

GS. TS. VŨ VĂN TẢO - GS. TS. NGUYỄN CẢNH CẦM

THỦY LỰC

Tập I

(Tái bản lần thứ ba có chỉnh lý và bổ sung)

NHÀ XUẤT BẢN NÔNG NGHIỆP
HÀ NỘI - 2006

Chịu trách nhiệm xuất bản:
NGUYỄN CAO DOANH

Phụ trách bản thảo:
PHẠM KHÔI - HOÀNG NAM BÌNH

Trình bày bìa:
NGỌC NAM

NHÀ XUẤT BẢN NÔNG NGHIỆP

167/6 - Phương Mai - Đống Đa - Hà Nội
ĐT: 8524506 - 8523887 Fax: (04) 5760748
Email: NXB.Nongnghiep.BT3@gmail.com

CHI NHÁNH NXB NÔNG NGHIỆP

58 Nguyễn Bình Khiêm - Q.1, TP. Hồ Chí Minh
ĐT : 8297157 - 8299521 Fax : (08) 9101036

Mã số: $\frac{63-630}{NN-2005} - \frac{191}{622} - 05$

LỜI NÓI ĐẦU

(Cho lần tái bản thứ ba)

Giáo trình Thủy lực trọn bộ gồm 19 chương, đã được chia làm 02 tập. Tập I do GS. TS. Vũ Văn Tảo chủ biên, còn tập II do GS. TS. Nguyễn Cảnh Cầm chủ biên. Bộ giáo trình này đã được xuất bản năm 1968 và tái bản vào các năm 1978 và 1987. Riêng lần tái bản thứ hai năm 1987, do yêu cầu về khung chương trình đào tạo lúc đó nên đã được chia ra 03 tập.

Trong lần tái bản thứ ba này, chúng tôi chia thành 02 tập. Tập I gồm 09 chương và tập II có 10 chương.

Về cơ bản, chúng tôi giữ lại nội dung của lần tái bản thứ hai và có chỉnh lý, bổ sung một số chỗ.

Lần thứ ba này do GS. TS. Nguyễn Cảnh Cầm phụ trách. Trong quá trình chuẩn bị cho việc tái bản lần thứ ba này, Bộ môn Thủy lực Trường Đại học Thủy lợi đã đóng góp nhiều ý kiến quý báu. Chúng tôi xin chân thành cảm ơn.

Chúng tôi mong nhận được nhiều ý kiến nhận xét và góp ý của bạn đọc.

Những người biên soạn

Chương I

MỞ ĐẦU

§1-1. ĐỊNH NGHĨA KHOA HỌC THỦY LỰC - PHẠM VI ỨNG DỤNG VÀ LĨNH VỰC NGHIÊN CỨU CỦA KHOA HỌC THỦY LỰC

Thủy lực là môn khoa học ứng dụng nghiên cứu những qui luật cân bằng và chuyển động của chất lỏng và những biện pháp áp dụng những qui luật này. Phương pháp nghiên cứu của môn thủy lực hiện đại là kết hợp chặt chẽ sự phân tích lý luận với sự phân tích tài liệu thí nghiệm, thực đo, nhằm đạt tới những kết quả cụ thể để giải quyết những vấn đề thực tế trong kỹ thuật; những kết quả nghiên cứu của môn thủy lực có thể có tính chất lý luận hoặc nửa lý luận nửa thực nghiệm hoặc hoàn toàn thực nghiệm.

Cơ sở của môn thủy lực là cơ học chất lỏng lý thuyết; môn này cũng nghiên cứu những qui luật cân bằng và chuyển động của chất lỏng, nhưng phương pháp chủ yếu của việc nghiên cứu là sử dụng công cụ toán học phức tạp; vì vậy môn thủy lực còn thường được gọi là môn cơ học chất lỏng ứng dụng hoặc cơ học chất lỏng kỹ thuật.

Kiến thức về khoa học thủy lực rất cần cho người cán bộ kỹ thuật ở nhiều ngành sản xuất vì thường phải giải quyết nhiều vấn đề kỹ thuật có liên quan đến sự cân bằng và chuyển động của chất lỏng, đặc biệt là nước. Những ngành thủy lợi, giao thông đường thủy, cấp thoát nước cần nhiều áp dụng nhất về khoa học thủy lực, thí dụ để giải quyết các công trình đập, đê, kênh, cống, nhà máy thủy điện, tuốc bin, các công trình đường thủy, chỉnh trị dòng sông, các hệ thống dẫn tháo nước v.v...

Trong khoa học thủy lực hiện đại đã hình thành nhiều lĩnh vực nghiên cứu chuyên môn như thủy lực đường ống, thủy lực kênh hở, thủy lực công trình, thủy lực sông ngòi, thủy lực dòng thấm v.v... Tuy nhiên, tất cả những lĩnh vực nghiên cứu đó đều phát triển trên cơ sở những qui luật thủy lực chung nhất mà người ta thường trình bày trong phần gọi là thủy lực đại cương. Vì thế đối với người kỹ sư, người làm công tác nghiên cứu, trước hết cần nắm vững thủy lực đại cương làm cơ sở trước khi đi sâu vào thủy lực chuyên môn.

Giáo trình này bao gồm hai tập: tập I là thủy lực cơ sở trong đó chủ yếu nói về thủy lực đại cương có thể dùng cho sinh viên các ngành khác nhau, tập hai nói về thủy lực chuyên môn, chủ yếu phục vụ cho sinh viên ngành thủy lợi, ngành giao thông, ngành cảng, đường thủy.

Trước khi nghiên cứu những qui luật chung nhất về sự cân bằng và chuyển động của chất lỏng, cần nắm vững những đặc tính cơ học chủ yếu của chất lỏng. Khi nghiên cứu những đặc tính vật lý chủ yếu của chất lỏng, những qui luật chuyển động và cân bằng, cần phải dùng đến một hệ đo lường nhất định. Cho đến nay thường dùng hệ đo lường vật lý

(CGS) và hệ đo lường kỹ thuật (MKS). Theo Nghị định của Hội đồng Chính phủ ngày 26-12-1964, từ ngày 1-1-1967 bắt đầu có hiệu lực “Bảng đơn vị đo lường hợp pháp của nước Việt Nam dân chủ cộng hòa”. Trong hệ đo lường hợp pháp đó, về đơn vị cơ thì những đơn vị cơ bản được xác định như sau: đơn vị độ dài là mét (m), đơn vị khối lượng là kilôgam (kg), đơn vị thời gian là giây (s).

Trong giáo trình này chúng ta cũng dùng đơn vị mới; nhưng để thuận tiện cho việc chuyển dần đơn vị cũ sang đơn vị mới, chúng ta cũng nêu đơn vị cũ.

Sau đây là một vài hệ thức giữa những đơn vị thường gặp trong giáo trình. Đơn vị lực là Niuton (N): $1\text{ N} = 1\text{ kg} \times 1\text{ m/s}^2 = 1\text{ mkg} \cdot \text{s}^{-2}$. Trong hệ thống đơn vị cũ, đơn vị lực là kilôgam lực, chúng ta dùng ký hiệu kG để biểu thị đơn vị này: $1\text{ kG} = 9,807\text{ N}$ hoặc $1\text{ N} = 0,102\text{ kG}$.

Đơn vị công là Jun (J): $1\text{ J} = 1\text{ N} \times 1\text{ m} = 1\text{ m}^2\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$.

Đơn vị công suất là oát (W): $1\text{ W} = 1\text{ J/s} = 1\text{ m}^2\text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$.

§1-2. SƠ LƯỢC LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN CỦA KHOA HỌC THỦY LỰC

1. Thời kỳ cổ đại

Loài người sống và sản xuất có mối quan hệ mật thiết với nước. Đến nay còn nhiều di tích về các công trình thủy lợi như muông, đập, đê, giếng v.v... từ ba bốn nghìn năm trước công nguyên ở Ai Cập, Mêdôpôtami, Ấn Độ, Trung Quốc và nhiều nơi khác. Những kinh nghiệm giải quyết nhu cầu của con người về nước, chống thủy tai, làm thủy lợi được truyền miệng từ đời này sang đời khác, thủy lực thời cổ đại chưa có cơ sở khoa học nào, con người thực hiện các công trình thủy lợi một cách mò mẫm, tiếp cận dần dần đến mục đích.

2. Thời kỳ cổ Hy Lạp

Ở Hy Lạp trong những năm trước công nguyên đã xuất hiện một số luận văn có ý định tổng kết và phát triển một vài vấn đề thủy lực. Nhà toán học Ácsimét (287-212 trước công nguyên) đã để lại luận văn về thủy tĩnh học và về vật nổi, trong đó có lý luận về sự ổn định của vật nổi mà 20 thế kỷ sau người ta cũng không có bổ sung gì đáng kể. Cùng một trường phái Alécđăngđờri với Ácsimét, có Stêdibiot phát minh máy bơm chữa cháy, đồng hồ nước, đàn nước v.v... PhilendờBiđanxơ phát triển lý thuyết siphôn, Hêron Alécđăngđờri miêu tả nhiều cơ cấu thủy lực v.v...

3. Thời kỳ cổ La mã

Người La mã mượn rất nhiều văn minh của Hy Lạp và tập trung sức vào chiến chinh và cai trị. Họ xây dựng nhiều cầu dẫn nước, phần lớn có mặt cắt chữ nhật rộng từ 0,60 đến 0,80 m, cao từ 1,5 đến 2,4 m, đặt nhiều hệ thống cấp nước bằng chì hoặc đất nung, có khi bằng đồng hoặc bằng đá. Ở đầu nguồn, là những đập dâng nước. Họ đào nhiều giếng, biết

dùng những bể lắng v.v... Kỹ sư xây dựng người La mã Phêrôntin, cuối thế kỷ thứ 1 sau công nguyên, đã miêu tả phương pháp đo lưu lượng bằng vôi.

4. Thời kỳ Trung cổ

Sau sự sụp đổ của đế chế La mã, là một thời kỳ dài khoảng nghìn năm, sản xuất, văn hóa, khoa học đều ngừng trệ, môn thủy lực cũng không phát triển được.

5. Thời kỳ Phục hưng - Sự xuất hiện phương pháp thực nghiệm

Trong nửa sau thế kỷ thứ XV và cả thế kỷ thứ XVI, bắt đầu phát triển những nghiên cứu thực nghiệm. Thời kỳ này xuất hiện nhà bác học lỗi lạc người Ý là LêônađoVanhxi (1452-1592), xuất sắc trên lĩnh vực hội họa, điêu khắc, âm nhạc, vật lý, giải phẫu, thực vật, địa chất, cơ học, xây dựng, kiến trúc. Về mặt thủy lực học, một mặt ông thiết kế và điều khiển xây dựng những công trình thoát nước và công trình cảng ở miền Trung nước Ý, mặt khác ông đã nghiên cứu nguyên tắc làm việc của máy nén thủy lực, khí động học của vật bay, sự phân bố vận tốc trong những xoáy nước, sự phản xạ và giao thoa của sóng, dòng chảy qua lỗ và đập v.v...; ông phát minh máy bơm ly tâm, dù, cái đo gió. Những công trình của ông viết trong 7 nghìn trang bản thảo còn được lưu lại ở nhiều thư viện như Luân Đôn, Pari, Milan, Turin v.v... Do đó, có thể coi LêônađoVanhxi như là người sáng lập ra khoa học thủy lực.

Trong thời kỳ Phục hưng, cần phải kể đến những công trình của nhà toán học- kỹ sư Hà Lan Simôn Stêvin (1548-1620) phát triển thủy tĩnh học, đặc biệt đã phân tích đúng đắn lực tác dụng bởi một chất lỏng lên một diện tích phẳng và đã giải thích “nghịch lý thủy tĩnh học”. Nhà vật lý, cơ học, thiên văn học người Ý là Galilê (1564-1642) đã chỉ ra rằng sức cản thủy lực tăng theo sự gia tăng vận tốc và sự gia tăng mật độ của môi trường lỏng; ông còn phân tích vấn đề chân không.

6. Thủy lực học sau thời kỳ Phục hưng, ở thế kỷ XVII và đầu thế kỷ XVIII

Tiếp theo LêônađoVanhxi, trường phái thủy lực Ý vẫn nổi bật trong những thế kỷ XVI và XVII. Casteli (1517-1644) trình bày dưới dạng sáng sủa nguyên tắc và tính liên tục. Tôrixêli (1608-1647) làm sáng tỏ nguyên tắc dòng chảy qua lỗ và sáng chế áp kế thủy ngân. Trường phái thủy lực Pháp bắt đầu xuất hiện từ thế kỷ XVII với Mariôt (1620-1684), tác giả cuốn sách “luận về chuyển động của nước và những chất lỏng khác”, Pascan (1613-1662) xác lập tính chất không phụ thuộc của trị số áp suất thủy tĩnh đối với hướng đặt của diện tích chịu lực, giải thích triệt để vấn đề chân không, chỉ ra nguyên tắc của máy nén thủy lực, nêu lên nguyên tắc Pascan về sự truyền áp suất thủy tĩnh.

Các vấn đề thủy lực cho đến lúc này được nghiên cứu một cách riêng rẽ chưa liên hệ được với nhau thành một hệ thống có đầy đủ tính khoa học; phải đợi sự phát triển của toán học và cơ học, mới có cơ sở để đưa thủy lực học thực sự trở thành một khoa học hiện đại.

Chính thời kỳ này toán học và cơ học đã có những tiến bộ lớn, do đó đã góp phần chuẩn bị cho sự phát triển mới của thủy lực học. Cần kể đến những nhà toán học Pháp như Đêcátơ (1598-1650), Pascan (1623-1662); nhà toán học, vật lý, thiên văn học Hà Lan

Huyghen (1629-1695); những nhà toán học, cơ học Anh Húcơ (1635-1703), Niuton (1643-1727); nhà toán học Đức Lépniđơ (1646-1716) v.v...

7. Thời kỳ giữa và cuối thế kỷ XVIII

a) Sự hình thành những cơ sở lý thuyết của cơ học chất lỏng hiện đại

Nhờ sự phát triển của toán học và cơ học, những cơ sở của cơ học chất lỏng hiện đại được hình thành nhanh chóng; đó là công lao trước hết của ba nhà bác học của thế kỷ XVIII là: Đanien Bécnuuy, Ôle và Đalămbe.

Đanien Bécnuuy (1700-1782) - nhà vật lý và toán học xuất sắc - sinh ở Gorôninhghe (Hà Lan); từ 1725-1733 sống ở Pêtécboa (Nga) là giáo sư và viện sĩ Viện Hàn lâm Pêtécboa; ở đây ông đã viết công trình nổi tiếng “Thủy động lực học” (năm 1738), trong đó ông đã đưa ra cơ sở lý luận của phương trình chuyển động ổn định của chất lỏng lý tưởng mang tên ông, mà ông lập luận cho một dòng nguyên tố, theo nguyên tắc bảo toàn động năng.

Lêôna Ôle (1707-1783) - nhà toán học, cơ học và vật lý vĩ đại - sinh ra ở Balơ (Thụy Sĩ), sống ở Pêtécboa từ 1727 đến 1741, rồi từ 1766 đến hết đời; ông là viện sĩ Viện Hàn lâm Pêtécboa. Ông nổi tiếng với phương pháp nghiên cứu các yếu tố thủy lực tại một điểm cố định, gọi là phương pháp Ôle, với những phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng lý tưởng mang tên ông, làm cơ sở cho thủy động lực học; ông đã khái quát chương trình vi phân liên tục của Đalămbe thành dạng chung dùng cho cả chất khí, ông đã suy từ những phương trình vi phân nói trên ra phương trình Bécnuuy. Ông cũng nghiên cứu những máy thủy lực và là người đầu tiên nêu lên công thức cơ bản của những máy tước bin.

Đalămbe (1717-1783) - nhà toán học và triết học, viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Pháp và nhiều nước khác, kể cả Viện Hàn lâm Pêtécboa (từ năm 1764). Ông có những luận văn về sự chuyển động và cân bằng chất lỏng.

Trong thời gian này, hai nhà toán học Pháp có nhiều cống hiến cho cơ học chất lỏng là: Lagorănggiơ (1736-1813), phát triển các công trình của Ôle, đưa vào phương pháp nghiên cứu một phần tử nhất định của chất lỏng chuyển động gọi là phương pháp Lagorănggiơ; ông đề ra khái niệm về thế lưu tốc và hàm số dòng làm cơ sở cho việc nghiên cứu chuyển động thế, viết những công trình nghiên cứu về sóng di động có độ cao vô cùng nhỏ trong kênh có độ sâu hữu hạn; và Laplaxơ (1749-1824) sáng tạo lý thuyết độc đáo về sóng trên mặt chất lỏng và lý thuyết về tính mao dẫn; ông sáng tạo ra toán tử Laplaxơ được dùng trong thủy động lực học.

Những kết quả nghiên cứu của các nhà toán học nói trên tạo nên cơ sở lý thuyết cho cơ học chất lỏng hiện đại, tuy vậy những kết quả đó chưa phải là đã được sử dụng trực tiếp vào thủy lực nên có một thời kỳ cơ học chất lỏng phát triển như là một ngành toán học với những lời giải đẹp và thủy lực phát triển như một ngành kỹ thuật với những ứng dụng phong phú.

b) Sự xuất hiện phương hướng ứng dụng của cơ học chất lỏng (phương hướng thủy lực)

Bên cạnh phương hướng lý thuyết nói trên của cơ học chất lỏng, xuất hiện phương hướng ứng dụng hoặc kỹ thuật tức là phương hướng thủy lực, chủ yếu do trường phái thủy lực Pháp xây dựng nên.

