = 0$ (ở đây v_4 được coi là ẩn tự do), lúc đó ta có:

$$\begin{cases} u_3 = 5 - v_4 \\ v_3 = 4 - u_3 = -1 + v_4 \\ u_2 = 2 - v_3 = 3 - v_4 \\ v_2 = 5 - u_2 \\ v_1 = 7 - u_2 = 4 + v_4 \\ u_1 = 3 - v_1 = -1 - v_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = 5 \\ u_3 = -1 \\ u_2 = 3 \\ v_2 = 5 \\ v_1 = 4 \\ u_1 = -1. \end{cases}$$

Do đó, khi cho một thế vị chọn bất kỳ nhận một giá trị tùy ý thì luôn tính được các thế vị còn lại một cách duy nhất. Hơn nữa $c_{ij} - (u_i + v_j)$ luôn không thay đổi dù thế vị đầu tiên chọn giá trị nào (hãy quan sát kỹ hệ phương trình trên để suy ra điều này). Như vậy có thể chọn $v_4 = 0$ để việc tính toán được đơn giản.

Theo cách xây dựng y = (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4)^T trên đây thì có y = $(c_B B^{-1})^T$ với B là ma trận cơ sở (gồm các cột véc tơ cơ sở của ma trận A). Theo tính chất của cặp bài toán đối ngẫu ta có: $\Delta_{ij} = c_{ij} - c_B B^{-1} A_{ij} = c_{ij} - y^T A_{ij}$. Chẳng hạn:

$$\Delta_{11} = c_{11} - (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4)(1,0,0,1,0,0,0)^T = c_{11} - (u_1 + v_1).$$

Một cách tổng quát, chúng ta có $\Delta_{ij} = e_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ứng với tất cả các ô (i, j). Từ đây, theo định lý 1 của chương II, và dựa theo lời chứng minh định lý 2 của chương III (cần thay BTG là bài toán Min, còn BTĐN là bài toán Max), chúng ta có thể chỉ ra được (bạn đọc hãy tự chứng minh): điều kiện cần và đủ để một phương án vận tải là tối ưu là hệ thống số thế vị tương ứng phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} u_i + v_j \le c_{ij} & \forall i = \overline{1,m} \quad \forall j = \overline{1,n} \\ u_i + v_j = c_{ij} & \forall (i,j): \quad x_{ij} > 0. \end{cases}$$

Đây chính là đpcm. ■

Bài tập chương III

Bài 1. Xét BTQHTT Max z = $2x_1 + 5x_2 + 8x_3$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 + 4x_3 \le 96 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 60 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

a. Giải bài toán trên bằng phương pháp đơn hình.

b. Hãy viết bài toán đối ngẫu và tìm phương án tối ưu của nó.

c. Hãy phát biểu ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu.

Bài 2. Xét BTQHTT

Max z = $-2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - x_4 - 4x_5$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

a. Viết bài toán đối ngẫu.

b. Áp dụng lý thuyết đối ngẫu, chứng minh rằng x* = (0, 0, 16, 31, 14) là phương án tối ưu của BTQHTT đã cho.

Bài 3. Xét BTQHTT

Min $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

a. Viết bài toán đối ngẫu.

b. Cho biết bài toán gốc có phương án tối ưu là $x^* = (0, 1/2, 0, 5/2, 3/2)$. Hãy tìm phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bài 4. Xét BTQHTT

Min $z = 5x_1 + 5x_2$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} \lambda x_1 + 5x_2 \geq 7 \\ 5x_1 + \lambda x_2 \geq 3. \end{cases}$$

a. Viết bài toán đối ngẫu.

b. Áp dụng lý thuyết đối ngẫu, tìm giá trị tối ưu của bài toán đối ngẫu và bài toán gốc tùy theo λ.

Bài 5. Giải BTQHTT sau đây bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu:

Min $z = 2x_1 + 5x_2$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \geq 96 \\ 2x_1 + x_2 \geq 40 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Bài 6. Giải BTQHTT sau đây bằng thuật toán đơn hình đối ngẫu:

Min $z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \leq -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Bài 7. Hãy phát biểu thuật toán đơn hình đối ngẫu và lập chương trình máy tính bằng ngôn ngữ Pascal hay ngôn ngữ C để giải BTQHTT dạng tổng quát. Chạy kiểm thử chương trình trên một số ví dụ đã biết.

Bài 8. Xét bài toán vận tải với các dữ kiện cho trong bảng (chẳng hạn cước phí vận chuyển $c_{23} = 5$).

a. Không giải bài toán, hãy chứng tỏ rằng nó nhất định có một phương án vận tải tối ưu mà các thành phần đều là số chẵn.

b. Chứng minh rằng phương án $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{24} = x_{33} = x_{34} = 0$, $x_{13} = x_{22} = x_{23} = 2$, $x_{14} = x_{31} = x_{32} = 4$ là tối ưu. Sau đó cho biết bài toán có các phương án tối ưu khác hay không?

3	1	2	2	Cung 1: 6
5	2	5	6	Cung 2: 4
6	4	8	8	Cung 3: 8
Cầu 1: 4	Cầu 2: 6	Cầu 3: 4	Cầu 4: 4	$\sum$ = 18

Bài 9. Hãy giải bài toán lập kế hoạch vay ba ngân hàng để thực hiện các dự án đầu tư trong bốn lĩnh vực khác nhau, biết số tiền các ngân hàng có thể cho vay cũng như lãi suất / năm các ngân hàng tính cho từng dự án (thời hạn thực hiện các hợp đồng cho vay là một năm).

a. Sử dụng phương pháp phân phối.

b. Sử dụng phương pháp thế vị.

c. Sử dụng phần mềm Lingo.

6%	3%	5%	8%	Ngân hàng 1: 60
4%	5%	4%	6%	Ngân hàng 2: 50
7%	6%	6%	4%	Ngân hàng 3: 30
Dự án 1: 40	Dự án 1: 20	Dự án 1: 50	Dự án 1: 30	$\sum$ = 140

Bài 10. Trong một bài toán vận tải cho biết véc tơ cung là a = (30, 10 + δ, 45, 30), véc tơ cầu là b = (25, 20 + δ, 6, 7, 22, 35) và ma trận chi phí vận chuyển $C = [c_{ij}]$ như sau:

$$C = \begin{bmatrix} 30 & 11 & 5 & 35 & 8 & 29 \\ 2 & 5 & 2 & 5 & 1 & 9 \\ 35 & 20 & 6 & 40 & 8 & 33 \\ 19 & 2 & 4 & 30 & 10 & 25 \end{bmatrix}$$

Ký hiệu g(δ) là giá trị tối ưu của hàm mục tiêu của bài toán phụ thuộc vào tham số δ. Chứng minh rằng g(δ) là hàm nghịch biến trên đoạn $0 \le \delta \le 22$ (đây là *nghịch lý vận tải*: trong một số trường hợp, khi lượng hàng cần vận chuyển tăng lên thì tổng chi phí vận chuyển lại có thể được rút bớt đi).

Bài 11. Hãy phát biểu thuật giải theo phương pháp thế vị cho bài toán vận tải cân bằng thu phát và lập chương trình máy tính bằng ngôn ngữ Pascal hay C. Sau đó chạy thử nghiệm chương trình cho một số ví dụ kiểm thử.

Chương IV

Quy hoạch nguyên

1. Phương pháp cắt Gomory giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

1.1. Phát biểu bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

Với mục đích tìm hiểu bước đầu, xét mô hình toán học sau đây, còn gọi là mô hình quy hoạch tuyến tính nguyên hay bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên (BTQHTT nguyên), mà trong đó chúng ta muốn tối ưu hoá / cực đại hoá hay cực tiểu hoá hàm mục tiêu với điều kiện các biến quyết định là các biến nguyên:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \quad \rightarrow \text{ Max (Min)},$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0 \text{ (điều kiện không âm)} \\ x_1, x_2, ..., x_n \text{ nguyên (điều kiện nguyên).} \end{cases}$$

Trong trường hợp tổng quát, BTQHTT nguyên có thể bao gồm các ràng buộc dạng ≥, ≤ hoặc dạng =, các biến có thể có dấu ≥ 0, ≤ 0 hoặc dấu tùy ý.

Ví dụ 1. Xét BTQHTT: Max $z = x_1 + 4x_2$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{ nguyên .} \end{cases}$$

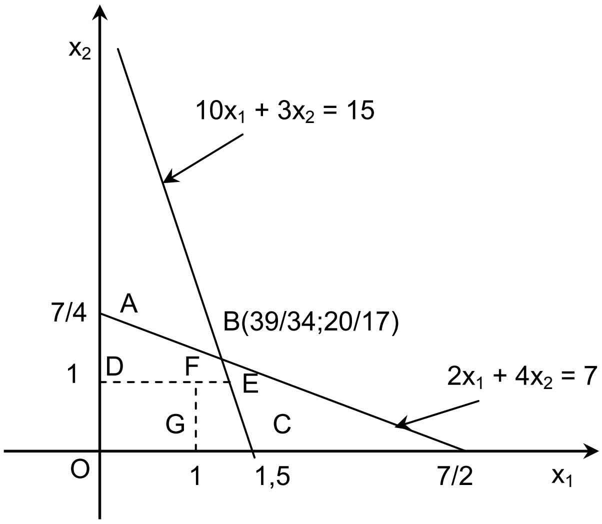
Cần tìm các giá trị nguyên của các biến quyết định x_1, x_2 để các ràng buộc được thoả mãn và hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất.

1.2. Minh họa phương pháp Gomory bằng đồ thị

Chúng ta đi tìm phương án tối ưu cho BTQHTT nguyên trong ví dụ 1 bằng đồ thị.

Bước 1: Vẽ miền các phương án khả thi (còn gọi là miền ràng buộc) là tập hợp các phương án khả thi (các phương án, nếu nói một cách ngắn gọn). Mỗi phương án được thể hiện qua bộ số (x_1, x_2), thoả mãn tất cả các ràng buộc đã có kể cả điều kiện không âm và điều kiện nguyên của các biến (xem hình IV.1).

– Trước hết chúng ta vẽ đường thẳng có phương trình là $2x_1 + 4x_2 = 7$. Đường thẳng này chia mặt phẳng làm hai nửa mặt phẳng. Một phần gồm các điểm (x_1, x_2) thoả mãn: $2x_1 + 4x_2 \le 7$, phần còn lại thoả mãn: $2x_1 + 4x_2 \ge 7$. Ta tìm được nửa mặt phẳng thoả mãn: $2x_1 + 4x_2 \le 7$.



Hình IV.1. *Phương pháp đồ thị giải BTQHTT nguyên*

– Tương tự, có thể tìm nửa mặt phẳng thoả mãn: $2x_1 + 4x_2 \le 48$.

– Lúc này, giao của hai nửa mặt phẳng tìm được trên cho ta tập hợp các điểm (x_1, x_2) thoả mãn các ràng buộc. Tuy nhiên, để thoả mãn điều kiện không âm và điều kiện nguyên của các biến, ta chỉ xét các điểm nằm trong góc phần tư thứ nhất có các tọa độ đều nguyên. Vậy *miền các phương án khả thi là miền gồm các điểm với tọa độ nguyên được giới hạn bởi tứ giác OABC.*

Bước 2: Trong miền (OABC) ta tìm điểm (x_1, x_2) với các tọa độ nguyên sao cho $z = x_1 + 4x_2$ đạt giá trị lớn nhất. Dễ thấy đó là điểm F(1, 1)

Kết luận. Trong các phương án khả thi thì phương án tối ưu là ($x_1 = 1$, $x_2 = 1$). Tại phương án này, giá trị hàm mục tiêu là lớn nhất $z_{\mathbf{max}} = 1 \times 1 + 4 \times 1 = 5$.

Tóm tắt phương pháp Gomory

Chúng ta quy định gọi BTQHTT như cho trong ví dụ 1 nhưng bỏ qua điều kiện nguyên của các biến là *BTQHTT không nguyên* tương ứng với BTQHTT nguyên đã cho. Trước khi giải

BTQHTT nguyên cho trong ví dụ 1 bằng bảng đơn hình theo phương pháp Gomory, chúng ta có thể mô tả phương pháp này bằng đồ thị như sau:

– Khi giải BTQHTT không nguyên chúng ta chỉ xét các điều kiện ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ta có z(O) = z(0, 0) = 0, z(C) = z(1,5, 0) = 1,5, z(B) = z(39/34, 20/17) = 199/34 và z(A) = z(0, 7/4) = 7. Vậy phương án tối ưu (chưa xét điều kiện nguyên là (0, 7/4) với $z_{\mathbf{max}} = 7$.

– Tuy nhiên phương án (0, 7/4) chưa thỏa mãn điều kiện nguyên do tọa độ $x_2 = 7/4$ chưa nguyên. Chúng ta đưa thêm vào điều kiện $x_2 \leq 1$ hoặc $x_2 \geq 2$. Chúng ta gọi hai điều kiện bổ sung này là hai lát cắt L_1 và L_1'. Làm như vậy, tuy chúng ta thu hẹp miền phương án của BTQHTT không nguyên, nhưng vẫn giữ nguyên miền phương án của BTQHTT nguyên đã cho. Vậy miền ràng buộc trở thành

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 1 \ (L_1) \text{ hoặc } x_2 \geq 2 \ (L_1\text{'}) \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Miền này chính là miền

ODEC = miền OABC $\cap$ {miền $\{(x_1, x_2) \in R^2: x_2 \leq 1\}$ $\cup$ miền $\{(x_1, x_2) \in R^2: x_2 \geq 2\}$}.

Nhìn vào hình IV.1 có thể nhận thấy ngay rằng điều kiện $x_2 \geq 2$ có thể bỏ qua. Do đó có thể nói, *miền ODEC thu được từ miền OABC bằng nhát cắt L_1: ($x_2 \leq 1$).*

– Giải BTQHTT không nguyên với miền phương án thu hẹp ODEC, *xuất phát từ phương án đối ngẫu khả thi A(0, 7/4) để đạt tới phương án tối ưu là điểm E(6/5, 1)* với $z_{\mathbf{max}} = 26/5$. Phương án này có tọa độ $x_1 = 6/5$ không nguyên.

– Lúc này chúng ta sử dụng lát cắt L_2: $x_1 \leq 1$ và lát cắt L_2': $x_1 \geq 2$, và không làm thu hẹp miền phương án khả thi của BTQHTT nguyên đã cho. Dễ thấy, lát cắt L_2' có thể bỏ qua (xem hình IV.1). Miền phương án thu hẹp của BTQHTT không nguyên chính là miền ODFG được quy định bởi các ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 7 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_2 \leq 1 \ (L_1) \text{ hoặc } x_1 \leq 1 (L_2) \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Miền ODFG thu được từ miền OABC bằng nhát cắt L_1: ($x_2 \leq 1$) và L_2: ($x_1 \leq 1$).

– Tiếp tục giải BTQHTT không nguyên với miền phương án ODFG, *xuất phát từ phương án đối ngẫu khả thi E(6/5, 1) để đạt tới phương án tối ưu là điểm F(1, 1)* có các toạ độ nguyên với $z_{\mathbf{max}} = 5$. Vì các miền phương án OABC và ODFG chứa cùng các điểm có tọa độ nguyên như nhau, nên đây cũng chính là phương án tối ưu của BTQHTT nguyên đã cho trong ví dụ 1.

1.3. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bằng bảng

Xét BTQHTT nguyên dạng chính tắc.

Ví dụ 2. Max $z = x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 7 \\ 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ nguyên}. \end{cases}$$

– Trước hết giải BTQHTT không nguyên tương ứng (xem bảng IV.1).

Như vậy, phương án tối ưu ở bước 2 chưa thỏa mãn điều kiện nguyên. Xét phương trình (xem bảng IV.1, bảng thứ 2):

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow x_2 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{7}{4}.$$

Bảng IV.1. Các bảng đơn hình giải BTQHTT nguyên

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 1$	$c_2 = 4$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0 0	x_3 x_4	7 15	2 10	4 3	1 0	0 1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 1$	$\Delta_2 = 4$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$
Bảng đơn hình bước 2						
4 0	x_2 x_4	7/4 39/4	1/2 17/2	1 0	1/4 – 3/4	0 1
Hàng z		$z_0 = 7$	$z_1 = 2$	$z_2 = 4$	$z_3 = 1$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = -1$	$\Delta_2 = 0$	$\Delta_3 = -1$	$\Delta_4 = 0$

Một cách tổng quát chúng ta có thể viết: $x_r + \sum_{j \in j_N} z_{r_j} x_j = z_{r_0}$, trong đó J_N là tập các chỉ số tương ứng với các biến ngoài cơ sở. Còn x_r là biến cơ sở nằm trong phương trình đang xét. Giả sử $z_{r_j} = \left[z_{r_j}\right] + f_{r_j}$ thì có:

$$x_r + \sum_{j \in j_N}([z_{r_j}] + f_{r_j})x_j = [z_{r_0}] + f_{r_0} \Leftrightarrow x_r + \sum_{j \in j_N} [z_{r_j}]x_j - [z_{r_0}] = f_{r_0} - \sum_{j \in j_N} f_{x_j} x_j.$$

Vế trái bắt buộc là số nguyên theo điều kiện của BTQHTT nguyên nên vế phải phải là số nguyên nhỏ hơn 1 (do vế phải $f_{r_0} < 1$). Vậy vế phải luôn nhỏ hơn hoặc bằng 0.

Trong ví dụ trên ta có: $x_2 + \sum_{j\in\{1,3\}} [z_{2_j}]x_j - [z_{2_0}] = f_{2_0} - \sum_{j\in\{1,3\}} f_{x_j} x_j$. Nếu đặt vế phải là $-x_5$ (với điều kiện x_5 nguyên và $x_5 \geq 0$), thì có phương trình mới sau đây:

$$-\sum_{j\in\{1,3\}} f_{2_j} x_j + x_5 = -f_{2_0} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3 + x_5 = -\frac{3}{4}. \qquad (4.1)$$

Chú ý. Khi thêm vào các ràng buộc phương trình trên, miền phương án của BTQHTT nguyên vẫn giữ nguyên (vì phương trình (4.1) là hệ quả của các điều kiện ràng buộc của BTQHTT nguyên).

Mặt khác, ta có:

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{7}{4}. \qquad (4.2)$$

Từ (4.1) và (4.2) suy ra $x_2 + x_5 = 1$. Do $x_5 \geq 0$ nên ta có $x_2 \leq 1$ (đây chính là lát cắt L_1 trong mục 1.2, đã được minh họa trên mặt phẳng $0x_1x_2$). Như vậy, khi bổ sung phương trình (4.1), chúng ta thu hẹp miền phương án của BTQHTT không nguyên, nhưng vẫn giữ nguyên miền phương án của BTQHTT nguyên đã cho. Vậy phương trình (4.1) cũng được coi là lát cắt L_1. Lúc này chúng ta có bảng đơn hình IV.2 với phương án đối ngẫu khả thi đã có (xem chương III, mục 3). Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp đơn hình đối ngẫu để tiếp tục quá trình giải và tìm phương án tối ưu thỏa mãn điều kiện nguyên (xem bảng IV.2).

Bảng IV.2. Các bảng đơn hình giải BTQHTT nguyên (tiếp)

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	1	4	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Bảng đơn hình bước 3							
4	x_2	7/4	1/2	1	1/4	0	0
0	x_4	39/4	17/2	0	– 3/4	1	0
0	x_5	**– 3/4**	**– 1/2**	0	– 1/4	0	1
z_j		7	2	4	1	0	0
Δ_j			**– 1**	0	– 1	0	0
Bảng đơn hình bước 4							
4	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_4	**– 3**	0	0	**– 5**	1	17
1	x_1	3/2	1	0	1/2	0	– 2
z_j		11/2	1	4	1/2	0	2
Δ_j			0	0	**– 1/2**	0	– 2
Bảng đơn hình bước 5							
4	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_3	3/5	0	0	1	– 1/5	– 17/5
1	x_1	6/5	1	0	0	1/10	– 3/10
z_j		26/5	1	4	0	1/10	37/10
Δ_j			0	0	0	– 1/10	– 37/10

– Ta nhận thấy: phương án tối ưu ở bước 5 chưa thỏa mãn điều kiện nguyên. Xét phương trình thứ 3 trong bảng đơn hình thứ 5 (bảng IV.2) để làm cơ sở cho việc đưa vào lát cắt L_2: $-\frac{1}{10}x_4 - \frac{7}{10}x_5 + x_6 = -\frac{1}{5}$.

Từ đây chúng ta tiếp tục quá trình giải sử dụng phương pháp đơn hình đối ngẫu (xem bảng IV.3):

Bảng IV.3. Các bảng đơn hình giải BTQHTT nguyên (tiếp)

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	1	4	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
Bảng đơn hình bước 6								
4	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	3/5	0	0	1	– 1/5	– 17/5	0
1	x_1	6/5	1	0	0	1/10	– 3/10	0
0	x_6	**– 1/5**	0	0	0	**– 1/10**	– 7/10	1
z_j		26/5	1	4	0	1/10	37/10	0
Δ_j			0	0	0	**– 1/10**	–37/10	0
Bảng đơn hình bước 7								
4	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	1	0	0	1	0	– 2	– 2
1	x_1	1	1	0	0	0	– 1	1
0	x_4	2	0	0	0	1	7	– 10
z_j		5	1	4	0	0	3	1
Δ_j			0	0	0	0	– 3	– 1

– Phương án tối ưu ở bước 7 đã thỏa mãn điều kiện nguyên. Vậy phương án tối ưu của BTQHTT nguyên là $x_1^* = 1$, $x_2^* = 1$ và $z_{max} = 5$.

1.4. Khung thuật toán cắt Gomory

Xét BTQHTT nguyên

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

với hệ điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \ \forall j = \overline{1,n} \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Với các ký hiệu ma trận như đã biết, BTQHTT trên được viết lại như sau: *z = Max z, với các ràng buộc Ax = b, x ≥ 0 và có các toạ độ nguyên, b ≥ 0.* Với ký hiệu D = {x: Ax = b, x ≥ 0}, khung thuật toán cắt Gomory có thể được phát biểu như sau cho BTQHTT nguyên dạng Max với miền ràng buộc giới nội khác rỗng.

Bước khởi tạo

Giải BTQHTT: Max $z = c^T x$, với $x \in D$ bằng phương pháp đơn hình để thu được phương án tối ưu x^1. Đặt $k := 1$ và $D_1 = D$.

Các bước lặp (bước lặp thứ k)

Bước 1: Nếu x^k có các tọa độ nguyên thì chuyển sang bước kết thúc.

Bước 2: Nếu trái lại x^k có ít nhất một toạ độ không nguyên thì cần chọn ra một biến cơ sở x_r có giá trị không nguyên để xây dựng ràng buộc bổ sung (lát cắt thứ k): $-\sum_{j \in J_N} f_{r_j} x_j + x_{n+k} = -f_{r_0}$.

Bước 3: Giải bài toán thu được bằng phương pháp đơn hình đối ngẫu để tìm ra phương án tối ưu. Đặt k: = k+1 và chuyển về bước 1.

Bước kết thúc. In / lưu trữ kết quả và dừng.

2. Phương pháp nhánh cận Land – Doig giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

2.1. Minh họa đồ thị

Ví dụ 3. Giải BTQHTT nguyên: Max $z = 3x_1 + 4x_2$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 7x_1 + 16x_2 \le 52 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \\ x_1, x_2 \text{ nguyên.} \end{cases}$$

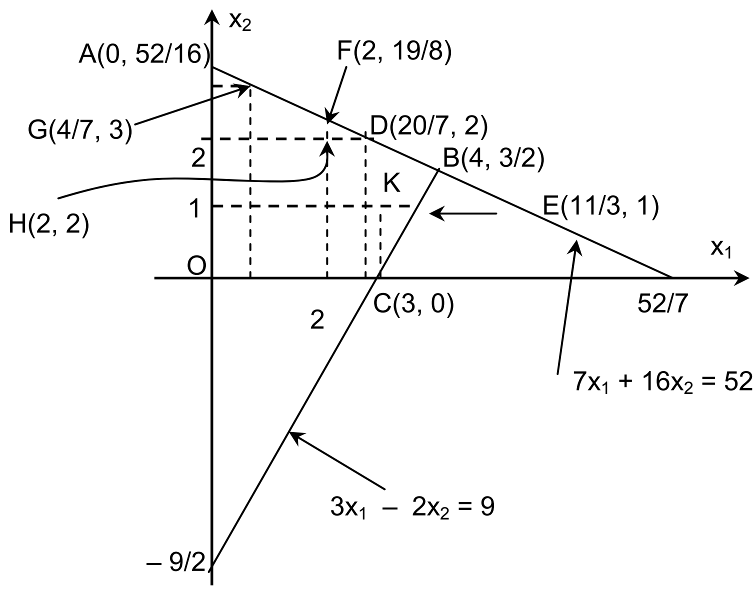
Cần tìm các giá trị nguyên của các biến quyết định x_1, x_2 để các ràng buộc được thoả mãn và hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất.

Bước 1: Vẽ miền ràng buộc / miền các phương án khả thi là tập hợp các phương án khả thi (các phương án, nếu nói một cách ngắn gọn). Mỗi phương án được thể hiện qua bộ số (x_1, x_2), thoả mãn tất cả các ràng buộc đã có kể cả điều kiện không âm và điều kiện nguyên của các biến (xem hình IV.2).

– Trước hết chúng ta vẽ nửa mặt phẳng thoả mãn: $7x_1 + 16x_2 \le 52$.

– Sau đó tìm nửa mặt phẳng thoả mãn: $3x_1 - 2x_2 \le 9$.

– Lúc này, giao của hai nửa mặt phẳng tìm được trên cho ta tập hợp các điểm (x_1, x_2) thoả mãn các ràng buộc. Tuy nhiên, để thoả mãn điều kiện không âm và điều kiện nguyên của các biến, ta chỉ xét các điểm nằm trong góc phần tư thứ nhất có các tọa độ đều nguyên. Vậy *miền các phương án khả thi là miền gồm các điểm với tọa độ nguyên được giới hạn bởi tứ giác OABC.*



Hình IV.2. *Phương pháp đồ thị giải BTQHTT nguyên*

Bước 2: Trong miền (OABC) ta tìm điểm (x_1, x_2) với các tọa độ nguyên sao cho $z = 3x_1 + 4x_2$ đạt giá trị lớn nhất. Ta sẽ chứng tỏ phương án tối ưu là điểm H(2, 2) với $z_{max} = 14$.

2.2. Nội dung cơ bản của phương pháp nhánh cận

Trước hết, chúng ta quy định gọi BTQHTT, như cho trong ví dụ 3 nhưng bỏ qua điều kiện nguyên của các biến, là *BTQHTT không nguyên* tương ứng với BTQHTT nguyên đã cho. Chúng ta có thể mô tả phương pháp nhánh cận Land – Doig bằng phương pháp đồ thị (xem hình IV.2 và hình IV.3), trong đó LP_i là ký hiệu của BTQHTT với hàm mục tiêu đã cho và miền ràng buộc D_i. Với i = 1, D_1 là miền ràng buộc quy định bởi:

$$\begin{cases} 7x_1 + 16x_2 \le 52 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

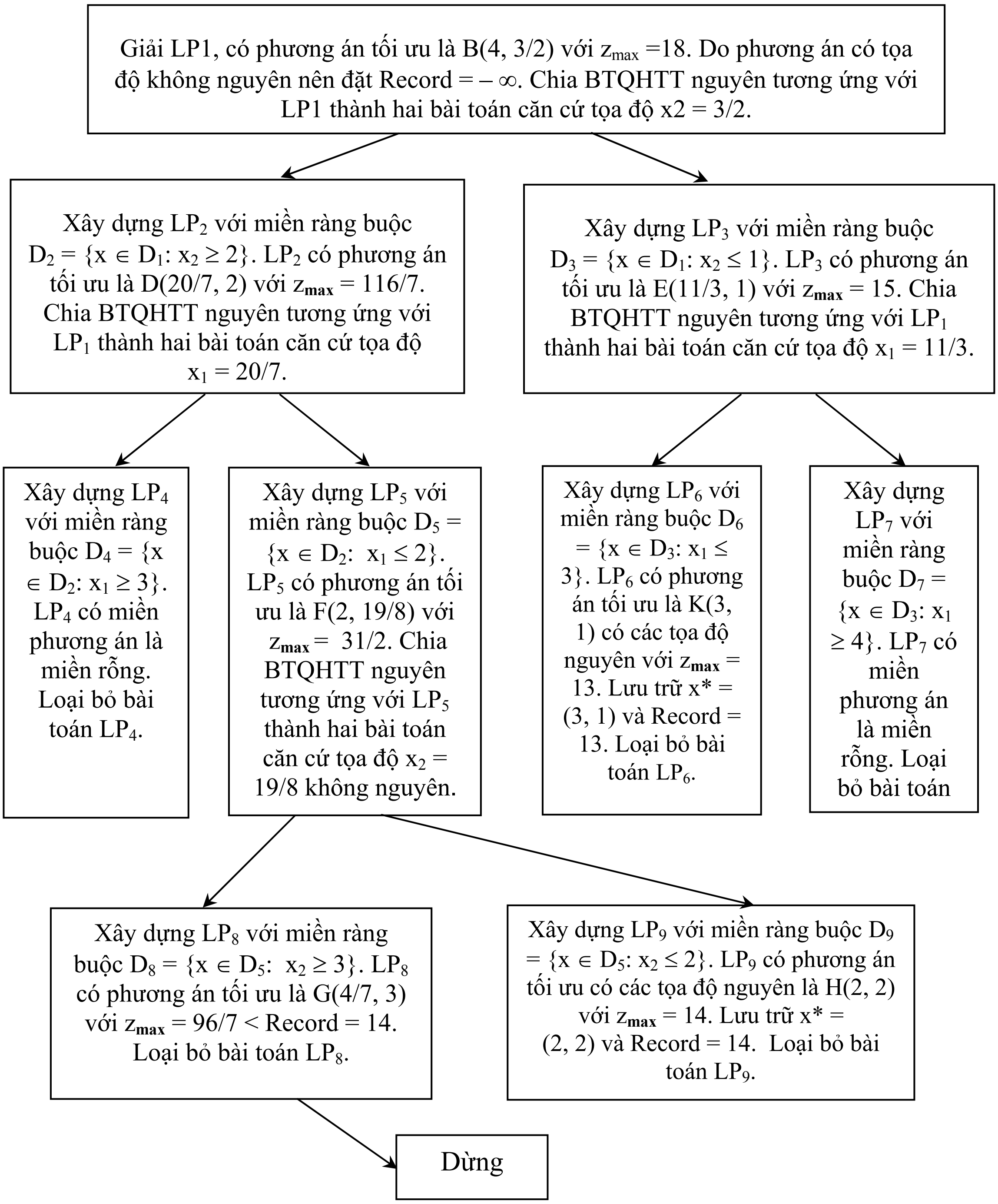
2.3. Khung thuật toán nhánh cận Land – Doig

Khung thuật toán nhánh cận Land – Doig có thể được phát biểu như sau cho BTQHTT nguyên dạng Max có miền ràng buộc giới nội khác rỗng.

Bước khởi tạo

– Đưa bài toán về dạng chính tắc LP_1 và đặt Record = $-\infty$.

– Xét tập hợp các BTQHTT không nguyên cần giải S = $\{LP_1\}$. Đặt k : = 1.



Hình IV.3. Mô tả phương pháp nhánh cận Land – Doig

Các bước lặp *(bước lặp thứ k)*

Bước 1: Giải lần lượt từng bài toán $LP_i \in S$ bằng phương pháp đơn hình và xét các trường hợp sau đây:

i) Nếu bài toán không có phương án thì loại bài toán ra khỏi tập S.

ii) Nếu bài toán có phương án với tọa độ nguyên thì so sánh z_{max}với Record hiện có:

– Nếu $z_{max} \leq$ Record thì loại bỏ bài toán ra khỏi tập S.

– Nếu z_{max} > Record thì đặt lại Record = z_{max} và ghi lại phương án tối ưu sau đó loại bài toán ra khỏi tập S.

iii) Còn nếu bài toán có phương án tối ưu nhưng có ít nhất một tọa độ không nguyên thì so sánh z_{max} với Record hiện có:

– Nếu $z_{max} \leq$ Record ta loại bỏ bài toán ra khỏi tập S.

– Nếu z_{max} > Record ta chia bài toán thành hai bài toán căn cứ vào một tọa độ không nguyên bất kỳ của phương án tối ưu tìm được.

Bước 2: Thiết lập mới tập S gồm tất cả các bài toán thu được từ bước 1. Kiểm tra xem S có bao nhiêu bài toán: Nếu S khác rỗng thì đặt k := k+1 và quay về bước 1, còn nếu S là tập rỗng thì về bước kết thúc.

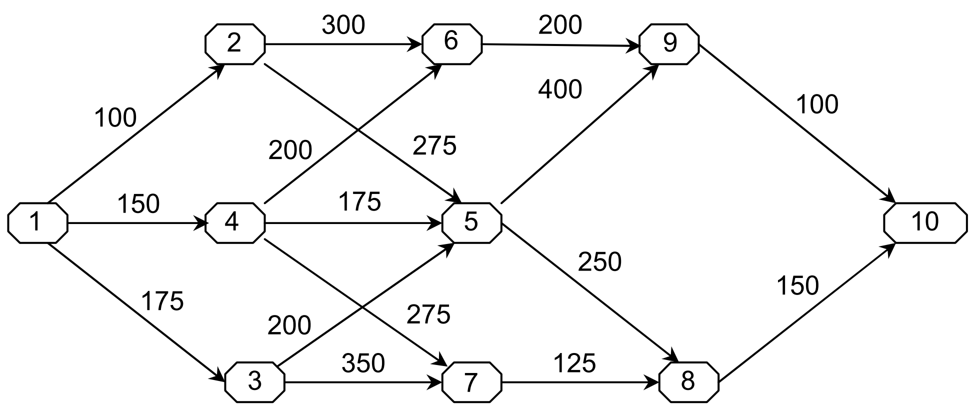
Bước kết thúc. Dừng và in ra Record.

3. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên bằng quy hoạch động

3.1. Bài toán người du lịch

Để hiểu rõ các khái niệm cơ bản của quy hoạch động, trước hết chúng ta hãy xét bài toán người du lịch. Trong bài toán người du lịch, chúng ta muốn xác định đường đi ngắn nhất từ một địa điểm xuất phát (điểm gốc) để đi tới điểm cần đến (điểm đích) trên một mạng hành trình du lịch.

Ví dụ 4 (Bài toán người đi du lịch). Có một người đi du lịch, xuất phát từ nút 1 và kết thúc hành trình ở nút 10 theo hành trình với sơ đồ như trên hình IV.4.



Hình IV.4. *Sơ đồ hành trình đường đi*

Người du lịch xuất phát từ nút 1. Trong giai đoạn đầu anh ta chỉ được quyền (và bắt buộc) chọn một trong ba nút (thành phố) 2, 3, 4 để vào thăm quan. Giai đoạn tiếp theo, anh ta chỉ được chọn một trong ba nút 5, 6, 7 để du lịch. Trong giai đoạn tiếp nối, anh ta có quyền vào một trong hai nút 8 hoặc 9 trước khi kết thúc hành trình tại nút 10.

Như vậy, trong mỗi giai đoạn người đi du lịch chỉ được quyền đi vào một thành phố (mỗi thành phố được coi là một trạng thái của giai đoạn đó). Hãy tìm cách xác định đường đi ngắn nhất từ nút 1 tới nút 10 thoả mãn các điều kiện đặt ra của bài toán.

Nguyên tắc tối ưu Bellman trong quy hoạch động

Sử dụng nguyên tắc tối ưu Bellman trong quy hoạch động để giải bài toán người du lịch, chúng ta chia bài toán thành nhiều giai đoạn, tức là thành nhiều bài toán nhỏ. Tại mỗi giai đoạn ta cần tìm phương án tối ưu là các phương án tốt nhất của tình trạng hiện có, xét trong mối quan hệ với các phương án tối ưu đã tìm được của các giai đoạn trước.

Ta có thể giải quyết bài toán dần theo từng giai đoạn theo cách tính toán tiến hoặc tính toán lùi. Để giải bài toán này, ta áp dụng cách tính toán lùi *(Backward Computing)* với các ký kiệu và dữ kiện cho trong bảng IV.4.

Bảng IV.4. Dữ kiện của các giai đoạn trong bài toán người du lịch

Giai đoạn	*Đầu vào*	*Đầu ra*	*Đường đi tối ưu*	*Khoảng cách tới đích*
Giai đoạn I	8 9	10 10	8 → 10 9 → 10	150 100
Giai đoạn II	5 6 7	8 9	5 → 8 6 → 9 7 → 8	400 300 275
Giai đoạn III	2 3 4	5 6 7	2 → 6 3 → 5 4 → 6	600 600 500
Giai đoạn IV	1	2 3 4	1 → 2 1 → 3 1 → 4	700 775 650

Giải thích. Sử dụng nguyên tắc tối ưu Bellman, để tìm đường đi ngắn nhất từ nút 4 tới nút 10 chúng ta tìm được phương án tối ưu là đi từ nút 4 tới nút 6 cho giai đoạn III Lúc này khoảng cách ngắn nhất từ nút 4 tới nút 10 là d(4,10) = d(4,6) + min d(6,10) = 200 + 300 = 500. Điều này là do hai lựa chọn khác là đi từ nút 4 tới nút 5 hay 7 thì đều cho khoảng cách từ nút 4 tới đích là nút 10 lớn hơn (chẳng hạn nếu đi qua nút 5 thì d(4,10) = d(4,5) + min d(5,10) = 175 + 400 = 575).

Trong bảng IV.4, tại giai đoạn IV, ta thấy khoảng cách ngắn nhất tới đích là 650. Đi ngược lại, từ điểm gốc tới điểm đích ta xác định được đường đi ngắn nhất là: 1 → 4 → 6 → 9 → 10 với tổng chiều dài là 650.

3.2. Quy trình tính toán tổng quát

– Trước hết, cần chọn các biến trạng thái (*State variables*) như mô tả trong bảng IV.5.

Bảng IV.5. Các biến trạng thái của bài toán quy hoạch động

Biến	*Số trạng thái*	*Các trạng thái (nút)*	*Giá trị có thể xảy ra của các biến trạng thái*
x_4	1	1	$x_4 = 1$
x_3	3	2, 3, 4	$x_3 = 2$, $x_3 = 3$, $x_3 = 4$
x_2	3	5, 6, 7	$x_2 = 5$, $x_2 = 6$, $x_2 = 7$
x_1	2	8, 9	$x_1 = 8$, $x_1 = 9$
x_0	1	10	$x_0 = 10$

Biến trạng thái mô tả trạng thái của hệ thống trong từng giai đoạn.

– Xác định hàm mục tiêu: Đặt $F_i(x_i)$ là khoảng cách ngắn nhất tới đích tính tại giai đoạn i. Theo bảng IV.4, ta thấy:

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 150 \text{ với } x_1 = 8 \\ 100 \text{ với } x_1 = 9 \end{cases} \quad \text{và} \quad F_2(x_2) = \begin{cases} 400 \text{ với } x_2 = 5 \\ 300 \text{ với } x_2 = 6 \\ 275 \text{ với } x_2 = 7. \end{cases}$$

Mục đích của bài toán là cần tìm được giá trị $F_4(x_4) = F_4(1)$.

– Lập hàm truy toán: $F_{i+1}(x_{i+1}) = \text{Min}\,\{F_i(x_i) + f_i(u_i)\}$, Min tìm theo mọi tổ hợp thích hợp x_i và u_i, trong đó u_i là biến điều khiển để điều khiển chuyển trạng thái từ trạng thái x_i sang x_{i+1} và $f_i(u_i)$ là hiệu ứng của biến điều khiển tác động lên hàm truy toán (và lên hàm mục tiêu nếu tính đến bài toán cuối cùng). Theo biểu thức của hàm truy toán ta thấy, nếu $F_i(x_i) + f_i(u_i)$ là hàm phi tuyến thì phải dùng kỹ thuật tối ưu thích hợp để tìm ra $F_{i+1}(x_{i+1})$.

Sau đây chúng ta đi tìm các hàm truy toán $F_{i+1}(x_{i+1})$ với quy trình *tính toán lùi* để giải bài toán theo từng giai đoạn, nhằm cuối cùng tìm ra được $F_4(x_4) = F_4(1)$.

Giai đoạn 1: Trong giai đoạn này, muốn chuyển từ nút 10 ($x_0 = 10$) về nút 8 ($x_1 = 8$) chẳng hạn, thì biến điều khiển u_0 phải có giá trị 150 ($u_0 = 150$). Hiệu ứng gây nên bởi u_0 là $f(u_0) = 150$. Điều này có nghĩa là nếu chuyển từ nút 10 ngược về nút 8 thì cần đi quãng đường có chiều dài là 150.

x_1	$x_0 = 10$	u_0	$f_0(u_0)$	$F_1(x_1)$
$x_1 = 8$	$+ u_0 = 150$	150	150	150
$x_1 = 9$	$+ u_0 = 100$	100	100	100

Chú ý. Không phải bài toán nào cũng có u_i trùng với hiệu ứng $f_i(u_i)$ của nó. Nói chung, biến điều khiển u_i có thể gây ra hiệu ứng $f_i(u_i)$ khác với u_i cả về độ lớn cũng như đơn vị đo.