Những đại diện xuất sắc của trường phái này là: Pitô (1695-1771) - Kỹ sư thủy công, viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Pari, sáng chế ra “ống Pitô” để đo vận tốc dòng chảy; Sedi (1718-1798) - Giám đốc Trường Cầu đường, lập ra công thức mang tên ông, khi nghiên cứu dòng chảy trong kênh với mục đích tìm ra sức cản do thành rắn và đáy kênh gây ra; Boócđơ (1733-1794) - Kỹ sư, nghiên cứu dòng chảy ra khỏi lỗ và tìm ra “tổn thất Boócđơ” khi lòng dẫn mở đột ngột; Bốtuy (1730-1814) làm nhiều thí nghiệm mô hình để xác định sức cản giữa dòng chảy và những vật ngập có hình dạng khác nhau; Đuyboa (1734-1809) nổi tiếng với công trình “những nguyên lý của thủy lực học” và được coi là người sáng tạo ra kỹ thuật thực nghiệm của trường phái thủy lực Pháp, ông tiến hành nhiều thí nghiệm nhằm tìm ra những giải pháp thực tế; ông phân tích nhiều về dòng chảy, đều dựa trên sự cân bằng giữa gia tốc do trọng lực gây ra và sức cản của thành rắn; ông đi đến công thức tương tự như Sedi trong đó ông đưa ra khái niệm về bán kính thủy lực; những công trình nghiên cứu của Đuyboa có nhiều ảnh hưởng ở châu Âu vào cuối thế kỷ XVIII và đầu thế kỷ XIX.

Hai nhà thủy lực thực nghiệm nữa cũng thường được kể đến là: giáo sư người Ý Venturi (1746-1822) làm nhiều thí nghiệm về dòng nước chảy qua vòi và những thiết bị dạng hội tụ và khuếch tán mang tên ông và kỹ sư người Đức Vônman (1757-1837) đã nghiên cứu lưu tốc kế đo lưu lượng ở sông.

Nhờ những hoạt động nghiên cứu của các nhà bác học, kỹ sư theo hướng thực nghiệm và kỹ thuật nói trên, môn thủy lực đạt được nhiều tiến bộ về một số mặt chủ yếu là:

- Có nhiều sáng chế về dụng cụ đo lường như ống đo áp, ống Pitô, lưu tốc kế Vônman, lưu lượng kế Venturi v.v...;

- Sử dụng mô hình để nghiên cứu những hiện tượng thủy lực hoặc để thiết kế những công trình;

- Xây dựng những công thức tính toán lý thuyết kết hợp với những hệ số điều chỉnh, xác định bởi những kết quả thí nghiệm.

8. Sự phát triển của thủy lực học ở thế kỷ thứ XIX

a) Cơ học chất lỏng ứng dụng tiếp tục phát triển nhanh chóng ở Pháp và nhiều nước khác

Hai nhà bác học Haghen (Đức) và Râynon (Anh) có công lao phân biệt hai trạng thái chảy: chảy tầng và chảy rối, với những qui luật khác nhau về sức cản.

Nhiều nhà khoa học đã nghiên cứu sức cản thủy lực như Culông, Poadơi, Haghen, Đácxy, Vétsbát, Sanhvonăng v.v...

Dòng chảy trong kênh hở được chú trọng nghiên cứu. Về dòng đều, nhiều thí nghiệm được tiến hành nhằm xác định những thông số trong công thức Sedi như các công trình thí nghiệm của Badan, Găngghilê, Cốtta Maninh. Về dòng ổn định không đều, đối dẫn có những nghiên cứu về đường mặt nước, độ sâu phân giới, nước nhảy, hệ số sửa chữa động năng, hệ số sửa chữa động lượng... của các nhà khoa học như Bêlănggiê, Brexơ, Bìđôn Còriôlít, Vôchiê, Buxinétxơ, Đuypuy Buđanh, Sanhvonăng... Về dòng không ổn định, về sóng có Rútsen, Buđanh, Sanhvonăng, Buxinétxơ, Đuypuy...

Bêlănggiê, Buđanh, Boócđã, Buxinétxơ, Vétsbát đã nghiên cứu về dòng chảy qua lỗ và đập tràn.

Bắt đầu có những công trình nghiên cứu về dòng có hạt lơ lửng tải vật rắn của Đuypuy, Đácxy, Fácơ, Đuyboa. Dòng thấm được nghiên cứu bởi Đácxy, Đuypuy, Buxinétxơ.

Cuối thế kỷ thứ XIX trong lĩnh vực nghiên cứu bằng thí nghiệm mô hình phát triển thêm ba hướng mới: nghiên cứu mô hình trong ống khí động học, trong bể thử tàu, mô hình sông có đáy di động. Những nguyên tắc về tương tự thủy động lực học và những tiêu chuẩn tương tự được đề ra bởi Côsi, Rích, Forút, Hemhôn, Râynon.

Về máy thủy lực, có Buốđin, Fuốcnâyron, Peltôn nghiên cứu những tuốc bin thủy lực: Stêven, Smit, Erichson, nghiên cứu những máy đẩy cánh quạt dùng cho các tàu thủy.

Riêng ở nước Nga, hướng ứng dụng của cơ học chất lỏng, nảy sinh từ những công trình của Lômonôxốp, được bắt đầu phát triển từ thế kỷ thứ XIX với những công trình của các bác học, giáo sư trường kỹ sư giao thông Pêtécbuma như Melnicôp, Clukhốp Xôcôlốp, Cốtliaxépki, Mắximencô, Mécsinhơ v.v...

b) Cơ học chất lỏng cổ điển ở thế kỷ XIX tiếp tục phát triển theo hướng toán học và góp phần vào sự tiến bộ của thủy lực. Naviê rời Stóc hoàn thành hệ thống phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng nhớt, làm cơ sở cho động lực học chất lỏng nhớt. Hai nhà vật lý Đức là Hemhôn và Kiécxốp vận dụng phép biến đổi bảo giác (Do Lagơrănggiơ và Cỗy sáng tạo và Riêman, Csittôfen và Svácơ phát triển) để nghiên cứu chuyển động thế phẳng. Buxinétxơ với công trình lớn “Về lý thuyết dòng sông” (1872) được coi như là đóng vai trò quan trọng trong sự phát triển của thủy động lực học và thủy lực. Râynon để lại công trình lớn cho thủy động lực học và cho thủy lực. Những nghiên cứu của Kelvin (dòng không xoáy chuyển động xoáy, triều, sóng) và Râylai (xâm thực, tương tự động lực học) đã góp phần thúc đẩy thủy động lực học. Ở Nga nhà bác học Pêtơrốp nghiên cứu về qui luật nội ma sát khi sôi tron. Giucốpki - sáng tạo ra lý thuyết về sức nâng thủy động lực, về nước va; Gơrômécô đặt cơ sở cho lý thuyết dòng xoắn, nghiên cứu lý thuyết về hiện tượng mao dẫn.

9. Những khuynh hướng phát triển của thủy lực học trong lĩnh vực xây dựng công trình ở đầu thế kỷ XX

Sang đầu thế kỷ XX, do phải giải quyết nhiều vấn đề của thực tiễn sản xuất, khoa học thủy lực đã chia thành nhiều ngành chuyên sâu, ứng với những kỹ thuật khác nhau; thí dụ: thủy lực các công trình xây dựng, thủy lực của công nghệ chế tạo máy, thủy lực của công nghiệp đóng tàu, thủy lực của công nghệ hóa học v.v...

Nói riêng trong lĩnh vực xây dựng cơ bản, khoa học thủy lực cũng lại phân thành những bộ phận riêng nghiên cứu khá sâu, như: thủy lực kênh hở; thủy lực hạ lưu công trình dâng nước; thủy lực của dòng có cột nước cao; thủy lực hạ lưu nhà máy thủy điện, thủy lực đường ống; thủy lực về dòng thấm, về nước ngầm; dòng không ổn định; lý thuyết sóng; dòng thứ cấp; dòng mang bùn cát v.v...

Ngoài đặc điểm là phân ngành sâu như vừa nói trên, khoa học thủy lực sang thế kỷ XX ngày càng gắn bó với cơ học chất lỏng, phương pháp nghiên cứu thí nghiệm và phương pháp nghiên cứu lý luận càng ngày càng kết hợp chặt chẽ với nhau. Đồng thời cũng hình thành một hệ thống phương pháp nghiên cứu những vấn đề thủy lực như: phương pháp nghiên cứu bằng các phần tử chất lỏng; phương pháp nghiên cứu bằng các trị số trung bình; phương pháp tương tự; phương pháp phân tích thứ nguyên; phương pháp thực nghiệm v.v...

Trước hết cần nêu những thành tựu chính của cơ học chất lỏng có thúc đẩy việc nghiên cứu bằng phương pháp thủy lực. Đó là: lý thuyết nửa thực nghiệm về rối với Póranlơ, Taylo, Cácmán v.v...; lý thuyết về lớp biên của Pórantơ (1875-1953); công trình của Bladiút (sinh 1837), lần đầu tiên nêu rằng đối với “ống trơn”, hệ số cản chỉ phụ thuộc số Ráynôn; sự phân bố vận tốc và sức cản của dòng rối trong ống của Cácmán (1881-1963), ngoài những nhà nghiên cứu trên thuộc trường phái của Pórantơ, còn có những nhà nghiên cứu khác cùng trường phái, với những đóng góp nổi tiếng, như: Tôlmiên, Sile (sức cản trong ống), Slicting (lớp biên), Nicurátơ (tổn thất cột nước trong ống) v.v... hướng nghiên cứu bằng phân tích thứ nguyên được đề ra bởi Búckinhgam (1887-1940), Borítman (1882...) v.v... Vêbe (1871-1951) đưa ra những hình thức hiện đại của nguyên tắc tương tự thủy động lực.

Về mặt thủy lực, thời gian đầu thế kỷ XX, đã xuất hiện nhiều công trình nghiên cứu lớn như của Fôccorâyme (1852-1933), nghiên cứu về sức cản thủy lực, về sóng di động, về thấm v.v... Bakhômêchiép (1880-1951), với phương pháp tích phân phương trình vi phân về chuyển động không đều trong kênh lằng trụ; Ăngghen (1854-1945), Rêbốc (1864-1950) chủ trì những phòng thí nghiệm lớn ở Đorétstơ, ở Cáclơruhe (Đức); Timônốp (1862-1936) ở Pêtorôgrát, Sápfernác (1839-1951), ở Viên, Maiyer Pêter (1883), ở Duyrich, Gibson (1878) ở Mansester... Ở Pháp những nhà thủy lực nổi tiếng như Camisen (1871-1966), Ét scandơ chủ trì phòng thí nghiệm thủy lực Tuludơ khá lớn... Ở Mỹ đã tiến hành nhiều thí nghiệm trên sân mô hình hoặc ngoài thực địa, nhất là về thủy nông, như Scôbây nghiên cứu sức cản của kênh tưới. Yácnen nghiên cứu dòng chảy trong ống tưới, Pácsan (1881-1951) trong ống Venturi...

Sự thắng lợi của Cách mạng xã hội chủ nghĩa Tháng 10 Nga vĩ đại đã giải phóng sức sản xuất và đẩy mạnh công cuộc xây dựng kinh tế ở Liên Xô (cũ), làm cho khoa học kỹ thuật Liên Xô (cũ) có những bước tiến vượt bậc. Khoa học thủy lực Liên Xô (cũ) đã phát triển rất nhanh và nhiều mặt đã đứng hàng đầu trên thế giới. Viện sĩ Pavolópki (1884 - 1937) đã có những cống hiến lớn để xây dựng và phát triển khoa học thủy lực Xô Viết, với những công trình nghiên cứu về nhiều lĩnh vực thủy lực khác nhau, như sáng tạo lý luận chuyển động không đều trong môi trường thấm, phương pháp “tương tự” “điện thủy”, sức cản thủy lực v.v... Viện sĩ Vêlicanốp (1879-1964) xây dựng lý thuyết rối, nghiên cứu chuyển động bùn cát và biến dạng lòng sông, đề xuất lý thuyết trọng lực của sự chuyển động bùn cát lơ lửng. N.M. Bécnátski (1817-1935) đề nghị mô hình về “chuyển động bình diện”. Nhiều ngành thủy lực chuyên môn đã phát triển mạnh ở Liên Xô (cũ) như thủy lực về ống có áp (như A.D. Ansun, N.Z. Forenken, F. A. Sêvêlêp v.v...), thủy lực kênh hở (như I. I. Agorótskin, M. Đ. Séctôuxốp, S. A. Coritschianôvich v.v...), thủy lực công trình (A. N.

Akhuchin, E. A. Damarin, I. I. Lêvi, A. N. Rakhomanôp, D. I. Cumin v.v...), thủy lực dòng thấm (V. I. Aravin, S. N. Numêrôp, R. R. Sugaép v.v...) v.v... Ở các nước xã hội chủ nghĩa khác, khoa học thủy lực cũng phát triển nhanh.

10. Thủy lợi và khoa học thủy lực ở Việt Nam

Ở Việt Nam ông cha ta đã biết lợi dụng nước để phục vụ nông nghiệp kể từ các thời kỳ đồ đá cũ (30 vạn năm về trước), đồ đá giữa (1 vạn năm), đồ đá mới (5.000 năm), rồi đến thời đại đồ đồng (4.000 năm - Hùng Vương dựng nước). Từ đầu công nguyên trở đi (thời kỳ đồ sắt phát đạt) công trình thủy lợi vẫn tiếp tục phát triển, hệ thống đê điều đã dần dần hình thành dọc những sông lớn ở đồng bằng Bắc Bộ, nhiều kênh ngòi được đào thêm hoặc nạo vét lại.

Theo “Cương mục chính biên”, năm 938 thời Lê Hoàn, đã đào sông từ núi Đồng Cổ (Yên Định Thanh Hóa) đến sông Bà Hòa (Tĩnh Gia - Thanh Hóa) thuyền bè đi lại tiện lợi.

Về đời Lý (thế kỷ XI), nhiều đoạn đê quan trọng dọc theo những sông ngòi lớn ở các vùng đồng bằng đã được đắp, trong đó quan trọng nhất là đê Cơ Xá (đê sông Hồng, vùng Thăng Long) được đắp vào mùa xuân năm 1168. Một số kênh ngòi nhất là vùng Thanh Hóa, được tiếp tục đào và khơi sâu thêm. Nền nông nghiệp nước ta ở vùng đồng bằng thường bị ngập lụt và hạn hán đe dọa; những công trình thủy lợi trên đã tạo ra những điều kiện quan trọng để phát triển nông nghiệp.

Sang đời Trần (từ thế kỷ XIII) công việc đắp đê phòng lũ được tiến hành hàng năm với qui mô lớn. Năm 1248, thời Trần Thái Tông, đã đắp đê từ đầu nguồn đến bờ biển gọi là đê Quai Vạc. Hệ thống đê điều dọc các sông lớn ở đồng bằng Bắc Bộ đến thời Trần về cơ bản đã xây dựng và hàng năm tu bổ; vấn đề xây dựng và bảo vệ đê điều trở thành một chức năng quan trọng của chính quyền và là nhiệm vụ của toàn dân.

Đến đời Lê (thế kỷ XV), rất coi trọng việc tu bổ, kiểm tra đê điều. Thời Lê Sơ, đã khôi phục lại nhiều công trình, năm 1428 khơi lại kênh ở Trường An, Thanh Hóa, Nghệ Tĩnh năm 1445. Nhân Tông khơi sông Bình Lỗ (huyện Kim Anh, Vĩnh Phú), thông suốt đến Bình Than. Năm 1467, các đê ngăn nước mặn vùng Nam Sách, Thái Bình được bồi đắp lại, ngoài ra đã đào nhiều kênh mương để tưới ruộng và để vận tải tiện lợi. Di tích những đoạn đê nước mặn vẫn còn đến nay, nhân dân thường gọi là “đê Hồng Đức” (niên hiệu của Lê Thánh Tông). Ở Thanh Hóa nhiều sông đào đã được khai thác từ thế kỷ XV, đến nay còn mang tên là “sông nhà Lê”.

Từ thế kỷ XVI, chế độ quân chủ chuyên chế và những hậu quả do nó gây ra - cát cứ và nội chiến - đã cản trở sự phát triển của sức sản xuất. Tuy nhiên nhân dân không ngừng đấu tranh để bảo vệ làng xóm quê hương, bảo vệ cuộc sống của mình. Sang thế kỷ XVIII giai cấp phong kiến bước vào giai đoạn khủng hoảng sâu sắc về toàn diện; nông nghiệp đình đốn ở cả Đàng ngoài và cả ở Đàng trong. Dưới triều Nguyễn (thế kỷ XIX) kinh tế nông nghiệp cũng ngày càng sa sút, triều Nguyễn bất lực trong việc chăm lo, bảo vệ đê điều và các công trình thủy lợi nên nạn đê vỡ, lụt lội xảy ra liên tiếp. Riêng đê sông Hồng ở Khoái Châu (Hưng Yên) đời Tự Đức bị vỡ “10 năm liền” dân nghèo phải bỏ làng, phiêu bạt xứ sở.

Tình hình nông nghiệp đã buộc nhà Nguyễn phải đề ra chính sách khẩn hoang, bắt đầu từ triều Nguyễn và được đẩy mạnh dưới triều Minh Mệnh. Trong khoảng 1828-1829, với cương vị doanh điền sứ, Nguyễn Công Trứ đã đề ra chính sách doanh điền, thực hiện khẩn hoang, theo lối di dân, lập ấp, đã lập thành 2 huyện Kim Sơn (Ninh Bình) và Tiên Hải (Thái Bình); ông đã lợi dụng địa hình để đắp đê và mở mang hệ thống thủy nông một cách hợp lý, khoa học. Do những kết quả đó, chính sách doanh điền được áp dụng ở nhiều nơi nhất là Nam Kỳ.

Thời kỳ Pháp thuộc, trong những năm đô hộ, thực dân Pháp đã làm một số ít công trình thủy lợi để phục vụ chính sách bóc lột thuộc địa của chúng, căn bản không có biện pháp hiệu quả để chống hạn, úng, lụt, xói mòn để đảm bảo sản lượng ruộng đất được ổn định và đời sống nhân dân được an toàn.