Giai đoạn 2:

x_2	$x_1 = 8$	$x_1 = 9$	$F_1(x_1) + f_1(u_1)$		$F_2(x_2) = \text{Min}\{F_1(x_1) + f_1(u_1)\}$
			$x_1 = 8$	$x_1 = 9$	
5	$+u_1 = 250$	$+u_1 = 400$	400	500	$400 = 150 + 250$
6	–	$+u_1 = 200$	–	300	$300 = 100 + 200$
7	$+u_1 = 125$	–	275	–	$275 = 150 + 125$

Giai đoạn 3:

x_3	x_2			$F_2(x_2) + f_2(u_2)$			$F_3(x_3) = \text{Min}\{F_2(x_2) + f_2(u_2)\}$
	5	6	7	$x_2 = 5$	$x_2 = 6$	$x_2 = 7$	
2	$u_2 = 275$	$u_2 = 300$	–	675	600	–	600
3	$u_2 = 200$	–	$u_2 = 350$	600	–	625	600
4	$u_2 = 175$	$u_2 = 200$	$u_2 = 275$	575	500	550	500

Giai đoạn 4:

x_4	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	$F_3(x_3) + f_3(u_3)$			$F_4(x_4) = \text{Min}\{F_3(x_3) + f_3(u_3)\}$
				$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$x_3 = 4$	
1	$u_3 = 100$	$u_3 = 175$	$u_3 = 150$	700	775	650	650

Đáp số: $F_4(x_4) = F_4(1) = 650$ với đường đi ngắn nhất trên hình IV.5.

$$x_4 = 1 \xrightarrow[u_3 = 150]{} x_3 = 4 \xrightarrow[u_2 = 200]{} x_2 = 6 \xrightarrow[u_1 = 200]{} x_1 = 9 \xrightarrow[u_0 = 100]{} x_0 = 10$$

Hình IV.5. *Đường đi ngắn nhất 1→4→6→9→10*

3.3. Áp dụng quy hoạch động giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

Ví dụ 5. Giải BTQHTT nguyên: Max $z = 8x_1 + 5x_2 + x_3$

với điều kiện ràng buộc

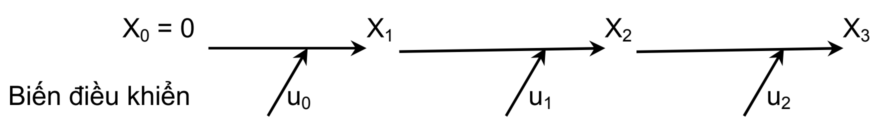
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 13 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \quad \text{và nguyên.} \end{cases}$$

Để phù hợp với cách ký hiệu ở mục 3.2 trên đây, chúng ta viết lại bài toán trên như sau:

Max $z = 8u_0 + 5u_1 + u_2$, với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3u_0 + 2u_1 + u_2 \le 13 \\ u_0, u_1, u_2 \ge 0 \quad \text{và nguyên.} \end{cases}$$

Ký hiệu lại: $X_0 = 0$, $X_1 = X_0 + 3u_0$, $X_2 = X_1 + 2u_1 = 3u_0 + 2u_1$, $X_3 = X_2 + u_2 = 3u_0 + 2u_1 + u_2$. Gọi các biến trạng thái là X_1, X_2, X_3 và các biến điều khiển là u_0, u_1, u_2. Các hiệu ứng gây nên bởi các biến điều khiển là $f(u_0) = 8u_0$, $f(u_1) = 5u_1$, $f(u_2) = u_2$,



Thiết lập hàm truy toán $F_{i+1}(X_{i+1})$ = Max $\{F_i(X_i) + f_i(u_i)\}$ với $F_0(X_0) = 0$. Dễ thấy: $F_1(X_1)$ = Max $f(u_0)$, $F_2(X_2)$ = Max $\{f(u_0) + f(u_1)\}$ và $F_3(X_3)$ = Max $\{f(u_0) + f(u_1) + f(u_2)\} = 8u_0 + 5u_1 + u_2$. Mục tiêu cuối cùng là cực đại hoá z = $F_3(X_3)$. Trong ví dụ này, chúng ta áp dụng cách *tính toán tiến*.

Giai đoạn 1: (Coi $F_0(X_0) = 0$)

X_1	$X_0 = 0$ $u_0 = 0, 1, \dots, [13/3]$	$f_0(u_0) = 8u_0$	$F_1(X_1) = \text{Max}\{F_0(X_0) + f_0(u_0)\}$	u_0 tối ưu
0	0	0	0	0
…	…	…	…	…
3	1	8	8	1
…	…	…	…	…
6	2	16	16	2
…	…	…	…	…
9	3	24	24	3
…	…	…	…	…
12	4	32	32	4
13	…	…	…	…

Giai đoạn 2:

X_2	X_1					$F_2(X_2) = \text{Max}\{F_1(X_1) + f_1(u_1)\}$	u_1 tối ưu
	0	3	6	9	12		
	$u_1 = 0, 1, \dots, [(13- X_1)/2]$						
0	0	–	–	–	–	0	0
1	–	–	–	–	–	–	–
2	1	–	–	–	–	5	1
3	–	0	–	–	–	8	0
4	2	–	–	–	–	10	2
5	–	1	–	–	–	13	1
6	3	–	0	–	–	16	0
7	–	2	–	–	–	18	2
8	4	–	1	–	–	21	1
9	–	3	–	0	–	24	0
10	5	–	2	–	–	26	2
11	–	4	–	1	–	29	1
12	6	–	3	–	0	32	0
13	–	5	–	2	–	34	2

Giai đoạn 3:

X_3	X_2														$F_3(X_3) = Max\{F_2(X_2) + f_2(u_2)\}$	u_2 tối ưu
	0	–	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
	$u_2 = 0, 1, \ldots, 13 - X_2$															
0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0
1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
2	2	–	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	0
3	3	–	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	8	0
4	4	–	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	10	0
5	5	–	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	13	0
6	6	–	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	16	0
7	7	–	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	18	0
8	8	–	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	21	0
9	9	–	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	24	0
10	10	–	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	26	0
11	11	–	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	29	0
12	12	–	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	32	0
13	13	–	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	34	0

Đáp số: $u_2 = 0$, $u_1 = 2$, $u_0 = 3$ và $z_{max} = 34$.

3.4. Bài toán cái túi

Một nhà thám hiểm có n đồ vật cần mang theo người. Các đồ vật đó được đựng trong một chiếc túi có thể chứa nhiều nhất là b (kg). Biết đồ vật thứ j có trọng lượng a_j (kg) và có giá trị là c_j (đơn vị tiền tệ), j = 1, 2, …, n. Hỏi nhà thám hiểm cần mang theo các loại đồ vật nào và với số lượng là bao nhiêu để tổng giá trị sử dụng của chúng là lớn nhất?

Gọi x_j là số lượng đồ vật loại j mà nhà thám hiểm quyết định mang theo. Lúc đó chúng ta có bài toán sau:

$$\text{Max } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

với ràng buộc

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0 \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Các điều kiện được mặc định là b và c_j, a_j, $\forall j$ là các số nguyên dương.

Rõ ràng rằng ví dụ 5 là trường hợp riêng của bài toán cái túi. Chúng ta sẽ sử dụng phương pháp phương trình truy toán của quy hoạch động để giải bài toán cái túi, như trình bày sau đây:

i) Trước hết đặt $F_0(y) = 0, \forall\, y = \overline{0, b}$. (4.3)

ii) $\forall\, k = \overline{1, n}$, $\forall\, y = \overline{0, b}$, ta định nghĩa hàm số

$$F_k(y) = \text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j : \sum_{j=1}^{k} a_j x_j \le y, x_j \ge 0,\ \forall j = \overline{1,k}\right\} . \qquad (4.4)$$

Như vậy, $F_k(y)$ là giá trị lớn nhất của hàm mục tiêu khi các đồ vật được chọn từ k loại đầu tiên và túi chỉ chứa hạn chế tới y (kg).

– Khi k = 1 thì công thức (4.4) trên đây trở thành:

$$F_1(y) = \text{Max}\{c_1x_1 : x_1 = 0, 1, \ldots, [y/a_1]\} = c_1[y/a_1],\ y = \overline{0,b}.$$

– $\forall\ k = \overline{2,n}$, (4.4) được viết dưới dạng:

$$F_k(y) = \text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{k} c_j x_j : \sum_{j=1}^{k-1} a_j x_j \le y - a_k x_k,\ \textit{với}\ x_j \ge 0,\ \forall j = \overline{1,k}\right\}$$

$$= \underset{x_k \in J_k}{Max}\left\{c_k x_k + Max\left\{\sum_{j=1}^{k-1} c_j x_j : \sum_{j=1}^{k-1} a_j x_j \le y - a_k x_k,\ \textit{với}\ x_j \ge 0,\ \forall j = \overline{1,k-1}\right\}\right\},$$

$\underset{x_k \in J_k}{Max}\left\{c_k x_k + Max\left\{\sum_{j=1}^{k-1} c_j x_j : \sum_{j=1}^{k-1} a_j x_j \le y - a_k x_k,\ \textit{với}\ x_j \ge 0,\ \forall j = \overline{1,k-1}\right\}\right\}$ trong đó $J_k = \{0, 1, \ldots[y/a_k]\}$. Vậy ta có phương trình truy toán sau $\forall\ k = \overline{1,n}$:

$$F_k(y) = \underset{x_k \in J_k}{Max}\{c_k x_k + F_{k-1}(y - a_k x_k)\} \text{ với } J_k = \{0, 1, \ldots[y/a_k]\}. \qquad (4.5)$$

Kết luận. Thực hiện lần lượt các công thức (4.3) và (4.5) với $k = \overline{0,n}$, $\forall y = \overline{0,b}$, chúng ta sẽ tìm được phương án tối ưu cho bài toán cái túi.

Chúng ta sẽ tiến hành giải lại ví dụ 5 bằng phương pháp vừa nêu trên. *Có thể nhận thấy rằng các bảng thiết lập sau đây là khá giống với các bảng trong mục 3.3.*

Giai đoạn 1: Coi $F_0(y) = 0$, $\forall y = \overline{0,b}$ và tính $F_1(y)$.

y	$[y/a_1]$	$F_1(y) = c_1[y/a_1]$	x_1 tối ưu
0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	0
3	1	8	1
4	1	8	1
5	1	8	1
6	2	16	2
7	2	16	2
8	2	16	2
9	3	24	3
10	3	24	3
11	3	24	3
12	4	32	4
13	4	32	4

Giai đoạn 2: Tính $F_2(y)$

y	$x_2 = 0, 1, \ldots, [y/a_2]$							$F_2(y) = \text{Max}\{c_2x_2 + F_1(y - a_2x_2)\}$	x_2 tối ưu
0	0	–	–	–	–	–	–	0	0
1	0	–	–	–	–	–	–	0	0
2	1	0	–	–	–	–	–	5	1
3	1	0	–	–	–	–	–	8	0
4	2	1	0	–	–	–	–	10	2
5	2	1	0	–	–	–	–	13	1
6	3	2	1	0	–	–	–	16	0
7	3	2	1	0	–	–	–	18	2
8	4	3	2	1	0	–	–	21	1
9	4	3	2	1	0	–	–	24	0
10	5	4	3	2	1	0	–	26	2
11	5	4	3	2	1	0	–	29	1
12	6	5	4	3	2	1	0	32	0
13	6	5	4	3	2	1	0	34	2

Giai đoạn 3:

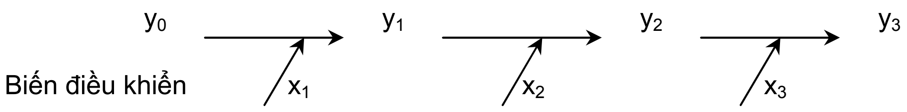
y	$x_3 = 0, 1, \ldots, [y/a_3]$														$F_3(y) = \text{Max}\{c_3x_3+F_2(y - a_3x_3)\}$	x_3 tối ưu
0	0		–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	0	0
1	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	1	1
2	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	5	0
3	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	8	0
4	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	10	0
5	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	13	0
6	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	–	16	0
7	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	–	18	0
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	–	21	0
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	–	24	0
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	–	26	0
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	–	29	0
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	–	32	0
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	34	0

Sau khi hoàn thành giai đoạn 3, để tìm phương án tối ưu của bài toán chúng ta làm như sau: Căn cứ bảng giai đoạn 3 thì z_{max} = Max $F_3(y_3) = 34$ ứng với $y_3 = 13$ và $x_3 = 0$. Lại căn cứ bảng giai đoạn 2 thì $y_2 = y_3 - a_3x_3 = 13 - 1\times 0 = 13$ và $x_2 = 2$. Dựa vào bảng giai đoạn 1 thì $y_1 = y_2 - a_2x_2 = 13 - 2\times 2 = 9$ và $x_1 = 3$. Do đó phương án tối ưu là $x_3 = 0$, $x_2 = 2$, $x_1 = 3$ và $z_{max} = 34$.

Các nhận xét

i) Tại giai đoạn 3 ta chỉ cần xét hàng tương ứng với giá trị y = 13 là đủ.

ii) Nếu ta đánh số biến trạng thái y tại mỗi giai đoạn là y_0, y_1, y_2, y_3 thì có sơ đồ điều khiển sau, mà trong đó mỗi giá trị của biến điều khiển x_j có thể gây nên một hoặc một số giá trị của biến trạng thái y_j, j = 1, 2, 3.



iii) Xét bài toán cái túi với ràng buộc dạng đẳng thức

$$z = 8x_1 + 5x_2 + x_3 \to \text{Max}$$

với ràng buộc dạng đẳng thức

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Để giải bài toán này chúng ta có thể áp dụng phương pháp nêu trên, nhưng *phải đặt* $F_0(0) = 0$ *và* $F_0(y) = -\infty$, $\forall y \neq 0$. Điều này là do trong phương trình truy toán: $F_1(y) = \underset{x_1 \in J_1}{\text{Max}}\{8x_1 + F_0(y - 3x_1)\}$, với $J_1 = \{0, 1, \ldots [y_1/3]\}$, ta phải có: $y - 3x_1 = 0$. Nếu trái lại, ràng buộc đẳng thức $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13$ không được thỏa mãn.

iv) Thay vì hệ thức truy toán $F_k(y) = \underset{x_k \in J_k}{\text{Max}}\{c_kx_k + F_{k-1}(y - a_kx_k)\}$ trong đó $J_k = \{0, 1, \ldots [y/a_k]\}$ $\forall$ $k = \overline{1,n}$, có thể sử dụng *hệ thức Dantzig*:

$$F_k(y) = \begin{cases} \text{Max}\{F_{k-1}(y), c_k + F_k(y - a_k)\}, y \geq a_k \\ F_{k-1}(y), y < a_k. \end{cases} \quad (4.6)$$

Thật vậy, ta có

$$F_k(y) = \text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{k} c_jx_j : \sum_{j=1}^{k-1} a_jx_j \leq y - a_kx_k, \textit{với } x_j \geq 0,\ \text{nguyªn},\ \forall j = \overline{1,k}\right\}.$$

Do đó nếu $y < a_k$ thì $x_k = 0$, và $F_k(y) = F_{k-1}(y)$. Còn nếu $y \geq a_k$, thì ta viết:

$$F_k(y) = \text{Max}\left\{\sum_{j=1}^{k-1} c_jx_j + c_k(x_k - 1) + c_k : \sum_{j=1}^{k-1} a_jx_j \leq y - a_k - a_k(x_k - 1)\right\}.$$

Nếu đặt $x_k' = x_k - 1$ thì thấy ngay

$$F_k(y) = \text{Max}\begin{cases} F_{k-1}(y), \text{ khi } x_k = 0 \\ c_k + F_k(y - a_k), \text{ khi } x_k \geq 1. \end{cases}$$

v) Áp dụng *hệ thức Dantzig* (4.6) cho ví dụ 5 với $c_1 = 8$, $c_2 = 5$, $c_3 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ chúng ta thu được các cột $F_0(y)$, $F_1(y)$, $F_2(y)$, $F_3(y)$ như trong bảng IV.6 sau đây:

Bảng IV.6. Bảng tổng hợp tính toán truy toán

y	$F_0(y)$	$F_1(y)$	$j_1(y)$	$F_2(y)$	$j_2(y)$	$F_3(y)$	$j_3(y)$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	3
2	0	0	0	5	2	5	2
3	0	8	1	8	1	8	1
4	0	8	1	10	2	10	2
5	0	8	1	13	2	13	2
6	0	16	1	16	1	16	1
7	0	16	1	18	2	18	2
8	0	16	1	21	2	21	2
9	0	24	1	24	1	24	1
10	0	24	1	26	2	26	2
11	0	24	1	29	2	29	2
12	0	32	1	32	1	32	1
13	0	32	1	34	2	34	2

Các chỉ số $j_k(y)$ được tính như sau: Khi k = 1 thì $j_1(y) = 0$ nếu $F_1(y) = 0$ và $j_1(y) = 1$ nếu $F_1(y) \neq 0$. Với k > 1 ta có:

$$j_k(y) = \begin{cases} j_{k-1}(y) \text{ khi } F_{k-1}(y) = F_k(y) \\ k \text{ khi } F_{k-1}(y) \neq F_k(y). \end{cases}$$

Ta thấy *$j_k(y)$ chính là chỉ số lớn nhất của biến số dương nếu túi có trọng lượng ở mức y khi xét giai đoạn k* (khi chỉ có thể chọn mang theo k loại đồ vật đầu tiên). Theo bảng IV.6 có $z_{\max}$ = 34 ứng với y = 13 và $j_3(13) = 2$ nên $x_3^* = 0$.

Để tìm x_2^*, trước hết đặt giá trị ban đầu $x_2^* := 1$. Do $j_3(13) = j_3(13 - a_2) = j_3(13 - 2) = j_3(11) = 2$ nên $x_2^* := x_2^* + 1 = 2$ (thật vậy, khi y = 11 thì chỉ số lớn nhất của biến số dương là 2 và khi y = 11 + a_2 = 13 thì chỉ số này vẫn là 2 nên giá trị của x_2 bắt buộc phải tăng lên 1 đơn vị). Tiếp tục xét $j_3(11) = 2 \neq j_3(11 - a_2) = j_3(11 - 2) = j_3(9) = 1 = j_3(9)$ nên tại mức trọng lượng túi là y = 9 thì chỉ số lớn nhất của biến số dương là 1 (chỉ đựng đồ vật loại 1). Vậy ta có $x_2^* = 2$. Để tìm x_1^*, trước hết đặt giá trị ban đầu $x_1^* := 1$. Do $j_3(9) = j_3(9 - a_1) = j_3(9 - 3) = j_3(6) = 1$ nên $x_1^* := x_1^* + 1 = 2$. Tiếp tục có $j_3(6) = j_3(6 - a_1) = j_3(6 - 3) = j_3(3) = 1$ nên $x_1^* := x_1^* + 1 = 3$. Do $j_3(3) = 1 \neq j_3(3 - a_1) = j_3(3 - 3) = j_3(0) = 0$ nên $x_1^* = 3$. Dừng.

Khung thuật toán giải bài toán cái túi

Bước khởi tạo

– Nhập c_j, a_j, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ và b. Đặt k := 0.

– Nếu ràng buộc dạng ≤ thì đặt $F_0(y) = 0$, $\forall y = \overline{0, b}$.

– Nếu ràng buộc dạng = thì đặt $F_0(0) = 0$ và $F_0(y) = -\infty$, $\forall y = \overline{1, b}$.

Các bước lặp

Bước 1: Đặt k := k + 1.

Bước 2: $\forall y = \overline{0, b}$

i) Tính $F_k(y)$ theo hệ thức truy toán:

$$F_k(y) = \underset{x_k \in J_k}{\mathrm{Max}}\{c_k x_k + F_{k-1}(y - a_k x_k)\} \text{ trong đó } J_k = \{0, 1, \ldots[y/a_k]\}$$

hoặc theo hệ thức Dantzig:

$$F_k(y) = \begin{cases} \mathrm{Max}\{F_{k-1}(y), c_k + F_k(y - a_k)\}, y \geq a_k \\ F_{k-1}(y), y < a_k. \end{cases}$$

ii) Tính $j_k(y)$:

Khi k = 1 thì $j_1(y) = 0$ nếu $F_1(y) = 0$ và $j_1(y) = 1$ nếu $F_1(y) \neq 0$.

Còn với k > 1 thì $j_k(y) = \begin{cases} j_{k-1}(y) \text{ khi } F_{k-1}(y) = F_k(y) \\ k \text{ khi } F_{k-1}(y) \neq F_k(y). \end{cases}$

Bước 3: Nếu k < n thì quay về bước 1.

Bước kết thúc

i) $z_{max} = F_n(b)$. Giả sử $j_n(b) = m \leq n$ và m > 0, thì có $x_n^* = x_{n-1}^* = \ldots = x_{m+1}^* = 0$.

Đặt $b^/ := b$, i := m.

ii) Nếu gọi s là số nguyên không âm sao cho:

$$\begin{cases} j_n(b^/) = j_n(b - a_i) = j_n(b - 2a_i) = \ldots = j_n(b - s\times a_i) \\ j_n(b - s\times a_i) \neq j_n(b - (s+1)\times a_i \end{cases}$$

thì $x_i^* = 1 + s$.

iii) Đặt $b^/ := b - (s+1)\times a_i$, $i := j_n(b^/)$. Nếu i > 0 thì quay về bước ii), còn nếu trái lại thì in / lưu trữ kết quả và dừng.

3.5. Hợp nhất hóa các ràng buộc của bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

Ví dụ 6. Xét BTQHTT nguyên với miền ràng buộc cho bởi

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + 4x_2 \leq 11 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 13 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ và nguyên.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 & (4.7) \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 11 & (4.8) \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13 & (4.9) \\ x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0 \text{ và nguyên.} & (4.10) \end{cases}$$

Hệ ràng buộc trên có ba ràng buộc dạng đẳng thức (không kể điều kiện nguyên không âm của các biến). Để đưa BTQHTT nguyên trên đây về bài toán cái túi, chúng ta cần hợp nhất hóa các ràng buộc này thành một ràng buộc dạng đẳng thức. Trước hết chúng ta xét cách hợp nhất hóa hai đẳng thức.

Định lý 1. Xét hệ hai phương trình

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = b_2. \end{cases} \tag{4.11}$$

Trong đó, các hệ số $a_{ij} \geq 0$, $b_i > 0$, $\forall j = \overline{1,n}$ và $\forall i = \overline{1,2}$.

Nếu t_1 và t_2 thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} -\ \ t_1, t_2 \in N^+ \text{ và } (t_1, t_2) = 1 & (4.12) \\ -\ \ t_1 \text{ không là ước của } b_2 & (4.13) \\ -\ \ t_2 \text{ không là ước của } b_1 & (4.14) \\ -\ \ t_1 > b_2 - a_{min},\ t_2 > b_1 - a_{min}, & (4.15) \\ \text{trong đó } a_{min} = \text{Min } \{a_{ij},\ \forall\ j = \overline{1,n} \text{ và } i = 1, 2\}. \end{cases}$$

thì tập nghiệm nguyên không âm của hệ (4.11) sẽ trùng với tập nghiệm nguyên không âm của phương trình $\sum_{j=1}^{n}\left(t_1a_{1j} + t_2a_{2j}\right)x_j = t_1b_1 + t_2b_2$. (4.16)

Chứng minh

Rõ ràng mọi phương án nguyên không âm của (4.11) cũng là phương án nguyên không âm của (4.16). Chúng ta sẽ đi chứng minh chiều ngược lại: mọi phương án nguyên không âm của (4.16) cũng là phương án nguyên không âm của (4.11).

Giả sử $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ là phương án nguyên không âm của (4.16) (cần chú ý rằng lúc đó luôn tồn tại chỉ số k sao cho $x_k^* > 0$). Đặt $y_i^* = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i,\ \ i = 1,2.$ Dễ dàng kiểm tra được y_1^* và y_2^* là các nghiệm nguyên của phương trình $t_1y_1 + t_2y_2 = 0$. Từ đó, theo giả thiết (4.12) của định lý suy ra: $y_1^* = -(y_2^*/t_1)t_2 = -qt_2$, với q là một số nguyên. Do đó $y_2^* = -(y_1^*/t_2)t_1 = qt_1$.

Chúng ta sẽ chỉ ra q = 0. Thật vậy, nếu $q \geq 1$ thì:

$$-t_2 \geq -t_2q = y_1^* \Rightarrow t_2 \leq -y_1^* = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^* \Rightarrow t_2 \leq qt_2 = b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^*.$$

Mặt khác: $b_1 - qt_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^* \neq 0$ (do giả thiết (4.14))

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^* \geq a_{min} \text{ (do tồn tại chỉ số k sao cho } x_k^* > 0)$$

$\Rightarrow t_2 \le b_1 - \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^* \le b_1 - a_{min}$ mâu thuẫn với (4.15).

Còn nếu $q \le -1$ thì $t_1 \le -y_2^*$ và dẫn tới $t_1 \le b_2 - a_{min}$ cũng mâu thuẫn với giả thiết (4.15).

Vậy q = 0, nên $y_1^* = y_2^* = 0$, tức là

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j^* = b_1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j^* = b_2. \end{cases}$$

Chúng ta đã hoàn thành việc chứng minh định lý 1. ■

Quay lại ví dụ 6, để hợp nhất hóa các ràng buộc (4.7), (4.8) và (4.9) chúng ta tiến hành như sau:

Trước hết chúng ta hợp nhất hóa hai phương trình đầu bằng cách nhân (4.7) với $t_1 = 12$ và nhân (4.8) với $t_2 = 11$ (các số này thỏa mãn điều kiện nêu trong định lý) và cộng các kết quả lại để có: $47x_1 + 68x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 241$. Lúc đó hệ các ràng buộc trong ví dụ 6 là tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} 47x_1 + 68x_2 + 12x_3 + 11x_4 = 241 & (4.17) \\ 3x_1 + 3x_2 + x_5 = 13 & (4.9) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \text{ và nguyên.} & (4.10) \end{cases}$$

Từ đó, nhân (4.13) với 15 và (4.9) với 242 rồi cộng lại, theo định lý nêu trên chúng ta thu được hệ ràng buộc tương tương:

$$\begin{cases} 1431x_1 + 1746x_2 + 180x_3 + 165x_4 + 242x_5 = 6761 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Quá trình hợp nhất hóa các ràng buộc đã hoàn thành.

Nhận xét. Việc hợp nhất hóa các ràng buộc nhanh chóng làm các hệ số của các phương trình hợp nhất trở nên rất lớn. Ngoài ra, việc thực hiện hợp nhất hóa như trên căn cứ định lý 1 đòi hỏi điều kiện: các hệ số $a_{ij} \ge 0$, $b_i > 0$, $\forall j = \overline{1,n}$ và $\forall i = \overline{1,2}$.

Bài tập chương IV

Bài 1. Giải BTQHTT nguyên bằng phương pháp cắt Gomory:

Max $z = 6x_1 + 4x_2 + x_3$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 25 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Bài 2. Giải BTQHTT nguyên bằng phương pháp cắt Gomory hoặc phương pháp nhánh cận Land – Doig:

Min $z = -2x_1 - x_2$, với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 \leq 8 \\ x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1, x_2 \geq 0 \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Kiểm tra lại phương án tối ưu tìm được bằng cách sử dụng phần mềm Lingo.

Bài 3. Giải BTQHTT hỗn hợp nguyên bằng phương pháp thích hợp:

Max $z = 5x_1 + 8x_2$, với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0,\ x_2 \text{ nguyên.} \end{cases}$$

Bài 4. Hãy phát biểu thuật toán cắt Gomory và lập chương trình máy tính bằng ngôn ngữ Pascal hoặc C để giải BTQHTT nguyên. Sau đó chạy kiểm thử chương trình trên một số ví dụ.

Bài 5. Hãy phát biểu thuật toán nhánh cận Land – Doig và lập chương trình máy tính bằng ngôn ngữ Pascal hoặc C để giải BTQHTT nguyên. Sau đó chạy kiểm thử chương trình trên một số ví dụ.

Bài 6. Sử dụng phần mềm thích hợp giải BTQHTT nguyên:

Max $z = 90x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 37x_4$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 15x_1 + 10x_2 + 10x_3 + 15x_4 \le 80 \\ 20x_1 + 15x_2 \qquad\quad + 10x_4 \le 100 \\ 20x_1 + 20x_2 \qquad\quad + 10x_4 \le 120 \\ 15x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 10x_4 \le 70 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Bài 7. Sử dụng quy hoạch động để tìm đường đi ngắn nhất cho bài toán sau:

	Đi tới thành phố										
Đi từ thành phố	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	5	4	2								
2				8	10	5	7				
3				6	3	8	10				
4				8	9	6	4				
5								8	4	3	
6								5	2	7	
7								4	10	6	
8								12	5	2	
9											7
10											3
11											6

Bảng dữ kiện trên được hiểu như sau: Chẳng hạn, từ thành phố 2 chỉ có thể đi tới các thành phố sát gần là 5, 6, 7, 8 với các khoảng cách tương ứng là 8, 10, 5, 7.

Hãy kiểm tra kết quả thu được bằng cách sử dụng phần mềm Lingo.

Bài 8. Hãy tìm đường đi dài nhất cho các dữ kiện trong bài 7.

Bài 9. Giải bài toán cái túi sau:

Max $z = 8x_1 + 5x_2 + x_3 + 12x_4$, với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \le 23 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \text{ và nguyên.} \end{cases}$$

Bài 10. Phát biểu thuật giải bài toán cái túi bằng phương pháp quy hoạch động với *hệ thức truy toán Dantzig* và lập chương trình máy tính. Sau đó chạy kiểm thử chương trình trên một số ví dụ.

Chương V

Một số phương pháp quy hoạch phi tuyến

1. Các khái niệm cơ bản của bài toán tối ưu phi tuyến

1.1. Phát biểu bài toán tối ưu phi tuyến

Cho các hàm số f, $g_j : R^n \to R$, j = 1, 2, ..., m. Bài toán tối ưu tổng quát có dạng chính tắc như sau:

$$\textit{Max (Min)} \quad f(x),$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} \text{(i)} \;\; g_j(x) \le 0, & j = 1, 2, \dots, k, \\ \text{(ii)} \;\; g_j(x) = 0, & j = k+1, k+2, \dots, m. \end{cases}$$

Nếu hàm mục tiêu f(x) hoặc ít nhất một trong các hàm ràng buộc $g_j(x)$, j = 1, 2, …, m là phi tuyến thì chúng ta có bài toán tối ưu phi tuyến, hay còn gọi là bài toán quy hoạch phi tuyến (BTQHPT). Các dạng khác của bài toán tối ưu có thể đưa về dạng chính tắc trên đây theo những quy tắc nhất định.

Với ký hiệu $D \subset R^n$ là miền ràng buộc (hay miền các phương án khả thi) cho bởi các ràng buộc (i) và / hoặc (ii) thì BTQHPT có thể viết gọn hơn như sau: ***$f(x) \to$ Max (Min), với $x \in D$***. Trong trường hợp $D \equiv R^n$, ta có BTQHPT không ràng buộc. Nếu trái lại, D là tập con thực sự của R^n thì có BTQHPT có ràng buộc.

Ví dụ 1. Bài toán sau là BTQHPT không có ràng buộc:

$$\text{Min } z = f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1 - 3x_2.$$

Trong khi đó, bài toán sau đây là BTQHPT có ràng buộc:

$$\text{Min } f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1 - 3x_2$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Định nghĩa 1. Điểm $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$ được gọi là phương án khả thi (hay phương án, nếu nói vắn tắt) của bài toán tối ưu: *Max (Min) f(x), với* $x \in D \subset R^n$. Các toạ độ thành phần của điểm x được gọi là các biến quyết định.

Định nghĩa 2. Đối với bài toán cực đại hoá: *Max f(x), với* $x \in D \subset R^n$, điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*) \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) toàn cục nếu $x^* \in D$ và $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$. Điểm $\bar{x} \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) địa phương nếu $\bar{x} \in D$ và $f(\bar{x}) \geq f(x), \forall x \in N_\varepsilon \cap D$ với N_ε là một lân cận đủ nhỏ của điểm $\bar{x}$. Đối với bài toán cực tiểu hoá: *Min f(x), với* $x \in D \subset R^n$, điểm $x^* \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) toàn cục nếu $x^* \in D$ và $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in D$. Điểm $\bar{x} \in R^n$ được gọi là điểm tối ưu (hay phương án tối ưu) địa phương nếu $\bar{x} \in D$ và $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in N_\varepsilon \cap D$ với N_ε là một lân cận đủ nhỏ của điểm $\bar{x}$.

Các phương án tối ưu địa phương hay toàn cục đều được gọi chung là phương án tối ưu. Dễ thấy, mọi phương án tối ưu toàn cục cũng là phương án tối ưu địa phương, trong khi đó một phương án tối ưu địa phương không nhất thiết là phương án tối ưu toàn cục. Trong các BTQHPT ứng dụng, phương án tối ưu toàn cục có một ý nghĩa quan trọng. Chẳng hạn trong thiết kế máy, sau khi dùng phương pháp phân tích hồi quy nhiều chiều, ta thường thu được hàm mục tiêu f(x) có dạng phi tuyến và sau đó phải tìm kiếm phương án tối ưu toàn cục. Các BTQHPT toàn cục cũng có thể nảy sinh trong quy hoạch kinh tế – sinh thái vùng, chuyển đổi cơ cấu cây trồng và nhiều lĩnh vực kinh tế – kỹ thuật khác.

Có nhiều phương pháp giải các lớp BTQHPT, nhưng chưa có phương pháp nào tỏ ra hữu hiệu cho mọi BTQHPT. Bởi vậy lý thuyết và thuật toán tối ưu phi tuyến là một khoa học đang ngày càng phát triển phong phú cả về chiều sâu cũng như chiều rộng.

1.2. Phân loại các phương pháp giải bài toán quy hoạch phi tuyến toàn cục

Các phương pháp giải BTQHPT toàn cục được phân ra thành hai lớp: phương pháp tất định (*deterministic methods*) và phương pháp ngẫu nhiên (*stochastic methods*).

Phương pháp tất định sử dụng các tính chất giải tích của hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc. Một số dạng bài toán tối ưu toàn cục với những tính chất giải tích nhất định của hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc có thể giải được bằng các phương pháp tất định thích hợp, chẳng hạn như phương pháp quy hoạch toàn phương, quy hoạch tách, quy hoạch lồi, quy hoạch d.c… Trong các trường hợp đó phương án tối ưu toàn cục có thể tìm được sau một số hữu hạn bước tính toán với độ chính xác chọn trước. Tuy nhiên, đối với nhiều lớp bài toán tối ưu toàn cục phương pháp tất định tỏ ra không có hiệu quả.

Trong khi đó, các phương pháp ngẫu nhiên như: phương pháp đa khởi tạo (*multistart*), mô phỏng tôi (*simulated annealing*), thuật giải di truyền (*genetic algorithm*), kỹ thuật tìm kiếm ngẫu nhiên có điều khiển (*controlled random search technique*)… có thể áp dụng để giải các bài toán tối ưu toàn cục dạng bất kỳ, không đòi hỏi các tính chất đặc biệt của hàm mục tiêu hay các hàm ràng buộc. Các phương pháp ngẫu nhiên đặc biệt tỏ ra có hiệu quả đối với các BTQHPT nguyên và hỗn hợp nguyên. Tuy nhiên, các phương pháp này thường chỉ cho phương án "gần" tối ưu khá tốt sau một số hữu hạn bước mà không kiểm soát được độ chính xác của phương án tìm được.

Để bắt đầu nghiên cứu về quy hoạch phi tuyến, trong chương này, chúng ta sẽ giới hạn trong việc tìm hiểu một số khái niệm cơ bản cũng như làm quen với một số phương pháp cổ điển trong tối ưu phi tuyến.

1.3. Bài toán quy hoạch lồi

Định nghĩa 3. *Tập lồi* là tập $S \subset R^n$ có tính chất: mọi đoạn thẳng nối x^1, $x^2 \in S$ đều nằm trong S. Nói cách khác, $S \subset R^n$ là tập lồi khi và chỉ khi $\forall\ x^1, x^2 \in S$, $\forall\ \lambda \in [0,1]$ thì $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)\, x^2 \in S$.

Ví dụ 2. Các tập S sau đây là tập lồi:

i) $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5\}$.

ii) $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5\}$.

iii) $S = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3: Ax \le b\}$ là tập lồi, với

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Trong trường hợp iii) S là giao của các nửa không gian đóng.

iv) $S = \{x \in R: x = (x_1, x_2): x_1^2 + x_2^2 \le 9\}$.

Các tính chất của tập lồi

Cho các tập lồi $S_1, S_2 \subset R^n$. Khi đó:

1) $S_1 \cap S_2$ là tập lồi.

2) $S_1 + S_2 = \{x: x = x^1 + x^2$ với $x^1 \in S_1, x^2 \in S_2\}$ là tập lồi.

3) $S_1 - S_2$ cũng là tập lồi.

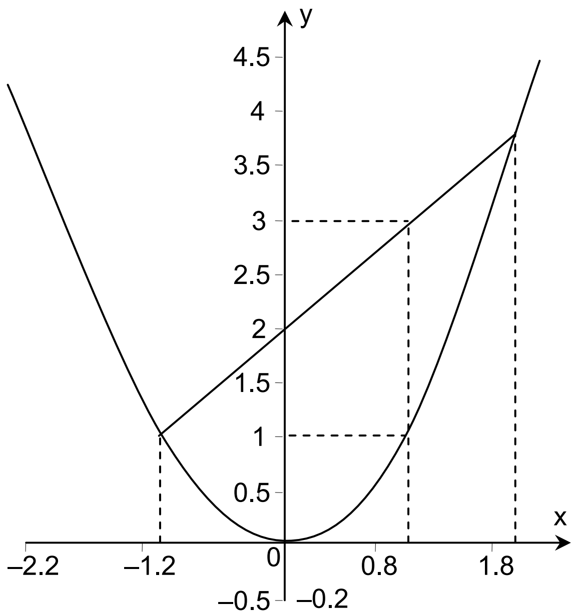
Chứng minh

Chúng ta chứng minh tính chất 2 chẳng hạn theo hướng sau: Do $x \in S_1 + S_2$ nên $x = x^1 + x^2$ với $x^1 \in S_1$, $x^2 \in S_2$; $y \in S_1 + S_2$ nên $y = y^1 + y^2$ với $y^1 \in S_1$, $y^2 \in S_2$. Dễ dàng chứng minh được $\forall\ \lambda \in [0, 1]$ thì $\lambda x + (1-\lambda)y \in S_1 + S_2$. ■

Định nghĩa 4. Cho tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$. Hàm số $f: S \to R$ được gọi là *hàm lồi* nếu $\forall\ x^1, x^2 \in S$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ thì $f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$.

Ví dụ 3.

i) Xét hàm số $f: S \equiv R \to R$ với $f(x) = x^2$. Đây là một hàm lồi. Thật vậy, dễ thấy S là tập lồi. Ngoài ra, $f(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$ và $\forall\ x^1, x^2 \in S$ (xem hình V.1). Chẳng hạn với $\lambda = 1/3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ ta có $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 = (1/3) \times (-1) + (2/3) \times 2 = 1$ và $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(1) = 1 \le (1/3)f(-1) + (2/3)f(2) = (1/3) + (2/3) \times 4 = 3$.



Hình V.1. Đồ thị hàm lồi y = x^2

ii) Hàm số hai biến f: $S \subset R^2 \to R$ với $f(x, y) = x^2 + y^2$ là hàm lồi nếu S là tập lồi khác rỗng.

Định nghĩa 5. BTQHPT toàn cục: $f(x) \to$ Min với $x \in S$, trong đó $S \subset R^n$ là tập lồi và f(x) là hàm lồi, được gọi là bài toán quy hoạch lồi (BTQHL).

Định lý 1. Đối với BTQHL, mọi phương án tối ưu địa phương cũng là phương án tối ưu toàn cục. BTQHTT là trường hợp riêng BTQHL nên nó cũng có tính chất trên.

Định lý này sẽ được chứng minh ở chương VI.

1.4. Hàm nhiều biến khả vi cấp một và cấp hai

Định nghĩa 6 *(hàm khả vi cấp một)***.** Cho tập khác rỗng $S \subset R^n$ và hàm số $f : S \to R$. Hàm f được gọi là hàm khả vi tại $\overline{x} \in S$ nếu $\forall x \in S$ ta luôn có

$$f(x) = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x}) + \|x - \overline{x}\| \times \alpha(\overline{x}, x - \overline{x}),$$

trong đó $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \alpha(\overline{x}, x - \overline{x}) = 0$ và $\nabla f(\overline{x})$ là véc tơ gradient của f tại $\overline{x}$:

$$\nabla f(\overline{x}) = \left[\frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\overline{x})}{\partial x_n} \right]^T.$$

Nhận xét. Có thể chứng minh được rằng nếu f là hàm khả vi (cấp một) và nếu $\overline{x}$ là phương án tối ưu (địa phương) thì $\nabla f(\overline{x}) = 0$.

Ví dụ 4. Xét hàm số hai biến $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

$$\nabla f(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right]^T = (2x_1, 2x_2)^T.$$

Với $\bar{x} = (1, 1)$ ta có $\nabla f(\bar{x}) = (2, 2)^T$.

Vậy $f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_2 \end{bmatrix}^T (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)^T + o\left(\|x - \bar{x}\|\right)$ hay

$$f(x_1, x_2) = f(1,\ 1) + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}^T (x_1 - 1, x_2 - 1)^T + o\left(\sqrt{(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2}\right).$$

Tại điểm cực tiểu (0, 0) có $\nabla f(0,0) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right]^T_{(0,0)} = (0,0)^T$.

Định nghĩa 7 *(hàm khả vi cấp hai)*. Xét tập khác rỗng $S \subset R^n$, và hàm f: $S \to R$. Hàm f được gọi là khả vi cấp hai tại $\bar{x}$ nếu tồn tại véc tơ gradient $\nabla f(\bar{x})$ và ma trận đối xứng cấp n, được gọi là ma trận Hessian H($\bar{x}$), sao cho:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T H(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}, x - \bar{x})$$

đúng $\forall x \in S$, trong đó $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \alpha(\bar{x}, x - \bar{x}) = 0$.

Ví dụ 5. Xét hàm số hai biến $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Đây là hàm khả vi cấp hai với ma trận Hessian sau:

$$H(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2 \\ \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2 & \partial^2 f/\partial x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) +$

$$\begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_2 \end{bmatrix}^T (x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)^T + \frac{1}{2}(x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{bmatrix} + o(\|x - \bar{x}\|^2).$$

2. Một số phương pháp giải bài toán quy hoạch phi tuyến không ràng buộc

Các phương pháp giải tích giải BTQHPT không ràng buộc chia thành hai lớp: phương pháp không sử dụng đạo hàm và phương pháp sử dụng đạo hàm. Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu một số phương pháp sử dụng đạo hàm như phương pháp đường dốc nhất (còn gọi là phương pháp gradient), phương pháp Newton và phương pháp hướng liên hợp thông qua việc trình bày các thuật toán và ví dụ.

2.1. Phương pháp đường dốc nhất

Phương pháp đường dốc nhất (*The steepest descent method*) là một trong các phương pháp cổ điển thông dụng nhất giải BTQHPT không ràng buộc nhiều biến. Xét BTQHPT không ràng buộc tổng quát: *Min f(x), x = (x_1, x_2, …, x_n) $\in R^n$*. Ta gọi véc tơ d là hướng giảm của hàm f: $R^n \to R$ tại x nếu $\exists\, \delta > 0$ sao cho $f(x + \lambda d) < f(x)$, $\forall\, \lambda \in (0, \delta)$.

Giả sử hàm f là khả vi tại x. Ngoài ra giả sử rằng $\nabla f(x) \neq 0$. Lúc đó, có thể chứng minh được hướng $\bar{d} = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ là hướng giảm nhanh nhất, tức là $\bar{d}$ là lời giải của bài toán Min $f'(x, d)$, trong đó $f'(x, d)$ là đạo hàm theo hướng d tại x, với điều kiện $\|d\| \leq 1$.

Thật vậy, do f khả vi tại x nên:

$$f(x + \lambda d) = f(x) + \nabla f(x)^T (\lambda d) + \|\lambda d\| \alpha(x, \lambda d) \quad (5.1)$$

với $\lim_{\lambda \to 0^+} \alpha(x, \lambda d) = 0$. Vậy đạo hàm theo hướng d tại x chính là

$$f'(x, d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^T d.$$

Do $\|d\| \leq 1$, nên theo bất đẳng thức Schwartz ta có $\nabla f(x)^T d \geq -\|\nabla f(x)\|\|d\| \geq -\|\nabla f(x)\|$. Với $\bar{d} = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$ ta có $\nabla f(x)^T \bar{d} = -\|\nabla f(x)\|$, nên $\bar{d}$ là hướng giảm nhanh nhất của hàm f tại x. Nếu biểu thức $\|\lambda d\| \alpha(x, \lambda d)$ được coi là bằng 0 trong công thức (5.1), thì với một giá trị $\lambda > 0$ cố định và với điều kiện $\|d\| \leq 1$, $f(x + \lambda d)$ đạt giá trị cực tiểu tại $\bar{d} = -\nabla f(x)/\|\nabla f(x)\|$. Tuy nhiên, biểu thức $\|\lambda d\| \alpha(x, \lambda d)$ không nhất thiết phải bằng 0, nên sau khi hướng giảm nhanh nhất $\bar{d}$ đã được chọn, cần xác định $\lambda \geq 0$ để cực tiểu hóa $f(x + \lambda \bar{d})$.

Sau đây là thuật toán của phương pháp đường dốc nhất. Dựa trên lý thuyết về *ánh xạ thuật toán đóng*, có thể chứng minh được thuật toán này hội tụ tới điểm $\bar{x}$ có $\nabla f(\bar{x}) = 0$ với điều kiện dãy điểm $\{x^k\}$ được phát sinh trong thuật toán đều nằm trong một tập giới nội. Nếu hàm f(x) là hàm lồi thì $\bar{x}$ sẽ là phương án tối ưu toàn cục của BTQHPT không ràng buộc đã cho.

Thuật toán đường dốc nhất

Bước khởi tạo

Chọn $\varepsilon > 0$ làm sai số kết thúc. Lấy một điểm xuất phát x^1, đặt k :=1 và chuyển sang các bước lặp.

Các bước lặp (bước lặp thứ k)

Bước 1: Nếu $\|\nabla f(x^k)\| > \varepsilon$ thì đặt $d^k = -\nabla f(x^k)$ và chuyển sang bước 2.

Bước 2: Tìm λ^k là phương án tối ưu của bài toán cực tiểu hóa hàm một biến $f(x^k + \lambda d^k)$ (phụ thuộc vào biến $\lambda \geq 0$). Đặt $x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$, k := k+1 và chuyển về bước 1.

Bước kết thúc. Nếu $\|\nabla f(x^k)\| \leq \varepsilon$ thì dừng.

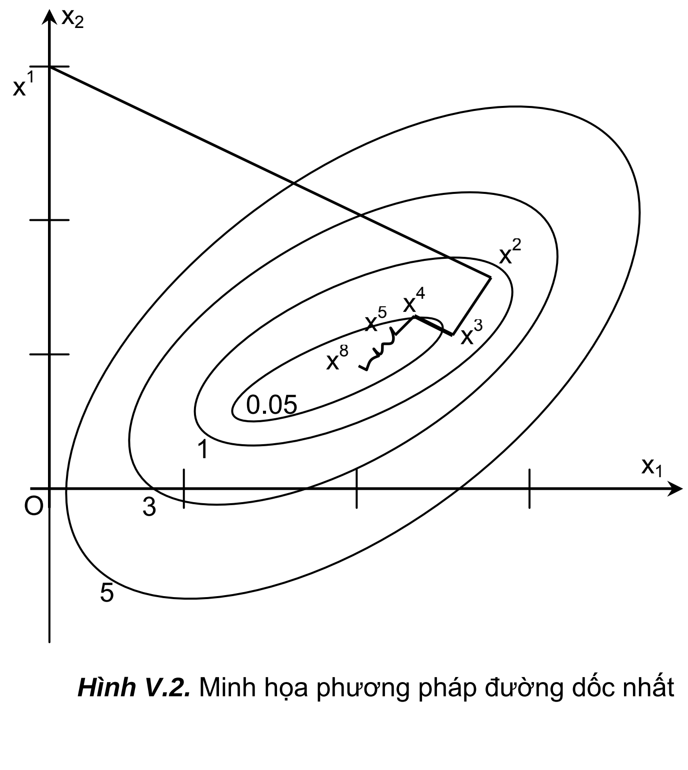
Ví dụ 6. Giải BTQHPT: Min $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$ bằng phương pháp đường dốc nhất. Quá trình giải được tóm tắt trong bảng V.1 (các véc tơ được viết dưới dạng hàng) và được minh họa trên hình V.2.

Bảng V.1. Tóm tắt các bước lặp trong phương pháp đường dốc nhất

Bước lặp k	x^k	$f(x^k)$	$\nabla f(x^k)$	$\lVert \nabla f(x^k) \rVert$	$d^k = -\nabla f(x^k)$	λ^k
1	(0;3)	52	(–44;24)	50,12	–(–44;24)	0,062
2	(2,7;1,51)	0,34	(0,73;1,28)	1,47	–(0,73;1,28)	0,24
3	(2,52;1,2)	0,09	(0,80;–0,48)	0,93	–(0,80;–0,48)	0,11
4	(2,43;1,25)	0,04	(0,18;0,28)	0,33	–(0,18;0,28)	0,31
5	(2,37;1,16)	0,02	(0,30;–0,2)	0,36	–(0,30;–0,2)	0,12
6	(2,33;1,18)	0,01	(0,08;0,12)	0,14	–(0,08;0,12)	0,36
7	(2,3;1,14)	0,009	(0,15;–0,08)	0,17	–(0,15;–0,08)	0,13
8	(2,28;1,15)	0,007	(0,05;0,08)	0,09	–(0,05;0,08)	

Chú ý. Phương pháp đường dốc nhất tỏ ra khá hiệu quả trong các bước lặp ở giai đoạn đầu. Tuy nhiên, càng gần tới điểm dừng thì thuật giải càng tỏ ra kém hiệu quả khi nó chỉ dịch chuyển được các bước vuông góc khá ngắn (xem thêm hình V.2). Điều này được giải thích khá dễ dàng do tại bước lặp thứ k hàm mục tiêu giảm đi một lượng là

$$\lambda(\nabla f(x^k))^T d^k = -\lambda \lVert \nabla f(x^k) \rVert^2.$$



Hình V.2. Minh họa phương pháp đường dốc nhất

2.2. Phương pháp Newton

Trong phương pháp đường dốc nhất, quy tắc dịch chuyển cho bởi $x^{k+1} = x^k + \lambda^k d^k$ với $d^k = -\nabla f(x^k)$. Trong phương pháp Newton, ta cũng có quy tắc dịch chuyển tương tự với λ^k được thay thế bởi $H(x^k)^{-1}$, trong đó $H(x^k)$ là ma trận Hessian được tính tại điểm x^k với điều kiện ma trận này khả nghịch. Giả sử rằng dãy $\{x^k\}$ hội tụ tới $\bar{x}$ với $\nabla f(\bar{x}) = 0$ và $H(\bar{x})$ xác định dương, trong đó f(x) là hàm khả vi cấp hai. Lúc đó, với các điểm x^k khá sát $\bar{x}$, $H(x^k)$ cũng xác định dương nên là ma trận khả nghịch.

Sau đây, chúng ta giải thích ý nghĩa của quy tắc dịch chuyển: $x^{k+1} = x^k - H(x^k)^{-1} \times \nabla f(x^k)$ trong phương pháp Newton. Đối với hàm khả vi cấp hai chúng ta có thể viết:

$$f(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x^k)(x - x^k) + \|x - x^k\|^2 \alpha(x^k, x - x^k),$$

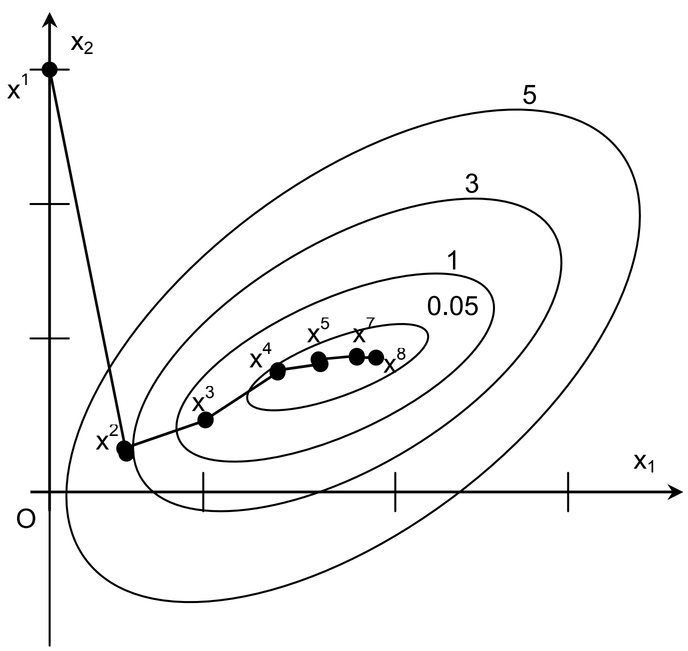
trong đó, $\lim_{x \to x^k} \alpha(x^k, x - x^k) = 0$. Bởi vậy, có thể xấp xỉ f(x) bởi:

$$q(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x^k)(x - x^k) \approx f(x).$$

Ngoài ra, dễ thấy điều kiện cần để q(x) đạt giá trị cực tiểu là: $\nabla q(x) = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x^k) + H(x^k)(x - x^k) = 0$. Giả sử ma trận $H(x^k)$ khả nghịch thì điểm tiếp theo nên xem xét chính là điểm $x^{k+1} = x^k - H(x^k)^{-1}\nabla f(x^k)$.

Có thể chứng minh được phương pháp Newton hội tụ (khá nhanh) với điều kiện điểm xuất phát x^1 nằm sát gần $\bar{x}$ với $\nabla f(\bar{x}) = 0$ và ma trận $H(\bar{x})$ là khả nghịch. Để khắc phục điều kiện ngặt nghèo này, phương pháp Newton cải biên đã được đề xuất. Tuy nhiên đây là thuật giải phức tạp, xin dành cho các bạn đọc quan tâm tự tìm hiểu.

Ví dụ 7. Giải bài toán Min $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$ bằng phương pháp Newton. Quá trình giải được minh họa trên hình V.3 và được tóm tắt trong bảng V.2.



Hình V.3. Minh họa phương pháp Newton

Bảng V.2. Tóm tắt các bước lặp trong phương pháp Newton

lặp k	x^k $f(x^k)$	$\nabla f(x^k)$	$H(x^k)$	$H(x^k)^{-1}$	$-H(x^k)^{-1}\nabla f(x^k)$	x^{k+1}
1	(0;3) 52	(–44; 24)	$\begin{bmatrix} 50 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{384}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 50 \end{bmatrix}$	(0,67; –2,67)	(0,67; 0,33)
2	(0,67;0,33) 3,13	(–9,39; –0,04)	$\begin{bmatrix} 23,23 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{169,84}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 23,23 \end{bmatrix}$	(0,44; 0,23)	(1,11; 0,56)
3	(1,11;0,56) 0,63	(–2,84; –0,04)	$\begin{bmatrix} 11,5 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{76}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 11,5 \end{bmatrix}$	(0,3; 0,14)	(1,41; 0,7)
4	(1,41;0,7) 0,12	(–0,8; –0,04)	$\begin{bmatrix} 6,18 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{33,4}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 6,18 \end{bmatrix}$	(0,2; 0,1)	(1,61; 0,80)
5	(1,61;0,8) 0,02	(–0,22; –0,04)	$\begin{bmatrix} 3,83 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{16,64}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3,88 \end{bmatrix}$	(0,13; 0,07)	(1,74; 0.87)
6	(1,74;0,87) 0,005	(–0,07; 0)	$\begin{bmatrix} 2,81 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6,48}\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2,81 \end{bmatrix}$	(0,09; 0,04)	(1,83; 0,91)
7	(1,83;0,91) 0.0009	(0,0003; –0,04)				

2.3. Phương pháp hướng liên hợp

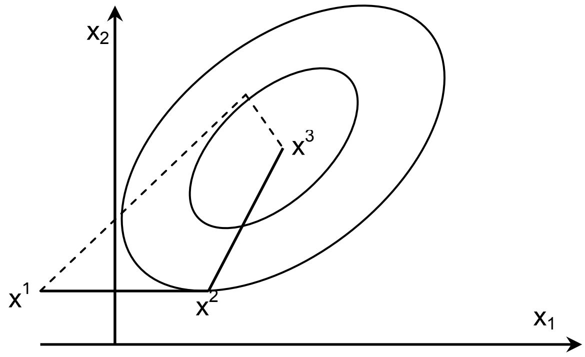
Định nghĩa 8 *(hướng liên hợp)***.** Cho H là một ma trận đối xứng cấp n×n. Các véc tơ d^1, d^2, …, d^k được gọi là các hướng liên hợp (tương ứng với ma trận H) nếu chúng là độc lập tuyến tính và $(d^i)^T H d^j = 0$, $\forall\, i \neq j$.

Ví dụ 8. Xét BTQHPT: Min $f(x) = -12x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2$. Hàm f(x) là hàm khả vi cấp hai với ma trận Hessian sau đây:

$$H = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Chúng ta sẽ xây dựng các hướng liên hợp căn cứ ma trận H và tiến hành cực tiểu f(x) theo các hướng liên hợp. Trước hết chọn hướng $d^1 = (1, 0)^T$. Xuất phát từ điểm $x^1 = (-1/2, 1)^T$ để cực tiểu hoá f(x) trên hướng d^1, ta thu được điểm $x^2 = (1/2, 1)^T$.

Xây dựng hướng $d^2 = (a, b)$ liên hợp với d^1 căn cứ điều kiện $(d^1)^T H d^2 = 8a - 4b = 0$. Ta chọn $d^2 = (1, 2)$. Xuất phát từ x^2 để cực tiểu hóa f(x) trên hướng d^2, ta thu được điểm $x^3 = (1, 2)^T$. Có thể chứng minh được đây chính là điểm cực tiểu của f(x). Ngoài ra, cũng có thể chứng minh được rằng, trong ví dụ 8 khi xuất phát từ điểm x^1 tùy ý và với các hướng liên hợp tùy chọn, phương án tối ưu trên cũng luôn đạt được sau đúng hai bước (xem hình V.4).



Hình V.4. Cực tiểu hóa theo các hướng liên hợp

Sau đây là thuật toán của phương pháp hướng liên hợp (*the conjugate direction method*) do Zangwill đề xuất. Có thể chứng minh được thuật toán sẽ luôn tìm ra được phương án tối ưu đối với các BTQHPT có hàm mục tiêu dạng $f(x) = x^THx + p^Tx$, với p là véc tơ cột n toạ độ, H là ma trận đối xứng cấp n×n. Ngoài ra, nếu BTQHPT không có hàm mục tiêu dạng trên thì thuật toán vẫn hội tụ tới điểm $\bar{x}$ có $\nabla f(\bar{x}) = 0$ nếu tập $\Lambda = \{x: f(x) \le f(x^1)\}$ là tập giới nội trong đó x^1 là điểm xuất phát của thuật toán. Tuy nhiên, đây là các vấn đề khá phức tạp, bạn đọc có thể xem thêm trong các sách tham khảo về vấn đề *ánh xạ thuật toán đóng*. Dễ thấy, nếu hàm f(x) là hàm lồi thì thuật toán sẽ cho phương án tối ưu toàn cục.

Thuật toán hướng liên hợp Zangwill

Bước khởi tạo

Chọn ε > 0 làm sai số kết thúc. Lấy một điểm xuất phát x^1, đặt $y^1 = x^1$, $d^1 = -\nabla f(y^1)$, đặt k =j =1 và chuyển sang các bước lặp.

Các bước lặp

Bước 1: Tìm λ^j là phương án tối ưu của bài toán cực tiểu hóa hàm một biến $f(y^j + \lambda d^j)$ (phụ thuộc vào biến $\lambda \ge 0$). Đặt $y^{j+1} = y^j + \lambda^j d^j$. Nếu j = n thì chuyển về bước 4, nếu trái lại chuyển về bước 2.

Bước 2: Đặt $d = -\nabla f(y^{j+1})$ và $\hat{\mu}$ là phương án tối ưu của bài toán cực tiểu hóa hàm một biến $f(y^{j+1} + \mu d)$ (phụ thuộc vào biến $\mu \ge 0$). Đặt $z^1 = y^{j+1} + \mu d$, i = 1 và chuyển về bước 3.

Bước 3: Nếu $\|\nabla f(z^i)\| < \varepsilon$ thì dừng với z^i. Nếu trái lại, đặt μ^i là phương án tối ưu của bài toán cực tiểu hóa hàm một biến $f(z^i + \mu d^i)$ (phụ thuộc vào biến $\mu \ge 0$). Đặt $z^{i+1} = z^i + \mu^i d^i$. Nếu i < j thì thay i bởi i + 1 và lặp lại bước 3. Nếu trái lại, đặt $d^{j+1} = z^{j+1} - y^{j+1}$, thay j bởi j + 1 và chuyển về bước 1.

Bước 4: Đặt $y^1 = x^{k+1} = y^{n+1}$. Đặt $d^1 = -\nabla f(y^1)$, thay k bởi k+1, đặt j = 1 và chuyển về bước 1.

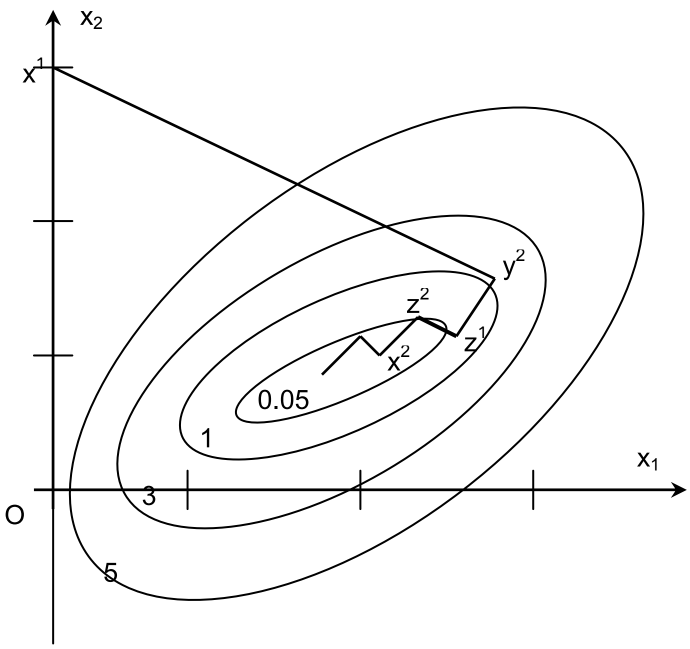
Ví dụ 9. Giải BTQHPT: Min $f(x) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$ bằng phương pháp hướng liên hợp. Quá trình giải được tóm tắt trong bảng V.3.

Bảng V.3. Tóm tắt các bước lặp trong phương pháp hướng liên hợp

Bước lặp k = 1			*x^1 = (0;3)^T*				*f(x^1) = 52*		
j	y^j	d^j	λ^j	y^{j+1}	d	$\hat{\mu}$	z^1, f(z^1)	μ^1	z^2, f(z^2)
1	(0;3)	(44; –24)	0,062	(2,7; 1,51)	(–0,73; –1,28)	0,25	(2,52;1,2) 0,090	–0,0013	(2,46;1,23) 0,045
2	(2,7;1,51)	(–0,24; –0,28)	1,5	(2,34; 1,09)	–		–	–	–
Bước lặp k = 2			*x^2 = (2,34;1,09)^T*				*f(x^2) = 0,039*		
j	y^j	d^j	λ^j	y^{j+1}	d	$\hat{\mu}$	z^1, f(z^1)	μ^1	z^2, f(z^2)
1	(2,34;1,39)	(–9,48; 0,64)	0,10	(2,29; 1,15)	(–0,08; –0,04)	3,6	(2;1,01) 0,004	–	–

Như vậy tại bước lặp k = 1, ta có quy trình tính sau: $x^1 \to y^1 \to d^1 \to \lambda^1 \to$ tìm y^2 xuất phát từ y^1 trên hướng $d^1 = -\nabla f(y^1) \to d \to \hat{\mu} \to$ tìm z^1 từ y^2 trên hướng $d = -\nabla f(y^2) \to \mu^1 \to$ tìm z^2 từ z^1 trên hướng $d^1 \to d^2 \to \lambda^2 \to$ tìm y^3 từ y^2 trên hướng $d^2 = z^2 - y^2 \to x^2$.

Sau đó chuyển sang bước lặp k =2: $x^2 \to y^1 \to d^1 \to \lambda^1 \to y^2 \to d \to \hat{\mu} \to z^1$. Tại đây thuật giải dừng do $\|\nabla f(z^1)\|$ = 0,09, và phương án tối ưu tìm được là: z^1 = (2; 1,01) với giá trị hàm mục tiêu là 0,004 (xem hình V.5).



Hình V.5. Minh họa phương pháp hướng liên hợp

3. Thiết lập Điều kiện tối ưu Kuhn – Tucker cho các bài toán quy hoạch phi tuyến có ràng buộc

Trong mục này, với mục đích tìm hiểu bước đầu, chúng ta sẽ nghiên cứu cách thiết lập điều kiện tối ưu Kuhn – Tucker đối với các BTQHPT có ràng buộc và xem xét nó qua một số ví dụ cụ thể mà không đi sâu vào việc chứng minh các điều kiện này một cách chặt chẽ. Có thể nói rằng, điều kiện Kuhn – Tucker là điều kiện cơ bản nhất trong lý thuyết tối ưu phi tuyến và là cơ sở cho nhiều phương pháp tối ưu phi tuyến cổ điển.

3.1. Hàm Lagrange

Xét BTQHPT tổng quát:

Min (Max) $f(x)$, với $x \in D = \{x \in R^n: g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m}\}$. (5.2)

Lúc đó, hàm (đối ngẫu) Lagrange tương ứng với bài toán trên có dạng sau:

$$F(x,\lambda) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \lambda_1 g_1(x) + \ldots + \lambda_m g_m(x),$$

với điều kiện $\lambda_i \ge 0$, $\forall i = \overline{1,m}$ (các số $\lambda_i \ge 0$, $\forall i = \overline{1,m}$, được gọi là các nhân tử).

Ký hiệu

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \text{ và } G(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \ldots \\ g_m(\lambda) \end{bmatrix} \text{ thì } F(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T G(x).$$

Đặt $\lambda_i = s_i^2$, hàm Lagrange được định nghĩa trên đây được viết lại dưới dạng $F\left(x,s^2\right) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} s_i^2 g_i(x)$, với $s^2 = (s_1^2, s_2^2, \ldots, s_m^2)$. Chúng ta gọi các điểm $(x, \lambda) = (x, s^2)$ là điểm dừng của hàm Lagrange nếu điểm $(x, s) \in R^{n+m}$ thỏa mãn hệ điều kiện sau đây:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \dfrac{\partial F}{\partial s_i} = 0, \forall i = \overline{1,m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} s_i^2 \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ s_i g_i(x) = 0, \forall i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Định lý 2. Cho $\overline{x}$ là phương án tối ưu của BTQHPT (5.2) với hàm mục tiêu $f(x)$ và các hàm ràng buộc $g_i(x)$, $\forall i = \overline{1,m}$, là các hàm khả vi. Xét tập các chỉ số I được xác định bởi $I = \{i: g_i(\overline{x}) = 0\}$. Giả sử các véc tơ $\nabla g_i(\overline{x})$, $\forall i \in I$ là độc lập tuyến tính. Lúc đó, tồn tại véc tơ m toạ độ $\overline{\lambda} \ge 0$ sao cho $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ là điểm dừng của hàm Lagrange.

Như vậy, tập các điểm dừng của hàm Lagrange luôn cần được chú trọng xem xét. Trong số các véc tơ $\overline{x} \in R^n$, sao cho tồn tại véc tơ m toạ độ $\overline{\lambda} \ge 0$ để $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ là điểm dừng của hàm Lagrange, có thể tìm được các phương án tối ưu địa phương của BTQHPT (5.2). Hơn nữa, theo định lý 1 trong mục 1.3 của chương này, nếu BTQHPT (5.2) là BTQHL, thì với một khả năng khá lớn có thể tìm được phương án tối ưu toàn cục trong số các điểm dừng trên. Chúng ta tạm thời công nhận định lý này và sẽ trình bày lời chứng minh trong định lý 33 chương VI tiếp theo.

3.2. Thiết lập điều kiện Kuhn – Tucker

Xét hệ điều kiện bao gồm điều kiện điểm dừng của hàm Lagrange và điều kiện ràng buộc của BTQHPT (5.2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ \lambda_i \ge 0, \forall i = \overline{1,m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \lambda^T G(x) = 0 \\ G(x) \le 0 \\ \lambda \ge 0. \end{cases}$$

Hệ điều kiện trên đây được gọi là *điều kiện Kuhn – Tucker* của BTQHPT (5.2).

Ví dụ 10. Thiết lập điều kiện Kuhn – Tucker cho BTQHPT sau:

Min $f(x) = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$

với điều kiện $x = (x_1, x_2) \in D$ là miền ràng buộc được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 - 2 \le 0 \\ x_2 - 1 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(x) = x_1 - 2 \le 0 \\ g_2(x) = x_2 - 1 \le 0 \\ g_3(x) = -x_1 \le 0 \\ g_4(x) = -x_1 \le 0. \end{cases}$$

Có thể kiểm nghiệm được rằng trong ví dụ này chúng ta có BTQHL với hàm Lagrange: $F(x, \lambda) = (x_1+1)^2 + (x_2-1)^2 + \lambda_1(x_1-2) + \lambda_2(x_2-1) - \lambda_3 x_1 - \lambda_4 x_2$, $(\lambda_i \ge 0, \forall i = \overline{1,4})$.

Điều kiện Kuhn – Tucker của bài toán này được viết như sau:

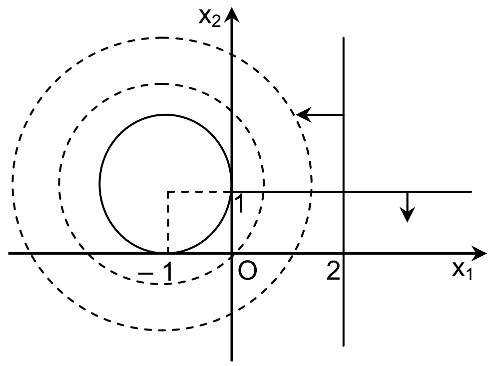
$$\begin{cases} 2(x_1 + 1) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 & (5.3) \\ 2(x_2 - 1) + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 & (5.4) \\ \lambda_1(x_1 - 2) = 0 & (5.5) \\ \lambda_2(x_2 - 1) = 0 & (5.6) \\ \lambda_3(-x_1) = 0 & (5.7) \\ \lambda_4(-x_2) = 0 & (5.8) \\ x_1 - 2 \le 0 & (5.9) \\ x_2 - 1 \le 0 & (5.10) \\ -x_1 \le 0 & (5.11) \\ -x_2 \le 0 & (5.12) \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ge 0. & (5.13) \end{cases}$$

Từ (5.3) và (5.7) suy ra: $x_1[(2(x_1 + 1) + \lambda_1] = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow$ theo (5.5) có $\lambda_1 = 0$.

Từ (5.4) và (5.8) suy ra: $x_2[2(x_2 - 1) + \lambda_2] = 0 \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x_2 = 0 \Rightarrow \textit{từ } (5.6) \ \textit{có } \lambda_2 = 0 \\ 2(x_2 - 1) + \lambda_2 = 0 \Rightarrow \textit{từ } (5.6) \ \textit{có } x_2 = 1, \lambda_2 = 0. \end{array}\right.$$

Với điều kiện: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ta thấy trong hai điểm ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) và ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$) chỉ có điểm ($x_1 = 0$, $x_2 = 1$) (với $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 0$) thỏa mãn điều kiện dừng của hàm Lagrange. Vậy phương án tối ưu toàn cục là $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ ứng với $f_{min} = 1$ (xem hình V.6).



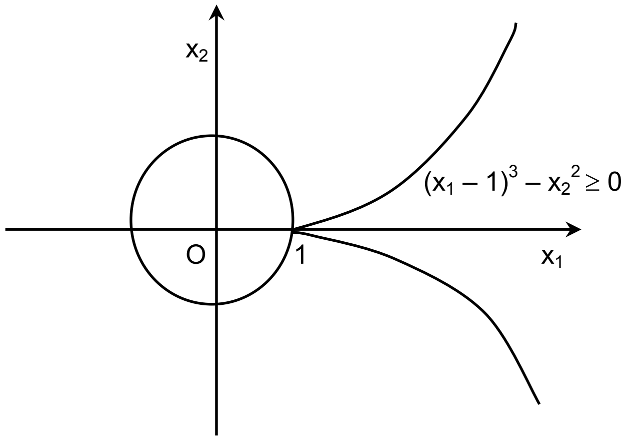
Hình V.6. Minh họa điều kiện Kuhn – Tucker

Ví dụ 11. Xét BTQHPT: Min $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, với ràng buộc $g(x) = -(x_1-1)^3 + x_2^2 \le 0$.

Lập hàm Lagrange $F(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda\,[x_2^2 - (x_1-1)^3]$ và thiết lập điều kiện Kuhn – Tucker:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3\lambda(x_1-1)^2 = 0 & (5.14)\\ 2x_2 + 2\lambda x_2 = 0 & (5.15)\\ \lambda[x_2^2 - (x_1-1)^3] = 0 & (5.16)\\ x_2^2 - (x_1-1)^3 \le 0 & (5.17)\\ \lambda \ge 0. & (5.18)\end{cases}$$

Từ điều kiện (5.15) suy ra $x_2 = 0$. Do điều kiện (5.16) nên $x_1 = 1$ (vì nếu trái lại thì $\lambda = 0$ và theo (5.14) có $x_1 = 0$, do đó (5.17) không thỏa mãn). Với $x_1 = 1$ ta có (5.14) không được thỏa mãn. Vậy hệ điều kiện Kuhn – Tucker vô nghiệm. Tuy nhiên, bài toán trên đây có phương án tối ưu tại điểm $x_1 = 1$ và $x_2 = 0$ với $f_{min} = 1$ (xem hình V.7).



Hình V.7. Minh họa điều kiện Kuhn – Tucker vô nghiệm

Điều này không mâu thuẫn với định lý 2 nêu trên, do tại $\overline{x}$ = (1, 0) véc tơ gradient $\nabla g(\overline{x}) = \begin{bmatrix} -3(x_1-1) \\ 2x_2 \end{bmatrix}_{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ phụ thuộc tuyến tính, vì vậy $\overline{x}$ không bắt buộc thỏa mãn điều kiện Kuhn – Tucker.

Ví dụ 12. Xét BTQHPT: Min f(x), với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ h_k(x) = 0, \forall k = \overline{1,r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ h_k(x) \le 0, \forall k = \overline{1,r} \\ -h_k(x) \le 0, \forall k = \overline{1,r}. \end{cases}$$

Ký hiệu các nhân tử là λ_i ứng với $g_i(x)$, μ_k^+ ứng với $h_k(x)$ và μ_k^- ứng với $-h_k(x)$. Lúc đó có hàm Lagrange:

$$F(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k^+ h_k(x) - \sum_{k=1}^{r} \mu_k^- h_k(x).$$

Thiết lập điều kiện Kuhn – Tucker như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_k^+ \dfrac{\partial h_k(x)}{\partial x_j} - \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_k^- \dfrac{\partial h_k(x)}{\partial x_j} = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ \mu_k^+ \; h_k(x) = 0, \forall k = \overline{1,r} \\ \mu_k^- \; h_k(x) = 0, \forall k = \overline{1,r} \\ g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ h_k(x) \le 0, \forall k = \overline{1,r} \\ -h_k(x) \le 0, \forall k = \overline{1,r} \\ \lambda_i \ge 0, \forall i = \overline{1,m};\; \mu_k^+ \ge 0, \mu_k^- \ge 0, \forall k = \overline{1,r}. \end{cases}$$

Đặt $\mu_k = \mu_k^+ - \mu_k^-$, lúc đó hàm Lagrange có dạng

$$F(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k h_k(x).$$

Do đó, điều kiện Kuhn – Tucker được viết là

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial xj} + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} + \sum\limits_{k=1}^{r} \mu_k \dfrac{\partial h_k(x)}{\partial x_j} = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ h_k(x) = 0, \forall k = \overline{1,r} \\ \lambda_i \ge 0, \forall i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Ví dụ 13. Viết điều kiện Kuhn – Tucker cho BTQHPT sau:

Min f(x), với $x \in D$ cho bởi các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Thiết lập hàm Lagrange: $F(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_{m+j} x_j = 0$, trong đó $\lambda_i \ge 0$, $\forall i = \overline{1, n+m}$. Từ đó có thể viết được điều kiện Kuhn – Tucker như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} - \lambda_{m+j} = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i g_i(x) = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ -\lambda_{m+j} x_j = 0, \forall i = \overline{1,n} \\ g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i \ge 0, \forall i = \overline{1, m+n}. \end{cases}$$

4. Một số phương pháp giải quy hoạch toàn phương

4.1. Bài toán quy hoạch toàn phương

Ví dụ 14. Xét BTQHPT sau:

$$\text{Min } f(x) = x_1 - x_2 - x_3 + \tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 4x_1x_2 - 2x_2x_3,$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 \le 0 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Ký hiệu $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $p = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -2 & 0 \\ -2 & 1/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Lúc đó, có thể viết BTQHPT đã cho về dạng:

Min $f(x) = p^T x + x^T Q x$, với $x \in D = \{x \in R^n: Ax \le b, x \ge 0\}$.

Bài toán quy hoạch toàn phương (BTQHTP) tổng quát là bài toán có dạng trên đây, với $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, Q là ma trận đối xứng cấp n: $Q = [q_{ij}]_n$ với $q_{ij} = q_{ji}$ $\forall i, \forall j$. Có thể chứng minh được nếu Q xác định dương thì BTQHTP trở thành BTQHL.

4.2. Phát biểu điều kiện Kuhn – Tucker cho bài toán quy hoạch toàn phương

Xét BTQHTP: Min f(x) = $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$

với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Thiết lập hàm Lagrange: F(x) = f(x) + $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j x_j$ (để phân biệt chúng ta ký hiệu $s_j = \lambda_{m+j}$ $\forall j = \overline{1,n}$). Điều kiện Kuhn – Tucker được viết là:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} - s_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i) = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ s_j x_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i \ge 0, \forall i = \overline{1,m},\ s_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} - s_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + s_{n+i} - b_i = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ s_j x_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i s_{n+i} = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i \ge 0, \forall i = \overline{1,m},\ s_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n+m}. \end{cases}$$

Trong đó $s_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ được gọi là biến bù ứng với ràng buộc thứ i,$\forall i = \overline{1,m}$.

4.3. Phương pháp Wolfe giải bài toán quy hoạch toàn phương

Với mục đích trình bày đơn giản, chúng ta nghiên cứu phương pháp Wolfe thông qua việc giải ví dụ sau.

Ví dụ 15. Xét BTQHPT

Min f(x) = $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1 - 3x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Điều kiện Kuhn – Tucker được viết như sau:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - s_1 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 - s_2 = 3 \\ x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_4 = 4 \\ x_1s_1 = 0,\ x_2s_2 = 0,\ \lambda_1 s_3 = 0,\ \lambda_2 s_4 = 0 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, \lambda_1, \lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Để tìm phương án thỏa mãn điều kiện trên, trước hết, chúng ta tạm thời bỏ qua điều kiện độ lệch bù (là điều kiện $x_1s_1 = x_2s_2 = \lambda_1s_3 = \lambda_2s_4 = 0$). Lúc này, hệ điều kiện trên trở thành hệ phương trình tuyến tính. áp dụng bài toán ω (như trong pha 1 của phương pháp hai pha giải BTQHTT), có thể tìm được phương án cho hệ phương trình tuyến tính. Tuy nhiên trong quá trình giải chúng ta sẽ tuân thủ một *quy tắc đảm bảo điều kiện độ lệch bù* luôn được thỏa mãn tại mỗi bước lặp.

Đưa vào hai biến giả A_1, A_2 chúng ta có BTQHTT dạng bài toán ω sau đây:

Min $\omega = A_1 + A_2$ với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - s_1 + A_1 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 + \lambda_1 + 3\lambda_2 - s_2 + A_2 = 3 \\ x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + s_4 = 4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, \lambda_1, \lambda_2, A_1, A_2 \ge 0. \end{cases}$$

Bảng V.4. Phương pháp Wolfe giải BTQHTP

Hệ số C_B	Biến cơ sở	Phương án	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
			x_1	x_2	λ_1	λ_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2
1	A_1	6	4	4	1	2	–1	0	0	0	1	0
1	A_2	**3**	4	**6**	1	3	0	–1	0	0	0	1
0	s_3	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	s_4	4	2	3	0	0	0	0	0	1	0	0
	Δ_j		–8	**– 10**	–2	–5	1	1	0	0	0	0
1	A_1	4	4/3	0	1/3	0	–1	2/3	0	0	1	–2/3
0	x_2	**1/2**	**2/3**	1	1/6	1/2	0	–1/6	0	0	0	1/6
0	s_3	1/2	1/3	0	–1/6	–1/2	0	1/6	1	0	0	–1/6
0	s_4	5/2	0	0	–1/2	–3/2	0	1/2	0	1	0	–1/2
	Δ_j		**– 4/3**	0	–1/3	0	1	–2/3	0	0	0	5/3
1	A_1	3	0	–2	0	–1	–1	1	0	0	1	–1
0	x_1	**1/3**	1	3/2	1/4	3/4	0	–1/4	0	0	0	14
0	s_3	1/4	0	–1/2	–1/4	–3/4	0	**1/4**	1	0	0	–1/4
0	s_4	5/2	0	0	–1/2	–3/2	0	1/2	0	1	0	–1/2
	Δ_j		0	2	0	1	1	**– 1**	0	0	0	0
1	A_1	**2**	0	0	**1**	2	–1	0	–4	0	1	0
0	x_1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
0	s_2	1	0	–2	–1	–1	0	1	4	0	0	–1
0	s_4	2	0	1	0	0	0	0	–2	1	0	0
	Δ_j		0	0	**– 1**	–2	1	0	4	0	0	1
0	λ_1	2	0	0	1	2	–1	0	–4	0	1	0
0	x_1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	s_2	3	0	–2	0	–1	–1	1	0	0	1	–1
0	s_4	2	0	1	0	0	0	0	–2	1	0	0
	Δ_j		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Quy tắc đảm bảo điều kiện độ lệch bù

Ta gọi các cặp biến (x_1, s_1), (x_2, s_2), (λ_1, s_3), (λ_2, s_4) là các cặp biến đối bù tương ứng. Trong quá trình giải theo phương pháp đơn hình, cần tuân theo quy tắc: Nếu có một biến đối bù nào đó nằm trong số biến cơ sở, thì biến đối bù tương ứng phải nằm ngoài cơ sở. Chẳng hạn, nếu x_1 có mặt trong cơ sở thì s_1 không được có mặt trong cơ sở đang xét và ngược lại (xem bảng V.4).

Nếu điều kiện độ lệch bù không thể thực hiện được thì điều đó có nghĩa là điều kiện Kuhn – Tucker là vô nghiệm.

Đáp số. Với BTQHPT trong *ví dụ 15,* $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$ là phương án thỏa mãn điều kiện Kuhn – Tucker với $f(x^*) = -4$. Có thể chứng minh được đây là phương án tối ưu (do BTQHTP đã cho là BTQHL).