Sau khi Cách mạng tháng Tám năm 1945 thành công, nhất là sau khi cuộc kháng chiến chống thực dân Pháp thắng lợi, miền Bắc được giải phóng hoàn toàn, sự nghiệp thủy lợi được phát triển mạnh mẽ.

Công tác thủy lợi là biện pháp hàng đầu đảm bảo cho việc phát triển nhanh và vững chắc của nông nghiệp. Đã xây dựng được ở miền Bắc một mạng lưới thủy nông, gồm hơn 60 hệ thống thủy nông loại lớn và loại vừa có khả năng tưới nước cho 1 triệu ha và tiêu cho 1,1 triệu ha ruộng đất canh tác. Công tác củng cố bảo vệ đê, hộ đê, phân lũ, làm chậm lũ... đã bảo vệ được sản xuất và an toàn cho nhân dân. Công trình thủy điện Thác Bà với công suất 108.000 kW và một loạt công trình thủy điện nhỏ như Bàn Thạch, Nahan, suối Cũn, Cẩm Sơn v.v... đã được xây dựng, một đội ngũ cán bộ khoa học kỹ thuật thủy lợi có khả năng thiết kế, quản lý và thi công những công trình tương đối lớn và một hệ thống các trường đại học và viện nghiên cứu, viện thiết kế phục vụ yêu cầu của sự nghiệp thủy lợi.

Sau khi miền Nam được hoàn toàn giải phóng, công tác thủy lợi ở miền Nam được triển khai mạnh mẽ phục vụ yêu cầu phát triển nông nghiệp và các yêu cầu cải tạo, xây dựng kinh tế và đã đạt được nhiều thành tích to lớn.

Về mặt khoa học thủy lực, môn thủy lực đã được giảng dạy thành môn cơ sở kỹ thuật trong các trường kỹ thuật ở nước ta, đã hình thành một số phòng thí nghiệm thủy lực, đã nghiên cứu giải quyết một số vấn đề thủy lực, như những vấn đề về tính toán dòng không ổn định trong việc tính lũ, triều, những vấn đề về thủy lực công trình, về chuyển động của bùn cát, về dòng thấm, về các máy thủy lực v.v...

Trong giai đoạn mới, nhiệm vụ khai thác và chỉnh trị các dòng sông, lợi dụng các nguồn nước để phục vụ các ngành công nghiệp, nông nghiệp, giao thông vận tải và các nhu cầu khác rất to lớn, nó đòi hỏi khoa học thủy lực ở nước ta phải phát triển mạnh mẽ, nhanh chóng tiếp thu thành tựu hiện đại của thế giới, vận dụng sáng tạo vào điều kiện nước ta, đi sâu nghiên cứu những vấn đề riêng của nước ta để có đủ khả năng giải quyết nhiều vấn đề thủy lực mới và phức tạp, tiến lên đuổi kịp trình độ các nước tiên tiến, xây dựng nền khoa học thủy lực tiên tiến ở nước ta.

§1-3. KHÁI NIỆM CHẤT LỎNG TRONG THỦY LỰC

Việc nghiên cứu môn thủy lực dựa vào khái niệm *phần tử chất lỏng*. Phần tử chất lỏng được coi là vô cùng nhỏ, tuy nhiên kích thước của nó cũng còn vượt rất xa kích thước của phân tử. Ta giả thiết phần tử chất lỏng là đồng nhất, đẳng hướng, liên tục và không xem xét đến cấu trúc phân tử, chuyển động phân tử nội bộ.

Chất lỏng và chất khí khác chất rắn ở chỗ mối liên kết cơ học giữa các phân tử trong chất lỏng và chất khí rất yếu nên chất lỏng và chất khí có tính di động dễ chảy hoặc nói một cách khác có tính chảy. Tính chảy thể hiện ở chỗ các phân tử trong chất lỏng và chất khí có chuyển động tương đối với nhau khi chất lỏng và chất khí chuyển động; tính chảy còn thể hiện ở chỗ các phân tử chất lỏng và chất khí không có hình dạng riêng mà lấy hình dạng của bình chứa chất lỏng, chất khí đứng tĩnh, vì thế chất lỏng và chất khí còn gọi là chất chảy.

Chất lỏng khác chất khí ở chỗ khoảng cách giữa các phân tử trong chất lỏng so với chất khí rất nhỏ nên sinh ra sức dính phân tử rất lớn; tác dụng của sức dính phân tử này là làm cho chất lỏng giữ được thể tích hầu như không thay đổi dẫu có thay đổi về áp lực, nhiệt độ, nói cách khác chất lỏng chống lại được sức nén, không co lại, trong khi chất khí dễ dàng co lại và bị nén. Vì thế người ta cũng thường gọi chất lỏng là chất chảy không nén được và chất khí là chất chảy nén được. Tính chất không nén được của chất lỏng đồng thời cũng là tính không dẫn ra của nó; nếu chất lỏng bị kéo thì khối liên tục của chất lỏng bị phá hoại, trái lại chất khí có thể dẫn ra và chiếm hết được thể tích của bình chứa nó.

Tại mặt tiếp xúc giữa chất lỏng và chất khí, hoặc với chất rắn hoặc với một chất lỏng khác, do lực hút đẩy các phân tử sinh ra sức căng mặt ngoài; nhờ có sức căng mặt ngoài, một thể tích nhỏ của chất lỏng đặt ở trường trọng lực sẽ có dạng từng hạt. Vì vậy, chất lỏng còn được gọi là chất chảy dạng hạt; tính chất này không có ở chất khí.

Trong thủy lực, chất lỏng được coi như môi trường liên tục, tức là những phần tử chất lỏng chiếm đầy không gian mà không có chỗ nào trống rỗng. Với giả thiết này, ta có thể coi những đặc trưng cơ bản của chất lỏng như vận tốc, mật độ, áp suất v.v... là hàm số của tọa độ điểm (phần tử), thời gian và trong đa số trường hợp, những hàm số đó được coi là liên tục và khả vi.

Sau đây nêu lên những đặc tính vật lý cơ bản của chất lỏng thường dùng đến trong giáo trình này.

§1-4. NHỮNG ĐẶC TÍNH VẬT LÝ CƠ BẢN CỦA CHẤT LỎNG

1. Đặc tính thứ nhất của chất lỏng, cũng như mọi vật thể là có khối lượng. Đặc tính đó được biểu thị bằng khối lượng đơn vị (hoặc khối lượng riêng) ρ . Đối với chất lỏng đồng chất, khối lượng đơn vị ρ bằng tỷ số khối lượng M đối với thể tích W của khối lượng đó của chất lỏng, tức là:

$$\rho = \frac{M}{W} \quad (1-1)$$

Thứ nguyên của đơn vị khối lượng là:

$$[\rho] = \frac{[M]}{[W]} = \frac{FT^2}{L^4} = \frac{M}{L^3}$$

Đơn vị của ρ là kg/m^3 hoặc $\frac{\text{Ns}^2}{\text{m}^4}$

Theo hệ MKS, đơn vị của ρ là $\frac{\text{kGs}^2}{\text{m}^4}$

Đối với nước đơn vị khối lượng của nước lấy bằng khối lượng của đơn vị thể tích nước cất ở nhiệt độ $+4^{\circ}\text{C}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

2. Hệ quả của đặc tính thứ nhất là đặc tính thứ hai của chất lỏng: *có trọng lượng*. Đặc tính này được biểu thị bằng trọng lượng đơn vị hoặc trọng lượng riêng. Đối với chất lỏng đồng chất, trọng lượng đơn vị bằng tích số của khối lượng đơn vị với gia tốc rơi tự do ($g = 9,81\text{m/s}^2$):

$$\gamma = \rho g = \frac{Mg}{W} \quad (1-2)$$

Thứ nguyên của đơn vị trọng lượng là:

$$[\gamma] = \frac{[Mg]}{[W]} = \frac{F}{L^3}$$

Đơn vị của γ là $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2\text{s}^2}$ hoặc $\frac{\text{N}}{\text{m}^3}$. Theo hệ MKS, đơn vị của γ là $\frac{\text{kG}}{\text{m}^3}$.

Đối với nước ở nhiệt độ $+4^{\circ}\text{C}$, $\gamma = 9810 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = 1000 \frac{\text{kG}}{\text{m}^3}$; với thủy ngân

$$\gamma = 134.000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} = 136000 \frac{\text{kG}}{\text{m}^3}$$

3. Đặc tính thứ ba của chất lỏng là tính thay đổi thể tích vì thay đổi áp lực hoặc vì thay đổi nhiệt độ.

Trong trường hợp thay đổi áp lực, ta dùng hệ số co thể tích β_w để biểu thị sự giảm tương đối của thể tích chất lỏng W ứng với sự tăng áp suất p lên một đơn vị áp suất; hệ số β_w biểu thị bằng công thức:

$$\beta_w = - \frac{1}{W} \frac{dW}{dp} \text{ m}^2/\text{N} \quad (1-3)$$

Thí nghiệm chứng tỏ trong phạm vi áp suất từ 1 đến 500 át-mốt-phe và nhiệt độ từ 0 đến 20°C thì hệ số co của thể tích của nước $\beta = 0,00005 \frac{\text{cm}^2}{\text{kG}} \approx 0$. Như vậy trong thủy lực, chất lỏng thường có thể coi như không nén được. Số đảo của hệ số co thể tích gọi là môđun đàn hồi K:

$$K = \frac{1}{\beta_w} = -W \frac{dp}{dW} \text{ N/m}^2 \quad (1-4)$$

Trong trường hợp thay đổi nhiệt độ, ta dùng hệ số giãn vì nhiệt β_t để biểu thị sự biến đổi tương đối của thể tích chất lỏng W ứng với sự tăng nhiệt độ t lên 1°C, hệ số β_t biểu thị bằng công thức:

$$\beta_t = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \quad (1-5)$$

Thí nghiệm chứng tỏ trong điều kiện áp suất không khí thì ứng với $t = 4 \div 10^\circ\text{C}$ ta có $\beta_t = 0,00014 \left(\frac{1}{t^0} \right)$ và ứng với $t = 10 \div 20^\circ\text{C}$ ta có $\beta_t = 0,00015 \left(\frac{1}{t^0} \right)$. Như vậy trong thủy lực chất lỏng có thể coi như không co giãn dưới tác dụng của nhiệt độ.

Tóm lại, trong thủy lực, chất lỏng thường được coi là có tính chất không thay đổi thể tích mặc dù có sự thay đổi về áp lực hoặc nhiệt độ. Tính chất này còn thường được thể hiện bằng đặc tính là: Mật độ giữ không đổi, tức $\rho = \text{const}$.

4. Đặc tính thứ tư của chất lỏng là có sức căng mặt ngoài, tức là có khả năng chịu được ứng suất kéo không lớn lắm tác dụng lên mặt tự do, phân chia chất lỏng với chất khí hoặc trên mặt tiếp xúc chất lỏng với chất rắn.

Sự xuất hiện sức căng mặt ngoài được giải thích là để cân bằng với sức hút phân tử của chất lỏng tại vùng lân cận mặt tự do, vì ở vùng này sức hút giữa các phân tử chất lỏng không đôi một cân bằng nhau như ở vùng xa mặt tự do. Sức căng mặt ngoài, do đó có khuynh hướng giảm nhỏ diện tích mặt tự do và làm cho mặt tự do có một độ cong nhất định. Do sức căng mặt ngoài mà giọt nước có hình cầu. Trong ống có đường kính khá nhỏ cắm vào chậu nước, có hiện tượng mức nước trong ống dâng cao hơn mặt nước tự do ngoài chậu; nếu chất lỏng là thủy ngân thì lại có hiện tượng mặt tự do trong ống hạ thấp hơn mặt thủy ngân ngoài chậu; đó là hiện tượng mao dẫn, do tác dụng của sức căng mặt ngoài gây nên; mặt tự do của chất lỏng trong trường hợp đầu là mặt lõm, trong trường hợp sau là lồi.

Sức căng mặt ngoài đặc trưng bởi các hệ số sức căng mặt ngoài σ , biểu thị sức kéo tính trên đơn vị dài của “đường tiếp xúc”. Hệ số σ phụ thuộc loại chất lỏng và nhiệt độ. Trong trường hợp nước tiếp xúc với không khí ở 20°C ta lấy $\sigma = 0,0726 \text{ N/m} = 0,0074 \text{ kG/m}$. Nhiệt độ tăng lên, σ giảm đi. Đối với thủy ngân cũng trong những điều kiện trên, ta có $\sigma = 0,540 \text{ N/m}$, tức là gần bằng 7,5 lần lớn hơn đối với nước.

Trong đa số hiện tượng thủy lực ta có thể bỏ đi không cần xét đến sự ảnh hưởng của sức căng mặt ngoài vì trị số rất nhỏ so với những lực khác. Thường phải tính sức căng mặt ngoài trong trường hợp có hiện tượng mao dẫn, thí dụ trong trường hợp dòng thấm dưới đất. Đối với nước ở nhiệt độ 20°C, độ dâng cao h (mm) trong ống thủy tinh có đường kính d (mm) tính theo công thức:

$$hd = 30 \text{ mm}^2$$

Đối với thủy ngân, độ hạ thấp h (mm) trong ống thủy tinh đường kính d (mm) tính theo:

$$hd = 10,15 \text{ mm}^2$$

5. Đặc tính thứ năm của chất lỏng là có tính nhớt. Trong thủy lực tính nhớt rất quan trọng, vì nó là nguyên nhân sinh ra sự tổn thất năng lượng khi chất lỏng chuyển động. Sau đây chúng ta nghiên cứu kỹ đặc tính này.

Khi các lớp chất lỏng chuyển động, giữa chúng có sự chuyển động tương đối và nảy sinh tác dụng lôi đi, kéo lại hoặc nói cách khác giữa chúng nảy sinh ra sức ma sát tạo nên sự chuyển biến một bộ phận cơ năng của chất lỏng chuyển động thành nhiệt năng mất đi không lấy lại được. Sức ma sát này gọi là sức ma sát trong (hoặc nội ma sát) vì nó xuất hiện trong nội bộ chất lỏng chuyển động.

Tính chất nảy sinh ra sức ma sát trong hoặc nói một cách khác, tính chất nảy sinh ra ứng suất tiếp giữa các lớp chất lỏng chuyển động gọi là tính nhớt của chất lỏng.

Tính nhớt là biểu hiện sức dính phân tử của chất lỏng; khi nhiệt độ tăng cao, mỗi phân tử dao động mạnh hơn xung quanh vị trí trung bình của phân tử; do đó sức dính phân tử kém đi và độ nhớt của chất lỏng bớt đi. Mọi chất lỏng đều có tính nhớt.

Như vậy, khái niệm về tính nhớt có liên quan chặt chẽ đến khái niệm về ma sát trong. Chính thông qua định luật ma sát trong mà người ta đã xác định đại lượng đặc trưng cho tính nhớt của chất lỏng.

Năm 1686, I. Niuton đã nêu lên giả thuyết về qui luật ma sát trong, tức ma sát của chất lỏng (chú ý rằng định luật ma sát của chất rắn, tức ma sát ngoài là do Culông đề ra, được thuyết minh trong các giáo trình cơ học lý thuyết) và sau đó đã được rất nhiều thí nghiệm xác nhận là đúng: “sức ma sát giữa các lớp của chất lỏng chuyển động thì tỷ lệ với diện tích tiếp xúc của các lớp ấy, không phụ thuộc áp lực, phụ thuộc gradien vận tốc theo chiều thẳng góc với phương chuyển động, phụ thuộc loại chất lỏng”. Định luật ma sát trong của Niuton viết dưới biểu thức:

$$F = \mu S \frac{du}{dn} \quad (1-6)$$

Trong đó (hình 1-1):

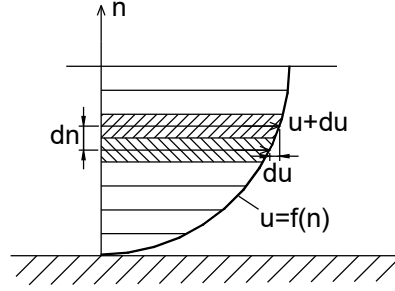
F – sức ma sát giữa hai lớp chất lỏng;

S – diện tích tiếp xúc;

u – vận tốc, $u = f(n)$ – qui luật phân bố vận tốc theo phương n ;

$\frac{du}{dn}$ – gradien vận tốc theo phương n ,
tức đạo hàm của u đối với n ;

μ – hằng số tỷ lệ, phụ thuộc loại chất lỏng, được gọi là hệ số nhớt hoặc hệ số nhớt động lực.



Hình 1-1

Gọi τ là ứng suất tiếp, $\tau = \frac{F}{S}$, công thức (1-6) có thể viết dưới dạng:

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} \quad (1-7)$$

Công thức (1-6) hoặc (1-7) dùng cho chuyển động tầng của chất lỏng (sẽ nói rõ khái niệm chuyển động tầng ở chương IV).

Tính nhớt của chất lỏng được đặc trưng bởi hệ số nhớt μ mà thứ nguyên là:

$$[\mu] = \left[\frac{[F]}{S \frac{du}{dn}} \right]$$

hoặc:
$$[\mu] = \frac{FT}{L^2} = \frac{M}{LT}$$

Đơn vị đo hệ số nhớt μ trong hệ đo lường hợp pháp là Ns/m^2 hoặc kg/ms ; đơn vị ứng với $\frac{1}{10} \frac{Ns}{m^2}$ gọi là poazơ (P).

Tính nhớt còn được đặc trưng bởi hệ số:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1-8)$$

Trong đó:

ρ - khối lượng đơn vị;

ν - hệ số nhớt động học.

Thứ nguyên của ν là:

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} \text{ hoặc } [\nu] = \frac{L^2}{L}$$

Đơn vị đo hệ số nhớt động học ν trong hệ đo lường hợp pháp là $\frac{m^2}{s}$; đơn vị $\frac{cm^2}{s}$ được gọi là stốc.