4.4. Giải bài toán quy hoạch toàn phương bằng bài toán bù

Bài toán bù là bài toán: Hãy tìm các véc tơ ω và z để hệ sau được thỏa mãn

$$\begin{cases} \omega = Mz + q \\ \omega^T z = 0 \quad (\text{hay } \omega_i z_i = 0, \forall i = \overline{1,n}) \\ \omega \ge 0, z \ge 0. \end{cases}$$

Trong đó M là ma trận cấp n×n, $M = [m_{ij}]_{n\times n}$, q là véc tơ cột đã cho, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)^T$, ω và z là các véc tơ cột n tọa độ cần tìm.

Ví dụ 16. Cho

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Hãy tìm } \omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \text{ và } z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \text{ sao cho:}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \omega_1 z_1 = \omega_2 z_2 = \omega_3 z_3 = 0 \\ \omega_i \ge 0, z_i \ge 0, \forall i = \overline{1,3}. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = z_1 + 2z_2 - z_3 + 1 \\ \omega_2 = 2z_1 + 3z_3 - 1 \\ \omega_3 = 3z_1 - 4z_2 + 2z_3 + 1 \\ \omega_i z_i = 0, \forall i = \overline{1,3} \\ \omega_i, z_i \ge 0, \forall i = 1,3. \end{cases}$$

Đưa điều kiện Kuhn – Tucker của BTQHTP về bài toán bù

Xét BTQHTP: Min $f(x) = p^T x + x^T Qx$, với $x \in D = \{x \in R^n: Ax \le b, x \ge 0\}$, trong đó: $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$ và Q là ma trận đối xứng cấp n, $Q = [q_{ij}]_n$. Trong trường hợp Q là ma trận xác định dương thì ta có BTQHL. BTQHTP trên được viết tường minh hơn như sau:

Min $z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \forall j = \overline{1,n}, \quad \text{hay} \quad -x_j \le 0, \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Thiết lập hàm Lagrange:

$$F(x,\lambda,s) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i) - \sum_{j=1}^{n} s_j x_j .$$

Từ đó có thể viết được điều kiện Kuhn – Tucker như sau:

$$\begin{cases} p_j + \sum_{i=1}^{n} 2q_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i - s_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_{n+i} = b_i, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j s_j = 0, \forall j = \overline{1,n} \\ \lambda_i s_{n+i} = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j, \lambda_i \ge 0, \forall i, \forall j \\ s_j \ge 0, \forall j = \overline{1, m+n}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_j = \sum_{i=1}^{n} 2q_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i + p_j, \forall j = \overline{1,n} \\ s_{n+i} = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i, \forall i = \overline{1,n} \\ x_j s_j = 0, \forall j = \overline{1,m} \\ \lambda_i s_{n+1} = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j, s_j, \lambda_i \ge 0, \forall i, \forall j \\ s_j \ge 0, \forall j = 1, \overline{m+n}. \end{cases}$$

Vậy chúng ta có thể thiết lập *bài toán bù* tương ứng với hệ điều kiện trên như sau:

$$\begin{cases} \omega = Mz + q \\ \omega_i z_i = 0, \forall i \\ \omega_i, z_i \ge 0, \forall i, \end{cases}$$

trong đó:

$$q = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}, \omega = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \ldots \\ s_n \\ s_{n+1} \\ \ldots \\ s_{n+m} \end{bmatrix}, z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_m \end{bmatrix} \text{ và } M = \begin{bmatrix} 2q_{11} & \cdots & 2q_{n1} & a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \ldots & \cdots & .. & \ldots & \cdots & \ldots \\ 2q_{1n} & \cdots & 2q_{nn} & a_{1n} & \cdots & a_{mn} \\ -a_{11} & \cdots & -a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \ldots & \cdots & .. & \ldots & \cdots & \ldots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Chúng ta sẽ đưa hệ

$$\begin{cases} \omega = Mz + q \\ \omega_i z_i \;= 0, \forall i \\ \omega_i, z_i \geq 0, \forall i \end{cases} \quad (5.19) \qquad \text{về hệ} \qquad \begin{cases} \omega = Mz + q + Z_0 \\ \omega_i z_i \;= 0, \forall i \\ \omega_i, z_i \geq 0, \forall i. \end{cases} \quad (5.20)$$

Trong hệ trên véc tơ (cột) $Z_0 = (z_0, z_0, \ldots, z_0)^T$ được gọi là véc tơ giả. Để giải hệ (5.19), cần xét trước tiên hệ (5.20). áp dụng các thủ tục xoay trong các bảng đơn hình với các quy tắc đặc biệt nhằm đưa z_0 ra khỏi cơ sở, trong khi vẫn đảm bảo được các điều kiện độ lệch bù và điều kiện không âm của các biến ω_i và z_i, $\forall i = \overline{1,n}$, chúng ta sẽ tìm được nghiệm của hệ (5.19).

Ví dụ 17. Xét BTQHTP

Min $f(x_1, x_2) = -6x_1 + 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ với ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1,\ x_2 \;\geq 0. \end{cases}$$

Ta có $p = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\omega = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$, $z = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$, $A = [1 \quad 1]$, $B = [2]$.

Viết điều kiện Kuhn – Tucker dưới dạng bài toán bù:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ s_1x_1 = s_2x_2 = s_3\lambda_1 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, \lambda_1 \geq 0. \end{cases}$$

Để giải hệ này, chúng ta đưa thêm vào cột biến giả $Z_0 = (z_0, z_0, z_0)^T$ để có hệ:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + s_1 - \lambda_1 - z_0 = -6 \\ +2x_1 - 4x_2 + s_2 - \lambda_1 - z_0 = 0 \\ x_1 + x_2 + s_3 - z_0 = 2. \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, \lambda_1 \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó điều kiện độ lệch bù: $s_1x_1 = s_2x_2 = s_3\lambda_1 = 0$ sẽ được thỏa mãn bằng cách áp dụng *quy tắc thực hiện thủ tục xoay cho bài toán bù* nêu ngay sau đây trong các bảng đơn hình (xem bảng V.5).

Quy tắc thực hiện thủ tục xoay cho bài toán bù

– Trước hết, để đảm bảo điều kiện không âm của các biến trong hệ trên đây, cần đưa z_0 vào cơ sở thay cho biến cơ sở nhận giá trị âm có trị tuyệt đối lớn nhất.

– Sau đó, để đảm bảo điều kiện độ lệch bù, cần tuân theo quy tắc: Bước trước chọn hàng nào làm hàng xoay thì bước sau chọn cột với chỉ số của hàng đó làm cột xoay (và áp dụng quy tắc tỷ số dương bé nhất để chọn hàng xoay) cho tới khi biến z_0 bị loại ra khỏi cơ sở. Quy tắc này còn có tên gọi là "*thủ tục xoay bù*".

Bảng V.5. Giải BTQHTP bằng bài toán bù

Cơ sở	*Phương án*	x_1	x_2	λ_1	s_1	s_2	s_3	z_0
s_1	**– 6**	–4	2	–1	1	0	0	**– 1**
s_2	0	2	4	–1	0	1	0	–1
s_3	2	1	1	0	0	0	1	–1
z_0	6	4	–2	1	–1	0	0	1
s_2	**6**	**6**	–6	0	–1	1	0	0
s_3	8	5	–1	1	–1	0	1	0
z_0	2	0	2	1	–1/3	–2/3	0	1
x_1	1	1	–1	0	–1/6	1/6	0	0
s_3	**3**	0	**4**	1	–1/6	–5/6	1	0
z_0	**1/2**	0	0	**1/2**	–1/4	–1/4	–1/2	1
x_1	7/4	1	0	1/4	1/8	–1/24	1/2	0
x_2	3/4	0	1	1/4	–1/24	–5/24	1/4	0
λ_1	1	0	0	1	–1/2	–1/2	–1	2
x_1	3/2	1	0	0	1/4	1/12	1/4	–1/2
x_2	1/2	0	0	0	1/2	–1/12	1/2	–1/2

Đáp số. Phương án thỏa mãn điều kiện Kuhn – Tucker là $x_1^* = 3/2$, $x_2^* = 1/2$ với $f(x^*) = -11/2$. Vì BTQHTP đang xét là BTQHL nên đây là phương án tối ưu toàn cục.

Chú ý. Xét BTQHTP với các phương án cực biên không suy biến. Có thể chứng minh được (tất nhiên cần mất thêm nhiều thời gian): nếu ma trận Q nửa xác định dương và nếu thủ tục xoay bù không thể thực hiện được (do các phần tử trên cột xoay đều không dương) thì BTQHTP có hàm mục tiêu không bị chặn dưới. Ngoài ra, nếu ma trận Q là xác định dương thì quy trình giải trên đây luôn dừng sau hữu hạn bước.

5. Quy hoạch tách và quy hoạch hình học

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu hai phương pháp tối ưu cổ điển, tuy nhiên chúng được áp dụng khá rộng rãi để giải nhiều bài toán tối ưu phát sinh từ thực tế.

5.1. Quy hoạch tách

Chúng ta xét các bài toán quy hoạch tách (BTQHT), trong đó hàm mục tiêu cũng như các hàm ràng buộc là tổng của các hàm số chỉ phụ thuộc vào một biến số:

Max(Min) $z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x_j) \le 0, \forall i = \overline{1,m} \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0. \end{cases}$$

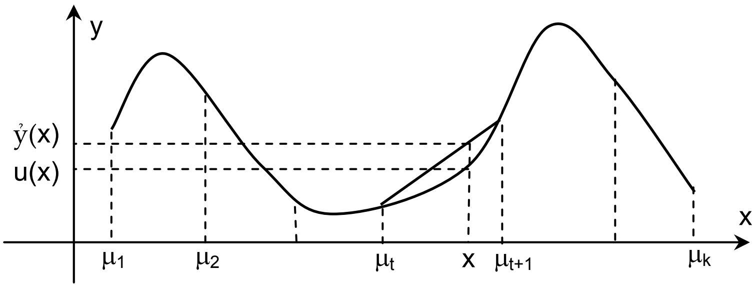
Các hàm $f_j(x_j)$, $g_{1j}(x_j)$,…, $g_{mj}(x_j)$, tùy theo j, có thể là tuyến tính hoặc phi tuyến. Chúng ta ký hiệu N = {j: $f_j(x_j)$, $g_{1j}(x_j)$,…, $g_{mj}(x_j)$ không đồng thời là các hàm tuyến tính}.

Sau đây chúng ta sẽ chỉ ra rằng: Các bài toán quy hoạch tách có thể được giải gần đúng bằng cách sử dụng phương pháp đơn hình. Phương pháp giải này được minh họa thông qua ví dụ sau.

Ví dụ 19. Max $z = x_1 + x_2^4$ với ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2^2 \le 18 \\ x_1,\ x_2 \ \ge\ 0. \end{cases}$$

Đây là BTQHT với $f_1(x_1) = x_1$, $f_2(x_2) = x_2^4$ (n = 2) và $g_{11}(x_1) = 3x_1 - 18$, $g_{12}(x_2) = 2x_2^2$ (m =1). Cần chú ý rằng, các giá trị của các hàm $f_1(x_1)$ và $g_{11}(x_1)$ là các hàm tuyến tính sẽ được tính đúng. Trong khi đó, các hàm phi tuyến tính $f_2(x_2)$ và $g_{12}(x_2)$ sẽ được tính gần đúng bằng phương pháp nội suy, hay còn gọi là phương pháp xấp xỉ tuyến tính hóa từng khúc. Chúng ta trình bày phương pháp này như sau: Xét hàm phi tuyến một biến số y = u(x) xác định trên đoạn [a, b]. Trước hết chia [a, b] ra thành các đoạn nhỏ thích hợp bởi các điểm lưới $\mu_1 = a$, μ_2, …, $\mu_k = b$. Trên từng đoạn nhỏ $[\mu_t, \mu_{t+1}]$, hàm u(x) với $x = \lambda\mu_t + (1-\lambda)\mu_{t+1}$, $\forall\lambda \in [0, 1]$ được xấp xỉ bởi: $u(\lambda\mu_t + (1-\lambda)\mu_{t+1}) \approx \dot{y}(x) = \lambda u(\mu_t) + (1-\lambda)u(\mu_{t+1})$, (xem minh hoạ hình V.8).



Hình V.8. Xấp xỉ tuyến tính hóa từng khúc

Một cách tổng quát hơn, $\forall x \in [a, b]$ ta có thể viết: $x = \sum_{t=1}^{k} \lambda_t \mu_t$, trong đó $\lambda_t \ge 0$, $\forall t = \overline{1,k}$ và $\sum_{t=1}^{k} \lambda_t = 1$ với nhiều nhất hai hệ số λ_t kề nhau là dương. Lúc đó hàm xấp xỉ tuyến tính từng khúc của u(x) trên [a, b] là hàm sau: $\dot{y}(x) = \sum_{t=1}^{k} \lambda_t u(\mu_t)$.

Do đó, $\forall j \in N$, ta có thể viết biểu thức xấp xỉ hàm phi tuyến $f_j(x_j) \approx \hat{f}_j(x_j) = \sum_{t=1}^{k_j} \lambda_{jt} f(x_{jt})$ với $\sum_{t=1}^{k_j} \lambda_{jt} = 1, \lambda_{jt} \ge 0\ \ \forall t = \overline{1,k_j}$, trong đó có nhiều nhất hai hệ số λ_{jt} kề nhau là dương và $\{x_{jt}, t = \overline{1,k}\}$ là tập các điểm lưới ứng với biến x_j trên đoạn $[a_j, b_j]$. Tương tự, đối với hàm $g_{ij}(x_j)$ cũng có thể viết: $g_{ij}(x_j) \approx \hat{g}_{ij}(x_j) = \sum_{t=1}^{k_j} \lambda_{jt} g(x_{jt})$.

Tiếp tục xem xét việc giải ví dụ 19. Với biến x_2, ta có $2x_2^2 \le 18$ nên $0 \le x_2 \le 3$. Tương ứng với biến x_2 chọn các điểm lưới nội suy là $x_{21} = 0$, $x_{22} = 1$, $x_{23} = 2$, $x_{24} = 3$ thì có bảng giá trị các hàm số $f_2(x_2)$ và $g_{12}(x_2)$ tại các nút nội suy (bảng V.6).

Bảng V.6. Tính giá trị các hàm

x_{2t}	$f_2(x_{2t})$	$g_{12}(x_{2t})$
0	0	0
1	1	2
2	16	8
3	81	18

Vậy chúng ta có BTQHTT sau:

$\text{Max}\, \hat{z} = x_1 + 0 \times \lambda_{21} + 1 \times \lambda_{22} + 16 \times \lambda_{23} + 81 \times \lambda_{24}$

với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 0 \times \lambda_{21} + 2 \times \lambda_{22} + 8 \times \lambda_{23} + 18 \times \lambda_{24} + s_1 = 18 \\ \lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24} = 1 \\ x_1, s_1, \lambda_{21}, \lambda_{22}, \lambda_{23}, \lambda_{24} \ge 0. \end{cases}$$

Bảng V.7. Phương pháp đơn hình cơ sở hạn chế giải BTQHT

Hệ số c_B	Biến cơ sở	Phương án	1	0	1	16	81	0
			x_1	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}	s_1
0	s_1	18	3	0	2	8	18	1
0	λ_{21}	**1**	0	1	1	**1**	1	0
	z_j	0	0	0	0	0	0	0
	Δ_j		1	0	1	**16**	81	0
0	s_1	**10**	3	–8	–6	0	**10**	1
16	λ_{23}	1	0	1	1	1	1	0
	z_j	16	0	16	16	16	16	0
	Δ_j		1	–16	–15	0	**65**	0
81	λ_{24}	1	3/10	–4/5	–3/5	0	1	1/10
16	λ_{23}	0	–3/10	9/5	8/5	1	0	–1/10
	z_j	81	39/2	–36	–23	16	81	13/2
	Δ_j		–37/2	36	24	0	0	–13/2

Chúng ta cần giải BTQHTT với 6 biến trên đây, đồng thời phải thỏa mãn *điều kiện cơ sở hạn chế*: tồn tại nhiều nhất một chỉ số $t \in \{1, 2, 3\}$ sao cho các hệ số λ_{2t} và λ_{2t+1} là dương. Như vậy, tại mỗi bước biến đổi bảng đơn hình, cần tìm được cột xoay và hàng xoay thỏa mãn *điều kiện cơ sở hạn chế* (trong trường hợp tổng quát, điều kiện cơ sở hạn chế cần xem xét ứng với mỗi chỉ số $j \in N$).

Quá trình giải kết thúc hoặc khi tiêu chuẩn tối ưu được thỏa mãn, hoặc khi không tìm được cột xoay và hàng xoay. Lúc đó chúng ta đạt được phương án gần đúng tốt nhất có thể tìm được của BTQHT đã cho (xem bảng V.7).

Đáp số. Từ kết quả thu được trong bảng V.7, ta thấy phương án tốt nhất tìm được là $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ với $\hat{z} = 81$. Phương án này đúng là phương án tối ưu của BTQHT đã cho.

Chú ý. Có thể chứng minh được rằng: Nếu trong BTQHT, các hàm $f_j(x_j)$ là lồi ngặt và các hàm $g_{ij}(x_j)$ là lồi, $\forall j \in N$, $\forall i = \overline{1,m}$, thì phương án tìm được cho bài toán xấp xỉ theo phương pháp trên đây bao giờ cũng là phương án của BTQHT ban đầu. Ngoài ra, nếu giãn cách giữa các điểm lưới càng nhỏ thì phương án tốt nhất tìm được của bài toán xấp xỉ và phương án tối ưu của BTQHT đã cho càng được đảm bảo là sát gần nhau. Trong một số trường hợp đặc biệt, chúng ta thu được phương án tối ưu một cách chính xác ngay cả khi giãn cách các điểm lưới thậm chí còn khá lớn (như trong ví dụ trên).

5.2. Quy hoạch hình học

Quy hoạch hình học là một trong các phương pháp tối ưu cổ điển, tuy nhiên cho tới ngày nay nó vẫn là một trong các phương pháp tối ưu được sử dụng trong một số bài toán công nghệ – kỹ thuật. Trong khuôn khổ của giáo trình này, chúng ta sẽ trình bày phương pháp quy hoạch hình học một cách vắn tắt thông qua một số ví dụ (để tìm hiểu về cơ sở của phương pháp này cần đọc thêm về bài toán đối ngẫu Lagrange và điều kiện tối ưu Kuhn – Tucker).

Ví dụ 20. Min $z = x_1x_2^{-1} + 3x_1^{1/3}x_2^{1/4}x_3^{-1/7} + \frac{5}{7}x_1^{2}x_3^{-1}$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1^{-1} + x_2^{-1} + x_3^{-1} \le 1 \\ 1,5x_1^{-1/2}x_2^{3/4} + 2x_2x_1^{-1}x_3^{2,5} \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 > 0. \end{cases}$$

BTQHPT trên đây còn được gọi là bài toán quy hoạch hình học (BTQHHH).

BTQHHH tổng quát được phát biểu như sau:

Min $z = \sum_{i_0=1}^{N} u_{i_0}(x)$, trong đó $u_{i_0} = c_{i_0}x_1^{a_{i_01}}...x_n^{a_{i_0n}}, \forall i_0 = \overline{1,N}$,

với các ràng buộc

$$\begin{cases} g_j(x) \le 1, \forall j = \overline{1,m} \\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) > 0, \end{cases}$$

trong đó $g_j(x) = \sum_{i=1}^{p} g_{ij}(x)$ với $g_{ij}(x) = c_{ij}\ x_1^{a_{ij1}}...x_n^{a_{ijn}}$.

Tất cả các hệ số c_{i0} cũng như c_{ij} được giả thiết là dương.

Đối chiếu với ví dụ 20 ta có:

– Với $i_0 = 2$ thì $c_2 = 3$, $a_{21} = 1/3$, $a_{22} = 1/4$ và $a_{23} = -1/7$.

– Với j = 2 thì $g_{12}(x) = 1{,}5\ x_1^{-1/2}x_2^{3/4}$ và $c_{12} = 1{,}5$, $a_{121} = -1/2$, $a_{122} = 3/4$, và $a_{123} = 0$.

Để trình bày phương pháp giải BTQHHH một cách dễ hiểu, trước hết chúng ta nhắc lại một số bất đẳng thức.

– Bất đẳng thức Cô – si:

$$\frac{u_1 + u_2 + ... + u_N}{N} \ge (u_1 u_2 ... u_N)^{1/N} \text{ với } u_1, u_2, …, u_N > 0.$$

– Bất đẳng thức Cô – si có trọng số:

$$\frac{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_N u_N}{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N} \ge (u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} ... u_N^{\alpha_N})^{\frac{1}{\alpha_1 + ... + \alpha_N}} \text{ với } u_1, u_2, …, u_N > 0.$$

Đặt $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N = \lambda$ thì $\frac{1}{\lambda}(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i) \ge (\prod_{i=1}^{N} u_i^{\alpha_i})^{\frac{1}{\lambda}}$.

Từ đó, nếu ký hiệu $\frac{\alpha_i}{\lambda} = y_i$ cũng có $\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$ và $\sum_{i=1}^{N} y_i u_i \ge \prod_{i=1}^{N} u_i^{y_i}$.

Đặt $U_i = y_i u_i$ thì có: $\sum_{i=1}^{N} U_i \ge \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{U_i}{y_i}\right)^{y_i}$ với điều kiện $\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$ (đây là bất đẳng thức Cô – si với các trọng số y_i đã chuẩn hoá). Cũng có thể viết bất đẳng thức này dưới dạng: $\sum_{i=1}^{N} U_i \ge \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\alpha_i} U_i\right)^{\frac{\alpha_i}{\lambda}}$ (đây là bất đẳng thức Cô – si với các trọng số α_i chưa chuẩn hoá).

Ví dụ 21. Xét BTQHHH không có ràng buộc

Min $z = x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} + 2x_2x_3 + x_1x_3 + 4x_1x_2$, với điều kiện $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Đặt $U_1 = x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}$, $U_2 = 2x_2x_3$, $U_3 = x_3x_1$, $U_4 = 4x_1x_2$ thì

$$z = \sum_{i=1}^{4} U_i \ge \left(\frac{x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1}}{y_1}\right)^{y_1} \left(\frac{2x_2x_3}{y_2}\right)^{y_2} \left(\frac{x_3x_1}{y_3}\right)^{y_3} \left(\frac{4x_1x_2}{y_4}\right)^{y_4}$$

$$= \left(\frac{1}{y_1}\right)^{y_1} \left(\frac{2}{y_2}\right)^{y_2} \left(\frac{1}{y_3}\right)^{y_3} \left(\frac{4}{y_4}\right)^{y_4} x_1^{-y_1+y_3+y_4} x_2^{-y_1+y_2+y_4} x_3^{-y_1+y_2+y_3}.$$

Cần chọn y_i, i =1, 2, 3, 4, sao cho

$$\begin{cases} -y_1 + y_3 + y_4 = 0 \\ -y_1 + y_2 + y_4 = 0 \\ -y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1 \end{cases} \tag{5.21}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_1 = 2/5, y_2 = 1/5, y_3 = 1/5, y_4 = 1/5.$$

Chú ý. Điều kiện (5.21) được gọi là điều kiện chuẩn. Nếu số biểu thức tích trong hàm mục tiêu là N = n +1, với n là số các biến x_i, và các phương trình của điều kiện chuẩn là độc lập tuyến tính thì hệ (5.21) có nghiệm duy nhất. Còn nếu N > (n+1) thì việc giải hệ (5.21) khó khăn hơn. Tuy nhiên, có thể chứng minh được rằng: các biến y_j sẽ được xác định một cách duy nhất tương ứng với giá trị z_{min}.

Tiếp tục giải ví dụ 14, ta có: $z \ge \left(\frac{5}{2}\right)^{2/5}(10)^{1/5}(5)^{1/5}(20)^{1/5} = 5\times 2^{1/5}$. Dấu "=" xảy ra khi

$$\frac{U_1}{y_1} = \frac{U_2}{y_2} = \ldots = \frac{U_4}{y_4} = \frac{\sum U_i}{\sum y_i} = \sum U_i = z_{min} = 5\times 2^{1/5}.$$

Từ đó có hệ sau:

$$\begin{cases} x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1} = \frac{2}{5}\times 5\times 2^{2/5} = 2^{6/5} \\ 2x_2x_3 = \frac{1}{5}\times 5\times 2^{1/5} = 2^{1/5} \\ x_3x_4 = \frac{1}{5}\times 5\times 2^{1/5} = 2^{1/5} \\ 4x_1x_2 = \frac{1}{5}\times 5\times 2^{1/5} = 2^{1/5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ln x_1 - \ln x_2 - \ln x_3 = \frac{6}{5}\ln 2 \\ \ln x_2 + \ln x_3 = -\frac{4}{5}\ln 2 \\ \ln x_1 + \ln x_3 = \frac{1}{5}\ln 2 \\ \ln x_1 + \ln x_2 = -\frac{9}{5}\ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x_1 = -\frac{2}{5}\ln 2 \\ \ln x_2 = -\frac{7}{5}\ln 2 \\ \ln x_3 = \frac{3}{5}\ln 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2^{-2/5} \\ x_2 = 2^{-7/5} \\ x_3 = 2^{3/5}. \end{cases}$$

Ví dụ 22. Xét BTQHHH có ràng buộc

Min $z = x_1^{-1}x_2^{-1/2}x_3^{-1} + 2x_1x_3 + x_1x_2x_3$, với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2x_2^2} + 2\dfrac{x_2^{1/2}}{x_3} \le 1 \\ x_1, x_2, x_3 > 0. \end{cases}$$

Xét hai bất đẳng thức

$$z = u_1 + u_2 + u_3 \ge \left(\frac{u_1}{y_1}\right)^{y_1}\left(\frac{u_2}{y_2}\right)^{y_2}\left(\frac{u_3}{y_3}\right)^{y_3}, \tag{5.22}$$

với các điều kiện : $y_1 + y_2 + y_3 = 1,$

và $$u_4 + u_5 \ge \left(\frac{\lambda u_4}{y_4}\right)^{\frac{y_4}{\lambda}}\left(\frac{\lambda u_5}{y_5}\right)^{\frac{y_5}{\lambda}}, \tag{5.23}$$

trong *đó :* $\lambda = y_4 + y_5.$

Từ (5.22) và (5.23) ta có:

$$z \ge (u_1 + u_2 + u_3)(u_4 + u_5)^{\lambda} \ge \left(\frac{u_1}{y_1}\right)^{y_1}\left(\frac{u_2}{y_2}\right)^{y_2}\left(\frac{u_3}{y_3}\right)^{y_3}\left(\frac{u_4}{y_4}\right)^{y_4}\left(\frac{u_5}{y_5}\right)^{y_5}\lambda^{\lambda}$$

$$\ge \left(\frac{1}{y_1}\right)^{y_1}\left(\frac{2}{y_2}\right)^{y_2}\left(\frac{1}{y_3}\right)^{y_3}\left(\frac{1}{y_4}\right)^{y_4}\left(\frac{2}{y_5}\right)^{y_5}(y_4 + y_5)^{y_4+y_5} \times$$

$$x_1^{-y_1+y_2+y_3-2y_4}x_2^{-(1/2)y_1+y_3-2y_4+(1/2)y_5}x_3^{-y_1+y_2+y_3-y_5}.$$

Để z đạt z_{min}, có thể chứng minh được rằng y_i , i = 1, 2, 3, 4 phải thỏa mãn điều kiện chuẩn sau đây:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ -y_1 + y_2 + y_3 - 2y_4 = 0 \\ -(1/2)y_1 + y_3 - 2y_4 + (1/2)y_5 = 0 \\ -y_1 + y_2 + y_3 - y_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}(1 - y_5) \\ y_2 = \frac{1}{4}(1 + y_5) \\ y_3 = \frac{1}{4}(1 + y_5) \\ y_4 = \frac{1}{2}y_5. \end{cases} \tag{5.24}$$

Với điều kiện (5.24) ta có

$$z \ge \left(\frac{2}{1-y_5}\right)^{\frac{1-y_5}{2}}\left(\frac{8}{1+y_5}\right)^{\frac{1+y_5}{4}}\left(\frac{4}{1+y_5}\right)^{\frac{1+y_5}{4}}\left(\frac{2}{y_5}\right)^{\frac{y_5}{2}}\left(\frac{2}{y_5}\right)^{\frac{y_5}{2}}\left(\frac{3}{2}y_5\right)^{\frac{3}{2}y_5} = \Phi(y_5).$$

Có thể chứng minh được Min z = Max $\Phi(y_5)$. Để có được điều này thì dấu "=" bắt buộc phải xảy ra trong cả (5.22) và (5.23), tức là phải có:

$$\begin{cases} \dfrac{u_1}{y_1} = \dfrac{u_2}{y_2} = \dfrac{u_3}{y_3} = \dfrac{u_1 + u_2 + u_3}{y_1 + y_2 + y_3} = u_1 + u_2 + u_3 = M \\ \dfrac{u_4}{y_4} = \dfrac{u_5}{y_5} = \dfrac{u_4 + u_5}{y_4 + y_5} = \dfrac{u_4 + u_5}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{2}{3y_5}. \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{cases} u_1 = x_1^{-1}x_2^{-1/2}x_3^{-1} = y_1 M \\ u_2 = 2x_1x_3 = y_2 M \\ u_3 = x_1x_2x_3 = y_3 M \\ u_4 = x_1^{-1}x_2^{-1} = \dfrac{2y_4}{3y_5} = \dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2} \\ u_5 = 2x_2^{1/2}x_3^{-1} = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2/2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 \\ x_3 = 3\sqrt{2} \\ x_1 = 3/2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z_{min} = \frac{1}{9} + 18\sqrt{2}\ .$$

Bài tập chương V

Bài 1. Cho điểm $x^k = (1, -2, 3)$, hãy xác định điểm x^{k+1} bằng các phương pháp đường dốc nhất, Newton và hướng liên hợp Zangwill với các hàm mục tiêu sau:

a. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

b. $f(x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3$.

c. $f(x) = \exp(x_1^2 + x_2^2 - x_3 - x_1 + 4)$.

Bài 2. Tìm cực tiểu của các hàm số bằng đường dốc nhất:

a. $f(x) = 1 - 2x_1 - 2x_2 - 4x_1x_2 + 10x_1^2 + 2x_2^2$.

b. $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2 + 2$.

Bài 3. Tìm cực đại của hàm số sau bằng phương pháp đường dốc nhất và phương pháp Newton:

$f(x) = 4x_1 + 6x_2 - 2x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$.

Bài 4. Bắt đầu từ điểm $x^1 = (1, 1)$ cực tiểu hóa hàm sau bằng phương pháp Newton hay phương pháp hướng liên hợp Zangwill: $f(x) = x_1^3 + x_1x_2 - x_1^2x_2^2$.

Bài 5. Bắt đầu từ điểm $x^1 = (2, 1)$ cực tiểu hóa hàm sau bằng phương pháp Newton hay phương pháp hướng liên hợp Zangwill: $f(x) = (1 - x_1)^2 + 5(x_2 - x_1^2)^2$.

Bài 6. Phát biểu lại các thuật toán đường dốc nhất, Newton và hướng liên hợp Zangwill, sau đó lập chương trình máy tính sử dụng ngôn ngữ Pascal hay C chạy kiểm thử cho các bài tập trên (bài 1 tới bài 5).

Bài 7. Hãy giải các BTQHTP sau đây bằng phương pháp thích hợp (phương pháp Wolfe hoặc phương pháp thiết lập bài toán bù):

a. Min $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 4x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

b. Min $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

c. Min $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 15x_1 - 30x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 30 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Bài 8. Hãy giải các BTQHTP sau đây bằng phương pháp thích hợp (phương pháp Wolfe hoặc phương pháp thiết lập bài toán bù):

a. Min $f(x) = 2x_1 - 4x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

b. Min $f(x) = -4x_1 - 6x_2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

c. Min $f(x) = 5x_1 + 6x_2 - 12x_3 + 2x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 16 \\ -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Bài 9. Lập chương trình máy tính phương pháp Wolfe hoặc phương pháp thiết lập bài toán bù sử dụng ngôn ngữ Pascal hay C, sau đó chạy kiểm thử cho bài tập 7.

Bài 10. Giải các bài toán sau đây bằng phương pháp quy hoạch tách:

a. Min $f(x) = \exp(x_1) + x_1^2 + 4x_1 + 2x_2^2 - 6x_2 + 2x_3$

với các ràng buộc sau

$$\begin{cases} x_1^2 + \exp(x_2) + 6x_3 \le 15 \\ x_1^4 - \quad x_2 + 5x_3 \le 25 \\ 0 \le x_1 \le 4,\ 0 \le x_2 \le 2,\ 0 \le x_3. \end{cases}$$

Cho biết các điểm lưới là 0, 2, 4 cho x_1 và 0, 1, 2 cho x_2.

b. Min $f(x) = \exp(2x_1 + x_2^2) + (x_3 - 2)^2$

với các ràng buộc sau

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

bằng cách đổi biến thích hợp với các điểm lưới tùy chọn.

Bài 11. Giải các bài tập sau đây bằng phương pháp quy hoạch hình học:

a. Min $f(x) = 2x_1^{-1} + x_2^2 + x_1^4x_2^{-2} + 4x_1^2$, với điều kiện $x_1, x_2 > 0$.

b. Min $f(x) = 5x_1x_2^{-1}x_3^2 + x_1^{-2}x_3^{-1} + 10x_2^3 + 2x_1^{-1}x_2x_3^{-3}$, với điều kiện $x_1, x_2, x_3 > 0$.

c. Min $f(x) = 4x_1^{-1}x_2^{-0,5}$, với điều kiện: $x_1 + 2x_2^2 \le 1$ và $x_1, x_2 > 0$.

Bài 12. Hãy tìm hiểu cơ sở và phát biểu các thuật toán tổng quát cho quy hoạch tách và quy hoạch hình học.

Chương VI

Một số vấn đề cơ sở của lý thuyết quy hoạch lồi và quy hoạch phi tuyến

Xét bài toán quy hoạch phi tuyến tổng quát:

Min (Max) f(x), với điều kiện

$$x \in D = \{x \in R^n: g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1, m_1};\ g_i(x) = 0,\ i = \overline{m_1 + 1, m}\}.$$

Véc tơ $x = (x_1, \ldots\ldots x_n) \in D$ được gọi là véc tơ quyết định hay phương án khả thi (hoặc phương án, nếu vắn tắt hơn), x_j là các biến quyết định, $\forall j = \overline{1, n}$. Người giải bài toán cần tìm một véc tơ $x^* \in D$ sao cho: $f(x^*) \le f(x)$, $\forall x \in D$ cho bài toán cực tiểu hoá hoặc $f(x^*) \ge f(x)$, $\forall x \in D$ cho bài toán cực đại hoá.

1. Tập hợp lồi

Trong phần này chúng ta nghiên cứu các khái niệm cơ bản của giải tích lồi bao gồm các vấn đề sau liên quan đến tập hợp lồi (còn gọi vắn tắt là tập lồi):

– Bao lồi của một tập hợp.

– Bao đóng và miền trong của tập lồi.

– Siêu phẳng tách và siêu phẳng tựa của tập lồi.

– Nón lồi và nón đối cực.

1.1. Bao lồi

Trong chương V, chúng ta đã biết, tập lồi là tập $S \subset R^n$ có tính chất: mọi đoạn thẳng nối x^1, $x^2 \in S$ đều nằm trong S. Nói cách khác: $S \subset R^n$ là tập lồi khi và chỉ khi $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in S$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall x^1, x^2 \in S$.

Xét các tập lồi $S_1, S_2 \subset R^n$. Lúc đó, $S_1 \cap S_2$ lồi, $S_1 + S_2$ lồi và $S_1 - S_2$ cũng là tập lồi.

Định nghĩa 1. Xét tập $S \subset R^n$ và các điểm x^1, x^2, ..., $x^k \in S$. Điểm $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j$ (với $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \ge 0, \forall j = \overline{1, k}$) được gọi là một *tổ hợp lồi* của các điểm x^1, x^2, ..., x^k. Bao lồi *(Convex hull)* của S, ký hiệu là H(S), gồm tất cả các điểm $x \in R^n$ được biểu diễn dưới dạng một tổ hợp lồi của một số điểm nào đó của S.

Ví dụ 1. Bao lồi của 3 điểm x^1, x^2 và x^3 không thẳng hàng trong R^3 là một tam giác. Bao lồi của một hình vành trăng khuyết trong R^2 là một hình khuyên.

Định lý 1. Bao lồi H(S) của một tập $S \subset R^n$ là tập lồi nhỏ nhất chứa S. Nói cách khác mọi tập lồi chứa S đều chứa H(S).

Chứng minh

Ta có H(S) $=\{x \in R^n: \exists\, x^j \in S, \forall j = \overline{1,k}$ sao cho $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j$ với $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \forall j = \overline{1,k}\}$. Cần chứng minh với mọi tập lồi A mà $S \subset A$ thì $H(S) \subset A$.

Tức là, cho $x^j \in S \subset A, \forall j = \overline{1,k}$ và $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0$, cần phải chứng tỏ rằng:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j \in A. \qquad (6.1)$$

Ta chứng minh kết luận (6.1) bằng phép quy nạp. Với k = 1, (6.1) hiển nhiên đúng. Giả sử (6.1) đúng với k = s, cần chứng minh (6.1) đúng với k = s + 1.

Thật vậy, cho $x^j \in S \subset A, \forall j = \overline{1, s+1}$ và $\sum_{j=1}^{s+1} \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $x = \sum_{j=1}^{s+1} \lambda_j x^j \in A$. Ta có $\sum_{j=1}^{s+1} \lambda_j x^j = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x^j + \lambda_{s+1} x^{s+1}$, trong đó có thể giả sử rằng $0 < \lambda_{s+1} < 1$. Đặt $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j = \lambda$, theo giả thiết quy nạp có $x' = \sum_{j=1}^{s} (\lambda_j / \lambda) x^j = \sum_{j=1}^{s} \lambda'_j x^j \in A$. Vậy $\lambda x' + (1-\lambda)x^{s+1} \in A$ hay $\sum_{j=1}^{s} \lambda_j x^j + \lambda_{s+1} x^{s+1} = \sum_{j=1}^{s+1} \lambda_j x^j \in A$ (đpcm). ■

Chú ý. Từ định lý 1, ta thấy ngay, H(S) là giao của tất cả các tập lồi chứa S.

Định nghĩa 2. Cho $x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1} \in R^n$. Lúc đó bao lồi của $x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1}$ được ký hiệu là $H(x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1})$ là một *đa diện lồi*. Nếu $x^{k+1} - x^1, x^k - x^1, \ldots, x^2 - x^1$ là các véc tơ độc lập tuyến tính thì $H(x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1})$ được gọi là một *đơn hình k chiều* với các đỉnh $x^1, x^2, \ldots, x^k, x^{k+1}$.

Định lý 2 (*Định lý Carathéodory*).

Cho một tập bất kỳ $S \subset R^n$. Nếu $x \in H(S)$ thì có thể tìm được các điểm $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1} \in S$ sao cho x thuộc bao lồi $H(x^1, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1})$.

Nói cách khác, tồn tại các điểm $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1} \in S$ sao cho x được biểu diễn bởi tổ hợp lồi của $x^1, x^2, \ldots, x^{n+1}$: $x = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x^j$ với $\lambda_j \geq 0$ và $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1$.

Chứng minh

Giả sử $x \in H(S)$ thì $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j$ với $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ x^j \in S$.

Trường hợp 1: $k \leq n+1$ thì không có gì cần chứng minh nữa.

Trường hợp 2: $k > n+1$. Theo giả thiết do $x^1, x^2, \ldots, x^k \in R^n$, nên $x^2 - x^1, x^3 - x^1, x^k - x^1$ là k – 1 véc tơ phụ thuộc tuyến tính. Lúc đó $\exists\, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_k$ không đồng thời bằng 0, sao cho

$\sum_{j=2}^{k}\mu_j(x^j - x^1) = 0$. Đặt $\mu_1 = -\sum_{j=2}^{k}\mu_j$ thì có $\sum_{j=1}^{k}\mu_j x^j = 0$ với $\sum_{j=1}^{k}\mu_j = 0$, trong đó μ_j không đồng thời bằng 0. Vậy tồn tại ít nhất một chỉ số i sao cho $\mu_i > 0$.

Lúc đó, ta có:

$$x = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^j = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^j + \left(\alpha\sum_{j=1}^{k}\mu_j x^j\right) = \sum_{j=1}^{k}\left(\lambda_j - \alpha\mu_j\right)x^j \qquad (6.2)$$

đúng $\forall\,\alpha \in R$, nên (6.2) vẫn đúng $\forall\alpha > 0$.

Chọn $\alpha = \min\frac{\lambda_j}{\mu_j}$ với $\mu_j > 0$ thì $(\lambda_j - \alpha\mu_j) \geq 0, \forall j = \overline{1,k}$ và $\sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \alpha\mu_j) = 1$. Trong các hệ số $(\lambda_j - \alpha\mu_j)$ có ít nhất một hệ số $(\lambda_{j*} - \alpha\mu_{j*}) = 0$. Theo (6.2), x được biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi của k – 1 điểm. Quá trình này được tiếp tục cho tới khi x được biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi của n + 1 điểm (đpcm). ■

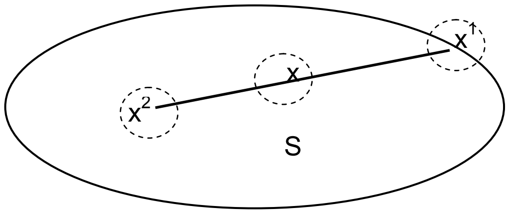
1.2. Bao đóng và miền trong của tập lồi

Chúng ta đã được học về khái niệm bao đóng và miền trong của một tập hợp S. Bao đóng của S được ký hiệu là *cl S*, còn miền trong của S là ***int S***.

Định lý 3. Xét tập lồi $S \subset R^n$ với int S khác rỗng. Cho $x^1 \in$ cl S và $x^2 \in$ int S. Lúc đó, $\forall\,\lambda \in (0,\ 1)$ ta luôn có $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in \text{int}\,S$.