Sau đây là bảng cho hệ số nhớt của một vài chất lỏng.

Bảng 1-1

Tên chất lỏng	t °C	Poazơ
Dầu xăng thường	18	0,0065
Nước	20	0,0101
Dầu hỏa	18	0,0250
Dầu mỏ nhẹ	18	0,2500
Dầu mỏ nặng	18	0,4000
Dầu tuyền-bin	20	1,5280
Dầu nhớt	20	1,7200
Glixêrin	20	8,7000

Công thức xác định hệ số nhớt có dạng tổng quát là:

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + at + bt^2} \quad (1-9)$$

Trong đó: μ_0 – hệ số nhớt với $t = 0^0$;

a và b – hằng số, phụ thuộc các loại chất lỏng.

Thí dụ đối với nước, hệ số nhớt có thể tính theo những số liệu thí nghiệm của Poazơ:

$$\mu = \frac{0,0178 \rho_0}{1 + 0,0337 t + 0,000221 t^2} \text{ g/cm.s} \quad (1-10)$$

trong đó : ρ_0 - mật độ của nước ở 0^0 .

Sau đây là bảng cho trị số của hệ số nhớt động học ν của nước, phụ thuộc nhiệt độ:

Bảng 1-2

t °C	ν , cm ² /s	t °C	ν , cm ² /s
0	0,0178	20	0,0101
5	0,0152	30	0,0081
10	0,0131	40	0,0066
12	0,0124	50	0,0055
15	0,0114		

Dụng cụ đo nhớt: Trong thực tế, độ nhớt được xác định bởi những dụng cụ đo nhớt, thuộc nhiều loại khác nhau: loại mao dẫn, loại có những hình trụ đồng trục, loại có đĩa dao động tắt dần v.v...

Trong các phòng thí nghiệm thường hay dùng dụng cụ đo nhớt là một bình hình trụ kim loại (hình 1-2); thể tích của bình 200 cm³. Dưới đáy có lỗ tròn, đường kính 3 mm. Đầu tiên ta đo thời gian T_1 cần cho 200 cm³ nước cất ở $t = 20^0\text{C}$ chảy qua (thời gian này là 51 s); sau đó thời gian T_2 cần cho 200 cm³ chất lỏng đang nghiên cứu chảy qua.

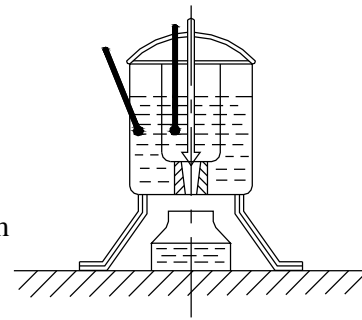
Tỷ số:

$$\frac{T_2}{T_1} = {}^0E \quad (1-11)$$

gọi là độ Engole.

Để đổi thành stoc, có thể dùng công thức kinh nghiệm sau đây:

$$v = 0,0731 {}^0E - \frac{0,0631}{{}^0E} \text{ cm}^2/\text{s (stoc)}.$$



Hình 1-2

Ngoài đơn vị stoc và độ nhớt Engole, thường còn gặp các đơn vị đo độ nhớt động học khác nhau như:

- giây Rétút (ở Anh), ký hiệu "R

$$v = 0,00260 "R - \frac{1,72}{"R} \text{ cm}^2/\text{s},$$

- giây Xêbôn (ở Mỹ), ký hiệu "S;

$$v = 0,00220 "S - \frac{1,80}{"S} \text{ cm}^2/\text{s}.$$

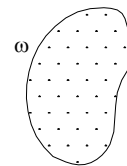
Những loại chất lỏng tuân theo định luật ma sát trong của Niuton biểu thị ở công thức (1-6) hoặc (1-7) gọi là *chất lỏng thực* hoặc *chất lỏng Niuton*. Môn thủy lực nghiên cứu chất lỏng Niuton. Những chất lỏng như chất dẻo, sơn, dầu, hồ v.v... cũng chảy nhưng không tuân theo định luật (1-6) hoặc (1-7) gọi là chất lỏng không Niuton.

Trong việc nghiên cứu, đối với một số vấn đề có thể dùng khái niệm chất lỏng lý tưởng thay thế khái niệm chất lỏng thực. *Chất lỏng lý tưởng* là chất lỏng tưởng tượng, hoàn toàn không có tính nhớt tức là hoàn toàn không có nội ma sát khi chuyển động. Khi nghiên cứu chất lỏng ở trạng thái tĩnh thì không cần phải phân biệt chất lỏng thực với chất lỏng lý tưởng. Trái lại khi nghiên cứu chất lỏng chuyển động thì từ chất lỏng lý tưởng sang chất lỏng thực phải tính thêm vào ảnh hưởng của sức ma sát trong, tức là ảnh hưởng của tính nhớt.

Trong những đặc tính vật lý cơ bản nói trên của chất lỏng, quan trọng nhất trong môn thủy lực là đặc tính có khối lượng, có trọng lượng, có tính nhớt.

§1-5. LỰC TÁC DỤNG

Muốn giải quyết một bài toán thủy lực, tại một thời điểm cho trước, người ta cô lập bằng trí tưởng tượng tất cả những phần tử chất lỏng bên trong một mặt kín ω (hình 1-3). Tất cả các lực tác dụng lên những phần tử ở bên trong ω chia thành hai loại sau đây.



Hình 1-3

1) Những lực trong (nội lực):

Những phần tử ở bên trong ω tác dụng lên nhau những lực từng đôi một cân bằng nhau (theo nguyên lý tác dụng và phản tác dụng), những lực đó tạo thành một hệ lực tương đương với số không. Thí dụ: lực ma sát trong, áp lực trong nội bộ thể tích giới hạn bởi mặt ω .

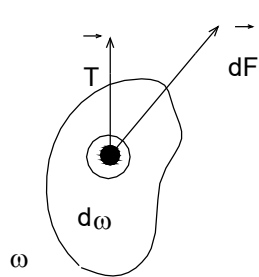
2) Những lực ngoài (ngoại lực):

a) Những phần tử ở ngoài mặt ω tác dụng lên những phần tử trong mặt ω những lực ngoài. Vì những tác dụng này đều hạn chế vào những phần tử ở ngay sát mặt ω , người ta giả thiết rằng những lực đó chỉ tác dụng lên những phần tử của mặt ω và người ta gọi chúng là những lực mặt (những lực này tỷ lệ với những yếu tố diện tích).

b) Những trường lực (trọng lực, từ trường, điện trường v.v...) có những tác dụng lên những phần tử ở trong mặt ω , tỷ lệ với những yếu tố thể tích. Đó là những lực thể tích hoặc còn gọi là lực khối. Chúng ta thường chỉ xét những lực thể tích là trọng lực, lực quán tính.

§1.6. ỨNG SUẤT TẠI MỘT ĐIỂM

a) Ta xét một phần số diện tích $d\omega$ lấy trên một mặt ω , bao quanh một điểm I của mặt ω (hình 1-4).



Hình 1-4

Hệ lực mặt tác dụng lên $d\omega$ thu về được một lực duy nhất \vec{dF} đặt tại I và một mômen \vec{dM} . Ta biết rằng có thể coi \vec{dF} là vô cùng nhỏ bậc nhất so với $d\omega$ và \vec{dM} vô cùng nhỏ bậc cao hơn.

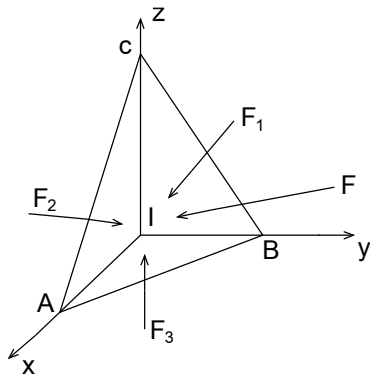
Khi $d\omega$ tiến tới số không, xung quanh điểm I cố định, véctơ $\frac{\vec{dF}}{d\omega}$ tiến tới một véctơ \vec{T} gọi là ứng suất tại I trên phân tố $d\omega$.

Như vậy ở giới hạn, ta viết được: $\vec{dF} = \vec{T} d\omega$.

Véctơ \vec{T} có thể có hướng tùy ý đối với $d\omega$.

b) Cũng bằng cách như vậy, ta có thể định nghĩa ứng suất trên một phân tố diện tích tùy ý bao quanh điểm I lấy ở trong chất lỏng. Chỉ cần tưởng tượng một mặt ω chứa đựng phân tố đó là ta sẽ trở về định nghĩa nói trên.

Vì chất lỏng là một môi trường liên tục đẳng hướng, ta chứng minh rằng muốn biết ứng suất tại I trên một phân tố diện tích $d\omega$ chỉ cần biết những ứng suất trên ba phân tố diện tích đôi một vuông góc với nhau và đều đi qua I.



Hình 1-5

Giả sử ta đã biết những ứng suất của phân tử diện tích đi qua I và đôi một vuông góc với nhau (hình 1-5). Cắt tam diện vuông đó bởi một mặt phẳng mà ta muốn biết ứng suất, mặt này tạo nên mặt thứ tư ABC.

Gọi \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 và \vec{F} là những lực mặt tác dụng riêng biệt lên bốn mặt của tứ diện IABC. Những lực đó đều tỷ lệ với diện tích của những tam giác tương ứng. Đó là những đại lượng vô cùng nhỏ bậc hai so với những độ dài của tứ diện.

Tứ diện phải được cân bằng dưới tác dụng của \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 và \vec{F} và dưới tác dụng của những lực thể tích.

Nhưng những lực thể tích này lại là những vô cùng nhỏ bậc ba so với những độ dài của tứ diện, chúng có thể bỏ đi không tính đến so với những lực mặt. Do đó chỉ tồn tại có một phương và một độ lớn cho lực \vec{F} để cân bằng được với tập hợp ba lực \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 . Lực \vec{F} này, chia cho diện tích của tam giác tương ứng, cho ứng suất đặt lên mặt ABC mà ta phải tìm. Đến giới hạn ta sẽ có ứng suất tác dụng lên một phân tử diện tích bất kỳ đi qua điểm I.

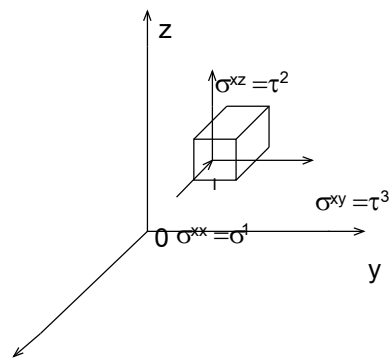
Với hệ tọa độ vuông góc Oxyz, ứng suất tại điểm I trên phân tử do sẽ được xác định nếu ta biết:

- Hướng của do,
- 9 hình chiếu lên các trục tọa độ, của những ứng suất lên ba phân tử diện tích song song với ba mặt phẳng tọa độ và đi qua I.

Ta chỉ cần nghiên cứu những ứng suất tác dụng lên những phân tử diện tích vuông góc với những trục tọa độ (hình 1-6). Thí dụ, lên một phân tử diện tích vuông góc với Ox, ta có:

- Một thành phần σ_{xx} song song với Ox mà ta giả thiết là có trị số dương khi thành phần ấy hướng vào trong thể tích phân tử;
- Một thành phần σ_{xy} song song với Oy;
- Một thành phần σ_{xz} song song với Oz.

Trong ký hiệu này, chỉ số thứ nhất liên quan đến phân tử diện tích, chỉ số thứ hai đến hướng của thành phần.



Hình 1-6

Như vậy ta có bảng sau đây của 9 thành phần đó:

Bảng 1-3

Các thành phần theo trục Phân tố diện tích	Ox	Oy	Oz
Vuông góc với Ox	σ_{xx}	σ_{xy}	σ_{xz}
Vuông góc với Oy	σ_{yx}	σ_{yy}	σ_{yz}
Vuông góc với Oz	σ_{zx}	σ_{zy}	σ_{zz}

Người ta đã chứng minh rằng 6 thành phần không ở trên đường chéo trong bảng trên là đôi một bằng nhau; đó là những thành phần có những chỉ số giống nhau (tức là người ta có thể hoán vị những chỉ số), thí dụ:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

Như vậy 9 thành phần thu lại còn 6:

- 3 thành phần vuông góc mà ta gọi là $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$;

- 3 thành phần tiếp tuyến mà ta gọi là τ_1, τ_2, τ_3 .

Vậy ta có bảng sau đây về những ứng suất, đối xứng đối với đường chéo thứ nhất:

σ_1	τ_3	τ_2
τ_3	σ_2	τ_1
τ_2	τ_1	σ_3

(1-12)

Bảng này còn được gọi là *tenzor ứng suất*.

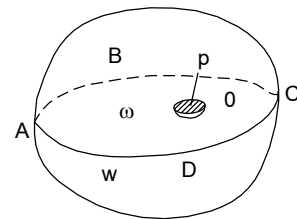
Chương II

THỦY TĨNH HỌC

Chương thủy tĩnh nghiên cứu những vấn đề về chất lỏng ở trạng thái cân bằng tức là trạng thái không có chuyển động tương đối giữa các phần tử chất lỏng. Vì không có chuyển động tương đối nên không có tác dụng của tính nhớt, do đó những kết luận về thủy tĩnh đều đúng cho chất lỏng lý tưởng cũng như cho chất lỏng thực. Yếu tố thủy lực cơ bản của trạng thái cân bằng của chất lỏng là áp suất thủy tĩnh.

§2.1. ÁP SUẤT THỦY TĨNH - ÁP LỰC

Ta lấy một khối chất lỏng W đứng cân bằng (hình 2-1). Nếu chia cắt khối đó bằng một mặt phẳng tùy ý $ABCD$ và vứt bỏ phần trên, thì muốn giữ phần dưới khối đó ở trạng thái cân bằng như cũ, ta phải thay thế tác dụng của phần trên lên phần dưới bằng một hệ lực tương đương.



Hình 2-1

Trên mặt phẳng $ABCD$, xung quanh một điểm O tùy ý ta lấy một diện tích ω ; gọi \vec{P} là lực của phần trên tác dụng lên ω , tỉ số $\frac{\vec{P}}{\omega} = \vec{p}_{tb}$ gọi là *áp suất thủy tĩnh trung bình*.

Nếu diện tích ω tiến tới số 0, thì tỉ số $\frac{\vec{P}}{\omega}$ tiến tới giới hạn \vec{p} , gọi là *áp suất thủy tĩnh tại một điểm* hoặc nói gọn là *áp suất thủy tĩnh*.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{P}}{\omega} \right) = \vec{p} \quad (2-1)$$

Như vậy theo định nghĩa về ứng suất tại một điểm trong chất lỏng (xem §1.6), áp suất thủy tĩnh \vec{p} nói trên là ứng suất tác dụng lên một phần tử diện tích lấy trong nội bộ môi trường chất lỏng đang xét.

Trong thủy lực, lực \vec{P} tác dụng lên diện tích ω gọi là *áp lực thủy tĩnh* lên diện tích ấy.

Chú ý rằng người ta cũng thường gọi trị số p của \vec{p} là áp suất thủy tĩnh và trị số P của \vec{P} là áp lực thủy tĩnh. Áp suất có đơn vị là $\frac{N}{m^2}$ hoặc $\frac{kg}{m.s^2}$.

Trong kỹ thuật áp suất còn thường được đo bằng átmốtphê (at.):

$$1 \text{ at} = 9,81 \cdot 10^4 \cdot \frac{N}{m^2};$$

$$1 \text{ at} = 1 \cdot \frac{kG}{cm^2}.$$

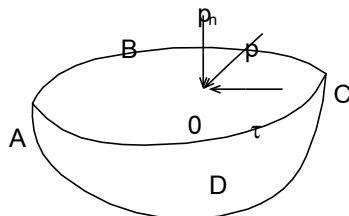
Áp lực có đơn vị là Niuton (N).

Trong thủy lực, áp suất còn thường được đo bằng chiều cao cột nước (sẽ trình bày dưới đây ở điểm 5 của §2.6).

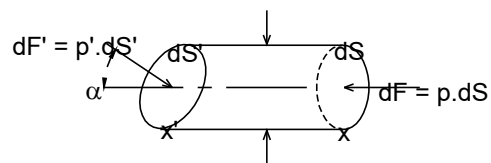
§2-2. HAI TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ÁP SUẤT THỦY TĨNH

Tính chất 1: Áp suất thủy tĩnh tác dụng thẳng góc với diện tích chịu lực và hướng vào diện tích ấy.

Áp suất thủy tĩnh tại điểm O lấy trên mặt phân chia ABCD nói ở tiết trên (hình 2-2) là một lực có thể chia thành hai thành phần: p_n theo hướng pháp tuyến tại điểm O của mặt ABCD và τ theo hướng tiếp tuyến. Thành phần τ có tác dụng làm mặt ABCD di chuyển, tức là làm chất lỏng có chuyển động tương đối; nhưng như giả thiết từ đầu, chất lỏng mà ta đang xét lại ở trạng thái tĩnh, vậy phải có $\tau = 0$ và chỉ còn lại thành phần pháp tuyến p_n . Thành phần p_n không thể hướng ra ngoài được vì chất lỏng không chống lại được sức kéo mà chỉ chịu được sức nén. Vậy áp suất p tại điểm O chỉ có thành phần pháp tuyến và hướng vào trong.



Hình 2-2



Hình 2-3

Tính chất 2: *Trị số áp suất thủy tĩnh tại một điểm bất kỳ không phụ thuộc hướng đặt của diện tích chịu lực tại điểm này.*

Ta lấy một phân tố diện tích dS có tâm I và một hình trụ vô cùng nhỏ có tiết diện thẳng là dS (hình 2-3). Đáy kia của hình trụ có diện tích dS' và tâm là I' ; đáy này có hướng bất kỳ xác định bởi góc α . Những kích thước về chiều dài của hình trụ này, trong đó có $I I'$, là những vô cùng nhỏ bậc nhất.