Việc chứng minh định lý này không quá khó, dành cho bạn đọc tự chứng minh hoặc xem thêm trong tài liệu tham khảo.

Chúng ta có thể minh họa ý tưởng chứng minh trên hình VI.1.



Hình VI.1. Minh họa định lý 3.

Hệ quả 3a. Nếu S là tập lồi thì int S cũng là tập lồi.

Hệ quả được dễ dàng chứng minh trực tiếp từ định lý 3.

Hệ quả 3b. Nếu S là tập lồi và int S khác rỗng thì cl S cũng lồi.

Chứng minh

Cho x^1 và $x^2 \in$ cl S, lấy z ∈ int S thì $\lambda x^2 + (1-\lambda)z \in \text{int}\ S, \forall\,\lambda \in (0,1)$ và $\mu x^1 + (1-\mu)\left[\lambda x^2 + (1-\lambda)z\right] \in \text{int}\ S$, $\forall\mu \in (0,1)$. Cố định μ và cho $\lambda \to 1$ ta có $\mu x^1 + (1-\mu)x^2 \in$ cl S (đpcm). ■

Hệ quả 3c. Nếu S là tập lồi và int S khác rỗng thì bao đóng của miền trong của S trùng với bao đóng của S, tức là cl (int S) ≡ cl S. Ngoài ra ta cũng có: int (cl S) ≡ int S .

Chứng minh

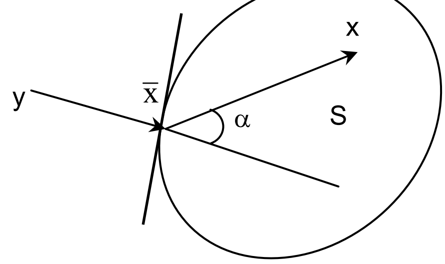
Chúng ta chứng minh phần đầu. Rõ ràng rằng cl (int S) $\subset$ cl S. Chúng ta còn cần chứng minh cl S $\subset$ cl (int S). Thật vậy, giả sử x $\in$ cl S và y $\in$ int S thì $\lambda x + (1 - \lambda)y \in$ int S. Cho $\lambda \to 1$, ta có x $\in$ cl (int S) là đpcm.

Phần thứ hai của hệ quả được chứng minh như sau: Trước hết, dễ thấy rằng int S $\subset$ int (cl S). Giả sử $x^1 \in$ int (cl S), ta cần chứng minh $x^1 \in$ int (S). Thật vậy, lấy $x^2 \in$ int S sao cho $x^2 \neq x^1$ và xét $y = (1 + \Delta)x^1 - \Delta x^2$, với $\Delta = \dfrac{\varepsilon}{2\|x^1 - x^2\|}$, $\varepsilon > 0$ nhỏ tùy ý. Do $\|y - x^1\| = \varepsilon/2$ nên y $\in$ cl S. Hơn nữa, $x^1 = \lambda y + (1 - \lambda)x^2$, với $\lambda = 1/(1+\Delta) \in (0, 1)$, nên theo định lý 3 thì $x^1 \in$ int S (đpcm). ■

1.3. Siêu phẳng tách và siêu phẳng tựa của tập lồi

Đây là các kiến thức cơ sở trong môn tối ưu hóa, được sử dụng nhiều trong việc thiết lập các điều kiện tối ưu và các mối quan hệ đối ngẫu. Trong phần này chúng ta sẽ thấy rằng: với một tập lồi S đóng và một điểm y $\notin$ S, ta luôn tìm được một điểm duy nhất $\bar{x} \in S$ sao cho khoảng cách từ $\bar{x}$ tới y là bé nhất (tức là $\|y - \bar{x}\| = \underset{x \in S}{\mathrm{Min}} \|y - x\|$), cũng như tìm được một siêu phẳng phân tách (nói ngắn gọn hơn, siêu phẳng tách) y và S.

Định lý 4. Xét tập lồi đóng S $\subset R^n$ và một điểm y $\in R^n$ sao cho y $\notin$ S. Lúc đó tồn tại duy nhất một điểm $\bar{x} \in S$ với khoảng cách $\|y - \bar{x}\| = \underset{x \in S}{\mathrm{Min}} \|y - x\|$. $\bar{x}$ được gọi là *điểm cực tiểu.* Ngoài ra, ta có: $\bar{x}$ là điểm cực tiểu khi và chỉ khi $(x - \bar{x})^T (\bar{x} - y) \geq 0, \forall x \in S$.



Hình VI.2. Minh họa điểm cực tiểu

Việc chứng minh định lý 4 dành cho bạn đọc tự tìm hiểu (xem hình minh hoạ VI.2).

Định nghĩa 3.

Siêu phẳng là tập hợp tất cả điểm x $\in R^n$ sao cho $p^T x = \alpha$, với $p \in R^n \setminus \{0\}$ và $\alpha \in R$ cho trước (p được gọi là véc tơ pháp tuyến của siêu phẳng). Siêu phẳng H = {x: $p^T x = \alpha$} chia không gian ra làm hai nửa không gian (đóng): $H^+ = \{x: p^T x \geq \alpha\}$ và $H^- = \{x: p^T x \leq \alpha\}$.

Xét hai tập hợp khác rỗng $S_1, S_2 \subset R^n$. Siêu phẳng H = {x: $p^T x = \alpha$} được gọi là *siêu phẳng tách* S_1 và S_2 nếu $p^T x \leq \alpha, \forall x \in S_1$ và $p^T x \geq \alpha, \forall x \in S_2$.

Ngoài ra, nếu $S_1 \cup S_2 \not\subset H$ thì H được gọi là siêu phẳng tách chỉnh (*properly*) S_1 và S_2.

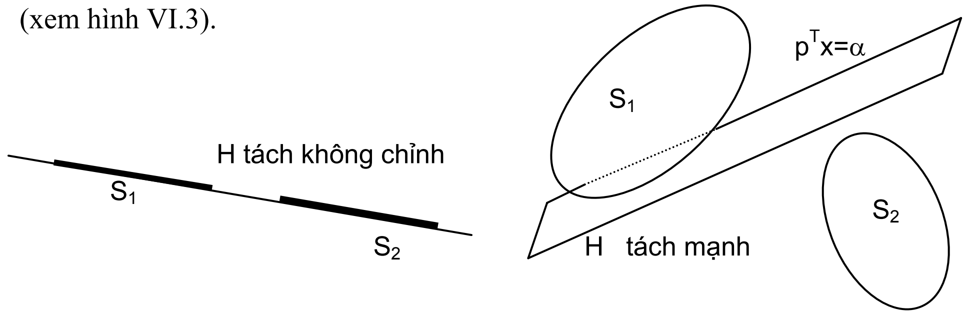
H được gọi là tách chặt (*strictly*) S_1 và S_2 nếu

$$\begin{cases} \forall x \in S_1 : p^T x > \alpha \\ \forall x \in S_2 : p^T x < \alpha \end{cases}$$

H được gọi là tách mạnh (*strongly*) S_1 và S_2 nếu

$$\begin{cases} \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in S_1, p^T x \ge \alpha + \varepsilon \\ \forall x \in S_2, p^T x \le \alpha \end{cases}$$

(xem hình VI.3).



Hình VI.3. Minh họa các kiểu siêu phẳng tách

Siêu phẳng tách một tập lồi và một điểm

Định lý 5. Cho tập lồi đóng khác rỗng $S \subset R^n$ và một điểm $y \in R^n$ sao cho $y \notin S$. Lúc đó tồn tại véc tơ n toạ độ $p \neq 0$ và $\alpha \in R$ sao cho: $p^T y > \alpha$, $p^T x \le \alpha$, $\forall x \in S$.

Chứng minh

Theo định lý 4 ta thấy: $\exists \bar{x} \in S$ sao cho $(x - \bar{x})^T(y - \bar{x}) \le 0$, do đó

$$-\bar{x}^T(y - \bar{x}) \le -x^T(y - \bar{x}).$$

Mặt khác: $\|y - \bar{x}\|^2 = (y - \bar{x})^T(y - \bar{x}) = y^T(y - \bar{x}) - \bar{x}^T(y - \bar{x})$

$$\le y^T(y - \bar{x}) - x^T(y - \bar{x}) = (y^T - x^T)(y - \bar{x}),$$

Hay: $\|y - \bar{x}\|^2 \le (y - x)^T(y - \bar{x}) = (y - \bar{x})^T(y - x)$.

Đặt $p = y - \bar{x}$ ta có $\|y - \bar{x}\|^2 \le p^T(y - x)$, từ đó có $p^T y \ge \|y - \bar{x}\|^2 + p^T x$. Lại đặt $\alpha = \sup \{p^T x : x \in S\}$ thì ta có đpcm: $p^T y > \alpha$ và $p^T x \le \alpha$, $\forall x \in S$. ■

Hệ quả 5a. Cho tập lồi đóng khác rỗng $S \subset R^n$. Lúc đó S là giao của tất cả các nửa không gian chứa S.

Chứng minh

Ta chỉ cần chứng minh rằng giao G của tất cả các nửa không gian (đóng) chứa S là tập con của S. Thật vậy, giả sử điều ngược lại, tức là $\exists$ $y \in G$ sao cho $y \notin S$. Lúc đó theo định lý 5 trên đây, tồn tại một nửa không gian chứa S nhưng không chứa y. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa tập G. ■

Hệ quả 5b. Cho tập lồi đóng khác rỗng $S \subset R^n$ và một điểm $y \in R^n$ sao cho $y \notin S$. Lúc đó, luôn tồn tại

i) Một siêu phẳng tách chặt S và y.

ii) Một siêu phẳng tách mạnh S và y.

iii) Véc tơ p sao cho: $p^T y > \sup \{p^T x : x \in S\}$.

iv) Véc tơ p sao cho: $p^T y < \inf \{p^T x : x \in S\}$.

Việc chứng minh dành cho bạn đọc.

Định lý 6 *(Định lý Farkas)*.

Cho A là ma trận cấp $m\times n$, c là véc tơ n toạ độ. Lúc đó chỉ có đúng một trong hai hệ sau có nghiệm:

Hệ 1: $\begin{cases} Ax \le 0 \\ c^t x > 0 \end{cases}$ với x là véc tơ thuộc R^n. Hệ 2: $\begin{cases} A^T y = c \\ y \ge 0 \end{cases}$ với $y \in R^m$.

Giải thích. Cho A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ và c = $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$. Lúc này, theo định lý 6 chỉ có đúng một trong hai hệ sau có nghiệm:

Hệ 1: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 > 0$.

Hệ 2: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ và $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$.

Chứng minh

Giả sử hệ 2 có nghiệm. Lúc đó $\exists$ $y \ge 0$ sao cho $A^T y = c$. Giả sử $Ax \le 0$, ta có $c^T x = y^T Ax \le 0$ (do $y^T \ge 0$ và $Ax \le 0$). Vì vậy hệ 1 vô nghiệm.

Giả sử hệ 2 vô nghiệm. Đặt $S = \{x: x = A^T y, y \ge 0\}$, ta thấy ngay S là tập lồi đóng. Lúc này theo do hệ 2 vô nghiệm nên $c \notin S$. Theo định lý 5 (về siêu phẳng phân tách một tập lồi và một điểm), tồn tại véc tơ p sao cho: $p^T c > \alpha$, $p^T x \le \alpha$, $\forall x \in S$. Vì $0 \in S$ nên $p^T c > \alpha \ge 0$. Vậy $c^T p = p^T c > 0$. Ngoài ra, ta có $\alpha \ge p^T A^T y = y^T Ap$, $\forall y \ge 0$. Vì các toạ độ của y có thể chọn dương và lớn tuỳ ý nên bắt buộc phải có $Ap \le 0$.

Chúng ta đã chỉ ra véc tơ n toạ độ p sao cho: $Ap \le 0$ và $c^T p > 0$. Vậy hệ 1 có nghiệm (đpcm). ■

Hệ quả 6a. Cho ma trận cấp m×n $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, c là véc tơ n toạ độ. Lúc đó có đúng một trong hai hệ sau có nghiệm: Hệ 1: $Ax \le 0$, $x \ge 0$, $c^T x > 0$. Hệ 2: $A^T y \ge c$, $y \ge 0$.

Chứng minh

Xét ma trận $[A^T \;\; -I]$ thay cho A^T trong chứng minh của định lý Farkas. ■

Hệ quả 6b. Cho A là ma trận cấp m×n, B là ma trận cấp l×n, c là véc tơ n toạ độ. Lúc đó có đúng một trong các hệ sau có nghiệm:

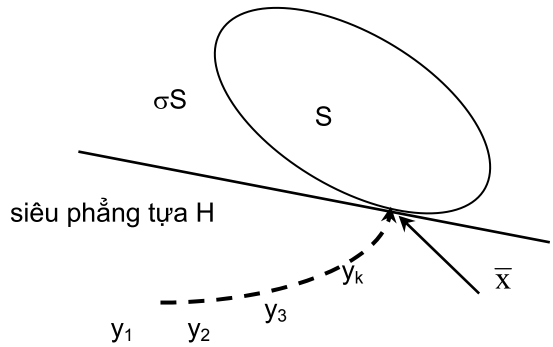
Hệ 1: $Ax \le 0$, $Bx = 0$, $c^Tx > 0$. Hệ 2: $A^Ty + B^Tz = c$, $y \ge 0$.

Chứng minh

Xét $[A^T \quad B^T \quad -B^T]$ thay cho A^T trong định lý Farkas. ■

Định nghĩa 4 *(Siêu phẳng tựa của tập lồi tại điểm biên)*. Xét tập khác rỗng $S \subset R^n$. Giả sử $\overline{x} \in \sigma S$, với σS là biên của S. Siêu phẳng $H = \left\{x \in R^n : p^T(x - \overline{x}) = 0\right\}$ được gọi là siêu phẳng tựa của S tại $\overline{x}$ nếu một trong hai trường hợp sau luôn xảy ra:

$$\left[\begin{array}{l} S \subset H^+ \Leftrightarrow \forall x \in S, p^T(x - \overline{x}) \ge 0 \\ S \subset H^- \Leftrightarrow \forall x \in S, p^T(x - \overline{x}) \le 0. \end{array}\right.$$



Hình VI.4. Siêu phẳng tựa tại điểm biên

Siêu phẳng tựa (xem hình VI.4) được gọi là siêu phẳng tựa chỉnh (*proper supporting plane*) nếu S không là tập con của H.

Chú ý: Đối với tập khác rỗng bất kì $S \subset R^n$ có thể xảy ra các trường hợp sau:

– Tại một điểm có duy nhất một siêu phẳng tựa.

– Tại một điểm có nhiều siêu phẳng tựa.

– Tại một điểm không có siêu phẳng tựa.

– Tại hai điểm có thể có cùng một siêu phẳng tựa.

Định lý 7. Cho tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$, $\overline{x} \in \sigma S$. Lúc đó tồn tại một siêu phẳng tựa của S tại $\overline{x}$, tức là tồn tại véc tơ n toạ độ $p \ne 0$ sao cho $p^T(x - \overline{x}) \le 0$, $\forall x \in$ cl S.

Chứng minh

Giả sử $\overline{x} \in \sigma S$ thì tồn tại một dãy $\{y_k\}$ các điểm trong R^n không thuộc bao đóng của S sao cho $y_k \to \overline{x}$ khi $k \to \infty$. Theo định lý 5, nếu $y_k \notin S$ thì $\exists\ p_k$ sao cho $p^T_k\, y_k > p^T_k x$, $\forall x \in$ cl S. Không làm giảm tính tổng quát, có thể giả sử $\|p_k\| = 1$.

Xét dãy $\{p_k\} \subset R^n$. Ta thấy ngay đây là dãy giới nội (do độ dài của véc tơ p_k luôn bằng 1). Vậy từ dãy này có thể trích ra được một dãy con hội tụ, để cho đơn giản chúng ta ký hiệu đó là dãy $\{p_k\}_\pi$, sao cho $p_k \to p$ khi $k \to \infty$. Lúc đó với dãy con này ta luôn có $p^T{}_k\, y_k > p^T{}_k x$, $\forall x \in$ cl S. Cố định $x \in$ cl S. Do $y_k \to \bar{x}$ nên có $p^T{}_k\, y_k \to p^T \bar{x}$, suy ra $p^T \bar{x} \geq p^T x$ hay $p^T (x - \bar{x}) \leq 0$, $\forall x \in$ cl S. Vậy ta có đpcm. ■

Chú ý. Để chứng minh $p^T{}_k\, y_k \to p^T \bar{x}$ khi $y_k \to \bar{x}$ cần phải chứng minh $\| p^T{}_k\, y_k - p^T \bar{x} \| \to 0$. Thật vậy

$$\| p^T{}_k\, y_k - p^T y_k + p^T y_k - p^T \bar{x} \| \leq \| p^T{}_k\, y_k - p^T y_k \| + \| p^T y_k - p^T \bar{x} \|$$

$$\leq \|p_k^t - p^t\| \times \|y_k\| + \|p^t\| \times \|y_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

với ε_1, ε_2 là các số dương nhỏ tuỳ ý chọn trước khi k khá lớn.

Hệ quả 7a.

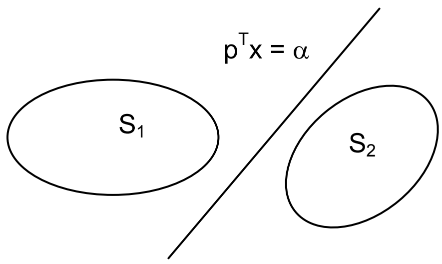
Cho tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$, $\bar{x} \notin S$. Lúc đó tồn tại véc tơ $p \neq 0$ sao cho $p^T(x - \bar{x}) \leq 0$, $\forall x \in$ cl S.

Chứng minh

Nếu $\bar{x} \notin$ cl S thì hệ quả được chứng minh dựa trên định lý 5. Mặt khác, nếu $\bar{x} \in \sigma S$ thì hệ quả chính là nội dung của định lý 7 trên đây. ■

Siêu phẳng tách hai tập lồi

Định lý 8. Cho hai tập lồi khác rỗng không giao nhau $S_1, S_2 \subset R^n$. Lúc đó tồn tại một siêu phẳng tách H với phương trình $p^T x = \alpha$ phân tách hai tập lồi trên, theo nghĩa sau: tồn tại véc tơ $p \neq 0$ sao cho $\inf \{p^T x$ với $x \in S_1\} \geq \sup \{p^T x$ với $x \in S_2\}$.



Hình VI.5. Siêu phẳng phân tách hai tập lồi

Chứng minh

Cho hai tập lồi khác rỗng không giao nhau $S_1, S_2 \subset R^n$. Xét $S = S_1 - S_2 = \{x: x = x^1 - x^2$ với $x^1 \in S_1, x^2 \in S_2\}$ thì S là tập lồi.

Ngoài ra, $0 \notin S$ (vì $S_1 \cap S_2$ là tập rỗng). Theo định lý 5 (*về siêu phẳng phân tách một tập lồi và một điểm*) thì tìm được một véc tơ n toạ độ $p \neq 0$ sao cho $p^T x \geq p^T 0 = 0$, $\forall x \in S$ (xem hình VI.5). Vậy $\forall x^1 \in S$, $\forall x^2 \in S$ thì $p^T(x^1 - x^2) \geq 0$ hay $p^T x^1 \geq p^T x^2$ (đpcm). ■

Hệ quả 8a.

Cho hai tập lồi khác rỗng $S_1, S_2 \subset R^n$ với điều kiện int S_1 khác rỗng và $S_1 \cap$ int S_2 rỗng. Lúc đó tồn tại một véc tơ $p \neq 0$ sao cho

$$\inf \{p^T x \text{ với } x \in S_1\} \geq \sup \{p^T x \text{ với } x \in S_2\}.$$

Chứng minh

Thay S_2 bởi int S_2 và áp dụng định lý 8 với chú ý: sup $\{p^Tx$ với $x \in S_2\}$= sup $\{p^Tx$ với $x \in \text{int } S_2\}$ thì có đpcm. ■

Hệ quả 8b.

Cho hai tập lồi khác rỗng $S_1, S_2 \subset R^n$ với điều kiện int S_1, int S_2 khác rỗng và int $S_1 \cap$ int S_2 rỗng. Lúc đó tồn tại véc tơ $p \neq 0$ sao cho

$$\inf \{p^Tx \text{ với } x \in S_1\} \geq \sup \{p^Tx \text{ với } x \in S_2\}.$$

Định lý 9 ***(Định lý Gordan).***

Cho A là ma trận cấp m×n. Lúc đó có đúng một trong hai hệ sau có nghiệm: Hệ 1: $Ax < 0$ với $x \in R^n$. Hệ 2: $A^Tp = 0$ với véc tơ $p \geq 0$ (p có các toạ độ không âm) và $p \neq 0$.

Chứng minh

Giả sử hệ 1 có nghiệm sao cho $Ax < 0$. Ta đi chứng minh hệ 2 vô nghiệm. Thật vậy, giả sử điều ngược lại đúng: tồn tại véc tơ $p \neq 0$ sao cho $A^Tp = 0$ và $p \geq 0$. Lúc đó $p^TAx < 0$ hay $x^TA^Tp < 0$. Điều này không thể xảy ra do $A^Tp = 0$.

Bây giờ giả sử hệ 1 vô nghiệm. Chúng ta xét hai tập sau: $S_1 = \{z: z = Ax, x \in R^n\} \subset R^m$ và $S_2 = \{z: z < 0\} \subset R^m$. Ta thấy S_1 và S_2 là hai tập lồi khác rỗng không giao nhau. Theo định lý 8 (*về siêu phẳng tách hai tập lồi khác rỗng không giao nhau*), lúc đó tồn tại véc tơ $p \neq 0$ sao cho $p^TAx \geq p^Tz$ với mọi $x \in R^n$ và $z \in$ cl S_2. Do các toạ độ của z có thể chọn giá trị âm có trị tuyệt đối lớn tuỳ ý nên bắt buộc phải có $p \geq 0$. Mặt khác, nếu chọn z = 0 thì có $p^TAx \geq 0, \forall x \in R^n$. Nếu chọn $x = -A^Tp$ thì $-\left\|A^tp\right\|^2 \geq 0$, do đó $A^Tp = 0$. Vậy hệ 2 có nghiệm (đpcm). ■

Định lý 10 ***(Định lý tách mạnh).*** Cho hai tập lồi không giao nhau S_1, S_2 trong R^n với S_1 là tập giới nội. Lúc đó, tồn tại véc tơ n toạ độ $p \neq 0$ và số dương ε sao cho $\inf \{p^Tx \text{ với } x \in S_1\} \geq \varepsilon + \sup \{p^Tx \text{ với } x \in S_2\}$.

Chứng minh

Việc chứng minh dành cho bạn đọc tự tìm hiểu hoặc xem sách tham khảo (xem hình VI.5). ý tưởng của chứng minh như sau: Đặt $S = S_1 - S_2$, thì S là tập lồi và $0 \notin S$. Hơn nữa, S là tập đóng (hãy tự chứng minh điều này). Theo định lý 5, tồn tại véc tơ $p \neq 0$ và một số ε sao cho $\forall x \in S$ thì $p^Tx \geq \varepsilon$ và $p^T 0 < \varepsilon$. Do đó $\varepsilon > 0$. Từ đây có $p^Tx = p^T(x^1 - x^2) \geq \varepsilon$, hay $p^Tx^1 \geq \varepsilon + p^Tx^2, \forall x^1 \in S_1$ và $\forall x^2 \in S_2$ (đpcm). ■

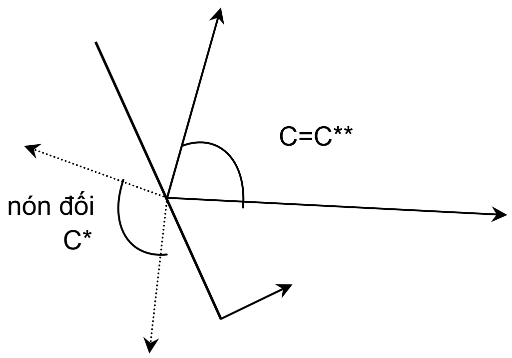
1.4. Nón lồi và nón đối cực

Định nghĩa 5.

Xét một tập hợp khác rỗng $S \subset R^n$. S được gọi là nón *(cone)* với đỉnh 0 nếu $\forall \lambda > 0$ thì từ $x \in S$ luôn có $\lambda x \in S$. Nón S được gọi là nón lồi nếu S là tập lồi.

Cho một tập hợp khác rỗng $S \subset R^n$. Nón đối cực *(polar cone)* của S, được ký hiệu là S*, là tập hợp $\left\{p \in R^n : p^tx \leq 0, \forall x \in S\right\}$. Nếu S là tập rỗng thì nón đối cực sẽ là R^n.

Định lý 11. Giả sử C là nón lồi, đóng, khác rỗng. Lúc đó $C^{**} \equiv C$.



Hình VI.6. Minh họa nón đối cực

Chứng minh (xem minh họa trên hình VI.6)

Rõ ràng $C \subset C^{**}$. Chúng ta đi chứng minh chiều ngược lại bằng phản chứng.

Giả sử $x \in C^{**}$ nhưng $x \notin C$. Theo định lý 5 *(về siêu phẳng phân tách một tập lồi và một điểm)*, lúc đó tồn tại véc tơ $p \neq 0$ và một số thực α sao cho: $p^T y \leq \alpha$, $\forall y \in C$ và $p^T x > \alpha$. Do $y = 0 \in C$, nên $\alpha \geq 0$ và $p^T x > 0$.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh $p \in C^*$. Thật vậy, nếu $p \notin C^*$ thì tồn tại $\bar{y} \in C$ sao cho $p^T \bar{y} > 0$. Do $p^T(\lambda \bar{y})$ có thể chọn lớn tuỳ ý tuỳ thuộc vào λ nên điều này mâu thuẫn với khẳng định: $p^T y \leq \alpha$, $\forall y \in C$. Vậy $p \in C^*$. Mặt khác $x \in C^{**}$, nên $p^T x \leq 0$.

Điều này trái với khẳng định: $p^T x > 0$. Ta có đpcm. ■

Chú ý. Có thể chứng minh được rằng định lý 6 là hệ quả của định lý 11.

2. Ứng dụng giải tích lồi vào bài toán quy hoạch tuyến tính

2.1. Điểm cực biên và hướng cực biên

Định nghĩa 6. Cho tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$. $x \in S$ được gọi là điểm cực biên của S, nếu từ $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ với $x^1, x^2 \in S$ và $\lambda \in (0, 1)$ ta luôn có $x = x^1 = x^2$.

Định nghĩa 7. Cho tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$. Một véc tơ n toạ độ $d \neq 0$ được gọi là một hướng của S, nếu từ $x \in S$ và $\lambda \geq 0$ ta luôn có $x + \lambda d \in S$. Hai hướng d^1 và d^2 được gọi là phân biệt nếu $d^1 \neq \alpha d^2$, $\forall \alpha > 0$. Một hướng d được gọi là hướng cực biên nếu nó không thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính dương của hai hướng phân biệt, tức là nếu $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ với λ_1 và $\lambda_2 > 0$ thì $d^1 = \alpha d^2$ với α dương nào đó.

Đặc trưng của điểm cực biên và hướng cực biên của tập đa diện lồi

Xét BTQHTT: Max $z = c^T x$, với $x \in D = \{x \in R^n: Ax = b, x \geq 0\}$. Chúng ta luôn có thể sắp xếp lại các cột của ma trận A (là ma trận cấp m×n và có hạng bằng m) dưới dạng $A = [N \quad B]$, trong đó B là ma trận cơ sở cấp m×m có hạng là m, N là ma trận cấp m×(n – m). Lúc đó các ràng buộc trên có thể viết được dưới dạng $Nx_N + Bx_B = b$ với $x_N, x_B \geq 0$.

Định lý 12 *(về đặc trưng của điểm cực biên)*.

Cho $D = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$, trong đó A là ma trận cấp m×n và có hạng bằng m. Một điểm x là điểm cực biên của D khi và chỉ khi A có thể được phân rã thành [N B] sao cho: $x = \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1}b \end{bmatrix}$, trong đó B là ma trận khả nghịch cấp m×m thoả mãn điều kiện $B^{-1}b \geq 0$.

Quay lại BTQHTT ở chương I ta thấy x_B là véc tơ các toạ độ ứng với các biến cơ sở *(basic variables)* và x_N là véc tơ các toạ độ ứng với các biến ngoài cơ sở *(nonbasic variables).*

Chứng minh

Giả sử A có thể được phân rã dưới dạng [N B] sao cho: $x = \begin{bmatrix} x_N \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1}b \end{bmatrix}$, trong đó B là ma trận khả nghịch cấp m×m thoả mãn $B^{-1}b \geq 0$.

Rõ ràng rằng $x \in D$. Ta đi chứng minh x là điểm cực biên. Giả sử $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ với x^1, $x^2 \in D$ và $\lambda \in (0, 1)$, trong đó:

$$x^1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} \text{ và } x^2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}.$$

Thế thì: $$\begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1}b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix}.$$

Do x_{11} , $x_{21} \geq 0$ nên $x_{11} = x_{21} = 0$. Điều này kéo theo $x_{12} = x_{22} = B^{-1}b$ (vì x^1, $x^2 \in D$), nên ta có $x = x^1 = x^2$. Vậy x là điểm cực biên của D.

Ngược lại, giả sử x là điểm cực biên của D. Không làm giảm tính tổng quát, giả sử $x = (0, ..., 0, x_{n-k+1}, ..., x_n)^T$ trong đó $x_{n-k+1}, ..., x_n$ là các số dương. Ta đi chứng minh k véc tơ cột sau cùng $A_{n-k+1}, ..., A_n$ của ma trận A là độc lập tuyến tính.

Giả sử điều trái lại: tồn tại các số $\lambda_{n-k+1}, ..., \lambda_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\sum_{j=n-k+1}^{n} \lambda_j A_j = 0$. Đặt $\lambda = (0, ..., 0, \lambda_{n-k+1}, ..., \lambda_n)^T$ và xây dựng hai véc tơ: $x^1 = x + \alpha\lambda \geq 0$ và $x^2 = x - \alpha\lambda \geq 0$ với $\alpha > 0$ chọn thích hợp. Ta thấy $Ax^1 = \sum_{j=n-k+1}^{n} (x_j + \alpha\lambda_j)A_j = \sum_{j=n-k+1}^{n} x_jA_j + \alpha \sum_{j=n-k+1}^{n} \lambda_jA_j = b$. Tương tự, ta cũng có $Ax^2 = b$. Vậy x^1, $x^2 \in D$ và do $\alpha > 0$ nên x^1, x^2 là hai véc tơ phân biệt. Hơn nữa, ta có $x = (1/2)x^1 + (1/2)x^2$. Kết quả thu được hoàn toàn trái với giả thiết x là điểm cực biên của S.

Vậy $A_{n-k+1}, ..., A_n$ là k véc tơ cột độc lập tuyến tính. Do đó có thể chọn trong số (n – k) véc tơ cột còn lại của ma trận A, (m – k) véc tơ cột hợp với k véc tơ đã có thành hệ m véc tơ độc lập tuyến tính. Vì vậy, A có thể được phân rã dưới dạng [N B] trong đó $B = [A_{n-m+1}, \ldots, A_n]$ là ma trận có hạng là m. Do Ax = b nên [N B]x = b. Từ đó có $x_B = (0, \ldots, 0, x_{n-k+1}, \ldots, x_n)^T = B^{-1}b$, ở đây x_B có m toạ độ. Do $x_j > 0$ với $j = \overline{n-k+1,n}$ nên $B^{-1}b \geq 0$. Đây là đpcm. ■

Hệ quả 12a.

Số các điểm cực biên của D là hữu hạn.

(Dành cho bạn đọc tự chứng minh)

Định lý 13. Cho $D = \{x \in R^n: Ax = b, x \geq 0\}$ khác rỗng, trong đó A là ma trận cấp m×n và có hạng bằng m và b là véc tơ có m tọa độ. Khi đó D có ít nhất một điểm cực biên.

Chứng minh

Giả sử $x \in D$, không làm giảm tính tổng quát giả sử $x = (0, ..., 0, x_{n-k+1} ..., x_n)^T$ với $x_j > 0$, $\forall j = \overline{n-k+1,n}$. Nếu $A_{n-k+1}, ..., A_n$ là k véc tơ độc lập tuyến tính thì $k \leq m$ và x là điểm cực biên. Nếu trái lại, $A_{n-k+1}, ..., A_n$ phụ thuộc tuyến tính thì tồn tại các số $\lambda_{n-k+1}, ..., \lambda_n$ (trong đó có ít nhất một số dương) sao cho $\sum_{j=n-k+1}^{n} \lambda_j A_j = 0$. Chọn $\alpha = \min_{n-k+1 \leq j \leq n} \{x_j/\lambda_j : \lambda_j > 0\} = x_i/\lambda_i$. Xét điểm $x^{/}$ với các toạ độ:

$$x_j^{/} = \begin{cases} x_j - \alpha\lambda_j, & \forall j = \overline{n\text{-}k+1,n} \\ 0, & \forall j = \overline{1,n\text{-}k}. \end{cases}$$

Dễ thấy $x_j^{/} \geq 0, \forall j = \overline{n-k+1,n}$ và $x_j^{/} = 0$ với $j = \overline{1,n-k}$. Hơn nữa $x_i^{/} = 0$.

Ta cũng có: $\sum_{j=n-k+1}^{n} A_j\, x_j^{/} = \sum_{j=n-k+1}^{n} A_j(x_j - \alpha\lambda_j) = \sum_{j=n-k+1}^{n} x_j A_j - \alpha \sum_{j=n-k+1}^{n} \lambda_j A_j = b$. Như vậy chúng ta đã xây dựng được điểm $x^{/} \in D$ với nhiều nhất (k –1) tọa độ dương. Quá trình này được tiếp tục cho tới khi thu được điểm $x^* \in D$ có các tọa độ dương tương ứng với các véc tơ độc lập tuyến tính (đpcm). ■

Định lý 14 *(về đặc trưng của hướng cực biên)*.

Cho $D = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ khác rỗng, trong đó A là ma trận cấp m×n và có hạng bằng m, b là véc tơ có m toạ độ. Một véc tơ $\overline{d}$ là một hướng cực biên khi và chỉ khi A được phân rã thành [N B] sao cho: $B^{-1}A_j \leq 0$ với cột A_j nào đó của N, và $\overline{d}$ là véc tơ tỷ lệ với véc tơ $d = \begin{bmatrix} e_j \\ -B^{-1}A_j \end{bmatrix}$, trong đó e_j là véc tơ (n – m) tọa độ có tất cả các tọa độ bằng 0 trừ tọa độ thứ j bằng 1.

Chứng minh

Nếu $B^{-1}A_j \leq 0$ thì $d \geq 0$. Ngoài ra, Ad = 0 (do $Ad = [N\ \ B]d = N \times e_j + B \times (-B^{-1}A_j) = A_j - A_j = 0$) nên d là một hướng của D.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh d là hướng cực biên. Thật vậy, giả sử $d = \lambda_1 d^1 + \lambda_2 d^2$ với $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ và d^1, d^2 là các hướng của D. Chú ý rằng d có ít nhất (n – m – 1) toạ độ bằng 0 nên các toạ độ tương ứng của d^1, d^2 cũng bằng 0. Do đó ta có thể viết:

$$d^1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} e_j \\ d_{12} \end{bmatrix} \text{ và } d^2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} e_j \\ d_{22} \end{bmatrix}, \text{ với } \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

Do $Ad^1 = Ad^2 = 0$ nên có thể rút ra được $d_{12} = d_{22} = -B^{-1}A_j$. Vậy d^1 và d^2 trùng nhau, hay d là hướng cực biên. Từ đó có $\bar{d}$ là hướng cực biên.

Ta đi chứng minh chiều ngược lại. Giả sử $\bar{d}$ là hướng cực biên của D. Không làm giảm tính tổng quát, giả sử $\bar{d} = (0,...,\bar{d}_j,...,0,\bar{d}_{n-k+1},...,\bar{d}_n)^T$ với các toạ độ $\bar{d}_i > 0$, $\forall i = \overline{n-k+1,n}$ và i = j. Chúng ta sẽ chứng minh $A_{n-k+1}, ..., A_n$ là các véc tơ độc lập tuyến tính. Giả sử điều trái lại đúng thì tồn tại các số $\lambda_{n-k+1}, ..., \lambda_n$ không đồng thời bằng 0 sao cho $\sum_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i A_i = 0$. Đặt $\lambda = (0, ..., 0, \lambda_{n-k+1}, ..., \lambda_n)^T$ và chọn $\alpha > 0$ đủ nhỏ sao cho cả hai véc tơ $d^1 = \bar{d} + \alpha\lambda$ và $d^2 = \bar{d} - \alpha\lambda$ không âm. Ta thấy $Ad^1 = A\bar{d} + \alpha A\lambda = 0 + \alpha \sum_{i=n-k+1}^{n} \lambda_i A_i = 0$. Tương tự cũng có $Ad^2 = 0$. Do $d^1, d^2 \geq 0$ nên chúng là các hướng phân biệt của D (chú ý rằng $\alpha > 0$ và $\lambda \neq 0$). Ngoài ra, $\bar{d} = (1/2)d^1 + (1/2)d^2$. Điều này mâu thuẫn với giả sử $\bar{d}$ là hướng cực biên của D. Vậy $A_{n-k+1}, ..., A_n$ là các véc tơ độc lập tuyến tính.

Do hạng của A = m nên $k \leq m$. Như vậy trong số (n – k) véc tơ cột còn lại (trừ cột A_j) của ma trận A sẽ có (m – k) véc tơ cột hợp với k véc tơ đã có thành hệ m véc tơ độc lập tuyến tính. Không làm giảm tính tổng quát, giả sử đó là hệ $A_{n-m+1}, ..., A_n$. Lúc đó A được phân rã dưới dạng [N B] trong đó $B = [A_{n-m+1}, ..., A_n]$ là ma trận vuông không suy biến với hạng là m. Vậy $A\bar{d} = B\hat{d} + A_j\bar{d}_j = 0$, trong đó $\hat{d}$ là véc tơ m toạ độ cuối của $\bar{d}$, còn $\bar{d}_j$ là tọa độ thứ j của $\bar{d}$ (cần chú ý rằng: *nếu cột A_j cũng nằm trong số các cột của B* thì do các cột $A_{n-m+1}, ..., A_n$ là độc lập tuyến tính nên ta có ngay $\hat{d} = 0$ và $\bar{d} = 0$, trái với giả thiết $\bar{d}$ là hướng của D). Từ đó có $\hat{d} = -\bar{d}_j B^{-1}A_j$ và do đó $\bar{d}$ có dạng $\bar{d} = \bar{d}_j \begin{bmatrix} e_j \\ -B^{-1}A_j \end{bmatrix}$. Dễ thấy $\bar{d} \geq 0$ và $\bar{d}_j > 0$, nên $B^{-1}A_j \leq 0$ (đpcm). ■

Hệ quả 14a.

Số các hướng cực biên của D là hữu hạn.

(Dành cho bạn đọc tự chứng minh)

2.2. Biểu diễn tập lồi đa diện qua điểm cực biên và hướng cực biên

Theo định nghĩa, một tập lồi đa diện là giao của một số hữu hạn các nửa không gian đóng. Có thể coi đây là *biểu diễn ngoài của tập lồi đa diện*. Còn *biểu diễn trong của tập lồi đa diện* (được ứng dụng rộng rãi trong quy hoạch tuyến tính và phi tuyến) thông qua các điểm cực biên và hướng cực biên được phát biểu ngắn gọn như sau: Mỗi điểm của tập lồi đa diện $D = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ được biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi của các điểm cực biên của D và một tổ hợp tuyến tính không âm của các hướng cực biên của nó.

Định lý 15. Xét tập lồi đa diện khác rỗng $D = \{x: Ax = b, x \geq 0\} \subset R^n$, trong đó A là ma trận cấp m×n và có hạng bằng m. Giả sử $x^1, ..., x^k$ là các điểm cực biên của D và $d^1, ..., d^u$ là các hướng cực biên của D. Lúc đó $x \in D$ khi và chỉ khi x có thể biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j + \sum_{j=1}^{u} \mu_j d^j, \text{ với } \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \quad (6.3)$$

$\lambda_j \geq 0,\ \forall j = \overline{1,k}$, (6.4)

$\mu_j \geq 0,\ \forall j = \overline{1,u}$. (6.5)

Chứng minh

Chúng ta xây dựng tập $\Lambda = \{\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^j + \sum_{j=1}^{u}\mu_j d^j : \sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1,\ \lambda_j \geq 0,\ \forall j = \overline{1,k}$ và $\mu_j \geq 0,\ \forall j = \overline{1,u}\ \}$. Có thể chứng minh được Λ là tập lồi, đóng và khác rỗng. Ngoài ra $\Lambda \subset D$.

Để chứng minh $D \subset \Lambda$ bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử điều ngược lại: $\exists\ z \in D$ mà $z \notin \Lambda$. Theo định lý 5 (*về siêu phẳng tách một tập lồi và một điểm*), lúc đó tồn tại một số α và một véc tơ n toạ độ $p \neq 0$ sao cho:

$p^T z > \alpha$ và $p^T(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j x^j + \sum_{j=1}^{u}\mu_j d^j) \leq \alpha$, (6.6)

với các λ_j, μ_j thoả mãn (6.3), (6.4) và (6.5). Vì μ_j có thể chọn dương và lớn tuỳ ý nên (6.6) được thoả mãn chỉ khi $p^T d^j \leq 0,\ \forall j = \overline{1,u}$. Cũng từ (6.6) khi chọn các số λ_j, μ_j thích hợp thì sẽ có $p^T x^j \leq \alpha,\ \forall j = \overline{1,k}$.

Vậy, tồn tại p sao cho $p^T z > p^T x^j,\ \forall j = \overline{1,k}$, và $p^T d^j \leq 0,\ \forall j = \overline{1,u}$. (6.7)

Xét điểm cực biên $\overline{x}$ xác định bởi $p^T\overline{x} = \text{Max}\{p^T x^j\text{: } j = 1, ..., k\}$. Theo định lý 12 (*về đặc trưng của điểm cực biên*) thì $\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ B^{-1}b \end{bmatrix}$ trong đó $A = [N\ \ B]$ và $B^{-1}b \geq 0$. Không làm giảm tính tổng quát, có thể giả sử rằng $B^{-1}b > 0$. Lúc đó, do $z \in D$ nên $Az = b$ và $z^T = (z_N^T, z_B^T) \geq 0$. Từ đó có $Nz_N + Bz_B = b$ và $z_B = B^{-1}b - B^{-1}Nz_N$. Vậy $0 < p^T z - p^T\overline{x} = p_N^T z_N + p_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nz_N) - p_B^T B^{-1}b = (p_N^T - p_B^T B^{-1}N)z_N$. Do $z_N \geq 0$, nên tồn tại một tọa độ $j \leq m$, sao cho $z_j > 0$ và

$p_N^T - p_B^T B^{-1}A_j > 0.$ (6.8)

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $y_j = B^{-1}A_j$ là véc tơ có ít nhất một tọa độ dương. Thật vậy, giả sử điều ngược lại $y_j \leq 0$. Xét véc tơ $d^j = \begin{bmatrix} e_j \\ -y_j \end{bmatrix}$ trong đó e_j là véc tơ đơn vị có (n – m) toạ độ với tọa độ thứ j là 1. Theo định lý 14 (*về đặc trưng của hướng cực biên*) thì d^j là một hướng cực biên của D. Do $p^T d^j \leq 0$ (theo (6.7)) nên $p_j - p_B^T B^{-1}A_j \leq 0$. Điều mâu thuẫn với $p_N^T - p_B^T B^{-1}A_j > 0$ đã biết ở trên (xem (6.8)). Vậy véc tơ y_j có ít nhất một tọa độ dương.

Chúng ta đi xây dựng véc tơ $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{b} \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} e_j \\ -y_j \end{bmatrix}$, trong đó $\overline{b} = B^{-1}b$ và $\lambda = \underset{1\leq i\leq m}{\text{Min}}\{\overline{b}_i/y_{ij}\text{: } y_{ij} > 0\} = \overline{b}_r/y_{rj} > 0$. Ta thấy x có nhiều nhất m tọa độ dương (tọa độ thứ r bằng 0, còn tọa độ thứ j bằng λ). Có thể chứng minh được $x \in D$ (vì $Ax = B(B^{-1}b - \lambda B^{-1}A_j) + \lambda A_j = b$).

Mặt khác, ta có: $y_j = B^{-1}A_j \Leftrightarrow By_j = A_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} y_{ij}A_{n-m+i} = A_j$.

Do $y_{rj} \neq 0$ nên từ đây suy ra $A_{n-m+1}, \ldots, A_{n-m+r-1}, A_{n-m+r+1}, \ldots, A_n, A_j$ là hệ véc tơ độc lập tuyến tính. Theo định lý 12 (*về đặc trưng của điểm cực biên*) thì x là điểm cực biên. Ngoài ra, ta cũng có:

$$p^T x = \begin{bmatrix} p_N^T & p_B^T \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \lambda e_j \\ \overline{b} - \lambda y_i \end{bmatrix} = \lambda p_j + p_B^T \overline{b} - \lambda p_B^T y_j = p^T \overline{x} + \lambda (p_j - p_B^T B^{-1} A_j).$$

Do $\lambda > 0$ và $p_j - p_B^T B^{-1} A_j > 0$ nên $p^T x > p^T \overline{x}$. Điều này mâu thuẫn với tính chất của điểm cực biên $\overline{x}$ (đã xác định bởi $p^T \overline{x} = \text{Max}\{p^T x^j: j = 1, ..., k\}$). Vậy điều chúng ta đã giả sử: $\exists\ z \in D$ và $z \notin \Lambda$ là sai. Nói cách khác $D \subset \Lambda$ (đpcm). ■

Hệ quả 15a.

Tập lồi đa diện $D = \{x: Ax = b, x \geq 0\}$ khác rỗng, với A là ma trận cấp m×n và có hạng bằng m, có hướng cực biên khi và chỉ khi D là không giới nội.

Chứng minh (dành cho bạn đọc tìm hiểu) có thể được suy ra ngay từ định lý 16.

2.3. Điều kiện tối ưu trong phương pháp đơn hình giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Định lý 16 ***(điều kiện tối ưu).***

Xét BTQHTT: Min $z = c^T x$, với $x \in D = \{x \in R^n: Ax = b, x \geq 0\}$ khác rỗng, trong đó A là ma trận cấp m×n và có hạng bằng m. Giả sử $x^1, ..., x^k$ là các điểm cực biên của D và $d^1, ..., d^u$ là các hướng cực biên của D. Điều kiện cần và đủ để BTQHTT có phương án tối ưu là $c^T d^j \geq 0$, $\forall j = \overline{1, u}$.

Ngoài ra, nếu BTQHTT thỏa mãn điều kiện trên thì phương án tối ưu đạt được tại ít nhất một điểm cực biên.

Chứng minh

Theo định lý 15, BTQHTT được phát biểu lại như sau:

$$\text{Min } c^T x = c^T \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x^j + \sum_{j=1}^{u} \mu_j d^j\Big),$$

trong đó, $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1$(6.3), $\lambda_j \geq 0, \forall j = \overline{1, k}$ (6.4) và $\mu_j \geq 0$, $\forall j = \overline{1, u}$ (6.5).

Bởi vậy, nếu BTQHTT có phương án tối ưu với hàm mục tiêu bị chặn dưới, thì $c^T d^j \geq 0$, $\forall j = \overline{1, u}$ (Nếu trái lại, $\exists$ j sao cho $c^T d^j < 0$. Lúc đó do có thể chọn $\mu_j > 0$ và lớn tùy ý, sẽ có ngay $c^T x \to -\infty$). Ngược lại, nếu $c^T d^j \geq 0$, $\forall j = \overline{1, u}$ thì muốn đạt giá trị Min $c^T x$ chỉ cần cho $\mu_j = 0, \forall j = \overline{1, u}$ và chọn phương án tối ưu tại điểm cực biên x^i xác định bởi $c^T x^i = \text{Min}\{ c^T x^j : j = 1, ..., k\}$ (đpcm). ■

Tiêu chuẩn tối ưu và thuật toán

Xét BTQHTT như cho trong giả thiết của định lý 16. Theo định lý này chúng ta sẽ tìm kiếm phương án tối ưu $\overline{x}$ trong các điểm cực biên (trong trường hợp BTQHTT có phương án). Từ định lý 12 ta thấy, điểm cực biên $\overline{x}$ được cho bởi $\overline{x}^T = (\overline{x}_N^T, \overline{x}_B^T) = (\overline{b}^T, 0)$ trong đó $\overline{b} = B^{-1}b \geq 0$, tương ứng với việc A phân rã thành A = [N B]. Giả sử $x = (x_N^T, x_B^T) \in D$, lúc đó ta có: $Nx_N + Bx_B = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Do đó, $c^Tx = c_N^Tx_N + c_B^Tx_B = c_B^TB^{-1}b + \left(c_N^T - c_B^TB^{-1}N\right)x_N = c^T\overline{x} + \left(c_N^T - c_B^TB^{-1}N\right)x_N$. Vậy $c^Tx \geq c^T\overline{x}$ nếu $c_N^T - c_B^TB^{-1}N \geq 0$ (do $x_N \geq 0$).

Ngược lại, giả sử điều kiện $c_N^T - c_B^TB^{-1}N \geq 0$ không được thỏa mãn, tức là $\exists\, j \in J_N$ sao cho $c_j - c_B^TB^{-1}A_j < 0$. Đặt $y_j = B^{-1}A_j$ và $d^j = \begin{bmatrix} e_j \\ -y_j \end{bmatrix}$. Xét điểm:

$$x = \overline{x} + \lambda d^j. \tag{6.9}$$

Lúc đó ta có:
$$c^Tx = c^T\overline{x} + \lambda\left(c_j - c_B^TB^{-1}A_j\right). \tag{6.10}$$

Dễ thấy $c^Tx < c^T\overline{x}$ nếu chọn $\lambda > 0$. Xét hai trường hợp sau đây:

Trường hợp 1: $y_j \leq 0$. Do $Ax = A(\overline{x} + \lambda d^j) = A\overline{x} + \lambda Ad^j = A\overline{x} = b$ nên x sẽ là phương án (khả thi) nếu $x \geq 0$. Điều này luôn xảy ra vì $x = \overline{x} + \lambda d_j$ với $\lambda > 0$ và $d^j \geq 0$. Từ (6.10) ta thấy hàm mục tiêu c^Tx không bị chặn dưới.

Trường hợp 2: Điều kiện $y_j \leq 0$ không thỏa mãn. Đặt $\overline{b} = B^{-1}b = \overline{x}_B$, chọn λ theo quy tắc: $\lambda = \underset{1\leq i \leq m}{\mathrm{Min}} \left\{ \frac{\overline{b}_i}{y_{ij}} : y_{ij} > 0 \right\} = \frac{\overline{b}_r}{y_{rj}} \geq 0$, trong đó y_{ij} là tọa độ thứ i của y_j.

Ký hiệu các biến cơ sở ứng với ma trận cơ sở B là $x_{B_1}, x_{B_2}, \ldots, x_{Bm}$, thì ta có:

$$x = \overline{x} + \lambda d^j \Leftrightarrow \begin{cases} x_{B_i} = \overline{b}_i - \dfrac{\overline{b}_r}{y_{rj}} y_{ij}, \forall i = \overline{1,m} \\ x_j = \overline{b}_r / y_{rj} \\ x_i = 0, \forall i \neq j,\ i \notin \{B_1, \ldots, B_m\} \equiv J_B. \end{cases}$$

Dễ thấy x là điểm cực biên có nhiều nhất m tọa độ dương. Nếu $\overline{b} > 0$ thì $\lambda > 0$ và do đó $c^Tx < c^T\overline{x}$. Vậy nếu $\overline{x}$ là phương án cực biên không suy biến thì x là phương án cực biên tốt hơn $\overline{x}$.

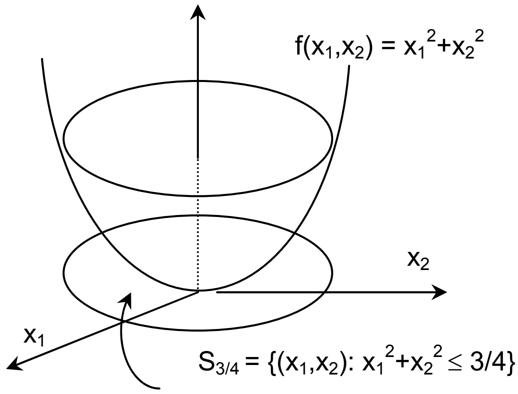
Chú ý. Trong phần này chúng ta đã nghiên cứu một cách khá chi tiết cơ sở (giải tích lồi) của phương pháp đơn hình. Trong các BTQHTT cỡ trung bình, phương pháp đơn hình luôn tỏ ra rất hiệu quả. Tuy nhiên trong các BTQHTT cỡ lớn (với số biến lớn và nhiều ràng buộc), có thể sử dụng một phương pháp khác: đó là phương pháp điểm trong do Karmarkar đề xuất. Phương pháp này sẽ được giới thiệu trong phần cuối của chương VI.

3. Các tính chất của hàm lồi

3.1. Các định nghĩa và tính chất cơ bản

Chúng ta đã biết trong chương V khái niệm hàm lồi: Cho một tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$. Hàm f: $S \to R$ được gọi là hàm lồi nếu ta luôn có $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2)$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall x^1, x^2 \in S$.

Định nghĩa 7. Xét hàm lồi f: $S \to R$. Lúc đó tập $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \le \alpha\}$ với $\alpha \in R$ được gọi là tập mức dưới α tương ứng với hàm lồi f.



Hình VI.6. Minh họa hàm lồi và tập mức dưới

Ví dụ 2. $z = f(x, y) = x^2 + y^2$: $S \subset R^2 \to R$ là hàm lồi nếu S là tập lồi khác rỗng. Tập mức $S_{3/4}$ được minh họa trên hìnhVI.6.

Ta thấy $\forall \alpha$, S_α lồi nếu f là hàm lồi. Thật vậy, cho $x_1, x_2 \in S_\alpha \subset S$ và xét $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\forall \lambda \in (0, 1)$. Do f là lồi nên: $f(x) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \le \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha$. Vậy $x \in S_\alpha$.

Định lý 17 *(tính chất liên tục của hàm lồi).*

Nếu f: $S \to R$ là hàm lồi thì f là hàm liên tục trong int S.

(Chứng minh: Dành cho bạn đọc tự tìm hiểu).

Đạo hàm theo hướng của hàm lồi

Định nghĩa 8. Cho tập khác rỗng $S \subset R^n$ và hàm f: $S \to R$. Lúc đó đạo hàm tại $\bar{x} \in S$ theo hướng $d \in R^n$ được ký hiệu và định nghĩa bởi

$$f'(\bar{x}, d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}.$$

Ví dụ 3. Xét hàm hai biến $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Hãy tìm đạo hàm $f'(\bar{x}, d)$ tại điểm $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1,1)$ theo hướng d = (2, 1/2).

$$f'(\bar{x}, d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\left[(x_1 + 2\lambda)^2 + (x_2 + \tfrac{1}{2}\lambda)^2\right] - (x_1^2 + x_2^2)}{\lambda} = 4x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} [2x_1, 2x_2]$$

Tại (1, 1) ta có $f'(\bar{x}, d) = d \times \nabla f^T(1,1) = 5$.

Định lý 18. Cho một tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$ và f: $S \to R$ là hàm lồi. Lúc đó, $\forall\ \bar{x} \in S$ và hướng bất kỳ $d \in R^n$ sao cho $\bar{x} + \lambda d \in S$ với $\lambda > 0$ đủ nhỏ, luôn tồn tại đạo hàm theo hướng: $f'(\bar{x}, d) = \lim\limits_{\lambda \to 0^+} \dfrac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$.

Chứng minh

Chọn $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ và đủ nhỏ. Do f là hàm lồi nên ta có:

$$f(\bar{x} + \lambda_1 d) = f\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\bar{x}\right] \le \frac{\lambda_1}{\lambda_2} f(\bar{x} + \lambda_2 d) + \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) f(\bar{x}).$$

Từ đây suy ra: $\dfrac{f(\bar{x} + \lambda_1 d) - f(\bar{x})}{\lambda_1} \le \dfrac{f(\bar{x} + \lambda_2 d) - f(\bar{x})}{\lambda_2}$. Như vậy, hàm số $[f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})]/\lambda$ phụ thuộc $\lambda > 0$ là hàm không giảm. Bởi vậy ta có giới hạn:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda} \text{ (đpcm). } \blacksquare$$

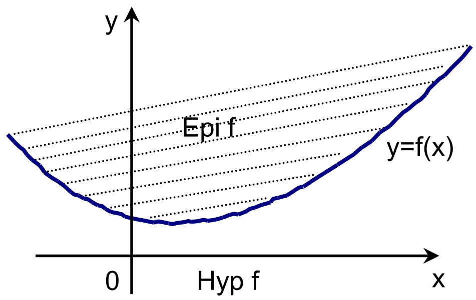
3.2. Dưới vi phân của hàm lồi

Định nghĩa 9. Cho f: $S \to R$ là hàm lồi. Lúc đó:

Epigraph của f là tập hợp Epi $f = \{(x, y) : x \in S, y \ge f(x)\} \subset R^{n+1}$.

Hypograph của f là tập hợp Hyp $f = \{(x, y) : x \in S, y \le f(x)\} \subset R^{n+1}$.

Xem minh họa hình VI.7.



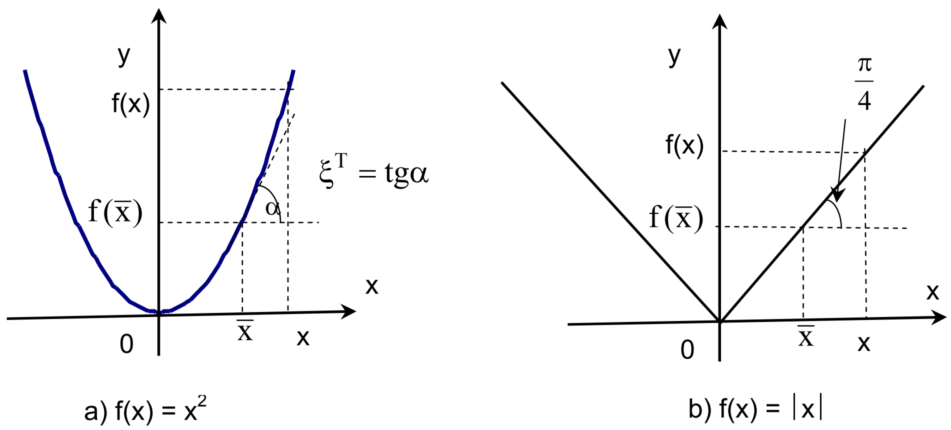
Hình VI.7. Minh họa Epigraph và Hypograph

Có thể chứng minh được tính chất sau đây: Cho f: $S \to R$ là hàm lồi, lúc đó Epi f là tập lồi và ngược lại.

Định nghĩa 10 *(khái niệm dưới vi phân)*.

Xét tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$ và f: $S \to R$ là hàm lồi. Lúc đó véc tơ $\xi \in R^n$ được gọi là dưới vi phân của f tại $\bar{x}$ nếu $f(x) \ge f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}), \forall x \in S$.

Ví dụ 4. i) Xét hàm $y = f(x) = x^2$. Lúc đó véc tơ $\xi = (2\bar{x}) \in R^1$ chính là dưới vi phân của hàm đã cho tại $\bar{x}$ (trên hình VI.8a: $\xi^T = tg\alpha$).



Hình VI.8. Minh họa hình học dưới vi phân

ii) Xét hàm y = f(x) = |x|. $\forall \overline{x} \neq 0$, véc tơ $\xi = \text{sign } \overline{x} \in R^1$ chính là dưới vi phân duy nhất của hàm đã cho tại $\overline{x}$ (trên hình VI.8b: $\xi^T = tg\frac{\pi}{4} = 1$ tại $\overline{x} > 0$). Còn tại $\overline{x} = 0$, tồn tại vô số dưới vi phân $\xi \in [-1, 1] \subset R^1$.

Định lý 19 *(về sự tồn tại dưới vi phân).*

Cho f: S → R là hàm lồi. Lúc đó với $\forall \overline{x} \in \text{int } S$ luôn tồn tại véc tơ ξ sao cho siêu phẳng H = $\{(x,y): y = f(\overline{x}) + \xi^T(x - \overline{x})\}$ là siêu phẳng tựa của Epi f tại $(\overline{x}, f(\overline{x}))$ tức là $f(x) \geq f(\overline{x}) + \xi^T(x - \overline{x})$, $\forall x \in S$. Do đó, ξ chính là dưới vi phân tại $\overline{x}$.

Chứng minh

Ta đã biết Epi f là tập lồi và $(\overline{x}, f(\overline{x})) \in \partial$(Epi f), biên của Epi f. Ngoài ra theo định lý 7 *(về siêu phẳng tựa của tập lồi tại điểm biên)*, lúc đó tồn tại véc tơ $p = (\xi_0, \mu) \neq 0$, sao cho $\forall (x,y) \in \text{Epi } f$ luôn có:

$$\xi_0^T(x - \overline{x}) + \mu^T(y - f(\overline{x})) \leq 0 \;. \tag{6.11}$$

Rõ ràng μ không thể dương được vì nếu trái lại chọn y dương đủ lớn thì suy ra (6.11) là sai. Ta đi chứng minh $\mu \neq 0$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử μ = 0 thì có:

$$\xi_0^T(x - \overline{x}) \leq 0, \forall x \in S. \tag{6.12}$$

Vì $\overline{x} \in \text{int } S$ nên $\exists \lambda > 0$ sao cho $x = \overline{x} + \lambda\xi_0 \in S$. Do đó, thay vào (6.12) ta có: $\lambda\xi_0^T\xi_0 \leq 0$, suy ra $\xi_0^T\xi_0 \leq 0$ hay $\xi_0 = 0$. Vậy ta có $p = (\xi_0, \mu) = (0,0)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $p \neq 0$. Do đó μ < 0. Đặt $\xi = \xi_0 / |\mu|$. Từ (6.11) ta có:

$$\xi^T(x - \overline{x}) - y + f(\overline{x}) \leq 0 \tag{6.13}$$

đúng mọi $(x,y) \in$ Epi f. Vậy H = $\{(x,y): y = f(\overline{x}) + \xi^T(x - \overline{x})\}$ chính là siêu phẳng tựa của Epi f tại $(\overline{x}, f(\overline{x}))$. Hơn nữa, nếu đặt y = f(x) trong (6.13) thì có: $f(x) \geq f(\overline{x}) + \xi^T(x - \overline{x})$, $\forall x \in S$. Do đó, ξ chính là dưới vi phân tại $\overline{x}$ (đpcm). ■

Hệ quả 19a.

Cho $f: S \to R$ là hàm lồi ngặt và $\bar{x} \in \text{int}\, S$. Lúc đó tồn tại dưới vi phân ξ tại $\bar{x}$ sao cho: $f(x) > f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}),\ \forall\, x \in S$ và $x \neq \bar{x}$.

Chứng minh

Theo định lý 19, tồn tại dưới vi phân ξ sao cho:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}), \forall x \in S. \tag{6.14}$$

Giả sử tồn tại $\hat{x} \neq \bar{x}$ sao cho $f(\hat{x}) = f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$. Do f là hàm lồi ngặt nên $\forall \lambda \in (0,1)$ ta có:

$$f\left[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}\right] < \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda) f(\hat{x}) = f(\bar{x}) + (1-\lambda)\xi^T(\hat{x} - \bar{x}). \tag{6.15}$$

Đặt $x = \lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}$ trong (6.14) thì ta có:

$f\left[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\hat{x}\right] \geq f(\bar{x}) + (1-\lambda)\xi^T(\hat{x} - \bar{x})$, điều này mâu thuẫn với (6.15). Vậy chúng ta có đpcm. ■

Chú ý. Tại $\bar{x}$ có thể có nhiều dưới vi phân (xem hình VI.8b với $\bar{x} = 0$). Ngoài ra, điều khẳng định ngược lại của hệ quả 19a là không luôn đúng. Tức là, nếu $f: S \to R$ là hàm xác định trên tập lồi S khác rỗng và $\forall \bar{x} \in \text{int}\, S$, luôn tồn tại dưới vi phân ξ sao cho: $f(x) > f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}),\ \forall\, x \in S$ và $x \neq \bar{x}$, thì f không nhất thiết là hàm lồi trong S. Tuy nhiên, chúng ta lại có định lý sau.

Định lý 20. Cho $f: S \to R$ là hàm xác định trên tập lồi khác rỗng $S \subset R^n$. Nếu $\forall \bar{x} \in \text{int}\, S$, luôn tồn tại dưới vi phân ξ sao cho: $f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}),\ \forall x \in S$ và $x \neq \bar{x}$, thì f là hàm lồi trong int S.

Chứng minh

Cho $x^1, x^2 \in$ int S và cho $\lambda \in (0, 1)$. Theo hệ quả 3a của định lý 3, int S cũng là tập lồi nên $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in$ int S. Từ giả thiết của định lý suy ra rằng tồn tại dưới vi phân ξ của hàm f tại $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$. Do đó có các bất đẳng thức sau:

$$f(x^1) \geq f\left[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right] + (1-\lambda)\xi^T(x^1 - x^2),$$

$$f(x^2) \geq f\left[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right] + \lambda\xi^T(x^2 - x^1).$$

Nhân hai vế của các bất đẳng thức trên theo thứ tự với λ và $(1 - \lambda)$ rồi đem cộng lại, ta thu được: $\lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \geq f\left[\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2\right]$ (đpcm). ■

3.3. Hàm lồi khả vi

Trong chương V, chúng ta đã biết định nghĩa hàm khả vi cấp một: Xét tập khác rỗng $S \subset R^n$ và $f: S \to R$. Lúc đó, f là khả vi tại $\bar{x} \in S$ nếu $\forall x \in S$ thì

$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T\,(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|\,\alpha(\bar{x}, x - \bar{x})$, trong đó $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \alpha(\bar{x}, x - \bar{x}) = 0$, còn $\nabla f(\bar{x})$ được gọi là véc tơ gradient của f

$$\nabla f(\bar{x}) = \left[\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_n}\right]^T.$$

Bổ đề. Cho f: S $\to$ R là một hàm lồi. Giả sử f khả vi tại $\bar{x} \in \operatorname{int} S$, lúc đó tồn tại duy nhất một dưới vi phân của f tại $\bar{x}$ là: $\xi = \nabla f(\bar{x})$.

Chứng minh

Theo định lý 19, ta đã biết tại $\bar{x} \in \operatorname{int} S$ tồn tại dưới vi phân. Ký hiệu ξ là dưới vi phân của f tại $\bar{x}$, ta có $f(x) \ge f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x})$. Đặt x = $\bar{x}$ + λd ta có

$$f(\bar{x} + \lambda d) \ge f(\bar{x}) + \lambda \xi^T d. \tag{6.16}$$

Do f khả vi tại $\bar{x}$ nên

$$f(\bar{x} + \lambda d) = f(\bar{x}) + \lambda \nabla f(\bar{x})^T d + \lambda \|d\|\,\alpha(\bar{x}, \lambda d). \tag{6.17}$$

Lấy (6.16) trừ (6.17) ta có $0 \ge \lambda\left[\xi^T - \nabla f(\bar{x})^T\right]d - \lambda\|d\|\,\alpha(\bar{x}, \lambda d)$. Chia cả hai vế cho λ (giả sử $\lambda > 0$) ta có:

$$0 \ge \left[\xi - \nabla f(\bar{x})\right]^T d - \|d\|\,\alpha(\bar{x}, \lambda d). \tag{6.18}$$

Cho qua giới hạn (6.18) khi $\lambda \to 0$, ta thu được $0 \ge \left[\xi - f(\bar{x})\right]^T d$. Vì d có thể chọn bất kỳ, ta chọn d = $\xi - \nabla f(\bar{x})$ thì có: $0 \ge \|\xi - \nabla f(\bar{x})\|^2$. Vậy $\xi = \nabla f(\bar{x})$ (đpcm). ■

Định lý 21. Cho tập lồi mở khác rỗng $S \subset R^n$ và f: S $\to$ R là hàm khả vi trong S. Lúc đó:

f là hàm lồi $\Leftrightarrow f(x) \ge f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \forall \bar{x}, x \in S$ (6.19)

$$\Leftrightarrow \left[\nabla f(x^2) - \nabla f(x^1)\right]^T (x^2 - x^1) \ge 0, \forall x^1, x^2 \in S. \tag{6.20}$$

Đối với trường hợp f là lồi ngặt, trong (6.19) và (6.20) cần thay dấu ≥ bởi dấu >.

Chứng minh

Trước hết, chúng ta chứng minh (6.19). Cho f là hàm lồi, theo định lý 19 và bổ đề trên ta thu được ngay $f(x) \ge f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}), \forall \bar{x}, x \in S$. Chiều ngược lại được suy ra từ định lý 20 và bổ đề trên.

Chúng ta đi chứng minh (6.20). Cho f là hàm lồi thì theo (6.19) sẽ có:

$$f(x^1) \ge f(x^2) + \nabla f(x^2)^T(x^1 - x^2) \text{ và } f(x^2) \ge f(x^1) + \nabla f(x^1)^T(x^2 - x^1).$$

Cộng hai bất đẳng thức trên sẽ có $\left[\nabla f(x^2) - \nabla f(x^1)\right]^T (x^2 - x^1) \ge 0$.

Ngược lại, cho $\forall x^1, x^2 \in S$. Theo định lý giá trị trung bình, với x = $\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2$ đối với một giá trị nào đó $\lambda \in (0, 1)$ ta có

$$f(x^2) - f(x^1) = \nabla f(x)^T (x^2 - x^1) \ . \tag{6.21}$$

Theo giả thiết, ta có $\left[\nabla f(x) - \nabla f(x^1)\right]^T (x - x^1) \geq 0$ hay:

$$(1-\lambda)\left[\nabla f(x) - \nabla f(x^1)\right]^T (x^2 - x^1) \geq 0 \Leftrightarrow \nabla f(x)^T (x^2 - x^1) \geq \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1).$$

Từ (6.21) sẽ có: $f(x^2) \geq f(x^1) + \nabla f(x^1)^T (x^2 - x^1)$. Theo định lý 20, ta có đpcm. ■

Hàm lồi khả vi cấp hai

Chúng ta nhắc lại khái niệm hàm khả vi cấp hai trong chương V. Xét tập khác rỗng $S \subset R^n$ và hàm f: $S \to R$. Lúc đó, hàm f được gọi là khả vi cấp hai tại $\overline{x}$ nếu tồn tại véc tơ gradient $\nabla f(\overline{x})$ và ma trận đối xứng cấp n, được gọi là ma trận Hessian H($\overline{x}$), sao cho:

$$f(x) = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x}) + \frac{1}{2}(x - \overline{x})^T H(\overline{x})(x - \overline{x}) + \|x - \overline{x}\|^2 \alpha(\overline{x}, x - \overline{x}),$$

đúng $\forall x \in S$, trong đó $\lim\limits_{x \to \overline{x}} \alpha(\overline{x}, x - \overline{x}) = 0$.

Định lý 22. Nếu S là tập lồi mở khác rỗng và f: $S \to R$ là hàm khả vi cấp hai thì: hàm f lồi khi và chỉ khi H($\overline{x}$) nửa xác định dương với mọi $\overline{x} \in S$.

Chứng minh

Cho f là hàm lồi và $\overline{x} \in S$. Cần chứng minh rằng $x^T H(\overline{x})x \geq 0$ $\forall x \in R^n$. Do S là tập mở, nên khi lấy x bất kỳ thì $\overline{x} + \lambda x \in S$ nếu chọn λ đủ nhỏ. Theo định lý 21 và theo giả thiết đã cho, ta có:

$$f(\overline{x} + \lambda x) \geq f(\overline{x}) + \lambda \nabla f(\overline{x})^T x \tag{6.22}$$

và $$f(x) = f(\overline{x}) + \lambda \nabla f(\overline{x})^T x + \frac{1}{2}\lambda^2 x^T H(\overline{x}) x + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\overline{x}, \lambda x). \tag{6.23}$$

Lấy (6.22) trừ (6.23) ta có: $\frac{1}{2}\lambda^2 x^T H(\overline{x}) x + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\overline{x}, \lambda x) \geq 0$. Chia hai vế cho λ và cho $\lambda \to 0$, ta thu được $x^T H(\overline{x})x \geq 0$.

Ngược lại, giả sử $x^T H(\overline{x})x \geq 0$ đúng $\forall x \in R^n$ và $\forall \overline{x} \in S$. Theo định lý về giá trị trung bình, ta có:

$$f(x) = f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x}) + \frac{1}{2}(x - \overline{x})^T H(\hat{x})(x - \overline{x}),$$

trong đó $\hat{x} = \lambda \overline{x} + (1 - \lambda)x$ với $\lambda \in (0, 1)$. Vì $\hat{x} \in S$ nên $\frac{1}{2}(x - \overline{x})^T H(\hat{x})(x - \overline{x}) \geq 0$, suy ra $f(x) \geq f(\overline{x}) + \nabla f(\overline{x})^T (x - \overline{x})$ (đpcm). ■

Ví dụ 5. Xét hàm một biến $f(x) = x^3 + 2x + 1$ xác định trên R. Do $H(\overline{x}) = f''(\overline{x}) = 6\overline{x}$ không là (nửa) xác định dương tại $\overline{x} = -1$ nên $f(x) = x^3 + 2x + 1$ không phải là hàm lồi.

Ví dụ 6. Với hàm hai biến $f(x) = x_1^2 + x_2^2$ ta có H($\overline{x}$) = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ là (nửa) xác định dương nên f(x) là hàm lồi.

Chú ý

Ma trận H($\overline{x}$) là xác định dương nếu x^T H($\overline{x}$) x > 0, $\forall$ x $\in R^n$, x $\neq$ 0.

Ma trận H($\overline{x}$) là nửa xác định dương nếu x^T H($\overline{x}$) $\geq$ 0, $\forall$ x $\in R^n$.

Có thể kiểm tra H($\overline{x}$) là xác định dương theo các cách sau:

– Theo định nghĩa.

– Các định thức con chính của H($\overline{x}$) luôn có giá trị dương.

– Các giá trị riêng tìm từ phương trình đặc trưng det(H–λI) = 0 đều có giá trị dương.

3.4. Cực đại và cực tiểu của hàm lồi

Cho hàm $f : S \subset R^n \to R$. Chúng ta muốn cực tiểu hoá (cực đại hóa) hàm f(x) với $x \in S \subset R^n$, lúc đó có bài toán tối ưu sau: $\underset{x \in S}{\text{Min}}\, f(x)$

Ví dụ 7. Min $f(x_1, x_2) = (x_1 – 3/2)^2 + (x_2 - 5)^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Dễ thấy, miền ràng buộc S là tập lồi đa diện, S là tổ hợp lồi của bốn điểm cực biên (0, 0), (0, 2), (1, 3) và (5,5, 0).

Xét bài toán cực tiểu hóa $\underset{x \in S}{\text{Min}}\, f(x)$. Một số khái niệm sau được coi là đã biết: S được gọi là miền phương án khả thi hay miền ràng buộc. Điểm $x \in S$ được gọi là phương án khả thi hay phương án (nếu nói vắn tắt). $\overline{x} \in S$ được gọi là phương án tối ưu toàn cục nếu $f(\overline{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in$ S. Điểm $\overline{x} \in S$ được gọi là phương án tối ưu địa phương nếu $f(\overline{x}) \leq f(x)$, $\forall x \in$ S $\cap$ $N_\varepsilon(\overline{x})$ với $N_\varepsilon(\overline{x})$ là một lân cận ε đủ nhỏ nào đó của $\overline{x}$.

Định lý 23 *(cực tiểu hóa hàm lồi)***.**

Cho $f : S \subset R^n \to R$, với S là tập lồi khác rỗng. Xét bài toán cực tiểu hóa $\underset{x \in S}{\text{Min}}\, f(x)$. Giả sử $\overline{x} \in S$ là một phương án tối ưu địa phương. Lúc đó:

– Nếu f là hàm lồi thì $\overline{x}$ là phương án tối ưu toàn cục.

– Nếu f lồi ngặt thì $\overline{x}$ là phương án tối ưu toàn cục duy nhất.

Chứng minh

Giả sử f là hàm lồi và $\overline{x} \in S$ là một phương án tối ưu địa phương. Do đó tồn tại một lân cận đủ nhỏ $N_\varepsilon(\overline{x})$ của $\overline{x}$ sao cho

$$f(\overline{x}) \leq f(x),\ \forall x \in S \cap N_\varepsilon(\overline{x}). \quad (6.24)$$

Chứng minh bằng phản chứng, giả sử điều ngược lại: $\bar{x}$ không là phương án tối ưu toàn cục, thế thì $\exists\ \hat{x} \in S$ sao cho $f(\hat{x}) < f(\bar{x})$. Vì f là hàm lồi nên với $\lambda \in (0, 1)$ ta có:

$$f\left(\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}\right) \le \lambda f(\hat{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) < \lambda f(\bar{x}) + (1-\lambda)f(\bar{x}) = f(\bar{x}). \qquad (6.25)$$

Do $\lambda > 0$ có thể chọn khá nhỏ, nên $\lambda\hat{x} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap N_\varepsilon(\bar{x})$, ta có (6.25) mâu thuẫn với (6.24).

Giả sử f là lồi ngặt, thì theo phần trên, $\bar{x}$ là tối ưu toàn cục. Cần chứng minh nó là phương án tối ưu toàn cục duy nhất. Giả sử tồn tại một phương án $x \in S$ và có $f(x) = f(\bar{x})$, thế thì

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\bar{x}\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

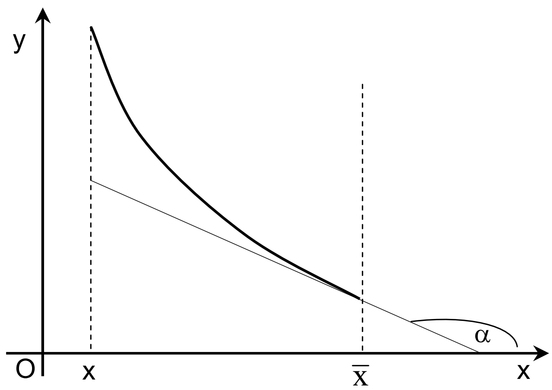
Ngoài ra, $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\bar{x} \in S$. Điều này mâu thuẫn với tính tối ưu toàn cục của $\bar{x}$ (đpcm). ■

Định lý 24 (*cực tiểu hóa hàm lồi*).

Cho $f: S \subset R^n \to R$ là hàm lồi, xét bài toán cực tiểu hóa $\underset{x \in S}{\mathrm{Min}}\, f(x)$. Lúc đó: $\bar{x} \in S$ là phương án tối ưu khi và chỉ khi $\forall x \in S$, luôn tồn tại một dưới vi phân ξ của f tại $\bar{x}$ sao cho $\xi^T(x - \bar{x}) \ge 0$.

Chứng minh

Minh họa hình học của định lý được thể hiện trên hình VI.9 (với $x < \bar{x}$ thì ta chỉ ra được dưới vi phân ξ = tg α và điều kiện $\xi^t(x - \bar{x}) \ge 0$ được thỏa mãn).



Hình VI.9. Điều kiện tối ưu cho bài toán Min

Giả sử $\xi^T(x - \bar{x}) \ge 0$, $\forall x \in S$, trong đó ξ là dưới vi phân của f tại $\bar{x}$. Do f là hàm lồi, ta có: $f(x) \ge f(\bar{x}) + \xi^T(x - \bar{x}) \ge f(\bar{x})$, $\forall x \in S$. Vậy $\bar{x}$ là phương án tối ưu.

Ngược lại, giả sử $\bar{x}$ là phương án tối ưu của bài toán. Chúng ta xây dựng hai tập sau đây trong R^{n+1}:

tập $\quad \Lambda_1 = \left\{(x - \bar{x}, y) : x \in R^n, y > f(x) - f(\bar{x})\right\}$

và tập $\Lambda_2 = \{(x - \overline{x}, y) : x \in S, y \le 0\}$.

Dễ dàng kiểm tra được Λ_1 và Λ_2 là các tập lồi. Ngoài ra, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$ vì nếu trái lại thì tồn tại (x, y) sao cho $x \in S$ và $0 \ge y > f(x) - f(\overline{x})$, mâu thuẫn với giả thiết $\overline{x}$ là phương án tối ưu. Theo định lý 8, sẽ có một siêu phẳng phân tách $\Lambda_1$và Λ_2, tức là tồn tại véc tơ $(\xi_0, \mu) \neq 0$ và một số vô hướng α sao cho:

$$\xi_0^T(x - \overline{x}) + \mu y \le \alpha \text{ ứng với } x \in R^n,\ y > f(x) - f(\overline{x}), \tag{6.26}$$

và
$$\xi_0^T(x - \overline{x}) + \mu y \ge \alpha \text{ ứng với } x \in S,\ y \le 0. \tag{6.27}$$

Trong (6.27) cho $x = \overline{x}$ và y = 0 thì có $\alpha \le 0$. Trong (6.26) cho $x = \overline{x}$ và $y = \varepsilon > 0$ thì có $\mu\varepsilon \le \alpha$. Do ε có thể chọn tùy ý, nên $\mu \le 0 \le \alpha$. Tóm lại ta có $\mu \le 0$ và $\alpha = 0$.

Giả sử $\mu = 0$, thì từ (6.26) có $\xi_0^T(x - \overline{x}) \le 0$, $\forall x$. Đặt $x = \overline{x} + \xi_0$ thì suy ra: $0 \ge \xi_0^T(x - \overline{x}) = \|\xi_0\|^2$ hay $\xi_0 = 0$. Do $(\xi_0, \mu) \neq (0, 0)$ nên $\mu < 0$. Chia cả hai vế của (6.26) và (6.27) cho $-\mu$ và đặt $-\xi_0 / \mu = \xi$, chúng ta có:

$$y \ge \xi^T(x - \overline{x}) \text{ ứng với } x \in R^n,\ y > f(x) - f(\overline{x}), \tag{6.28}$$

và
$$\xi^T(x - \overline{x}) - y \ge 0 \text{ ứng với } x \in S,\ y \le 0. \tag{6.29}$$

Trong (6.29) cho y = 0 thì ta có $\xi^T(x - \overline{x}) \ge 0$, $\forall x \in S$. Từ (6.28) suy ra ngay $f(x) \ge f(\overline{x}) + \xi^T(x - \overline{x})$, $\forall x \in R^n$. Vậy ξ là dưới vi phân của hàm f tại $\overline{x}$ sao cho $\xi^T(x - \overline{x}) \ge 0$, $\forall x \in S$ (đpcm). ■

Hệ quả 24a. Trong điều kiện của định lý trên, nếu S là tập mở và $\overline{x}$ là phương án tối ưu thì tồn tại dưới vi phân $\xi = 0$ tại $\overline{x}$.

Hệ quả 24b. Trong điều kiện của định lý trên, nếu f khả vi thì $\overline{x}$ là phương án tối ưu khi và chỉ khi $\nabla f(\overline{x})^T(x - \overline{x}) \ge 0, \forall x \in S$. Ngoài ra, nếu S là tập mở thì $\overline{x}$ là phương án tối ưu khi và chỉ khi $\nabla f(\overline{x}) = 0$.