Gọi p và p' là những áp suất, chúng vuông góc với những mặt tương ứng.

Theo định nghĩa, ta có các trị số áp lực dF và dF' như sau:

$$dF = p dS$$

$$dF' = p' dS'$$

Hình trụ này đứng cân bằng dưới tác dụng của những lực mặt là những vô cùng nhỏ bậc hai và của những thể tích là những vô cùng nhỏ bậc ba. Do đó trong phương trình cân bằng lực, ta có thể bỏ qua những lực thể tích. Phương trình này chiếu lên trục $I I'$, cho ta:

$$dF - dF' \cos \alpha = 0 \quad (2-2)$$

vì những lực mặt tác dụng lên mặt bên và vuông góc với $I I'$, đã triệt tiêu nhau. Vậy:

$$p dS = p' dS' \cos \alpha$$

$$\text{Vì} \quad dS = dS' \cos \alpha$$

nên ta rút ra:

$$p = p' \quad (2-3)$$

Đẳng thức này vẫn đúng, mặc dù góc α như thế nào; như vậy đẳng thức này độc lập với phương của dS' . Đẳng thức này còn có giá trị ở giới hạn khi I trùng với I' .

Vậy áp suất thủy tĩnh tại điểm I là một đại lượng vô hướng p , chỉ phụ thuộc vị trí của điểm I , nghĩa là trong hệ tọa độ vuông góc Oxyz thì:

$$p = f(x, y, z) \quad (2-4)$$

Kết quả này vẫn đúng nếu điểm I , đáng lẽ lấy trong chất lỏng lại lấy ở trên thành rắn tiếp xúc với chất lỏng.

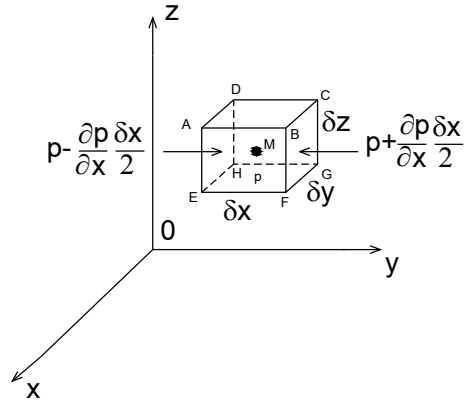
Từ hai tính chất trên của áp suất thủy tĩnh, ta thấy rõ các thành phần tiếp tuyến đều bằng số không và các thành phần pháp tuyến đều bằng nhau và bằng p . Vì vậy bảng ở công thức (1-12) viết cho áp suất thủy tĩnh có dạng:

p	0	0
0	p	0
0	0	p

(2-5)

§2-3. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CƠ BẢN CỦA CHẤT LỎNG CÂN BẰNG

Ta xét một khối chất lỏng hình hộp vô cùng nhỏ ABCDEFGH có cạnh δx , δy , δz (hình 2-4) đứng cân bằng. Điều kiện cân bằng là tổng số hình chiếu trên các trục của các lực mặt và lực thể tích tác dụng lên khối đó bằng không.



Hình 2-4

Gọi p là áp suất tại trọng tâm M của hình hộp, thì áp suất tại trọng tâm mặt $ADHE$ bằng $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right)$, tại trọng tâm mặt $BCGF$ bằng $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right)$; gọi F_x là thành phần trên trục Ox của lực thể tích F tác dụng trên một đơn vị khối lượng chất lỏng, ta có viết điều kiện cân bằng của hình hộp theo phương x như sau:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2}\right) \delta y \delta z + \rho F_x \delta x \delta y \delta z = 0.$$

Rút gọn ta có:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F_x = 0,$$

hoặc:
$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Suy luận tương tự đối với những hình chiếu các lực trên các trục Oy , Oz và viết toàn bộ hệ phương trình biểu thị sự cân bằng của khối hình hộp, ta có:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

$$\text{Hoặc: } \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0 \quad (2-6')$$

Đó là *hệ phương trình vi phân cơ bản của chất lỏng đứng cân bằng* và còn gọi là hệ phương trình Ôle (do Ôle tìm ra năm 1755). Chú ý rằng phương trình này biểu thị qui luật chung về sự phụ thuộc áp suất thủy tĩnh đối với tọa độ:

$$p = f(x, y, z).$$

§2-4. TÍCH PHÂN PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CƠ BẢN CỦA CHẤT LỎNG CÂN BẰNG

Hệ (2-6) có thể viết dưới dạng vi phân toàn phần của p như sau: nhân những phương trình trong hệ (2-6) riêng biệt với dx , dy , dz rồi cộng vế đối vế, ta có:

$$(F_x dx + F_y dy + F_z dz) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0 \quad (2-7)$$

Vì $p = f(x, y, z)$ chỉ là hàm số của tọa độ, nên thay phần trong ngoặc của số hạng thứ hai của (2-7) bằng vi phân toàn phần dp , ta viết được:

$$(F_x dx + F_y dy + F_z dz) - \frac{1}{\rho} dp = 0$$

hoặc:

$$dp = \rho (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \quad (2-8)$$

Biểu thức đặt trong ngoặc bên vế phải của (2-8) cũng phải là vi phân toàn phần của một hàm số U chỉ phụ thuộc tọa độ:

$$U = U(x, y, z)$$

Tức là: $F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU$,

trong đó:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (2-9)$$

Hàm số $U(x, y, z)$ được gọi (như ta đã biết trong cơ học) là hàm số lực. Hàm số $\pi(x, y, z) = -U(x, y, z)$, trong cơ học được gọi là hàm số thế. Điều kiện (2-9) có thể viết lại thành:

$$F_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z}. \quad (2-10)$$

$$\text{Hoặc: } \vec{F} = -\text{grad } \pi \quad (2-10')$$

Những lực F thỏa mãn điều kiện (2-10) gọi là *lực có thể*. Chú ý rằng trọng lực, lực quán tính là những lực thể tích có thể. Vậy ta kết luận rằng chất lỏng chỉ có thể ở trạng thái cân bằng khi nào những lực khối lượng tác dụng là những lực có thể.

Phương trình (2-8) có thể viết lại bằng:

$$dp = \rho dU = -\rho d\pi \quad (2-11)$$

Tích phân phương trình (2-11), ta viết được:

$$p = -\rho\pi + C \quad (2-12)$$

Trong đó: C - hằng số tích phân, được xác định cụ thể nếu biết p_0, π_0 tại bất kỳ một điểm nào trong khối chất lỏng hoặc trên mặt tự do.

Thay p_0 và π_0 vào phương trình (2-12), ta có:

$$C = p_0 + \rho\pi_0$$

Do đó viết lại (2-12) ta có:

$$p = p_0 + \rho(\pi_0 - \pi) \quad (2-13)$$

Đó là tích phân tổng quát của phương trình vi phân chất lỏng cân bằng, nó biểu thị áp suất thủy tĩnh tại bất kỳ điểm nào trong chất lỏng đứng cân bằng, chịu tác dụng của lực thể tích có hàm số thế π . Vậy có thể xác định áp suất thủy tĩnh p tại một điểm bất kỳ nào nếu biết cụ thể biểu thức của hàm số thế π và những trị số p_0, π_0 tại bất kỳ một điểm nào thuộc khối chất lỏng đang xét.

§2-5. MẶT ĐẲNG ÁP

Mặt đẳng áp là mặt có áp suất thủy tĩnh tại mọi điểm đều bằng nhau, tức là mặt có $p = \text{const}$, do đó có $dp = 0$.

Ta có được phương trình của mặt đẳng áp:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0 \quad (2-14)$$

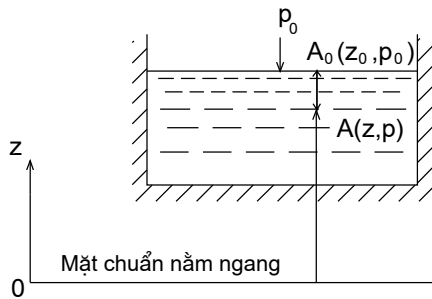
Tính chất 1: Hai mặt đẳng áp khác nhau không thể cắt nhau, vì nếu chúng cắt nhau thì tại cùng một giao điểm, áp suất thủy tĩnh có những trị số khác nhau, điều đó trái với tính chất 2 của áp suất thủy tĩnh (xem §2-2).

Tính chất 2: Lực thể tích tác dụng lên mặt đẳng áp thẳng góc với mặt đẳng áp. Từ (2-14) ta thấy rõ là theo định nghĩa về tích vô hướng trong hình học giải tích, vectơ lực thể tích \vec{F} (với ba thành phần F_x, F_y, F_z) thẳng góc với vectơ độ dài $d\vec{s}$ (với ba thành phần dx, dy, dz). Do đó công của lực thể tích sinh ra khi di động trên mặt đẳng áp bằng không.

Ta nhận xét rằng mặt đẳng áp đồng thời là mặt đẳng thế; thực vậy, theo (2-14), có thể viết lại:

$$d\pi = 0, \text{ tức là } \pi(x, y, z) = \text{const} \quad (2-15)$$

§2-6. SỰ CÂN BẰNG CỦA CHẤT LỎNG TRỌNG LỰC



Hình 2-5

Khi lực thể tích tác dụng vào chất lỏng chỉ là trọng lực thì chất lỏng gọi là chất lỏng trọng lực.

Trong hệ tọa độ vuông góc mà trục Oz đặt theo phương thẳng đứng hướng lên trên thì đối với lực thể tích F tác dụng lên một đơn vị khối lượng của chất lỏng trọng lực, ta có $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = -g$, trong đó g là gia tốc rơi tự do (hình 2-5).

1. Phương trình cơ bản của chất lỏng ở trạng thái cân bằng

Từ (2-10), thay F_x , F_y , F_z bằng: $F_x = 0$; $F_y = 0$; $F_z = -\frac{d\pi}{dz} = -g$,

ta có: $d\pi = g dz$.

Từ đó ta suy ra:

$$\pi = g \cdot z + C \quad (2-16)$$

Khi $z = z_0$, thì $\pi = \pi_0$, tức là:

$$\pi_0 = g \cdot z_0 + C$$

Vậy, theo (2-13) ta có:

$$p = p_0 + \rho (gz_0 - gz)$$

Hoặc, với $\gamma = \rho g$ theo (1-2), ta viết:

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z) \quad (2-17)$$

Gọi z_0 là tọa độ của điểm nằm trên mặt tự do và h là độ sâu của điểm đang xét có tung độ z , ta có:

$$h = z_0 - z$$

Ta có thể viết lại công thức (2-17) thành:

$$p = p_0 + \gamma h. \quad (2-18)$$

Phương trình (2-18) là *phương trình cơ bản của thủy tĩnh học*. Trong thực tiễn công trình thủy lợi, áp suất tại mặt thoáng p_0 thường bằng áp suất khí quyển p_a . Công thức (2-18) thường được dùng để tính áp suất thủy tĩnh tại một điểm.

Với phương trình cơ bản của thủy tĩnh học (2-18), ta có thể nói: áp suất tại những điểm ở cùng một độ sâu trong môi trường cùng một loại chất lỏng trọng lực đứng cân bằng thì bằng nhau.

Phương trình (2-17) có thể viết lại thành:

$$z + \frac{P}{\gamma} = z_0 + \frac{P_0}{\gamma} = \text{const} \quad (2-19)$$

Phương trình viết dưới dạng (2-19) cũng gọi là phương trình cơ bản của thủy tĩnh học; nhiều khi còn gọi phương trình (2-18) và (2-19) là qui luật phân bố áp suất thủy tĩnh.

Số hạng $\frac{P}{\gamma}$ có thứ nguyên là độ dài.

2. Mặt đẳng áp của chất lỏng trọng lực

Từ điều kiện (2-15) của mặt đẳng áp, áp dụng cho chất lỏng trọng lực, ta viết lại (2-16) như sau:

$$\pi = gz + C = \text{const.}$$

Vì $g = \text{const}$ nên ta có:

$$z = \text{const.} \quad (2-20)$$

Vậy những mặt đẳng áp của chất lỏng trọng lực là những mặt phẳng song song, thẳng góc với trục Oz, hoặc nói cách khác, là những mặt phẳng nằm ngang. Mặt tự do của chất lỏng ở đó áp suất $p_0 = p_n$ cũng là một mặt nằm ngang.

Thí dụ 1: Tìm áp suất một điểm ở đáy bể đựng nước sâu 4 m, trọng lượng đơn vị của nước là $\gamma = 9.810 \text{ N/m}^3$ ($\gamma = 1000 \text{ kG/m}^3$). Áp suất tại mặt thoáng $p_0 = 98.100 \text{ N/m}^2$ ($p_0 = 10.000 \text{ kG/m}^2$).

Giải:

Áp dụng công thức (2-18), ta có:

$$p = p_0 + \gamma h = 98.100 + 9.810 \times 4 = 137.340 \text{ N/m}^2 (= 14.000 \text{ kG/m}^2).$$

3. Định luật bình thông nhau

Nếu hai bình thông nhau chứa đựng chất lỏng khác nhau và có áp suất trên mặt thoáng bằng nhau, độ cao của chất lỏng ở mỗi bình tính từ mặt phân chia hai chất lỏng đến mặt thoáng sẽ tỷ lệ nghịch với trọng lượng đơn vị của chất lỏng, tức là:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad (2-21)$$

trong đó h_1, h_2 là những độ cao nói trên ứng với những chất lỏng có trọng lượng đơn vị γ_1, γ_2 . Thực vậy, áp suất p_1, p_2 trên cùng một mặt phân chia A - B ở bình 1 và bình 2 (hình 2-6), như trên đã nói thì bằng nhau:

$$p_1 = p_2$$

Theo (2-18): $p_1 = p_0 + \gamma h_1,$

$$p_2 = p_0 + \gamma h_2.$$

Vậy: $\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2,$

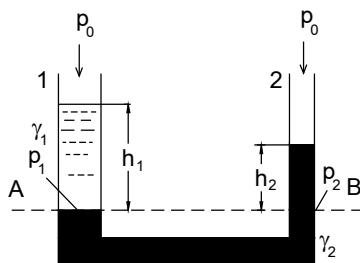
do đó:
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

Nếu chất lỏng ở hai bình thông nhau cùng một loại tức là $\gamma_1 = \gamma_2$ thì mặt tự do của chất lỏng ở hai bình cùng trên một độ cao, tức $h_2 = h_1$.

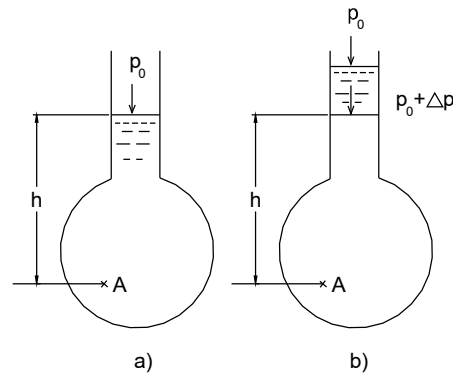
4. Định luật Pátscan

Gọi p_0 là áp suất tại mặt ngoài của một thể tích chất lỏng cho trước đứng cân bằng (hình 2-7a); áp suất tại một điểm A ở độ sâu h trong chất lỏng đó tính theo (2-18), bằng:

$$p = p_0 + \gamma h$$



Hình 2-6



Hình 2-7

Nếu tăng áp suất ở mặt ngoài lên một trị số Δp , thí dụ bằng cách đổ thêm một lượng chất lỏng (hình 2-7b) và vẫn giữ cả khối chất lỏng đứng cân bằng, thì áp suất mới p' tại điểm A, theo (2-18) bằng:

$$p' = (p_0 + \Delta p) + \gamma h.$$

Vậy áp suất mới tại A sẽ tăng lên một lượng bằng:

$$p' - p = \Delta p.$$

Do đó ta có thể nói rằng: “Độ biến thiên của áp suất thủy tĩnh trên mặt giới hạn một thể tích chất lỏng cho trước được truyền đi nguyên vẹn đến tất cả các điểm của thể tích chất lỏng đó”. Kết luận này là định luật Pátscan. Cần chú ý rằng trong định luật này điều kiện chất lỏng đứng cân bằng phải được đảm bảo không bị phá hoại trong khi có sự biến thiên Δp . Độ biến thiên Δp có thể là dương hoặc âm. Nhiều máy móc đã được chế tạo theo định luật Pátscan, như máy nén thủy lực, máy kích, máy tích năng, các bộ phận truyền động v.v...

Sau đây là một thí dụ về nguyên tắc làm việc của máy nén thủy lực. Máy gồm 2 xilanh có diện tích khác nhau, thông với nhau, chứa cùng một chất lỏng và có pittông di chuyển (hình 2-8). Pittông nhỏ gắn với một đòn bẩy, khi một lực F nhỏ tác dụng lên đòn bẩy thì lực tác dụng lên pittông sẽ được tăng lên thành P_1 ; áp suất tại xilanh nhỏ $p_1 = \frac{P_1}{\omega_1}$, trong đó ω_1 là diện tích xilanh nhỏ. Theo định luật Pátscan, độ tăng áp suất sẽ truyền

nguyên vẹn trong môi trường chất lỏng đứng cân bằng, vì vậy áp suất tại xilanh lớn cũng tăng lên p_1 (ở đây bỏ qua không xét đến sự chênh lệch về vị trí giữa hai xilanh). Vậy tổng áp lực P_2 tác dụng lên mặt pittông lớn là:

$$P_2 = p_1 \omega_2 = \omega_2 \frac{P_1}{\omega_1},$$

trong đó: ω_2 - diện tích mặt pittông lớn.

Nếu coi P_1, ω_1 không đổi thì muốn tăng P_2 , phải tăng ω_2 .

Thí dụ: $P_1 = 98,1 \text{ N}$ (hoặc 10 kG), $d_1 = 2 \text{ cm}$,

$d_2 = 20 \text{ cm}$. Ta tính được $P_2 = 98,1 \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 9810 \text{ N}$

(hoặc 1000 kG).

Thực tế giữa xilanh và pittông có ma sát nên:

$$P_2 = \eta P_1 \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

trong đó: η - hiệu suất của máy nén thủy lực.

5. Áp suất tuyệt đối - Áp suất dư - Áp suất chân không

Người ta gọi *áp suất tuyệt đối* $p_{\text{tuyệt}}$ hoặc áp suất toàn phần là áp suất p xác định bởi công thức cơ bản (2-18):

$$p = p_0 + \gamma h = p_{\text{tuyệt}} \quad (2-22)$$

Nếu từ *áp suất tuyệt đối* $p_{\text{tuyệt}}$ ta bớt đi áp suất khí quyển thì hiệu số đó gọi là *áp suất dư* $p_{\text{dư}}$ hoặc *áp suất tương đối* tức là:

$$p_{\text{dư}} = p_{\text{tuyệt}} - p_a \quad (2-23)$$

Nếu áp suất tại mặt thoáng là áp suất khí quyển p_a thì:

$$p_{\text{dư}} = \gamma h. \quad (2-24)$$

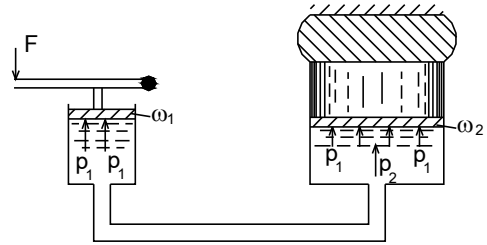
Như vậy áp suất tuyệt đối biểu thị cho ứng suất nén thực tế tại điểm đang xét, còn áp suất dư là phần áp suất còn dư nếu trong trị số của áp suất tuyệt đối ta bớt đi trị số áp suất không khí. Áp suất tuyệt đối bao giờ cũng là một số dương, còn áp suất dư có thể là số dương hay âm:

$$p_{\text{dư}} > 0 \text{ khi } p_{\text{tuyệt}} > p_a,$$

$$p_{\text{dư}} < 0 \text{ khi } p_{\text{tuyệt}} < p_a.$$

Trong trường hợp áp suất dư là âm thì hiệu số của áp suất không khí và áp suất tuyệt đối gọi là *áp suất chân không* p_{ck} , hoặc gọi tắt là *chân không*:

$$p_{\text{ck}} = p_a - p_{\text{tuyệt}} \quad (2-25)$$



Hình 2-8

Chân không nói ở đây không có nghĩa là khoảng không, không có chất khí nào, như thường nói trong vật lý. Áp suất chân không là trị số áp suất còn thiếu để làm áp suất tuyệt đối bằng áp suất khí quyển. Do đó có thể gọi áp suất chân không là *áp suất thiếu*. So sánh (2-25) với (2-23) thì thấy áp suất chân không là trị số âm của áp suất dư, tức là:

$$p_{ck} = - p_{dư} \quad (2-26)$$

Áp suất tại một điểm có thể đo bằng chiều cao cột chất lỏng (nước, thủy ngân, rượu v.v...) kể từ điểm đang xét đến mặt thoáng của cột chất lỏng đó và thường biểu thị bằng độ dài của nó. Vậy có thể biểu thị các áp suất như sau:

$$\left. \begin{aligned} p_{tuyệt} &= h_{tuyệt} = \frac{p_{tuyệt}}{\gamma}, \\ p_{dư} &= h_{dư} = \frac{p_{dư}}{\gamma}, \\ p_{ck} &= h_{ck} = \frac{p_{ck}}{\gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

Ta gọi những độ cao $h_{tuyệt}$, $h_{dư}$, h_{ck} là những độ cao dẫn xuất của những áp suất $p_{tuyệt}$, $p_{dư}$, p_{ck} . Trong điều kiện bình thường, áp suất khí quyển tại mặt thoáng thường được lấy bằng áp suất của cột thủy ngân cao 760mm. Trong thực tiễn kỹ thuật, người ta thường qui ước lấy $p_a = 98100 \text{ N/m}^2$ (hoặc $p_a = 1 \text{ kG/cm}^2$) và gọi là *átmốtphe kỹ thuật*. Một át-mốtphe kỹ thuật tương đương với cột nước cao:

$$h = \frac{p_a}{\gamma} = \frac{98100 \text{ m}}{9.810} = 10 \text{ m}$$

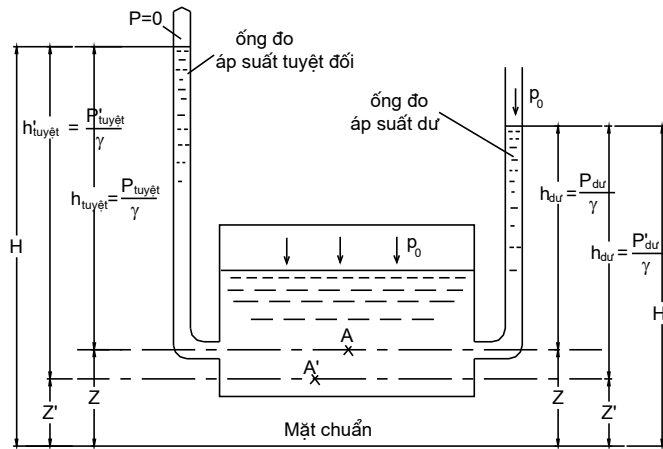
Trị số chân không cực đại (khi $p_{tuyệt} = 0$) lấy bằng một át-mốtphe kỹ thuật hoặc bằng cột nước cao 10 m.

Hình 2-9 cho biết một thí dụ về cách đo áp suất tại một điểm bằng chiều cao cột chất lỏng. Muốn đo áp suất tuyệt đối tại điểm A, thì nối bình chứa thông với cột ống kín 1; chỗ nối đặt dưới mặt thoáng chất lỏng trong bình, có thể đặt ngang, đặt trên hoặc dưới điểm A (theo hình 2-9 thì chỗ nối đặt ngang A). Trong ống kín phải hút hết không khí để áp suất tại mặt tự do của chất lỏng trong ống bằng không; khi đó, khoảng cách thẳng đứng $h_{tuyệt}$ từ mặt nước tự do trong ống đến đường nằm ngang đi qua A biểu thị áp suất tuyệt đối tại điểm A. Trị số áp suất đó là:

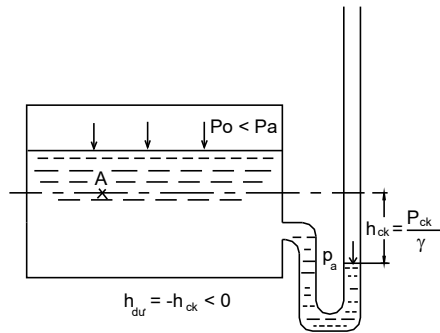
$$p_{tuyệt} = \gamma h_{tuyệt}$$

Nếu ống đo nói trên không bịt kín (hình 2-9) mà để hở ra khí trời (ống 2) thì khoảng cách thẳng đứng $h_{dư}$ kể từ mặt tự do trong ống hở đến đường nằm ngang đi qua A biểu thị áp suất dư tại điểm A; trị số áp suất đó là:

$$p_{dư} = \gamma h_{dư}$$



Hình 2-9



Hình 2-10

Nếu mặt nước tự do trong ống đo hở này lại thấp hơn A, thì khoảng cách $h_{dư}$ nói trên là một trị số âm và theo (2-26) khoảng cách đó là độ cao chân không tại điểm A: h_{ck} (hình 2-10). Ống đo áp suất làm như trên được gọi là ống đo áp. Chú ý rằng, trong trường hợp chân không ống đo áp phải uốn hình chữ U như ở hình (2-10) thì mới dễ dàng đo được.

Thí dụ 2: Tìm áp suất tuyệt đối $p_{tuyệt}$ và áp suất dư $p_{dư}$ tại đáy nồi hơi, sâu 1,2 m, áp suất tại mặt thoáng là $p_0 = 196.200 \text{ N/m}^2$ ($p_0 = 21.200 \text{ kG/m}^2$); nước có $\gamma = 9.810 \text{ N/m}^3$ ($\gamma = 1000 \text{ kG/m}^3$).

Giải:

Áp suất tuyệt đối tính theo (2-18):

$$\begin{aligned} p_{tuyệt} &= p_0 + \gamma h = 196.200 + 9.810 \times 1,2 \\ &= 207.972 \text{ N/m}^2 \quad (p_{tuyệt} = 22.400 \text{ kG/m}^2) \end{aligned}$$

hoặc:
$$h_{tuyệt} = \frac{p_{tuyệt}}{\gamma} = \frac{207.972}{9.810} = 21,20 \text{ m cột nước}$$

Áp suất dư tại đáy:

$$p_{dư} = p - p_a = 207.972 - 98.100 = 109.872 \text{ N/m}^2.$$

$$h_{dư} = \frac{p_{dư}}{\gamma} = \frac{109.872}{9.810} = 11,20 \text{ m cột nước.}$$

Thí dụ 3:

Tại mặt cắt trước khi vào bơm áp suất chân không là:

$$p_{ck} = 68.670 \text{ N/m}^2 \quad (p_{ck} = 7000 \text{ kG/m}^2).$$

Xác định áp suất tuyệt đối tại mặt cắt đó.

Giải:

Theo (2-25): $p_{tuyệt} = p_a - p_{ck}$,

lấy: $p_a = 98.100 \text{ N/m}^2$ ($p_a = 10.000 \text{ kG/m}^2$) ta có:

$$p_{tuyệt} = 98.100 - 68.670 = 29.430 \text{ N/m}^2 \quad (p_{tuyệt} = 3.000 \text{ kG/m}^2).$$

6. Ý nghĩa hình học và năng lượng của phương trình cơ bản của thủy tĩnh học (viết dưới dạng 2-19)

a) Ý nghĩa hình học

Từ phương trình cơ bản (2-19):

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const},$$

có thể thấy rằng tổng số *độ cao hình học* z của điểm đang xét đối với mặt chuẩn nằm ngang và *độ cao dẫn xuất áp suất* hay *độ cao áp suất* $\frac{p}{\gamma}$ tại điểm đó là một hằng số đối với bất kỳ một điểm nào trong chất lỏng.

Nếu p là áp suất tuyệt đối thì $\frac{p}{\gamma} = h_{tuyệt}$ và $z + h_{tuyệt} = H$, nếu p là áp suất dư thì: $\frac{p}{\gamma} = h_{dư}$

và $z + h_{dư} = H'$. Theo hình 2-9, H là khoảng cách từ mặt chuẩn đến mặt nước tự do trong ống đo áp suất tuyệt đối và H' là khoảng cách từ mặt chuẩn đến mặt nước tự do trong ống đo áp suất dư. H gọi là *cột nước thủy tĩnh tuyệt đối*, H' gọi là *cột nước thủy tĩnh dư*. Độ cao H hoặc H' còn gọi là *độ cao đo áp tuyệt đối* hoặc *độ cao đo áp dư* (chú ý rằng độ cao đo áp khác với độ cao áp suất).

Vậy phương trình cơ bản của thủy tĩnh học nói rằng: trong một môi trường chất lỏng đứng cân bằng cột nước thủy tĩnh đối với bất kỳ một điểm nào là một hằng số.

b) Ý nghĩa năng lượng:

Xung quanh điểm A của một môi trường chất lỏng đứng cân bằng, ta lấy một khối chất lỏng có trọng lượng G . Khối đó đặt ở độ cao z đối với mặt chuẩn nằm ngang thì có một vị năng bằng Gz , do vị trí của khối đó với mặt chuẩn tạo nên. Nếu gắn vào bình chứa một ống đo áp, tại mặt phẳng nằm ngang đi qua A, ta sẽ thấy do áp suất chất lỏng tác dụng vào điểm A mà trong ống đo áp chất lỏng được dâng lên một độ cao $h = \frac{p}{\gamma}$, độ cao này

bằng $h_{\text{tuyệt}} = \frac{P_{\text{tuyệt}}}{\gamma}$, nếu ống đo áp là ống đo áp suất tuyệt đối và bằng $h_{\text{dur}} = \frac{P_{\text{dur}}}{\gamma}$ nếu ống

đo áp là ống đo áp suất dư. Như vậy ở điểm A, khối chất lỏng đang xét mang một áp năng bằng Gh. Khối chất lỏng đang xét mang một thế năng bằng tổng số vị năng và áp năng:

$$Gz + Gh.$$

Đối với một đơn vị trọng lượng, thế năng đó bằng:

$$z + h \text{ hoặc } z + \frac{P}{\gamma},$$

và gọi là thế năng đơn vị; z gọi là vị năng đơn vị; $\frac{P}{\gamma}$ gọi là áp năng đơn vị.

Thế năng đơn vị bằng tổng số vị năng đơn vị và áp năng đơn vị.

Vậy, phương trình cơ bản của thủy tĩnh học nói rằng thế năng đơn vị của chất lỏng đứng cân bằng là một hằng số đối với bất kỳ vị trí nào trong chất lỏng; thế năng đơn vị chính bằng cột nước thủy tĩnh.

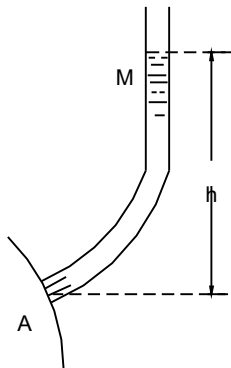
7. Áp kế

a) Dụng cụ đo áp suất gọi là áp kế. Áp kế đơn giản nhất là những ống đo áp bình thường (thường đặt thẳng đứng, như ta đã nói ở điểm 5, hình 2-9), đầu dưới của ống thì đặt vào điểm A mà ta muốn đo áp suất. Nếu chất lỏng trong ống đo áp cùng loại với chất lỏng trong bình chứa có điểm A, thì áp suất tại A bằng h (hình 2-11). Chú ý rằng từ A đến M, cột nước phải liên tục, không có bọt khí.

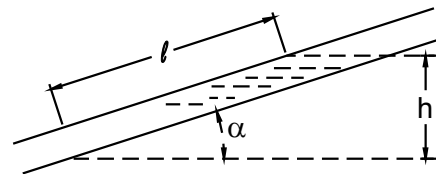
b) Nếu h rất nhỏ, ta có thể tăng sự chính xác đo lường bằng cách đặt ống đo áp nghiêng với đường nằm ngang một góc α nhỏ hơn 90° (hình 2-12). Độ dài l của đoạn ống đó có chứa chất lỏng biểu thị đại lượng:

$$l = \frac{h}{\sin \alpha},$$

từ đó tính ra áp suất phải tìm bằng $\gamma h = \gamma \cdot l \cdot \sin \alpha$. Ống đo áp này gọi là ống đo áp nghiêng.



Hình 2-11

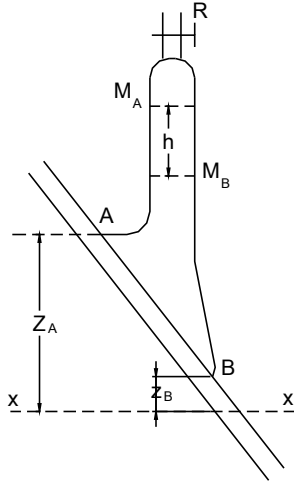


Hình 2-12

c) Trong nhiều trường hợp người ta cần biết, không phải chỉ hiệu số áp suất $p_A - p_B$ tại hai điểm, mà còn cần biết *hiệu số những độ cao đo áp* giữa hai điểm, tức là cần biết:

$$\left(z_A + \frac{p_A}{\gamma} \right) - \left(z_B + \frac{p_B}{\gamma} \right) = h$$

Rõ ràng những điểm A, B mà ta đang xét ở đây thuộc về một khối chất lỏng đang chuyển động, thí dụ chất lỏng dạng chảy trong ống (hình 2-13); còn khi chất lỏng đứng yên thì tất nhiên ta có $h = 0$ (qui luật thủy tĩnh).

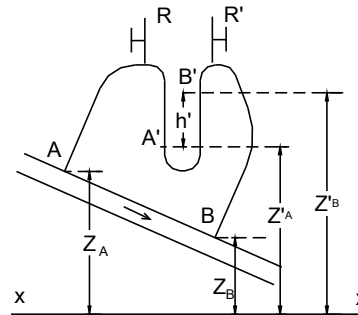


Hình 2-13

Muốn đo h , ta có thể dùng những ống đo áp bình thường gắn tại A và B, nhưng nhiều khi áp suất p_A và p_B khá lớn, đòi hỏi những ống đo áp phải khá dài; và lại cách này không thể áp dụng được, khi một trong hai áp suất đó lại nhỏ hơn áp suất khí quyển. Muốn đo h , ta sẽ nối hai đầu trên của hai ống đo áp và có một khóa R để thông hai ống đó với một cái máy có thể ép hoặc rút bớt không khí ở phía trên những ống đó. Như vậy ta có thể nâng cao hoặc hạ thấp mực nước M_A và M_B với một trị số bằng nhau ở cả hai ống; kết quả là ta có thể đo h ứng với hiệu số của hai mực nước M_A và M_B , áp kế loại này gọi là *áp kế đo chênh*.

d) **Áp kế đo chênh có hai chất lỏng**

Khi độ chênh lệch lớn quá hoặc nhỏ quá người ta dùng một áp kế đo chênh có hai chất lỏng, cấu tạo bởi một ống thủy tĩnh hình chữ U, trong đó có đựng một lượng thích hợp của chất lỏng có trọng lượng đơn vị bằng γ' khác với trọng lượng đơn vị γ của nước và không hòa tan với nước (hình 2-14).



Hình 2-14

Những đầu trên của ống U đều nối với những điểm A và B bởi những ống nối thông mà người ta đã kiểm tra kỹ không còn chút bọt khí nào, cũng như đã kiểm tra kỹ bản thân áp kế (thường thường người ta đặt những khóa R và R' ở đầu trên những nhánh thuộc ống U để đạt mục đích này).