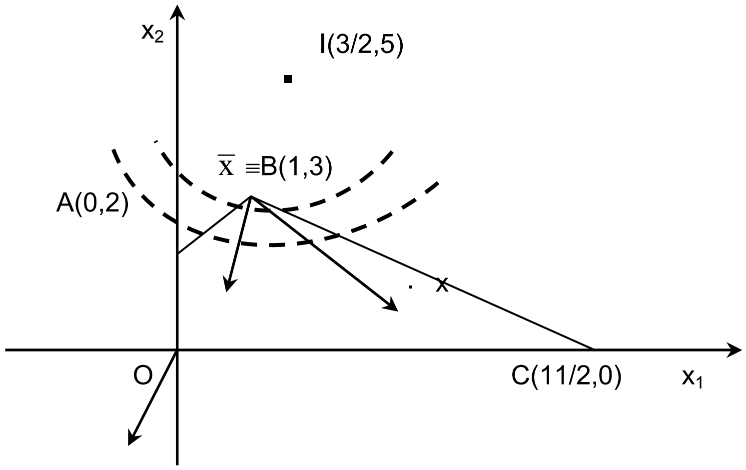
Việc chứng minh hai hệ quả này khá dễ dàng, được dành cho bạn đọc.

Ví dụ 8. Xét bài toán tối ưu Min $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3/2)^2 + (x_2 - 5)^2$

với miền ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 11 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0. \end{cases}$$

Đây là BTQHL (xem minh họa hình VI.10).



Hình VI.10. Bài toán quy hoạch lồi

Điểm B(1, 3) là phương án tối ưu vì :

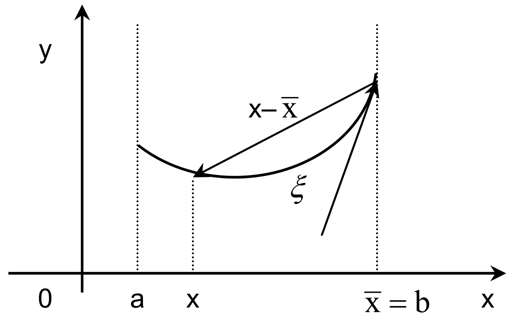
$$\nabla f(1,3) = \begin{bmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \end{bmatrix}_{(1,3)} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 3/2) \\ 2(x_2 - 5) \end{bmatrix}_{(1,3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Trên hình VI.10 ta thấy, tại $\overline{x} = (1,3)$, $\forall$ x thuộc miền ràng buộc S, luôn có $\nabla f(1,3)^T(x - \overline{x}) > 0$. Do đó $\overline{x} = (1,3)$ là phương án tối ưu toàn cục.

Xét điểm $\overline{x}$ = (0, 0) có $\nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} -3 \\ -10 \end{bmatrix}$. Do đó tồn tại $x \in S$ sao cho $x - \overline{x}$ hợp với $\nabla f(0,0)$ góc tù hay $\nabla f(0,0)^T(x - \overline{x}) < 0$. Vậy $\overline{x} = (0,0)$ không là điểm tối ưu.

Định lý 25 *(cực đại hóa hàm lồi)***.**

Cho $f : S \subset R^n \to R$ là hàm lồi, xét bài toán cực đại hóa $\underset{x \in S}{Max} f(x)$. Nếu $\overline{x} \in S$ là phương án tối ưu địa phương thì $\xi^T(x - \overline{x}) \le 0, \forall x \in S$, trong đó ξ là một dưới vi phân bất kỳ của f tại $\overline{x}$.



Hình VI.11. Cực đại hóa hàm lồi

Chứng minh

Giả sử $\overline{x} \in S$ là phương án tối ưu địa phương (xem hình VI.11). Lúc đó tồn tại một lân cận $N_\varepsilon(\overline{x})$ sao cho $f(x) \le f(\overline{x})$, $\forall x \in S \cap N_\varepsilon(\overline{x})$. Lấy $x \in S$ và $\lambda > 0$ đủ nhỏ thì $\overline{x} + \lambda(x - \overline{x}) \in S \cap N_\varepsilon(\overline{x})$. Do đó $f\left[\overline{x} + \lambda(x - \overline{x})\right] \le f(\overline{x})$.

Cho ξ là dưới vi phân của f tại $\overline{x}$, do f là hàm lồi nên:

$$f\left[\overline{x} + \lambda(x - \overline{x})\right] - f(\overline{x}) \ge \lambda\xi^T(x - \overline{x}).$$

Từ các bất đẳng thức trên đây suy ra $\lambda\xi^T(x - \overline{x}) \le 0$. Chia cả hai vế cho λ chúng ta có $\xi^T(x - \overline{x}) \le 0$ (đpcm). ■

Hệ quả 25a.

Nếu ngoài các điều kiện của định lý 25, ta giả thiết điều kiện f là hàm khả vi thì: từ $\overline{x} \in S$ là phương án tối ưu địa phương suy ra $\nabla f(\overline{x})^T(x - \overline{x}) \le 0, \forall x \in S$.

Việc kiểm nghiệm hệ quả này dành cho bạn đọc.

Chú ý. Điều kiện nêu trong định lý chỉ là điều kiện cần chứ không phải điều kiện đủ.

Ví dụ 9. Xét bài toán: Max $y = x^2$ với $x \in S = [-1, 2]$. Dễ thấy $y_{max} = 4$ đạt tại $\overline{x} = 2$. Trong khi đó tại $\overline{x} = 0$ thì $\nabla f(\overline{x}) = 0$ nên $\nabla f(\overline{x})(x - \overline{x}) \le 0, \forall x \in S$. Tuy nhiên, tại $\overline{x} = 0$ hàm $y = x^2$ không có cực đại.

Định lý 26.

Cho $f : S \subset R^n \to R$ là hàm lồi, S là một tập lồi đa diện compact. Xét bài toán: Max f(x) với $x \in S$. Lúc đó tồn tại một phương án tối ưu toàn cục $\overline{x}$ với $\overline{x}$ là một điểm cực biên nào đó của S.

Chứng minh

Theo định lý 17, f là hàm liên tục. Vì S là tập compact nên hàm f sẽ đạt max tại một điểm $x' \in S$. Nếu x' là điểm cực biên của S thì đã chứng minh xong. Nếu x' không là điểm cực biên của S thì có:

$x' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ sao cho $\lambda_i \ge 0$ và $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, với x_i là các điểm cực biên của S, $i = \overline{1, k}$,

$$\Rightarrow f(x') = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \le f(x') \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = f(x')$$

$\Rightarrow f(x_i) = f(x') \Rightarrow$ hàm f đạt cực đại tại điểm cực biên x_i (đpcm). ■

4. Các Điều kiện tối ưu Fritz – John và Kuhn – Tucker

4.1. Bài toán tối ưu không có ràng buộc

Định lý 27. Xét hàm $f : R^n \to R$ khả vi tại $\overline{x}$. Nếu tồn tại hướng d sao cho $\nabla f(\overline{x})^T d < 0$ thì $\exists\ \delta > 0$ sao cho: $f(\overline{x} + \lambda d) < f(\overline{x})$ với mọi $\lambda \in (0, \delta)$. Vì vậy, d được gọi là hướng giảm của f tại $\overline{x}$.

Chứng minh

Do f khả vi tại $\bar{x}$, nên $f(\bar{x}+\lambda d)=f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})^T d+\lambda\|d\|\alpha(\bar{x};\lambda d)$, trong đó $\alpha(\bar{x};\lambda d)\to 0$ khi $\lambda \to 0$. Từ đó có:

$$\frac{f(\bar{x}+\lambda d)-f(\bar{x})}{\lambda}=\nabla f(\bar{x})^T d+\|d\|\alpha(\bar{x};\lambda d).$$

Do $\nabla f(\bar{x})^T d<0$ và $\alpha(\bar{x};\lambda d)\to 0$ khi $\lambda \to 0$, nên $\exists\ \delta > 0$ sao cho $f(\bar{x}+\lambda d)<f(\bar{x})$ với mọi $\lambda \in (0,\delta)$ (đpcm). ■

Chú ý. Nếu hướng d là hướng giảm thì ta có thể dịch chuyển một bước tương đối ngắn trên hướng d để hàm mục tiêu giảm đi.

Hệ quả 27a. Trong điều kiện của định lý trên, nếu giả sử thêm $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương của bài toán $\underset{x\in R^n}{\mathrm{Min}}\, f(x)$ thì $\nabla f(\bar{x})=0$.

Chứng minh

Cho $\bar{x}$ là cực tiểu địa phương. Giả sử $\nabla f(\bar{x})\neq 0$, đặt d = $-\nabla f(\bar{x})$ thì có ngay $\nabla f(\bar{x})^T d<0$. Theo định lý 27, $\exists\ \delta>0$ sao cho: $f(\bar{x}+\lambda d)<f(\bar{x})$ với mọi $\lambda \in (0,\delta)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\bar{x}$ là cực tiểu địa phương. Vậy bắt buộc $\nabla f(\bar{x})=0$. ■

Định lý 28 *(điều kiện cần để có cực tiểu địa phương)***.**

Cho $f: R^n \to R$ là hàm khả vi cấp hai tại $\bar{x}$. Nếu $\bar{x}$ là cực tiểu địa phương của bài toán $\underset{x\in R^n}{\mathrm{Min}}\, f(x)$ thì $\nabla f(\bar{x})=0$ và $H(\bar{x})$ là nửa xác định dương.

Chứng minh

Do f là hàm khả vi cấp hai nên ta có khai triển Taylor tới vi phân cấp hai là:

$$f(\bar{x}+\lambda d)=f(\bar{x})+\lambda\nabla f(\bar{x})^T d+\frac{1}{2}\lambda^2 d^T H(\bar{x})d+\lambda^2\|d\|^2\alpha(\bar{x},\lambda d),$$

với $\alpha(\bar{x},\lambda d) \to 0$ khi $\lambda\to 0$. Theo hệ quả 27a, ta có $\nabla f(\bar{x})=0$. Mặt khác, bằng cách làm tương tự như trong chứng minh của định lý 27 (chuyển vế một số số hạng, chia hai vế cho λ^2 và lấy giới hạn khi $\lambda \to 0$), ta có: $d^T H(\bar{x})d\geq 0, \forall d$

$\Rightarrow\ x^T H(\bar{x})x\geq 0, \forall x=\lambda d\ \Rightarrow\ H(\bar{x})$ là nửa xác định dương (đpcm). ■

Định lý 29 *(điều kiện đủ để có cực tiểu địa phương)***.**

Cho $f: R^n \to R$ là hàm khả vi cấp hai tại $\bar{x}$, $\nabla f(\bar{x})= 0$ và $H(\bar{x})$ xác định dương. Lúc đó, $\bar{x}$ sẽ là cực tiểu địa phương. Nếu ngoài ra f là lồi tại $\bar{x}$ thì $\bar{x}$ là cực tiểu toàn cục.

Chứng minh

Giả sử $\bar{x}$ không là cực tiểu địa phương, thì ta xây dựng được dãy $\{x_k\}$ hội tụ tới $\bar{x}$ sao cho $f(x^k) < f(\bar{x})$. Ta có khai triển Taylor tới vi phân cấp hai tại $\bar{x}$ như sau:

$$f(x^k)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^T(x^k-\bar{x})+\frac{1}{2}(x^k-\bar{x})^T H(\bar{x})(x^k-\bar{x})+\|x^k-\bar{x}\|^2\alpha(\bar{x},x^k-\bar{x}),$$

với $\alpha(\bar{x}, x^k - \bar{x}) \to 0$ khi $\lambda \to 0$. Ký hiệu $d^k = (x^k - \bar{x})/\|x^k - \bar{x}\|$, ta sẽ có

$$\frac{1}{2}(d^k)^T H(\bar{x})d^k + \alpha(\bar{x}; x^k - \bar{x}) < 0, \forall k. \tag{6.30}$$

Do $\|d^k\| = 1$ nên có thể trích từ dãy $\{d^k\}$ ra một dãy con $\{d^k\}_S$ hội tụ tới véc tơ d nào đó với $\|d\| = 1$ khi $k \to +\infty$. Từ (6.30) suy ra $(d)^T H(\bar{x})d \le 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết H($\bar{x}$) xác định dương. Vậy $\bar{x}$ là cực tiểu địa phương.

Cho f lồi thì $f(x) \ge f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})(x - \bar{x})$, $\forall$ x $\in R^n$. Do $\nabla f(\bar{x}) = 0$, nên $f(\bar{x}) \le f(x)$, $\forall$ x $\in$ R^n (đpcm). ■

4.2. Bài toán tối ưu có ràng buộc

Xét bài toán tối ưu $\underset{x \in S}{\text{Min}} f(x)$, với hàm $f: S \subset R^n \to R$ là khả vi tại $\bar{x} \in S$.

Định nghĩa 11.

Cho một tập khác rỗng $S \subset R^n$ và $\bar{x} \in$ cl S. Nón các hướng chấp nhận của S tại $\bar{x}$ là tập D = $\{d : d \ne 0, \bar{x} + \lambda d \in S, \forall \lambda \in (0, \delta)\}$ với một số $\delta > 0$ nào đó. d $\in$ D được gọi là hướng chấp nhận.

Xét hàm f khả vi tại $\bar{x}$, lúc đó $F_0 = \{d : \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$ được gọi là nón các hướng cải thiện (Chú ý rằng: khi dịch chuyển trên hướng d với độ dài bước dịch chuyển là λ đủ bé từ $\bar{x}$ tới điểm x = $\bar{x} + \lambda d$, ta có $f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x})$).

Định lý 30. Xét bài toán $\underset{x \in S}{\text{Min}} f(x)$, với S khác rỗng và $f: S \subset R^n \to R$ là hàm khả vi tại $\bar{x} \in S$. Lúc đó, nếu $\bar{x}$ là điểm tối ưu địa phương thì $F_0 \cap D = \varnothing$.

Chứng minh

Giả sử điều ngược lại: $\exists$ d $\in F_0 \cap D$. Vì d $\in F_0$ nên theo định lý 27, d là hướng giảm, tức là $\exists\ \delta_1 > 0$ sao cho :

$$f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x}), \forall\ \lambda \in (0, \delta_1). \tag{6.31}$$

Do d $\in$ D nên $\exists\ \delta_2 > 0$ sao cho:

$$\bar{x} + \lambda d \in S, \forall\ \lambda \in (0, \delta_2). \tag{6.32}$$

Từ (6.31) và (6.32) suy ra $\bar{x}$ không thể là điểm tối ưu địa phương (đpcm). ■

Ta xét BTQHPT có ràng buộc được gọi là *bài toán P* $: \underset{x \in S}{\text{Min}} f(x)$, với S = $\{x \in X : g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1, m}\}$, trong đó $g_i : R^n \to R$ và X là tập mở khác rỗng. Theo định lý 30, điều kiện cần để $\bar{x}$ là cực tiểu địa phương là $F_0 \cap D = \varnothing$.

Định lý 31. Xét *bài toán P.* Giả sử:

– $\bar{x}$ là phương án tối ưu địa phương.

– I là tập các chỉ số các ràng buộc được thoả mãn chặt tại $\bar{x}$: $I = \{i : g_i(\bar{x}) = 0\}$.

– Tất cả các hàm f, g_i, $\forall i \in I$ là khả vi tại $\bar{x}$, còn g_i liên tục tại $\bar{x}$, $\forall i \notin I$.

Lúc đó $F_0 \cap G_0 = \varnothing$, trong đó: $G_0 = \{d : \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \forall i \in I\}$ là tập các hướng giảm cho tất cả các hàm ràng buộc $g_i(x)$ mà $g_i(\bar{x}) = 0$, còn $F_0 = \{d : \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}$ là nón các hướng cải thiện tại $\bar{x}$.

Chứng minh

Giả sử $d \in G_0$. Do $\bar{x} \in X$, với X là tập mở nên $\exists\ \delta_1 > 0$ sao cho $\bar{x} + \lambda d \in X$, $\forall \lambda \in (0, \delta_1)$. Do $g_i(\bar{x}) < 0$ và là hàm liên tục $\forall i \notin I$ nên $\exists\ \delta_2 > 0$ sao cho $g_i(\bar{x} + \lambda d) < 0$, $\forall \lambda \in (0, \delta_1)$ và $\forall i \notin I$. Cuối cùng nếu $d \in G_0 = \{d : \nabla g_i(\bar{x})^T d < 0, \forall i \in I\}$ thì theo định lý 27 sẽ tồn tại $\delta_3 > 0$ sao cho $g_i(\bar{x} + \lambda d)$ $< g_i(\bar{x})$, $\forall i \in I$, $\forall \lambda \in (0, \delta_3)$. Từ các phân tích trên đây, ta có $\bar{x} + \lambda d \in S$, $\forall \lambda \in (0, \delta)$, trong đó $\delta =$ Min $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Vậy $d \in D$, với D là nón các hướng chấp nhận của S tại $\bar{x}$.

Như vậy chúng ta đã chứng minh được $G_0 \subset D$. Theo định lý 30, do $\bar{x}$ là điểm tối ưu địa phương nên $F_0 \cap D = \varnothing$. Từ đây suy ra $F_0 \cap G_0 = \varnothing$ (đpcm). ■

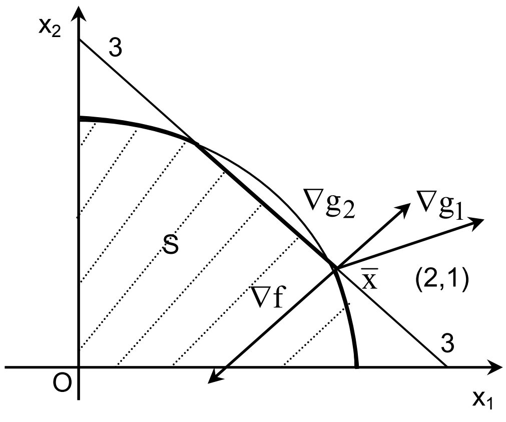
Ví dụ 20. Xét bài toán Min $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$, với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \le 0 \\ g_2(x) = x_1 + x_2 - 3 \le 0 \\ g_3(x) = -x_1 \le 0 \\ g_4(x) = -x_2 \le 0. \end{cases}$$

Tại $\bar{x} = (2, 1)^T$ có:

$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix},\ \nabla g_1(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},\ \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Do $g_1(\bar{x}) = 0, g_2(\bar{x}) = 0$, $G_0 = \{d : \nabla g_1(\bar{x})d < 0, \nabla g_2(\bar{x})d < 0\}$ nên $\bar{x} = (2,1)^T$ có khả năng là phương tối ưu vì $F_0 \cap G_0 = \varnothing$ (xem hình VI.12).



Hình VI.12. Minh họa trường hợp $F_0 \cap G_0 = \varnothing$

4.3. Điều kiện tối ưu Fritz – John

Định lý 32.

Cho tập mở khác rỗng $X \subset R^n$ và các hàm f: $R^n \to R$, g_i: $R^n \to R$,với i = $\overline{1,m}$. Xét *bài toán P*: $\underset{x \in S}{\mathrm{Min}}\, f(x)$ với S = $\left\{x \in X : g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m}\right\}$.

Xét điểm $\overline{x} \in S$. Ký hiệu I = $\left\{i :\ g_i(\overline{x}) = 0\right\}$. Giả sử các hàm $f,\ g_i, \forall i \in I$ khả vi tại $\overline{x}$, còn g_i liên tục tại $\overline{x}, \forall i \notin I$. Lúc đó, nếu $\overline{x}$ là điểm cực tiểu địa phương của *bài toán P* thì tồn tại u_0 và u_i, $\forall$ i $\in$ I, sao cho:

$$\begin{cases} u_0 \nabla f(\overline{x}) + \sum\limits_{i \in I} u_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0 \\ u_0, u_i \ge 0,\ u_0, u_i \textit{ không đồng thời bằng } 0, \forall i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Ngoài ra, nếu giả thiết thêm g_i cũng khả vi tại $\overline{x}, \forall i \notin I$, thì ta có:

$$\begin{cases} u_0 \nabla f(\overline{x}) + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0 \\ u_i g_i(\overline{x}) = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ u_0, u_i \ge 0,\ u_0, u_i \textit{ không đồng thời bằng } 0, \forall i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Chứng minh

Nếu $\overline{x}$ là phương án tối ưu địa phương thì $F_0 \cap G_0 = \varnothing$ nên $\exists$ d sao cho: $\nabla f(\overline{x})^T d < 0$ *và* $\nabla g_i(\overline{x})^T d < 0, \forall i \in I$ hay $Ad \le 0$, với A là ma trận có các hàng là $\nabla f(\overline{x})^T, \nabla g_i(\overline{x})^T, \forall i \in I$. Vậy hệ $Ad \le 0$ vô nghiệm.

Theo định lý 9, có đúng một trong hai hệ sau có nghiệm: hệ 1: Ad ≤ 0, hệ 2: $A^T p = 0$ và p ≥ 0. Vậy $\exists$ $p \ge 0$ và $p \ne 0$ sao cho $A^T p = 0$. Do đó tồn tại u_0 và $u_i \ge 0$, $\forall i \in I$, sao cho:

$$\left[\nabla f(\overline{x}), \ldots, \nabla g_i(\overline{x}), \ldots\right] \times \begin{bmatrix} u_0 \\ \ldots \\ u_i \\ \ldots \end{bmatrix} = 0 \text{ với } p = \begin{bmatrix} u_0 \\ \ldots \\ u_i \\ \ldots \end{bmatrix} \ge 0.$$

Như vậy chúng ta đã chứng minh xong phần đầu của định lý 32. Phần sau của định lý có thể được chứng minh bằng cách đặt $u_i = 0$, $\forall i \notin I$ (đpcm). ■

4.4. Điều kiện tối ưu Kuhn – Tucker

Định lý 33. Cho tập mở khác rỗng $X \subset R^n$ và các hàm $f,\ g_i : R^n \to R, \forall i = \overline{1,m}$. Xét *bài toán P*: $\underset{x \in S}{\mathrm{Min}}\, f(x)$ với S = $\left\{x \in X : g_i(x) \le 0, \forall i = \overline{1,m}\right\}$. Cho $\overline{x} \in S$.

Ký hiệu I = $\{i : g_i(\overline{x}) = 0\}$. Giả sử các hàm $f, g_i, \forall i \in I$ khả vi tại $\overline{x}$, còn g_i liên tục tại $\overline{x}, \forall i \notin I$. Ngoài ra, giả sử $\nabla g_i(\overline{x}), \forall i \in I$ là các véc tơ độc lập tuyến tính. Lúc đó, nếu $\overline{x}$ là điểm cực tiểu địa phương của *bài toán P* thì $\exists$ u_i, $\forall$ i $\in$ I sao cho:

$$\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0 \quad \text{với } u_i \geq 0, \forall i \in I.$$

Hơn nữa, nếu $\forall i \notin I$, g_i cũng khả vi tại $\overline{x}$ thì $\exists$ u_i, $\forall$ i = $\overline{1,m}$ sao cho:

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0 \\ u_i g_i(\overline{x}) = 0, \forall i = \overline{1,m} \\ u_i \geq 0, \forall i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Chứng minh

Ta đi chứng minh phần đầu của định lý. Theo định lý 32, tồn tại u_0, $\hat{u}_i$ $\forall$ i $\in$ I, sao cho $u_0 \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} \hat{u}_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0$. Mặt khác, ta thấy $u_0 \neq 0$ (vì nếu $u_0 = 0$ thì các véc tơ $g_i(\overline{x}), \forall i \in I$ là phụ thuộc tuyến tính, mâu thuẫn với giả thiết). Chia cả 2 vế cho u_0 và đặt $u_i = \hat{u}_i / u_0$ thì phần đầu của định lý được chứng minh xong. Để chứng minh phần sau của định lý, ta chỉ cần đặt u_i = 0, $\forall i \notin I$ (đpcm). ■

Tóm lại, nếu $\overline{x}$ là phương án tối ưu địa phương thì $\overline{x}$ thoả mãn điều kiện Kuhn – Tucker được viết một cách ngắn gọn hơn như sau:

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \nabla g(\overline{x}) u = 0 \\ u^t g(\overline{x}) = 0 \\ u \geq 0. \end{cases}$$

trong đó $\nabla g(\overline{x})$ là ma trận với các cột là $\nabla g_i(\overline{x})$, $\forall$ i = $\overline{1,m}$, còn u = $(u_1, u_2, \ldots, u_m)^T$ là véc tơ m tọa độ. Vậy điều kiện Kuhn – Tucker là điều kiện cần để $\overline{x}$ là phương án tối ưu địa phương.

Định lý 34. Cho tập mở khác rỗng X $\subset$ R^n và các hàm $f, g_i : R^n \to R, \forall i = \overline{1,m}.$ Xét *bài toán P*: $\underset{x \in S}{\text{Min}}\, f(x)$ với S = $\{x \in X : g_i(x) \leq 0, \forall i = \overline{1,m}\}$. Cho $\overline{x} \in S$.

Ký hiệu I = $\{i : g_i(\overline{x}) = 0\}$. Giả sử các hàm $f, g_i, \forall i \in I$ là các hàm lồi và khả vi tại $\overline{x}$. Lúc đó, nếu $\exists$ $u_i \geq 0$, $\forall$ i $\in$ I sao cho: $\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i \in I} u_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0$, thì $\overline{x}$ là điểm cực tiểu toàn cục của *bài toán P*.

Chứng minh

Giả sử x cũng là một phương án (khả thi) của *bài toán P*. Lúc đó, $\forall$ i $\in$I ta có $g_i(x) \leq g_i(\overline{x})$. Do g_i là hàm lồi tại $\overline{x}$ nên:

$g_i[\overline{x} + \lambda(x - \overline{x})] = g_i[\lambda x + (1 - \lambda)\overline{x}] \leq$ Maximum $\{g_i(x), g_i(\overline{x})\} = g_i(\overline{x})$, $\forall$ $\lambda \in (0, 1)$.

Điều này có nghĩa là hàm g_i sẽ không tăng khi ta dịch chuyển từ điểm $\overline{x}$ trên hướng x – $\overline{x}$ một bước tương đối ngắn. Theo định lý 27, ta có $\nabla g_i(\overline{x})^T(x-\overline{x}) \le 0$. Nhân các bất đẳng thức này với u_i và cộng lại, ta nhận được: $[\sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\overline{x})^T](x-\overline{x}) \le 0$. Từ giả thiết, $\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\overline{x}) = 0$, suy ra $\nabla f(\overline{x})^T(x-\overline{x}) \ge 0$. Do f là hàm lồi tại $\overline{x}$, nên ta có f(x) ≥ f($\overline{x}$) (đpcm). ■

Mở rộng điều kiện tối ưu Kuhn – Tucker

Đối với các BTQHPT tổng quát hơn, khi các ràng buộc có dạng bất đẳng thức và / hoặc đẳng thức, có thể chứng minh được định lý sau đây (bạn đọc có thể xem thêm trong các tài liệu tham khảo)

Định lý 35 *(điều kiện tối ưu cần và đủ)*.

Cho tập mở khác rỗng X ⊂ R^n. Xét *bài toán P:* Min f(x) với x ∈ S được xác định bởi các điều kiện ràng buộc sau:

$$\begin{cases} g_i(x) \le 0,\ i = \overline{1,m} \\ h_i(x) = 0,\ i = \overline{1,r} \\ x \in X \subset R^n. \end{cases}$$

Giả sử $\overline{x}$ ∈ S và các hàm $f,\ g_i, \forall i \in I$ (với I = $\{i : g_i(\overline{x}) = 0\}$) là khả vi tại $\overline{x}$, còn các hàm g_i là liên tục tại $\overline{x}, \forall i \notin I$, các hàm h_i là khả vi liên tục tại $\overline{x}, \forall i = \overline{1,r}$. Ngoài ra, giả sử $\nabla g_i(\overline{x}), \forall i \in I$ và $\nabla h_i(\overline{x}), \forall i = \overline{1,r}$ là các véc tơ độc lập tuyến tính.

Lúc đó, nếu $\overline{x}$ là điểm cực tiểu địa phương của bài toán P thì ∃ u_i, ∀ i ∈ I, và $v_i, \forall i = \overline{1,r}$, sao cho:

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{r} v_i \nabla h_i(\overline{x}) = 0 \\ u_i \ge 0, \forall i \in I. \end{cases}$$

Nếu ngoài ra, các hàm $g_i : R^n \to R, \forall i \notin I$ cũng khả vi tại $\overline{x} \in S$, thì *điều kiện Kuhn – Tucker* (điều kiện cần) để $\overline{x} \in S$ là phương án tối ưu có thể được viết như sau:

$$\begin{cases} \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{r} v_i \nabla h_i(\overline{x}) = 0 \\ u_i g_i(\overline{x}) = 0,\quad \forall i = \overline{1,m} \\ u_i \ge 0, \forall i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

Ngược lại, cho $\overline{x} \in S$ và các điều kiện sau đây được thoả mãn:

– ∃ u_i ≥ 0, ∀i∈I và ∃ $v_i, \forall i = \overline{1,r}$, sao cho: $\nabla f(\overline{x}) + \sum_{i\in I} u_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{r} v_i \nabla h_i(\overline{x}) = 0$.

– Các hàm $f,\ g_i, \forall i \in I$ là các hàm lồi và khả vi tại $\overline{x}$,

$-\forall i \in J = \{i : v_i > 0\}$, các hàm h_i là lồi, còn $\forall i \in K = \{i : v_i < 0\}$, các hàm $-h_i$ là lồi.

Lúc đó, $\bar{x}$ là điểm cực tiểu toàn cục của *bài toán P*.

Ví dụ 11. Xét BTQHL: Min $f(x) = x_1^2 + x_2^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 5 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Dễ thấy:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_1 = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \nabla g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \nabla g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \nabla h_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Vậy điều kiện Kuhn – Tucker có dạng:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \\ u_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) = 0 \\ u_2(-x_1) = 0 \\ u_3(-x_2) = 0 \\ u_i \ge 0. \end{cases}$$

Xét $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$. Từ hệ trên ta có $u_1 = u_2 = u_3 = 0$. Vậy $\begin{bmatrix} 8/5 \\ 16/5 \end{bmatrix} + v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$ hay $v_1 = -8/5$.

Do đó theo định lý 35, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$ là phương án tối ưu toàn cục.

Ví dụ 12. Xét BTQHL:

$$\begin{aligned} \text{Min}\ \ f(x) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1 - 3x_2 \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0. \end{cases}$$

Lúc này điều kiện Kuhn – Tucker có dạng:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 4x_1 + 4x_2 - 6 \\ 6x_2 + 4x_1 - 3 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \\ u_1(x_1 + x_2 - 1) = 0 \\ u_2(2x_1 + 3x_2 - 4) = 0 \\ u_3 x_1 = 0 \\ u_4 x_2 = 0 \\ u_i \geq 0, \forall i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Xét $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Từ hệ điều kiện trên ta có $u_2 = u_3 = 0$ nên $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0.$ Do đó $u_1 = 2$ và $u_4 = 1$. Vậy $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ là phương án tối ưu toàn cục.

5. Một số phương pháp hướng chấp nhận giải bài toán quy hoạch phi tuyến

Trong mục này chúng ta trình bày vắn tắt một số phương pháp hướng chấp nhận giải BTQHTT thông qua một vài ví dụ đơn giản. Các phương pháp này đều hội tụ tới *các điểm thỏa mãn điều kiện Kuhn – Tucker*. Vì vậy, nếu các giả thiết của định lý 34 hay 35 được thỏa mãn thì đây chính là các điểm tối ưu toàn cục.

5.1. Phương pháp hướng chấp nhận

Trước hết cần nhắc lại một số khái niệm sau đây. Xét bài toán tối ưu Min f(x) với $x \in S$, trong đó $f: R^n \to R$ và S là tập lồi khác rỗng, $S \subset R^n$. Một véc tơ $d \neq 0$ được gọi là một *hướng chấp nhận* tại $\overline{x} \in S$ nếu $\exists\, \delta > 0$ sao cho $\overline{x} + \lambda d \in S$ đúng $\forall \lambda \in (0, \delta)$. Ngoài ra, d được gọi là *hướng cải thiện* tại $\overline{x} \in S$, nếu $\exists\, \delta > 0$ sao cho $\overline{x} + \lambda d \in S$ và $f(\overline{x} + \lambda d) < f(\overline{x})$, đúng $\forall \lambda \in (0, \delta)$.

Nội dung của phương pháp hướng chấp nhận, hay còn được gọi là phương pháp hướng khả thi *(method of feasible directions)* như sau: Tại mỗi bước lặp, ứng với phương án x^k hiện có, phải xây dựng được một hướng cải thiện d^k. Sau đó, cần xác định độ dài *bước dịch chuyển*, $\lambda \geq 0$, để dịch chuyển từ x^k sang phương án mới x^{k+1} trên hướng d^k, căn cứ bài toán tối ưu với một biến λ (được gọi là *bài toán tìm kiếm trên hướng*): Min $f(x^k + \lambda d^k)$, sao cho $x^k + \lambda d^k \in S$. Từ đó, tìm được giá trị tối ưu của λ và nhận được phương án $x^{k+1} = x^k + \lambda d^k$ tốt hơn (hoặc ít nhất tốt bằng) phương án x^k.

Ví dụ 13. Xét BTQHPT: Min $f(x) = 8x_1^2 + 10x_2^2 + 12x_1x_2 + 50x_1 - 80x_2$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x) = x_1 - 1/2 \leq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ta thấy:

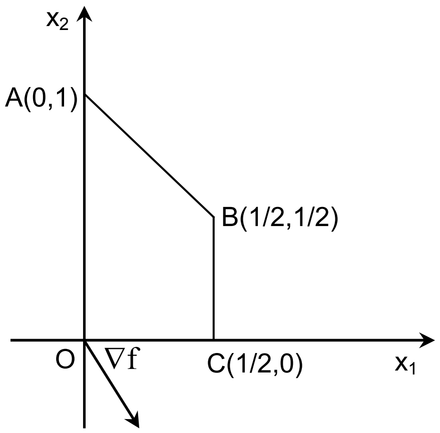
H(x_1,x_2) = $\begin{bmatrix} \partial^2 f/\partial x_1^2 & \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2 \\ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2 & \partial^2 f/\partial x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$ xác định dương nên đây là BTQHL.

Bước lặp 1: Xét $x^1 = (0, 0)$, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 16x_1 + 12x_2 + 50 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 20x_2 + 12x_1 - 80 \end{cases} \Rightarrow \nabla f(0,0) = \begin{bmatrix} 50 \\ -80 \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng kiểm tra được $\forall x = (x_1, x_2) \in S$, trong đó S là miền ràng buộc đã cho, ta có:

$$\Phi(x) = \nabla f(0,0)^T (x - x^1) = (50, -80)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 50x_1 - 80x_2.$$



HìnhVI.13. Minh họa phương pháp hướng chấp nhận

Từ đó có: Φ(O) = 0 (xem hình VI.13), Φ(B) = –15, Φ(A) = – 80 và Φ(C) = 25. Do Φ(A) < 0, x^1 = (0, 0) chưa phải là phương án tối ưu. Chọn hướng $d^1 = \overrightarrow{OA}$ = (0,1) là hướng chấp nhận. Để tìm độ dài bước dịch chuyển $\lambda \geq 0$, chúng ta xét bài toán sau: Min $f(x^1 + \lambda d^1) = 10\lambda^2 - 80\lambda$, với điều kiện ràng buộc $x^1 + \lambda d^1 \in S$ hay $\lambda \in [0, 1]$. Từ đó có $\lambda = 1$. Do đó $x^2 = x^1 + 1 \times d^1 = (0, 1)$.

Bước lặp 2: Xét điểm x^2 = (0, 1), ta có

$$\nabla f(0,1) = \begin{bmatrix} 16x_1 + 12x_2 + 50 \\ 20x_2 + 12x_1 - 80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ -60 \end{bmatrix}.$$

Xét bài toán Min $\Phi(x) = \nabla f(0,1)^T (x - x^2)$ = ($62x_1 - 60x_2 + 60$) với $x = (x_1, x_2) \in S$. Dễ dàng tính được Φ(0) = 60, Φ(A) = 0, Φ(B) = 61 và Φ (C) = 91 nên Min Φ(x) = 0 đạt được tại A(0, 1), Do đó, với mọi hướng chấp nhận d luôn có $\nabla f(0,1)^T d \geq 0$. Vậy ta dừng tại phương án tối ưu x^2 = A(0, 1) do không còn khả năng cải thiện được hàm mục tiêu.

5.2. Thuật toán Frank – Wolfe giải bài toán quy hoạch lồi có miền ràng buộc là tập lồi đa diện

Ví dụ 13 minh họa cho thuật toán Frank – Wolfe, một trong các phương pháp hướng chấp nhận giải BTQHPT: Min f(x) với $x \in S = \{x: Ax \le b\}$, trong đó S được giả thiết là giới nội.

Bước khởi tạo

Tìm một điểm $x^1 \in S$ (nói chung x^1 là điểm cực biên), đặt k := 1.

Các bước lặp (bước lặp thứ k)

Bước 1: Tính $\nabla f(x^k)$.

Bước 2: Xác định hàm $\Phi(x) = \nabla f(x^k)^T(x - x^k)$.

Giải bài toán Min Φ(x) với $x \in S$.

Bước 3:

i) Giả sử $\mu = \underset{x\in S}{\mathrm{Min}}\,\Phi(x) = \Phi(x^{/})$ và $\mu \ge 0$ thì dừng với x^k là phương án tối ưu.

ii) Nếu $\mu < 0$ thì $d^k = x^{/} - x^k$ chính là hướng giảm tốt nhất.

iii) Nếu $\left|\nabla f(x^k)^T(x^{/} - x^k)\right| < \varepsilon$ thì dừng với $x^{/}$ là nghiệm gần đúng có độ chính xác ε, trong đó ε là số dương khá nhỏ tuỳ ý chọn trước.

Bước 4:

Hướng cải thiện là hướng $d^k = (x^{/} - x^k)$. Tìm độ dài bước dịch chuyển $\lambda \ge 0$ bằng cách sử dụng kỹ thuật tối ưu thích hợp để giải bài toán Min $f(x^k + \lambda d^k)$ với điều kiện $x^k + \lambda d^k \in S$ và tìm ra λ. Tính $x^{k+1} = x^k + \lambda d^k$, đặt k := k + 1 và quay về bước 1.

Chú ý. Để giải bài toán ở bước 4 phải có kỹ thuật tối ưu thích hợp cho BTQHPT với một biến λ. Kỹ thuật này được gọi là kỹ thuật tìm kiếm trên hướng *(line search technique).*

5.3. Phương pháp gradient rút gọn

Trong mục này, chúng ta trình bày phương pháp gradient rút gọn *(the reduced gradient method)* để giải BTQHPT sau đây: *Min f(x) với* $x \in D = \{x \in R^n: Ax = b, x \ge 0\}$*,* trong đó A là ma trận cấp m×n, f(x) là hàm khả vi liên tục. Ngoài ra, *điều kiện không suy biến* được giả sử là đúng, tức là m véc tơ cột bất kì của A là độc lập tuyến tính và mỗi điểm cực biên của D đều có đúng m tọa độ dương (do đó, mỗi phương án x của bài toán đều có ít nhất m tọa độ dương).

Giả sử x là một phương án cực biên của bài toán. Lúc đó có thể phân rã A = [N B] với B là ma trận khả nghịch, $x^T = [x_N^T, x_B^T]$ với véc tơ biến cơ sở $x_B \ge 0$. Véc tơ gradient cũng được phân rã một cách tương ứng: $\nabla f(x)^T = [\nabla_N f(x)^T, \nabla_B f(x)^T]$. Dễ dàng chứng minh được rằng d là một hướng cải thiện tại x nếu $\nabla f(x)^T d < 0$ và Ad = 0, tọa độ thứ j của d là $d_j \ge 0$ nếu tọa độ thứ j của x là $x_j = 0$. Đặt $d^T = [d_N^T, d_B^T]$, thì $0 = Ad = Nd_N + Bd_B$ được thỏa mãn với $d_B = -B^{-1}Nd_N$.

Đặt $r^T = [r_N^T, r_B^T] = \nabla f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1}A = [\nabla_N f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1}N,\ \ 0]$, thì r^T được gọi là véc tơ gradient rút gọn. Lúc đó dễ dàng nhận được:

$$\nabla f(x)^T d = \nabla_N f(x)^T d_N + \nabla_B f(x)^T d_B = [\nabla_N f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1} N] d_N = r_N^T d_N . \quad (6.33)$$

Để xây dựng hướng cải thiện d, cần chọn d_N sao cho $r_N^T d_N < 0$ và $d_j \geq 0$ một khi $x_j = 0$, sau đó chọn $d_B = -B^{-1}Nd_N$.

Vậy chúng ta có *quy tắc xây dựng hướng cải thiện* như sau: "với mỗi tọa độ j ứng với biến x_j ngoài cơ sở chọn $d_j = -r_j$ nếu $r_j \leq 0$, chọn $d_j = -x_j r_j$ nếu $r_j > 0$". Quy tắc này sẽ đảm bảo rằng $d_j \geq 0$ một khi $x_j = 0$ và $\nabla f(x)^T d \leq 0$ (nếu $d_N \neq 0$ thì dấu bất đẳng thức là nghiêm ngặt).

Nhận xét. Nếu $d \neq 0$ thì d là hướng cải thiện hàm mục tiêu. Còn $d = 0$ khi và chỉ khi x là điểm thỏa mãn điều kiện Kuhn – Tucker.