Khi đã tạo được sự ổn định của các mực A' và B', ta có thể áp dụng những định luật thủy tĩnh học cho những chất lỏng đứng cân bằng trong khu AA'B'B.

Giữa A và A' trong nước, ta có:

$$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_{A'} + \frac{p_{A'}}{\gamma} \quad (a)$$

Giữa B và B' trong nước, ta có:

$$z_B + \frac{P_B}{\gamma} = z_{B'} + \frac{P_{B'}}{\gamma}. \quad (b)$$

Giữa A' và B', trong chất lỏng có trọng lượng riêng bằng γ' , ta viết được:

$$z_{B'} + \frac{P_{B'}}{\gamma'} = z_{A'} + \frac{P_{A'}}{\gamma'}. \quad (c)$$

Trừ vế đối vế (a) và (b), ta được:

$$\left(z_A + \frac{P_A}{\gamma} \right) - \left(z_B + \frac{P_B}{\gamma} \right) = \frac{P_{A'} - P_{B'}}{\gamma} + z_{A'} - z_{B'}. \quad (d)$$

Từ (c), ta rút ra:

$$P_{A'} - P_{B'} = \gamma'(z_{B'} - z_{A'})$$

Thay vào (d), ta có:

$$\left(z_A + \frac{P_A}{\gamma} \right) - \left(z_B + \frac{P_B}{\gamma} \right) = (z_{B'} - z_{A'}) \frac{\gamma'}{\gamma} + z_{A'} - z_{B'}$$

$$h = \left(\frac{\gamma'}{\gamma} - 1 \right) (z_{B'} - z_{A'}).$$

Hiệu số độ cao đo áp tại A và B:

$$h = \frac{\gamma' - \gamma}{\gamma} h',$$

trong đó: h' là độ chênh hai mực A' và B' trên áp kế.

Nếu h rất lớn (thí dụ cỡ chục mét cột nước), ta sẽ dùng trong áp kế một thứ chất lỏng có trọng lượng riêng γ' khá lớn so với γ , thí dụ thủy ngân ($13,6 \text{ kG/dm}^3$). Như vậy, ta có:

$$h = 12,6h',$$

do đó h' sẽ nhỏ hơn 12,6 lần h và sẽ rất dễ đo.

Nếu trái lại h rất nhỏ, ta sẽ dùng một chất lỏng có trọng lượng riêng γ' hơi lớn hơn γ một chút để cho:

$$\frac{\gamma' - \gamma}{\gamma},$$

là một phần nhỏ của đơn vị và h' sẽ rất lớn hơn so với h , nhờ đó tăng được độ chính xác cho sự đo lường. Thí dụ có thể dùng chất nitơbenzen, clorôfôcmơ v.v...

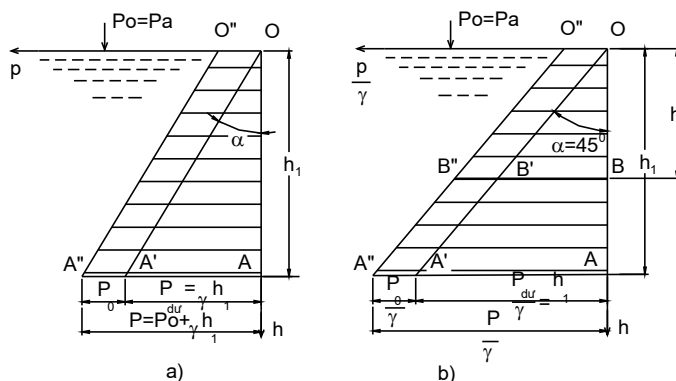
Chú ý là cần chọn chất lỏng của áp kế sao cho có được mặt phân chia rõ rệt và chọn ống đủ to (đường kính trong cỡ 10 mm) để tránh ảnh hưởng của sức căng mặt ngoài.

e) Áp kế kim loại: Những áp kế này thường dùng để đo áp suất khá lớn. Độ chính xác của chúng rõ ràng không bằng áp kế dùng chất lỏng và thường được kiểm nghiệm bằng một máy ép tiêu chuẩn.

8. Đồ phân bố áp suất thủy tĩnh - Đồ áp lực

Phương trình cơ bản của thủy tĩnh học (2-18) chứng tỏ rằng với một chất lỏng trọng lực nhất định, trong điều kiện áp suất tại mặt tự do p_0 cho trước, áp suất p là một hàm số bậc nhất của độ sâu h ; như vậy trong hệ tọa độ p, h , phương trình (2-18) được biểu diễn bằng một đường thẳng. Để giản đơn việc trình bày ta giả thiết $p_0 = p_a$ khi đó $p_{dr} = \gamma h$.

Giả sử ta có hệ tọa độ có trục h thẳng đứng hướng xuống dưới và trục p đặt nằm ngang (hình 2-15a). Sự biểu diễn bằng đồ thị hàm số (2-18) trong hệ tọa độ nói trên gọi là đồ phân bố áp suất thủy tĩnh theo đường thẳng đứng tức là theo những điểm trên những đường thẳng đứng đó.



Hình 2-15

Trước tiên ta nói đến đường biểu diễn áp suất dư $p_{dr} = \gamma h$ theo đường thẳng đứng; đường biểu diễn này là một đường thẳng, do đó chỉ cần xác định hai điểm là vẽ được. Với $h = 0$ nghĩa là ở mặt tự do, ta có $p_{dr} = 0$ với $h = h_1$ ta có $p_{dr} = \gamma h_1$. Đặt hai trị số p_{dr} nói trên, theo một tỷ lệ xác định trước, vào hình vẽ (hình 2-15a), ta được hai điểm O và A'; tam giác vuông OAA' là đồ phân bố áp suất dư có đáy bằng $p_{dr} = \gamma h_1$, có chiều cao bằng h_1 . Với những chất lỏng khác nhau, tức là với những trọng lượng riêng γ khác nhau, độ dốc đường OA' ($\tan \alpha$) sẽ khác nhau. Dùng đồ phân bố áp suất dư, ta có thể xác định áp suất dư p_{dr} tại một độ sâu h bất kỳ.

Muốn có đồ phân bố áp suất tuyệt đối ta chỉ cần tịnh tiến đường OA' theo phương thẳng góc với Oh một đoạn p_0 và được đường O''A''. Đồ phân bố áp suất tuyệt đối là hình thang vuông góc OO''A''A'.

Chú ý rằng $\frac{p}{\gamma}$ có thứ nguyên là độ dài, ta có thể thay trục nằm ngang p bằng trục $\frac{p}{\gamma}$,

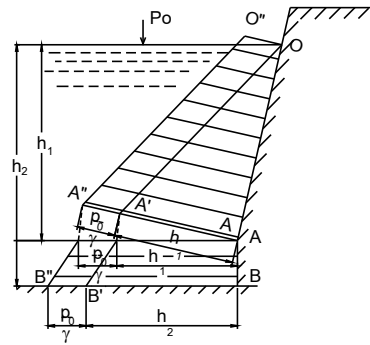
khi đó cả hai trục đều dùng đơn vị độ dài, áp suất lúc đó sẽ được biểu thị bằng độ dài cột nước (hình 2-15b); trong thực tế ta cũng thường vẽ đồ phân bố với tọa độ như vậy để tính áp lực. Đồ phân bố như vậy gọi là đồ áp lực. Lúc đó đồ áp lực dư được biểu diễn bằng hàm

số $\frac{P_{dur}}{\gamma} = h$ và độ áp lực tuyệt đối được biểu diễn bởi hàm số $\frac{P}{\gamma} = \frac{P_0}{\gamma} + h$. Rõ ràng lúc đó đường thẳng biểu diễn có độ dốc bằng 45° vì $\tan \alpha = 1$.

Nếu đường thẳng đứng trên đó ta đang xét sự phân bố áp suất thủy tĩnh không bắt đầu từ mặt tự do, mà bắt đầu từ một độ sâu h' (điểm B) trên hình 2-15b, thì độ áp lực sẽ là hình thang vuông $BB'A'A$ (áp suất dư) hoặc $BB''A''A$ (áp suất tuyệt đối).

Chú ý rằng do tính chất áp suất tại một điểm phải thẳng góc với mặt chịu áp lực tại điểm đó, nên đồ phân bố áp suất cũng như độ áp lực đối với một đường thẳng bao giờ cũng là một tam giác vuông hoặc hình thang vuông.

Sau khi xét độ áp lực trên những đường thẳng đứng, ta có thể vẽ độ áp lực trên đường thẳng nghiêng hoặc đường thẳng gãy không khó khăn. Trong trường hợp này độ áp lực cũng là một tam giác vuông hoặc hình thang vuông; hình 2-16 là một thí dụ về vẽ độ áp lực trên đường thẳng gãy OAB : tam giác vuông OAA' và hình thang vuông $AA_1B'B$ là những đồ áp lực dư tương ứng với đoạn thẳng OA và AB chú ý rằng $A'A = A_1A = h_1$ (h_1 là độ sâu của A).



Hình 2-16

Muốn vẽ độ áp lực tuyệt đối, ta chỉ cần tịnh tiến những cạnh OA' , A_1B' theo phương thẳng góc với OA và AB đi một đoạn thẳng $\frac{P_0}{\gamma}$ và có được những hình thang $OO''A''A$ và

$AA_1''B''B$, trong đó $AA'' = AA_1'' = \frac{P_0}{\gamma} + h_1$ và $BB'' = \frac{P_0}{\gamma} + h_2$ (h_2 là độ sâu của B).

Còn vẽ đồ phân bố áp suất trên đường cong ta phải biểu diễn bằng đồ thị trị số áp suất tại từng điểm theo phương trình cơ bản (2-18) rồi nối lại thành đường cong của đồ phân bố.

§2-7. SỰ CÂN BẰNG CỦA CHẤT LỎNG TRONG NHỮNG BÌNH CHỨA CHUYỂN ĐỘNG

Trong những tiết trước ta nghiên cứu sự cân bằng của chất lỏng đối với hệ tọa độ gắn chặt với quả đất, các phần tử chất lỏng không có sự chuyển động tương đối với nhau cũng như với quả đất.

Trong tiết này ta nghiên cứu sự cân bằng của chất lỏng trong trường hợp các phần tử không có sự chuyển động tương đối với nhau nhưng có chuyển động tương đối với quả đất; khi đó cả khối chất lỏng chuyển động như một vật rắn, ta gọi trạng thái này là trạng thái tĩnh tương đối của chất lỏng; nó xuất hiện khi bình chứa chất lỏng chuyển động với một gia tốc không đổi. Lực khối tác dụng vào chất lỏng không chỉ có trọng lực mà còn có cả lực quán tính. Ta nghiên cứu hai trường hợp tĩnh tương đối của chất lỏng:

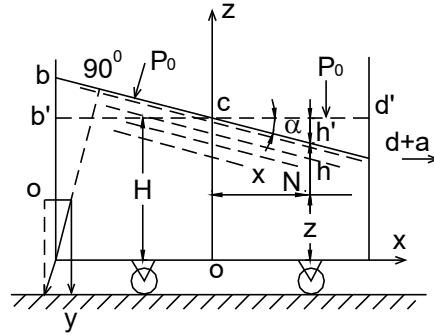
1. Khi bình chứa chuyển động thẳng với gia tốc không đổi

2. Khi bình chứa hình trụ tròn quay đều quanh trục thẳng đứng của bình, hệ tọa độ gắn chặt với bình chứa.

1) Sự cân bằng của chất lỏng đựng trong bình chuyển động thẳng với gia tốc không đổi

Trường hợp này thường gặp ở các xe chở dầu, nước. Giả thiết rằng bình chứa đang chuyển động thẳng với gia tốc không đổi a . Mỗi phần tử chất lỏng chịu tác dụng của hai lực khối: trọng lực $G = mg$, lực quán tính $R = -ma$, trong đó m là khối lượng phần tử chất lỏng. Với hệ tọa độ như trên hình 2-17, hình chiếu F_x, F_y, F_z của các lực khối lên các trục là:

$$F_x = -a; F_y = 0; F_z = -g.$$



Hình 2-17

a) Mặt đẳng áp

Theo (2-14), phương trình vi phân mặt đẳng áp viết thành:

$$-adx - gdz = 0$$

Tích phân ta có phương trình mặt đẳng áp:

$$ax + gz = \text{const.}$$

Mặt đẳng áp như vậy là mặt phẳng nghiêng; ta có một họ các mặt đẳng áp song song lập thành một góc α đối với mặt nằm ngang theo $\text{tg}\alpha = \frac{a}{g}$.

b) Sự phân bố áp suất

Theo (2-8), có thể viết:

$$dp = \rho (-adx - gdz)$$

Sau khi tích phân, ta được:

$$p = -\rho ax - \rho gz + C$$

Trong đó: C là hằng số tích phân.

Tại $x = 0, z = H$ có $p = p_0$ (p_0 là áp suất tại mặt thoáng), hằng số tích phân sẽ là:

$$C = p_0 + \rho gH$$

Phương trình xác định áp suất tĩnh tương đối tại một điểm tùy ý được viết dưới dạng:

$$p = -\rho ax - \rho gz + p_0 + \rho gH$$

Thay trong phương trình này $\gamma = \rho g$ và $gh' = ax$ ta được:

$$p = p_0 + \gamma (H - z) - \gamma h'$$

Gọi h là độ sâu của điểm N tùy ý trong chất lỏng kể từ mặt thoáng nghiêng, ta có:

$$h = H - (z + h')$$

Cuối cùng ta viết:

$$p = p_0 + \gamma h.$$

Như vậy, ta trở về công thức cơ bản tính áp suất thủy tĩnh, chỉ cần chú ý rằng h là độ sâu kể từ mặt thoáng trong điều kiện cân bằng tương đối.

2) Sự cân bằng của chất lỏng đựng trong bình hình trụ tròn quay đều quanh trục thẳng đứng qua tâm

Trường hợp đúc các vật theo phương pháp ly tâm là một ví dụ về bình quay.

Lực tác dụng lên mỗi phần tử chất lỏng bao gồm: trọng lực $G = mg$ và lực quán tính ly tâm $F = m\omega^2 r$; trong đó: ω là tốc độ góc; r là khoảng cách từ vị trí phần tử chất lỏng ta đang xét đến trục quay.

Theo tọa độ như trên hình vẽ (hình 2-18), lấy $m = 1$, hình chiếu F_x, F_y, F_z của các lực khối lên các trục là:

$$F_x = \omega^2 x; \quad F_y = \omega^2 y; \quad F_z = -g$$

Trong đó: x, y là hình chiếu của r lên trục x và trục y .

a) Mặt đẳng áp:

Theo (2-14) có thể viết:

$$\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz = 0$$

Sau khi tích phân ta có:

$$\frac{1}{2} \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega^2 y^2 - g z = C,$$

hoặc:

$$\frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - g z = C,$$

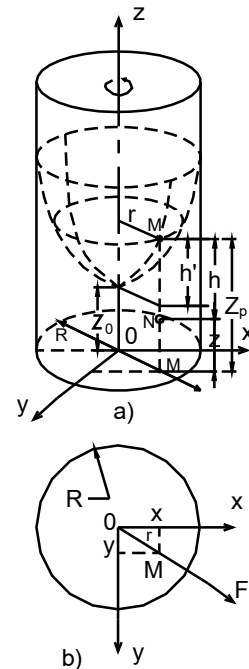
hoặc:

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 - g z = C.$$

Đây là phương trình của những mặt paraboloid tròn xoay có trục quay Oz . Vậy mặt đẳng áp trong trường hợp này là một họ các mặt paraboloid (hình 2-18) với các trị số C khác nhau.

Trên mặt tự do, khi $x = y = 0$ tức là $r = 0$, thì $z = z_0$; hằng số tích phân bằng:

$$C = -g z_0$$



Hình 2-18

Do đó phương trình mặt tự do là:

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 = g(z_r - z_0)$$

z_r là tung độ của mặt tự do, ở cách trục quay là r .

Gọi $h' = z_r - z_0$ thì phương trình mặt tự do thành:

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 = gh'.$$

b) Sự phân bố áp suất

Theo (2-12) ta viết được:

$$dp = \rho(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

Sau khi tích phân ta có:

$$p = \rho \omega^2 \frac{x^2}{2} + \rho \omega^2 \frac{y^2}{2} - \rho g z + C_1$$

Trong đó: C_1 là hằng số tích phân.

Trên mặt tự do: $p = p_0$;

khi: $r = 0$ thì $z = z_0$;

vậy: $C_1 = p_0 + \rho g z_0$

và: $p = \rho \left(\omega^2 \frac{r^2}{2} - g z \right) + p_0 + \rho g z_0$

hoặc:

$$p = p_0 + \rho \left[\omega^2 \frac{r^2}{2} - g(z - z_0) \right] = p_0 + \rho g (h' + z_0 - z).$$

Gọi $h = h' + z_0 - z$, thì rõ ràng h là độ sâu điểm đang xét tính từ mặt tự do cong ở trạng thái tĩnh tương đối, như vậy:

$$p = p_0 + \gamma h.$$

Ta lại trở về công thức cơ bản tìm áp suất thủy tĩnh.

§2-8. ÁP LỰC CHẤT LỎNG LÊN THÀNH PHẪNG CÓ HÌNH DẠNG BẤT KỲ

Trong trường hợp thành rắn là mặt phẳng, thì những áp suất tác dụng lên thành rắn đều song song với nhau, do đó chúng có một áp lực tổng hợp P duy nhất. Ta nghiên cứu trị số của P và điểm đặt của P .