Thật vậy, x là điểm Kuhn – Tucker khi và chỉ khi tồn tại các véc tơ u và v sao cho:

$$\begin{cases} u^T = (u_B^T, u_N^T) \geq (0,0) \\ [\nabla_B f(x)^T, \nabla_N f(x)^T] + v^T(B,N) - (u_B^T, u_N^T) = (0,0) \\ u_B^T x_B = 0, u_N^T x_N = 0. \end{cases} \quad (6.34)$$

Do $x_B > 0$, $u_B^T \geq 0$ nên $u_B^T x_B = 0$ khi và chỉ khi $u_B^T = 0$. Từ (6.34) suy ra $v^T = -\nabla_B f(x)^T B^{-1}$ và $u_N^T = \nabla_N f(x)^T + v^T N = \nabla_N f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1} N$. Do đó $u_N = r_N$. Vậy điều kiện Kuhn – Tucker trở thành $r_N \geq 0$ và $r_N^T x_N = 0$. Như vậy, x là điểm Kuhn – Tucker khi và chỉ khi $d = 0$.

Sau đây chúng ta trình bày thuật toán gradient rút gọn. Việc chứng minh tính hội tụ của thuật toán tới điểm Kuhn – Tucker là không dễ dàng nhưng cũng không quá khó, xin dành cho bạn đọc tự tìm hiểu.

Thuật toán gradient rút gọn

Bước khởi tạo

Chọn một điểm x^1 thỏa mãn $Ax^1 = b$, $x^1 \geq 0$. Đặt $k := 1$.

Các bước lặp (bước lặp thứ k)

Bước 1: Đặt I_k là tập m tọa độ lớn nhất của x_k, $B = \{a_j: j \in I_k\}$ và $N = \{a_j: j \notin I_k\}$,

$$r^T = \nabla f(x^k)^T - \nabla_B f(x^k)^T B^{-1} A ,$$

$$d_j = \begin{cases} -r_j , & \forall j \notin I^k, r_j \leq 0 \\ -x_j r_j , & \forall j \notin I^k, r_j > 0. \end{cases}$$

Nếu $\forall j \notin I_k$, $d_j = 0$ thì dừng.

Nếu trái lại, đặt $(d^k)^T = [d_N^T, d_B^T]$, với d_N xác định như trên và $d_B = -B^{-1}Nd_N$.

Bước 2: Giải bài toán tìm kiếm trên hướng Min $f(x_k + \lambda d_k)$ với $0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}$, trong đó

$$\lambda_{max} = \begin{cases} \mathrm{Min}\left\{\dfrac{-x_j^k}{d_j^k} : d_j^k < 0\right\} & \text{khi } d^k \not\geq 0 \\ \infty & \text{khi } d^k \geq 0. \end{cases}$$

Đặt $x^{k+1} = x^k + \lambda^k x^k$ với λ^k là phương án tối ưu của bài toán trên và k := k+1, sau đó chuyển về bước 1.

Ví dụ 14. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp gradient rút gọn.

Min f(x) = $2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$, với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Quá trình giải được tóm tắt trong bảng VI.1.

Bảng VI.1. Tóm tắt các bước lặp trong phương pháp gradient rút gọn

Bước lặp k	x^k	$f(x^k)$	I^k	Hướng tìm kiếm		Tìm kiếm trên hướng	
				r^k	d^k	λ^k	x^{k+1}
1	(0,0,2,5)	0	{3, 4}	(–4,–6,0,0)	(4,6,–10, –34)	5/34	(10/17, 15/17, 9/17,0)
2	(10/17, 15/17, 9/17,0)	–6,436	{1, 2}	(0,0,57/17, 4/17)	(2565/1156, –513/1156, –513/289,0)	68/279	(35/31, 24/31,3/31,0)
3	(35/31, 24/31,3/31,0)	–7,16	{1, 2}	(0,0,0,1)	(0,0,0,0)		

Phương pháp gradient rút gọn trên đây là do Wolfe đề xuất. Sau này, Abadie và Carpentier đã đưa ra phương pháp gradient tổng quát để giải các BTQHPT với ràng buộc phi tuyến.

5.4. Phương pháp đơn hình lồi Zangwill

Phương pháp sau đây do Zangwill đề xuất, ban đầu để giải các BTQHPT với hàm mục tiêu lồi và các ràng buộc tuyến tính. Phương pháp này khá giống với phương pháp gradient rút gọn, chỉ khác ở một điểm: tại mỗi bước lặp chỉ có đúng một biến ngoài cơ sở thay đổi giá trị, các biến ngoài cơ sở khác đều giữ nguyên giá trị. Các giá trị của các biến cơ sở cũng được thay đổi tương tự như trong phương pháp đơn hình. Tên của phương pháp vì vậy là "phương pháp đơn hình lồi".

Giả sử x là một phương án cực biên của bài toán *Min f(x) với* $x \in D = \{x \in R^n: Ax = b, x \geq 0\}$, trong đó A là ma trận cấp m×n, f(x) là hàm khả vi liên tục. Ngoài ra, cũng như trong phương pháp gradient rút gọn, chúng ta giả sử *điều kiện không suy biến* là đúng, tức là m véc tơ cột bất kì của A là độc lập tuyến tính và mỗi điểm cực biên của D đều có đúng m tọa độ dương (do đó, mỗi phương án x của bài toán đều có ít nhất m tọa độ dương). Bằng cách phân rã ma trận A và x một cách thích hợp, chúng ta nhận được: $\nabla f(x)^T d = \nabla_N f(x)^T d_N + \nabla_B f(x)^T d_B = [\nabla_N f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1}N]d_N = r_N^T d_N = \sum_{j\notin I} r_j d_j$ với I là tập các chỉ số của các biến cơ sở ($I \equiv J_B$). Để xây dựng hướng cải thiện d, cần chọn r_N và d_N sao cho $r_N^T d_N < 0$ và $d_j \geq 0$ một khi $x_j = 0$, sau đó chọn $d_B = - B^{-1}Nd_N$.

Vậy chúng ta có *quy tắc xây dựng hướng cải thiện* như sau: "Trước hết tính $\alpha = \text{Max }\{-r_j: r_j \leq 0\}$ và $\beta = \text{Max }\{x_j r_j: r_j \geq 0\}$. Nếu $\alpha = \beta = 0$ thì x là điểm Kuhn – Tucker. Nếu trái lại, tức là có ít nhất một trong hai số α, β là dương thì cho $\alpha = - r_v$, $d_v = 1$ và $d_j = 0$, $\forall j \notin I$ và $j \neq v$, khi $\alpha \geq \beta$, và cho $\beta = x_v r_v$, $d_v = -1$ và $d_j = 0$ $\forall j \notin I$ và $j \neq v$, khi $\alpha < \beta$. Lúc đó hướng d là một hướng cải thiện".

Nhận xét. Trong trường hợp $\alpha \geq \beta$ chỉ có duy nhất một biến ngoài cơ sở x_v có giá trị tăng lên, các biến ngoài cơ sở khác không thay đổi giá trị. Còn khi $\alpha < \beta$ chỉ có duy nhất một biến ngoài cơ sở x_v có giá trị giảm đi, các biến ngoài cơ sở khác không thay đổi giá trị. Trong cả hai trường hợp, các biến cơ sở có giá trị thay đổi trên hướng $d_B= - B^{-1}Nd_N$. Như vậy khi $\alpha \geq \beta$, do $d_v = 1$ và $d_j = 0$, $\forall j \notin I$ và $j \neq v$, nên $d_B= - B^{-1}a_v$ với a_v là véc tơ cột của A tương ứng với x_v. Còn khi $\alpha < \beta$ thì $d_B = B^{-1}a_v$ do $d_v = -1$ và $d_j = 0$, $\forall j \notin I$ và $j \neq v$.

Ta đi chứng minh rằng khi $\alpha = \beta = 0$ thì x là điểm Kuhn – Tucker. Thật vậy, x là điểm Kuhn – Tucker khi và chỉ khi tồn tại các véc tơ u và v sao cho:

$$\begin{cases} u^T = (u_B^T, u_N^T) \geq (0,0) \\ [\nabla_B f(x)^T, \nabla_N f(x)^T] + v^T(B,N) - (u_B^T, u_N^T) = (0,0) \\ u_B^T x_B = 0, u_N^T x_N = 0. \end{cases}$$

Đây chính là điều kiện (6.34) đã biết ở mục 5.3. Do $x_B > 0$, $u_B^T \geq 0$ nên $u_B^T x_B = 0$ khi và chỉ khi $u_B^T = 0$. Từ (6.34) suy ra $v^T = -\nabla_B f(x)^T B^{-1}$ và $u_N^T = \nabla_N f(x)^T + v^T N = \nabla_N f(x)^T - \nabla_B f(x)^T B^{-1}N$. Do đó $u_N = r_N$. Vậy điều kiện Kuhn – Tucker trở thành $r_N \geq 0$ và $r_N^T x_N = 0$. Điều này đúng khi và chỉ khi $\alpha = \beta = 0$.

Sau đây chúng ta trình bày thuật toán đơn hình lồi Zangwill. Việc chứng minh tính hội tụ của thuật toán tới điểm Kuhn – Tucker là không dễ dàng nhưng không quá khó, xin dành cho bạn đọc tự tìm hiểu.

Thuật giải phương pháp đơn hình lồi

Bước khởi tạo. Chọn một điểm x^1 thỏa mãn $Ax^1 = b$, $x^1 \geq 0$. Đặt $k := 1$.

Các bước lặp (bước lặp thứ k)

Bước 1: Đặt I_k là tập m tọa độ lớn nhất của x_k, $B = \{a_j: j \in I_k\}$ và $N = \{a_j: j \notin I_k\}$,

$$r^T = \nabla f(x^k)^T - \nabla_B f(x^k)^T B^{-1} A .$$

Tính $\alpha = \text{Max}\ \{-r_j: r_j \leq 0\}$ và $\beta = \text{Max}\ \{x_j r_j: r_j \geq 0\}$:

– Nếu $\alpha = \beta = 0$, dừng.

– Nếu $\alpha \geq \beta$, $\alpha = -r_v$ thì đặt $d_v = 1$ và $d_j = 0$, $\forall j \notin I^k$ và $j \neq v$,

– Còn nếu $\alpha < \beta$, $\beta = x_v r_v$ thì đặt $d_v = -1$ và $d_j = 0$, $\forall j \notin I^k$ và $j \neq v$.

(trong đó I^k là tập chỉ số các biến ngoài cơ sở)

Đặt $(d^k)^T = [d_N^T, d_B^T]$, với d_N xác định như trên và $d_B = -B^{-1}Nd_N$.

Bước 2: Giải bài toán tìm kiếm trên hướng Min $f(x_k + \lambda d_k)$ với $0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}$, trong đó

$$\lambda_{max} = \begin{cases} \text{Min}\left\{\dfrac{-x_j^k}{d_j^k} : d_j^k < 0\right\} & \text{khi} \quad d^k \geq 0 \\ \infty & \text{khi} \quad d^k \overline{\geq}\ 0. \end{cases}$$

Đặt $x^{k+1} = x^k + \lambda^k x^k$ với λ^k là phương án tối ưu của bài toán trên, thay $k := k+1$, sau đó chuyển về bước 1.

Ví dụ 15. Giải bài toán sau đây bằng phương pháp đơn hình lồi.

Min $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$, với điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Quá trình giải được tóm tắt trong bảng VI.2.

Bảng VI.2. Tóm tắt các bước lặp trong phương pháp đơn hình lồi

Bước lặp k	x^k	$f(x^k)$	I^k	Hướng tìm kiếm		Tìm kiếm trên hướng	
				r^k	d^k	λ^k	x^{k+1}
1	(0,0,2,5)	0	{3, 4}	(–4,–6,0,0)	(0,1,–1,–5)	1	(0,1,1,0)
2	(0,1,1,0)	–4,0	{2, 3}	(–28/5,0,0, 2/5)	(1,–1/5, –4/5,0)	35/31	(35/31 24/31,3/31,0)
3	(35/31,24/31, 3/31,0)	–7,16	{1, 2}	(0,0,0,1)			

6. Giới thiệu phương pháp điểm trong giải bài toán quy hoạch tuyến tính

Phương pháp đơn hình như chúng ta đã nghiên cứu trong chương II được coi là ra đời vào năm 1947, khi Dantzig công bố phương pháp đơn hình giải các bài toán lập kế hoạch cho không quân Mỹ. Trước đó, vào năm 1939, nhà toán học người Nga Kantorovich (được giải thưởng Nobel về khoa học kinh tế năm 1975), đã đề cập tới thuật toán giải các BTQHTT trong quyển "Các phương pháp toán học trong tổ chức và kế hoạch hóa sản xuất" in tại Nhà xuất bản Đại học quốc gia Leningrad. Tuy là một công cụ tuyệt vời trong việc giải quyết các bài toán thực tế trong rất nhiều lĩnh vực, thuật toán đơn hình lại không là một thuật toán đa thức.

Năm 1984, Karmarkar công bố phương pháp điểm trong giải BTQHTT có *độ phức tạp đa thức*. Khác hẳn phương pháp đơn hình, xây dựng dãy các điểm biên tốt dần lên về giá trị hàm mục tiêu, phương pháp điểm trong xây dựng dãy các điểm trong hội tụ về điểm biên là phương án tối ưu. Đây là một phương pháp có cơ sở toán học tương đối phức tạp. Để trình bày vấn đề này một cách dễ hiểu, chúng ta sẽ tóm lược phương pháp điểm trong theo kiểu phương pháp hướng chấp nhận và minh họa nó bằng một ví dụ cụ thể.

6.1. Bài toán ellipsoid xấp xỉ

Định nghĩa 12. Xét *BTQHTT (gốc):* Min $f(x) = c^Tx$, với $x \in D \subset R^n$, D được xác định bởi các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} Ax = b & (6.35)\\ x \geq 0. & (6.36)\end{cases}$$

Một phương án khả thi $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right) \in D$ được gọi là *nghiệm trong* của BTQHTT trên nếu $x^k > 0$, tức là $x_i^k > 0,\ \forall i = \overline{1,n}$.

Để cho đơn giản, ta cũng gọi nghiệm trong x^k là *điểm trong tương đối,* hay ngắn gọn hơn, *điểm trong* của D (do x^k luôn nằm trong đa tạp tuyến tính $\{x \in R^n$: $Ax = b\}$). Nếu thay điều kiện (6.36) trong BTQHTT trên bởi điều kiện sau đây:

$$x \in E^k = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - x_i^k}{x_i^k} \right)^2 \leq \rho^2,\ \text{với } 0<\rho \leq 1 \right\}, \qquad (6.37)$$

thì chúng ta có bài toán elloipsoid xấp xỉ của BTQHTT đã cho.

Bài toán ellipsoid xấp xỉ: Min $f(x) = c^Tx$ với các ràng buộc

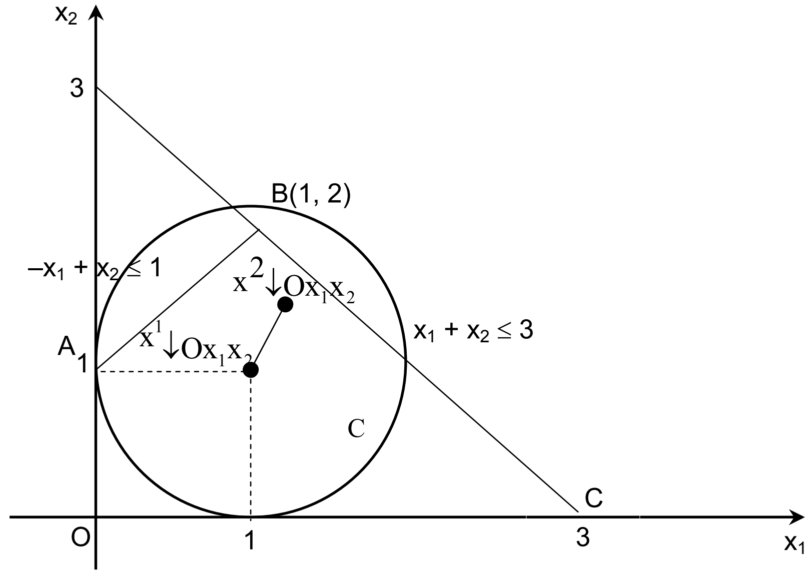
$$\begin{cases} Ax = b\ (1) \\ x \in E^k = \left\{ x \in R^n : \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - x_i^k}{x_i^k} \right)^2 \leq \rho^2,\ \text{với } \rho \leq 1 \right\}. \end{cases}$$

E^k chính là một ellipsoid có tâm tại $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right)$ với các bán trục $\rho x_1^k,\ \rho x_2^k, ...,\ \rho x_n^k$. Trong trường hợp $x_1^k = x_2^k = ... = x_n^k$ thì E^k trở thành hình cầu.

Ví dụ 16. Xét BTQHTT: Min $z = -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 3 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ \ \geq 0 \end{cases}$$



Hình VI.14. Minh họa phương pháp điểm trong giải BTQHTT

Trên hình VI.14, hình chiếu của miền D trên mặt phẳng Ox_1x_2 là miền được giới hạn bởi tứ giác OABC (bạn đọc có thể tự mình chứng minh điều này). Điểm $x^1 = (1, 1, 1, 1)$ là một *điểm trong* của D, còn hình chiếu của nó trên mặt phẳng toạ độ Ox_1x_2 là điểm $x^1_{\downarrow Ox_1x_2} = (1, 1)$. Đường tròn C có tâm tại (1, 1) là hình chiếu của ellipsoid E^1 (lúc này là hình cầu $(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 + (x_3-1)^2 + (x_4-1)^2 = \rho^2$) trên mặt phẳng Ox_1x_2:

$$E^1 = \left\{ x \in R^4 : \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{x_i - 1}{1} \right)^2 \leq \rho^2 \right\}.$$

Lúc đó, bài toán ellipsoid xấp xỉ (gọi vắn tắt là *bài toán xấp xỉ*) sẽ có dạng sau:

Min $z = -x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$, với các ràng buộc

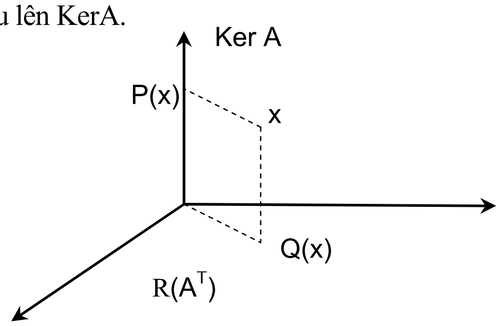
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad = 3 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 = 1 \\ x \in \left\{ x \in R^4 : \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{x_i - 1}{1} \right)^2 \leq \rho^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} (x_i - 1)^2 \leq \rho^2 \right\} \end{cases}$$

Có thể thấy ngay rằng nếu $\rho < 1$ thì $\forall x \in E^1$ ta luôn có $x > 0$, còn nếu $\rho \leq 1$ thì $\forall x \in E^1$ ta luôn có $x \geq 0$. Nhìn hình VI.14, ta thấy miền ràng buộc của bài toán xấp xỉ là miền $S^k = D \cap E^k$ là miền con của miền D. Ta đi giải bài toán xấp xỉ trên đây (bài toán xấp xỉ bước 1) để nhận được một điểm trong x^2 tốt hơn điểm trong x^1. Theo phương pháp hướng chấp nhận đã biết, để xây dựng $x^2 = x^1 + \lambda d^1$ như vậy, trước hết cần xác định được hướng cải thiện (tốt nhất có thể) d^1 và sau đó cần xác định bước dịch chuyển λ.

Xác định hướng cải thiện và bước dịch chuyển

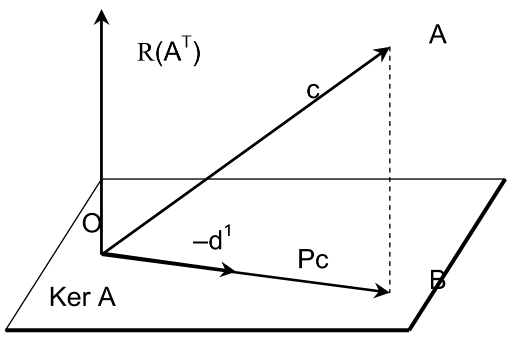
Trường hợp 1: Trước hết, ta đi tìm hướng cải thiện cho trường hợp E^1 có dạng cầu có tâm tại x^1 với tất cả các tọa độ đều bằng 1 (như trong trường hợp đang xét của *ví dụ 16*). Theo kết quả đã biết của đại số tuyến tính, nếu $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ có hạng bằng r thì không gian nhân Ker A là không gian con (n – r) chiều, còn không gian hàng $R(A^T) = \{x \in R^n: x = A^Ty, y \in R^m\}$ là không gian con r chiều. Ngoài ra, Ker A và $R(A^T)$ là phần bù trực giao của nhau. Sau đây chúng ta xét trường hợp r = m.

Ta đi chứng minh rằng phép chiếu một phần tử $x \in R^n$ lên Ker A được xác định bởi: P(x) = (I– AT(AAT)–1A)x. Thật vậy, xét phép chiếu Q lên $R(A^T)$: $Q(x) = \underset{u\in R^m}{\operatorname{Arg\,min}}\left\|x - A^Tu\right\|$, trong đó Arg min được hiểu là "điểm đạt min của hàm …". Vậy cần giải bài toán sau: $\operatorname{Min}(x - A^Tu)^T(x - A^Tu)$ hay bài toán $\operatorname{Min}(x^Tx - 2x^TA^Tu + u^TAA^Tu)$ với $u \in R^m$. Nghiệm của bài toán chính là điểm dừng $u^* = (AA^T)^{-1}Ax$. Vậy $Q(x) = A^Tu^*$ (bạn đọc hãy chọn một ví dụ đơn giản và kiểm nghiệm các kết luận một cách cụ thể). Do đó $P(x) = x - Q(x) = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)x$ (xem minh họa hình VI.15). P = I– AT(AAT)–1A được gọi là ma trận chiếu lên KerA.



Hình VI.15. Minh họa các phép chiếu P và Q

Do $x^2 = x^1 + \lambda d^1$ nên $Ax^2 = Ax^1 + \lambda Ad^1$. Do $d^1 \in$ Ker A nên d^1 có dạng Pv, với $v \in R^n$. Ta giả sử $\left\|d^1\right\| = 1$. Để hàm mục tiêu $z = c^Tx = c^T(x^1 + \lambda d^1) = c^Tx^1 + \lambda c^Td^1$ giảm nhanh nhất trên hướng d^1 khi dịch chuyển từ x^1 tới x^2, phải chọn hướng cải thiện $d^1 = \dfrac{P(-c)}{\left\|P(-c)\right\|} = -\dfrac{Pc}{\left\|Pc\right\|}$. Lúc đó $c^Td^1 = -c^T\dfrac{Pc}{\left\|Pc\right\|}$ là số âm với trị tuyệt đối lớn nhất có thể đạt được. Trên hình VI.16, $c^Td^1 = -$ OB, với OB lớn nhất có thể đạt được (do AB là ngắn nhất).



Hình VI.16. Xác định hướng cải thiện

Vậy ta có $x^2 = x^1 - \lambda \frac{Pc}{\|Pc\|}$. Cần chọn $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 1)^2 \le \rho^2$ λ sao cho đạt được

Min f($x^1 - \lambda \frac{Pc}{\|Pc\|}$) = $c^T(x^1 - \lambda \frac{Pc}{\|Pc\|})$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} A(x^1 - \lambda \frac{Pc}{\|Pc\|}) = b & (6.38) \\ x^2 = x^1 - \lambda \frac{Pc}{\|Pc\|} \in E^1 = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - 1}{1}\right)^2 \le \rho^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i - 1)^2 \le \rho^2 \right\}. & (6.39) \end{cases}$$

Ràng buộc (6.38) đã được thỏa mãn do cách chọn d^1. Để thỏa mãn (6.39) phải có $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 1\right)^2 \le \rho^2$.

Do $x_i^1 = 1, \forall i = \overline{1,n}$, nên có $\lambda^2 \left\| \frac{Pc}{\|Pc\|} \right\|^2 \le \rho^2$, hay $\lambda \le \rho$. Vậy có thể chọn $\lambda = \rho$. Bằng cách làm như trên, chúng ta đã xây dựng được điểm trong tiếp theo là:

$$x^2 = x^1 - \rho \frac{Pc}{\|Pc\|} \text{ với } \rho < 1. \tag{6.40}$$

Ví dụ 16 (tiếp). Với $x^1 = (1, 1, 1, 1)$ và $\rho = 0{,}995$, ta có:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (AA^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$P = I - A^T(AA^T)^{-1}A = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow Pc = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|Pc\| = 1{,}290994 \Rightarrow (x^2)^T = \left(x^1 - \rho \frac{Pc}{\|Pc\|}\right)^T = (1{,}257,\ 1{,}514,\ 0{,}229,\ 0{,}743).$$

Hình chiếu của điểm x^2 trên Ox_1x_2 được thể hiện bởi điểm $x^2_{\downarrow Ox_1x_2}$ trên hình VI.14.

Trường hợp 2: Ta có bài toán xấp xỉ: Min $f(x) = c^Tx$, với các ràng buộc

$Ax = b$

$$x \in E^2 = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - x_i^2}{x_i^2}\right)^2 \le \rho^2 \right\}. \tag{6.41}$$

Sau đây ta đi tìm hướng cải thiện cho trường hợp E^2 có dạng ellipsoid có tâm tại x^2 với không phải tất cả các tọa độ đều bằng 1 (như trong trường hợp đang xét của *ví dụ 16* với n = 4). Lúc này (6.41) trở thành

$$E^2 = \left\{ x \in R^4 : \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{x_i - x_i^2}{x_i^2} \right)^2 \le \rho^2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 - 1,257)^2}{1,257^2} + \frac{(x_2 - 1,514)^2}{1,514^2} + \frac{(x_3 - 0,229)^2}{0,229^2} + \frac{(x_4 - 0,743)^2}{0,743^2} \le \rho^2 . \quad (6.42)$$

Chúng ta tìm một phép biến đổi định lại tỷ lệ affine (*affine rescaling)* để đưa ellipsoid E^2 trên đây về dạng cầu. Đó là phép biến đổi:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,257 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,514 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,229 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,734 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{bmatrix},$$

Có thể viết phép định lại tỷ lệ dưới dạng $x = X^2x'$, trong đó X^2 là ma trận đường chéo cấp n: $X^2 = \mathrm{diag}\left(x_1^2, x_2^2, ..., x_n^2\right)$ với các phần tử trên đường chéo chính là các tọa độ của x^2. Lúc này bài toán ellipsoid xấp xỉ có dạng:

Min $f(x) = c^TX^2 x'$ với các ràng buộc

$$\begin{cases} AX^2x' = b & (6.43) \\ x' \in (E^2)' = \left\{ x' \in R^4 : \sum_{i=1}^{4} \left(x_i' - 1\right)^2 \le \rho^2 \right\}. & (6.44) \end{cases}$$

Nếu đặt $c^TX^2 = (c')^T$ và $AX^2 = A'$, thì ta đã đưa được trường hợp 2 về trường hợp 1. Tương tự như biến đổi (6.40) ta có công thức tìm $(x^3)'$ căn cứ $(x^2)'$ như sau:

$$(x^3)' = (x^2)' - \rho \frac{P'c'}{\|P'c'\|} \ (3') \Leftrightarrow x^3 = x^2 - \rho \frac{X^2P'X^2c}{\|P'X^2c\|}, \text{ với } \rho < 1, \quad (6.45)$$

trong đó $P' = (I - X^2A^T(A(X^2)^2A^T)^{-1}AX^2)$ là phép chiếu xuống Ker (AX^2).

6.2. Một số thuật toán điểm trong

Trước hết chúng ta xét khái niệm phương án ε – tối ưu của BTQHTT. Như đã biết trong chương III, nếu (x, y) là cặp phương án của cặp bài toán đối ngẫu thì $s^Tx = (c - A^Ty)^Tx = c^Tx - y^TAx = c^Tx - y^Tb$ chính là độ lệch giữa giá trị mục tiêu của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu, còn được gọi là lỗ hổng đối ngẫu (*duality gap*). Theo định lý đối ngẫu mạnh, nếu x và y là các phương án tối ưu của các bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì $s^Tx = 0$. Vậy chúng ta xét định nghĩa sau:

Định nghĩa 13. Cặp phương án (khả thi) của cặp bài toán đối ngẫu được gọi là cặp nghiệm gần tối ưu hay ε – tối ưu nếu $s^Tx < ε$.

Thuật toán tỷ lệ affine gốc bước ngắn

Bước khởi tạo.

– Nhập dữ liệu đầu vào của BTQHTT: A, b, c.

– Chọn ε và $\rho \in (0, 1]$.

– Tìm một *điểm trong* (*điểm trong tương đối*) x^1 của miền phương án D nếu có.

– Đặt k : = 1.

Các bước lặp (bước lặp thứ k)

Bước 1. Căn cứ điểm trong x^k, xác định $X^k = \text{diag}\left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\right)$ là ma trận định lại tỷ lệ affine và tìm $y^k = (A(X^k)^2A^T)^{-1}A(X^k)^2c$ (y^k có thể là một phương án của bài toán đối ngẫu nếu nó thoả mãn thêm một số điều kiện).

Bước 2. Tìm véc tơ biến bù s^k của bài toán đối ngẫu ứng với y^k vừa tìm được theo công thức $s^k = c - A^Ty^k$.

Bước 3. Kiểm tra điều kiện ε – tối ưu: Nếu $s^k \geq 0$ (lúc này y^k đúng là một phương án bài toán đối ngẫu) và $(s^k)^Tx^k = (x^k)^Ts^k = e^TX^ks^k < \varepsilon$ (e là véc tơ đơn vị n tọa độ) thì dừng. Phương án x^k hiện có là phương án ε – tối ưu của bài toán gốc, còn phương án y^k là phương án ε – tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Bước 4. Kiểm tra tính không giới nội: Nếu $-(X^k)^2s^k \geq 0$ thì dừng, hàm mục tiêu của bài toán gốc không bị chặn dưới (do bài toán đối ngẫu không có phương án khả thi).

Bước 5. Tìm phương án tiếp theo

$$x^{k+1} = x^k - \rho\frac{(X^k)^2s^k}{\left\|X^ks^k\right\|}, \tag{6.46}$$

Điều này là do $x^{k+1} = x^k - \rho\dfrac{X^kP^{/}X^kc}{\left\|P^{/}X^kc\right\|}$, trong đó $P^{/} = (I - X^kA^T(A(X^k)^2A^T)^{-1}AX^k)$.

Bước 6. Kiểm tra tính tối ưu: Nếu $x_j^{k+1} = 0$ với một chỉ số j nào đó thì dừng. Phương án x^{k+1} hiện có là phương án tối ưu của bài toán gốc. Nếu trái lại, đặt k : = k + 1 và quay về bước 1.

Việc chứng minh một cách chính xác tính hội tụ của thuật toán trên (với giả thiết mọi phương án cực biên của BTQHTT không suy biến) đòi hỏi nhiều cố gắng, xin dành cho bạn đọc quan tâm tự tìm hiểu. Thuật toán điểm trong như trình bày trên đây được gọi là thuật toán tỷ lệ affine bước ngắn, với lý do: Khi ta xây dựng được các điểm trong khá sát gần phương án cực biên tối ưu thì ellipsoid xấp xỉ là rất dẹt (có ít nhất một bán trục rất nhỏ) nên bước dịch chuyển tiếp theo là rất ngắn.

Để tìm điểm trong xuất phát, cần xét BTQHTT tăng cường (bài toán M): $\text{Min}(c^Tx + Mx_{n+1})$, với các ràng buộc $Ax + x_{n+1}(b - Ae) = b$ và $(x^T, x_{n+1}) \geq 0$, trong đó M là số dương rất lớn và e là véc tơ đơn vị n tọa độ. Rõ ràng $(x^T, x_{n+1}) = (e^T, 1)$ là điểm trong của miền phương án của BTQHTT tăng cường. Có thể giải được bài toán này bằng thuật toán tỷ lệ affine gốc bước ngắn. Hơn nữa, có thể chứng minh được rằng nếu bài toán M có phương án tối ưu $(x^T, x_{n+1})^T$ với $x_{n+1} = 0$ thì x cũng là phương án tối ưu của bài toán gốc.

Các thuật toán tỷ lệ affine gốc bước dài

Cho véc tơ $u \in R^n$, xét các ký hiệu sau: $\|u\|_\infty = \operatorname{Max}_i |u_i|$ và $\gamma(u) = \text{Max}\{u_i: u_i > 0\}$. Dễ thấy, $\gamma(u) \le \|u\|_\infty \le \|u\|$. Lúc đó, nếu thay công thức (6.46) trong thuật toán tỷ lệ affine bước ngắn bằng một trong hai công thức (6.47) và (6.48) sau đây thì ta sẽ có được các thuật toán tỷ lệ affine bước dài loại 1 và loại 2:

$$x^{k+1} = x^k - \rho \frac{(X^k)^2 s^k}{\|X^k s^k\|_\infty}, \tag{6.47}$$

$$x^{k+1} = x^k - \rho \frac{(X^k)^2 s^k}{\gamma(X^k s^k)}. \tag{6.48}$$

Các thuật toán bước dài nhìn chung có tốc độ hội tụ nhanh hơn thuật toán bước ngắn. Hơn nữa, với điều kiện hạn chế $\rho \in (0, 2/3)$, thuật toán bước dài loại 2 hội tụ ngay cả khi điều kiện "tất cả các phương án cực biên của BTQHTT là không suy biến" không được thỏa mãn.

Cần chú ý rằng, trong cả ba thuật toán điểm trong trên đây, hướng cải thiện đều là hướng giảm nhanh nhất của hàm mục tiêu, được xác định thông qua phép chiếu lên Ker A. Trong khi ở thuật toán bước ngắn chúng ta dừng lại ở điểm nằm trong ellipsoid xấp xỉ, thì ở các thuật toán bước dài, để xây dựng điểm x^{k+1} chúng ta vẫn đi tiếp ra ngoài biên của ellipsoid nhưng vẫn nằm ở phần trong của góc tọa độ dương.

Bài tập chương VI

Bài 1. Chứng minh các tập hợp sau là tập lồi, sau đó mô tả bao đóng, miền trong và biên của chúng:

a. $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 + x_2 = 3, x_1 + x_2 + x_3 \le 6\}$,

b. $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 4, x_1 + x_2 = 1\}$.

Bài 2. Cho $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 1, x_1^2 - x_2 \le 0\}$ và $y = (1, 0, 2)^T$. Tìm khoảng cách từ y đến S và điểm cực tiểu duy nhất tương ứng $x^* \in S$ ứng với khoảng cách đó. Viết phương trình của một siêu phẳng tách.

Bài 3. Cho S_1 và S_2 là các tập lồi rời nhau trong R^n. Chứng minh rằng tồn tại các véc tơ p_1 và p_2 khác véc tơ 0 sao cho $p_1^T x^1 + p_2^T x^2 \ge 0$ với mọi $x^1 \in S_1$ và $x^2 \in S_2$. Hãy suy ra kết quả tổng quát hơn cho trường hợp nhiều tập lồi rời nhau.

Bài 4. Tìm các điểm cực biên và hướng cực biên của các tập lồi đa diện sau:

a. $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 + x_2 + x_3 \le 10, -x_1 + 2x_2 = 4, x_1, x_2, x_3 \ge 0\}$.

b. $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: x_1 + 2x_2 \ge 2, -x_1 + x_2 = 4, x_1, x_2 \ge 0\}$.

c. $S = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3: -x_1 + 2x_2 \le 3,\ x_1 + x_2 \le 2,\ x_2 \le 1,\ x_1, x_2 \ge 0\}$, sau đó biểu thị điểm (1, 1/2) thành tổ hợp lồi của các điểm cực biên và hướng cực biên.

Bài 5. Nếu f: $R^n \to R$ là hàm khả vi cấp một thì ta gọi xấp xỉ tuyến tính của nó là biểu thức $f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$. Tương tự, nếu f là hàm khả vi cấp hai thì ta gọi xấp xỉ toàn phương của nó là $f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^T H(\bar{x})(x - \bar{x})$.

Cho $f(x) = \exp(x_1^2 + x_2^2) - 5x_1 + 10x_2$, hãy tìm các biểu thức xấp xỉ tuyến tính và xấp xỉ toàn phương của f(x) và cho biết chúng là hàm lồi hay hàm lõm hay không lồi không lõm, tại sao?

Bài 6. Xét bài toán tối ưu:

Max $f(x) = 3x_1 - x_2 + x_3^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3^2 = 0. \end{cases}$$

Hãy phát biểu điều kiện Kuhn – Tucker cho bài toán trên và dựa vào đó tìm phương án tối ưu của nó.

Bài 7. Xét bài toán tối ưu:

Min $f(x) = (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} -x_1^2 + x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Hãy phát biểu điều kiện Kuhn – Tucker cho bài toán trên và chứng tỏ rằng điều kiện này được thỏa mãn tại $\bar{x} = (3/2, 9/4)^T$.

a. Minh họa điều kiện Kuhn – Tucker tại $\bar{x}$ bằng đồ thị.

b. Chứng tỏ rằng $\bar{x}$ là điểm tối ưu toàn cục.

Bài 8. Dùng phương pháp Frank – Wolfe giải các bài toán quy hoạch lồi sau:

a. Min $f(x) = -2x_1 - 6x_2 + x_1^2 + x_2^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 5 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

b. Min $f(x) = (x_1 - 5/3)^2 + x_2^2 + (x_3 - 1/3)^2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Bài 9. Hãy tìm hiểu cơ sở lý thuyết và phát biểu chi tiết thuật toán Frank – Wolfe. Sau đó lập chương trình máy tính bằng ngôn ngữ Pascal hoặc C và chạy kiểm thử cho bài tập 7 trên đây.

Bài 10. Xét các bài toán tối ưu

a. Min $f(x) = -6x_1 - 2x_2 - 12x_3 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_1x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

b. Min $f(x) = x_1 - 2x_2 - x_1^2 + x_1^3 + 2x_2^3$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Hãy giải các bài toán trên bằng phương pháp gradient rút gọn và phương pháp đơn hình lồi Zangwill.

Bài 11. Hãy sửa chỉnh phương pháp đơn hình lồi Zangwill để giải trực tiếp bài toán Min f(x) với các điều kiện ràng buộc $Ax = b$ và $a \le x \le b$.

Sau đó áp dụng để giải bài toán: Min $f(x) = 4x_1 - 6x_2 + x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 + \exp(-x_1)$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ 1 \le x_1, x_2 \le 3. \end{cases}$$

Bài 12. Hãy lập chương trình máy tính cho các thuật toán gradient rút gọn và đơn hình lồi Zangwill (có chỉnh sửa), sau đó chạy kiểm thử cho các bài tập 8 và 9.

Bài 13. Thực hiện ba bước lặp đầu tiên của thuật toán tỷ lệ affine gốc bước ngắn cho BTQHTT sau:

Max $f(x) = -4x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4$,

với các ràng buộc

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Bài 14. Sử dụng ngôn ngữ Pascal hay C hãy lập trình trên máy tính thuật toán affine gốc bước ngắn và bước dài, sau đó chạy kiểm thử trên các BTQHTT đã giải bằng phương pháp đơn hình.

Tài liệu tham khảo

1. *С. А. Ашманов, Линейное программирование, Наука, Москва, 1981.*
2. M. S. Bazaraa, C. M. Shetty, *Nonlinear programming: Theory and algorithms*, John Wiley and Sons, New York, 1990.
3. D. P. Bertsekas, *Dynamic programming: Deterministic and stochastic models*, Prentice Hall, London, 1987.
4. B. E. Gillett, *Introduction to operations research: A computer–oriented algorithmic approach*, McGraw–Hill, New York, 1990.
5. R. Horst, Hoàng Tụy, *Global optimization: Deterministic approaches*, Springer, Berlin, 1993.
6. Hoàng Xuân Huấn, *Giáo trình các phương pháp số,* Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, 2004.
7. *В. Г. Карманов, Нелинейное программирование, Наука, Москва, 1986.*
8. N. Karmarkar, "A new polynomial time algorithm for linear programming", C*ombinatorica*, Vol. 4, 373–395, 1984.
9. Phan Quốc Khánh, Trần Huệ Nương, *Quy hoạch tuyến tính*, Nxb. Giáo dục, 2003.
10. C. Mohan and Nguyen Hai Thanh, "A controlled random search technique incorporating the simulated annealing concept for solving integer and mixed integer global optimization problems", *Computational Optimization and Applications,* Vol. 14, 103–132, 1999.
11. Nguyễn Đức Nghĩa, *Tối ưu hóa*, Nxb. Giáo dục, 2002.
12. A. Osyczka, *Multicriterion Optimization in Engineering with Fortran Programs,* Ellis Horwood Limited, New York, 1984.
13. H. A. Taha, *Operations research*, MacMillan, New York, 1989.
14. Bùi Thế Tâm, Trần Vũ Thiệu, *Các phương pháp tối ưu hóa*, Nxb. Giao thông vận tải, 1998.
15. Nguyễn Hải Thanh, *Lý thuyết quyết định mờ và hệ chuyên gia*, Bài giảng cho Cao học, ngành Toán – Tin ứng dụng, Trường Đại học Bách khoa, Hà Nội, 2005.
16. Nguyễn Hải Thanh (chủ biên) và các tác giả khác, *Tin học ứng dụng trong ngành nông nghiệp*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, 2005.
17. Nguyễn Hải Thanh, *Toán ứng dụng*, Nxb. Đại học Sư phạm Hà Nội, 2005.
18. Bùi Minh Trí, *Quy hoạch toán học*, Nxb. Khoa học và Kỹ thuật, 1999.
19. Hoàng Tụy, "Lý thuyết tối ưu phi tuyến", *Tạp chí Vận trù học và Nghiên cứu hệ thống*, Viện Toán học, Viện khoa học Việt Nam, Số 39, 1–63, 1985.
20. Ф. П. Васильев, *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, Москва, 1980.

Tối ưu hóa

Giáo trình cho ngành Tin học và Công nghệ thông tin

Số xác nhận đăng ký KHXB của CXB là: 547-2006/CXB/01-68/BKHN, ngày 14/7/2006. Quyết định XB của GĐ số: 134/QĐ-NXBBKHN, ngày 11/12/2006.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 12/2006.