1) *Trị số của áp lực*

Cần xác định áp lực P của chất lỏng tác dụng lên một diện tích phẳng ω có hình dạng bất kỳ đặt nghiêng đối với mặt thoáng một góc α (hình 2-19). Áp lực dP tác dụng lên một vi phân diện tích $d\omega$, mà trọng tâm của nó đặt ở độ sâu h tính bằng:

$$dP = p d\omega = (p_0 + \gamma h) d\omega$$

Áp lực P tác dụng lên toàn bộ diện tích ω bằng:

$$P = \int_{\omega} p d\omega = \int_{\omega} (p_0 + \gamma h) d\omega$$

Trên thành phẳng lấy hệ trục tọa độ Ozy như ở hình 2-19, ta có:

$$h = z \sin \alpha$$

Vậy:

$$P = \int_{\omega} (p_0 + \gamma z \sin \alpha) d\omega = \int_{\omega} p_0 d\omega + \int_{\omega} \gamma z \sin \alpha d\omega = p_0 \omega + \gamma \sin \alpha \int_{\omega} z d\omega \quad (2-28)$$

Tích phân $\int_{\omega} z d\omega = S_{Oy}$, chính bằng momen tĩnh của diện tích ω đối với trục Oy . Gọi z_c là tung độ của trọng tâm C của diện tích đó, như đã biết trong cơ học lý thuyết, có thể viết:

$$S_{Oy} = z_c \omega.$$

Gọi h_c là độ sâu của C thì:

$$h_c = z_c \sin \alpha,$$

do đó:

$$S_{Oy} = \frac{h_c \omega}{\sin \alpha}.$$

Biểu thức (2-28) viết thành:

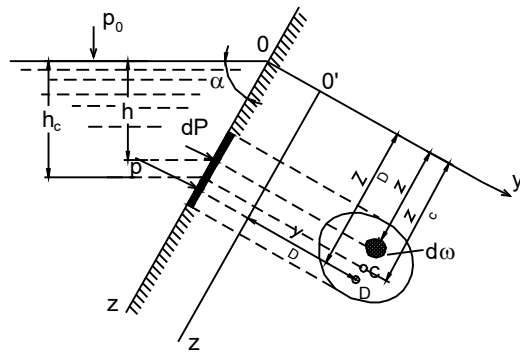
$$P = (p_0 + \gamma h_c) \omega. \quad (2-29)$$

Chú ý rằng biểu thức $(p_0 + \gamma h_c)$ là áp suất tuyệt đối tại trọng tâm C của diện tích phẳng.

Như vậy: Áp lực thủy tĩnh của chất lỏng tác dụng lên diện tích phẳng, ngập trong chất lỏng bằng tích số của áp suất tuyệt đối tại trọng tâm diện tích phẳng đó với diện tích ấy.

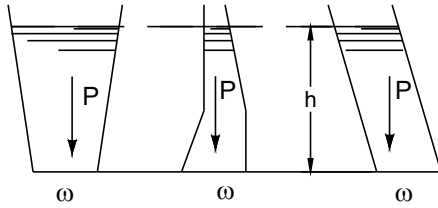
Nếu $p_0 = p_a$, áp lực dư tác dụng lên diện tích phẳng nói trên bằng:

$$P = \gamma h_c \omega. \quad (2-30)$$



Hình 2-19

Trong thực tiễn kỹ thuật, nhiều khi mặt phẳng cần xét chịu áp suất thủy tĩnh về một phía, còn phía kia của mặt phẳng lại chịu áp lực của không khí; trong trường hợp đó mặt phẳng chỉ chịu tác dụng của áp lực dư mà thôi vì áp lực không khí truyền từ mặt thoáng đến mặt phẳng đã cân bằng với áp lực không khí tác dụng vào phía khô của mặt phẳng. Vì vậy trong những trường hợp tương tự, chỉ cần tính áp lực dư theo (2-30).



Hình 2-20

Áp lực dư thủy tĩnh tác dụng lên đáy phẳng của bình chứa là trường hợp riêng của áp lực thủy tĩnh tác dụng lên mặt phẳng. Nếu diện tích đáy ω và độ sâu h của đáy giữ không đổi thì áp lực chất lỏng lên đáy bình phẳng: $P = \gamma h \omega$, không phụ thuộc hình dạng bình (hình 2-20).

2. *Vị trí của tâm áp lực:* Điểm đặt của áp lực gọi là tâm áp lực. Tùy theo áp lực là áp lực tuyệt đối hay là áp lực dư mà tâm áp lực gọi là tâm áp lực tuyệt đối hay là tâm áp lực dư. Phương pháp xác định vị trí của tâm áp lực trong hai trường hợp đều giống nhau. Ở đây chỉ nêu lên phương pháp xác định vị trí tâm áp lực dư.

Ta gọi $D(z, y)$ là tâm áp lực dư (hình 2-19); cần xác định các tọa độ z_D và y_D của điểm D .

a) *Xác định z_D*

Mômen của áp lực P đối với trục Oy bằng:

$$M = Pz_D = \gamma h_c \omega z_D \quad (2-31)$$

Tổng số mômen đối với trục Oy của áp lực lên các diện tích vi phân bằng:

$$M = \int_{\omega} pzd\omega = \int_{\omega} \gamma hzd\omega = \gamma \sin\alpha \int_{\omega} z^2 d\omega = \gamma \sin\alpha I_y, \quad (2-32)$$

trong đó: $I_y = \int_{\omega} z^2 d\omega$ là mômen quán tính của diện tích ω đối với trục Oy . Cân bằng

(2-31) và (2-32) ta có:

$$z_D = \frac{I_y}{\omega h_c} \sin\alpha = \frac{I_y}{\omega z_c}. \quad (2-33)$$

Như đã biết trong cơ học, có thể biểu thị mômen quán tính của diện tích đối với trục Oy (I_y) bằng mômen quán tính của diện tích ấy đối với trục $y'y'$ song song với Oy và đi qua trọng tâm C của diện tích (I_0) như sau:

$$I_y = I_0 + \omega z_c^2.$$

Thay trị số I_y vào (2-33), ta có:

$$z_D = z_c + \frac{I_0}{\omega z_c}. \quad (2-34)$$

Như vậy, vị trí của tâm áp lực bao giờ cũng đặt sâu hơn vị trí của trọng tâm.
 Ở phụ lục 2-1 có công thức tính I_0 , z_C và ω cho một số hình phẳng hay gấp.

b) *Xác định y_D*

Tương tự như lúc xác định z_D , ta viết mômen cho trục Oz:

$$M = Py_D = \int_{\omega} pyd\omega .$$

Thay P theo (2-30) và chú ý rằng $h_c = z_c$ và $p = \gamma z \sin \alpha$, ta có:

$$\gamma z_c \omega \sin \alpha y_D = \gamma \sin \alpha \int_{\omega} zy d\omega ,$$

do đó:

$$y_D = \frac{\int zy d\omega}{\omega z_C} . \quad (2-35)$$

Trong thực tiễn hay gặp trường hợp diện tích ω có hình dạng đối xứng đối với trục song song với Oz, khi đó điểm D nằm trên trục đối xứng, ta chỉ cần xác định z_D không cần tính y_D .

§2-9. ÁP LỰC CHẤT LỎNG LÊN THÀNH PHẪNG HÌNH CHỮ NHẬT CÓ ĐÁY ĐẶT NẪM NGANG

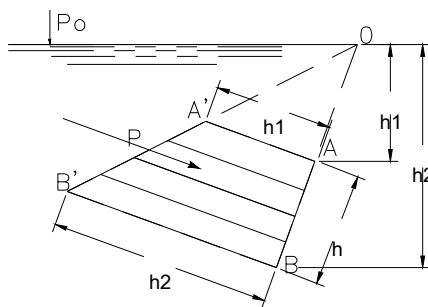
Trong thực tiễn kỹ thuật, ta thường gặp trường hợp này: thí dụ áp lực nước lên cửa cống hình chữ nhật; việc xác định áp lực và áp tâm hoàn toàn có thể áp dụng những công thức nêu ở tiết trên (§2-8). Tuy nhiên, trong trường hợp này, ta có thể xác định áp lực đơn giản hơn.

Ta xét trường hợp tổng quát, khi thành phẳng hình chữ nhật nằm ngang một góc α , có đáy rộng b, chiều cao h; đáy trên của hình chữ nhật đặt ở độ sâu h_1 , đáy dưới đặt ở độ sâu h_2 (hình 2-21), áp suất tại mặt tự do bằng áp suất không khí $p_0 = p_a$.

Vì có thể dễ dàng suy ra áp lực tuyệt đối khi biết áp lực dư, nên ta chỉ cần xét việc xác định áp lực dư. Trị số áp lực dư trong trường hợp đang nghiên cứu có thể xác định theo công thức (2-30):

$$P = \gamma h_c \omega .$$

$$\text{Ở đây: } \omega = bh, \quad h_c = \frac{h_1 + h_2}{2} .$$



Hình 2-21

Vậy:
$$P = \gamma \frac{h_1 + h_2}{2} bh. \quad (2-36)$$

Trị số $\frac{h_1 + h_2}{2}$ ở vế phải của phương trình (2-36) bằng diện tích Ω của đồ áp lực dư AA'B'B (hình 2-21)

$$\Omega = \frac{h_1 + h_2}{2} h.$$

Vậy công thức (2-36) trở thành:

$$P = \gamma \Omega b. \quad (2-37)$$

Ta có thể nói rằng: *Áp lực P tác dụng lên mặt phẳng hình chữ nhật bằng tích số diện tích đồ áp lực với bề dài đáy và trọng lượng riêng của chất lỏng.*

Thường để đơn giản việc tính, trước hết ta tính áp lực đối với một đơn vị bề dài đáy, sau đó mới nhân với cả bề dài đáy b.

Đường tác dụng của lực P tất nhiên đi qua trọng tâm thể tích tạo bởi đồ áp lực và hình chữ nhật chịu lực. Trên hình 2-21 lực P đi qua trọng tâm của đồ áp lực, vì hình chiếu trọng tâm của thể tích nói trên lên đồ áp lực trùng với hình chiếu của tâm đồ áp lực.

Nếu cạnh trên của hình chữ nhật đặt tại mặt tự do (hình 2-22a) thì $h_1 = 0$; đồ áp lực thành hình tam giác vuông góc có cạnh không bằng nhau và có diện tích Ω bằng:

$$\Omega = \frac{1}{2} hh_2.$$

Vậy áp lực P bằng:

$$P = \gamma \Omega b = \frac{\gamma}{2} h_2 hb.$$

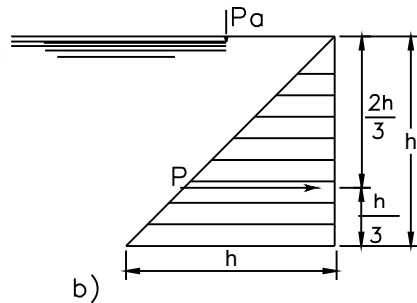
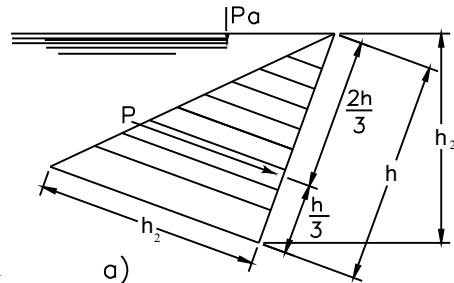
Trong trường hợp này, lực P đi qua trọng tâm của đồ áp lực (hình 2-22a) tức là tại độ sâu $\frac{2}{3} h_2$.

Nếu hình chữ nhật lại đặt thẳng đứng thì đồ áp lực trên thành tam giác vuông cân (hình 2-22b) do đó:

$$\Omega = \frac{1}{2} h^2$$

và:

$$P = \gamma \Omega b = \frac{\gamma}{2} bh^2 \quad (2-38)$$



Hình 2-22

Áp lực dư P đi qua trọng tâm của đồ áp lực, tức là ở độ sâu $\frac{2}{3} h_2$.

Thí dụ 4: Tính áp lực nước lên cánh ống chữ nhật có $h = 3 \text{ m}$, $b = 2 \text{ m}$, độ sâu nước ở thượng lưu $H = 6 \text{ m}$.

Giải:

Ta chỉ cần tính áp lực dư P , áp dụng (2-30) ta phải tính h_c .

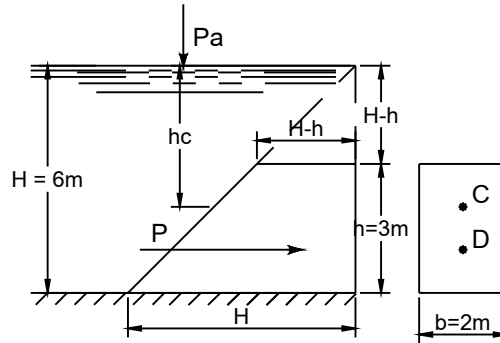
Theo hình 2-23:

$$h_c = H - \frac{h}{2} = 6 - \frac{3}{2} = 4,5 \text{ m.}$$

Theo (2-34):

$$\begin{aligned} P &= \gamma h_c \omega = 9.810 \times 4,5 \times 3 \times 2 \\ &= 264.870 \text{ N (} P = 27000 \text{ kG)}. \end{aligned}$$

Tâm áp lực tính theo (2-34) bằng:



Hình 2-23

$$Z_D = h_c + \frac{I_0}{\omega h_C}$$

$$I_0 = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \times 3^3}{12}$$

$$Z_D = 4,5 + \frac{2 \times 3^3}{3 \times 2 \times 4,5} = 4,66 \text{ m.}$$

Dùng phương pháp đồ giải, đồ áp lực lên cửa cống là hình thang có diện tích S_1 (hình 2-23). Áp lực dư P tính theo:

$$P = S_1 b = \frac{\gamma[(H-h) + H]h}{2} b = \frac{9.810[(6-3) + 6]}{2} \times 2 = 264.870 \text{ N.}$$

Đường tác dụng của lực P đi qua trọng tâm của đồ áp lực hình thang. Như đã biết, trong toán học, trọng tâm hình thang ở cách đáy lớn một đoạn bằng $\frac{B + 2B'}{B + B'} \times \frac{a}{3}$, trong đó B, B', a lần lượt là đáy lớn, đáy nhỏ và chiều cao hình thang. Vậy trọng tâm hình thang ở trường hợp đang xét cách mặt nước tự do là:

$$\begin{aligned} z_D &= H - \frac{H + 2(H-h)}{H + H-h} \times \frac{h}{3} \\ &= 6 - \frac{6 + 2 \times 3}{6 + 3} \times \frac{3}{3} = 4,66 \text{ m.} \end{aligned}$$

§2-10. ÁP LỰC CỦA CHẤT LỎNG LÊN THÀNH CONG

Nói chung nếu thành cong có hình dạng bất kỳ, thì những áp lực nguyên tố không hợp lại thành được một áp lực tổng hợp duy nhất.

Trong một số trường hợp riêng, như mặt cong là mặt cầu, mặt trụ tròn xoay có đường sinh đặt nằm ngang hoặc đặt thẳng đứng, những áp lực nguyên tố đều đồng quy hoặc song song, do đó có được một áp lực tổng hợp duy nhất.

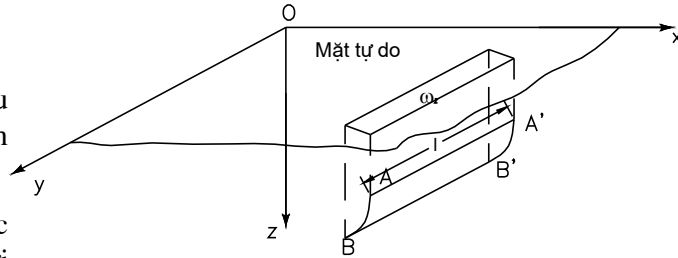
Ta chỉ nghiên cứu ở đây một trường hợp riêng thường gặp trong thực tiễn công trình (các cánh cửa van, cửa cống v.v...); đó là trường hợp áp lực tác dụng nên thành cong *hình trụ tròn có đường sinh đặt nằm ngang*.

Ta có một mặt trụ ABA'B' đường sinh nằm ngang có độ dài và cung \widehat{AB} là một cung tròn. Để đơn giản việc tính toán ta đặt hệ tọa độ sao cho một trục nằm ngang, thí dụ trục Oy, song song với đường sinh, mặt tọa độ nằm ngang trùng với mặt tự do (hình 2-24). Ta nghiên cứu áp lực chất lỏng P tác dụng lên mặt trụ đó. Áp suất trên mặt tự do bằng áp suất không khí: $p_0 = p_a$. Ta sẽ xác định thành phần P_x và P_z của P (còn $P_y = 0$), rồi tìm ra P theo:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

Chúng ta sẽ chỉ nghiên cứu áp lực dư, vì phương pháp xác định áp lực tuyệt đối cũng như vậy.

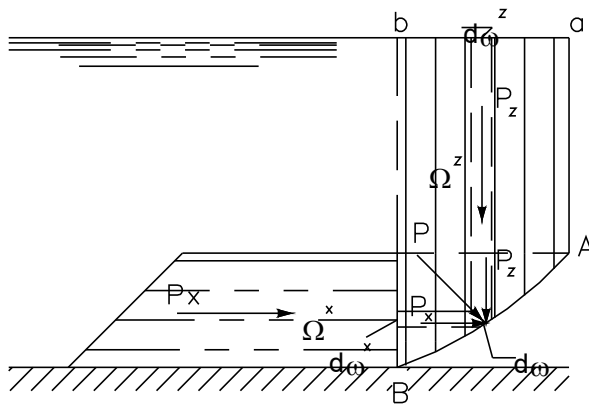
Giả thiết mặt trụ chịu áp lực chất lỏng từ phía trên, phía dưới của mặt trụ là khô.



Hình 2-24

Trên mặt trụ đó, ta lấy một diện tích nguyên tố $d\omega$, đặt ở độ sâu h (hình 2-25); áp lực nguyên tố dP tác dụng lên diện tích đó bằng:

$$dP = \gamma h d\omega.$$



Hình 2-25

Lực này phân thành hai thành phần, thành phần nằm ngang dP_x và thành phần thẳng đứng dP_z (thành phần $dP_y = 0$):

$$\begin{aligned} dP_x &= dP \cos(\widehat{dP, x}) \\ &= \gamma h d\omega \cos(\widehat{dP, x}) = \gamma h d\omega_x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dP_y &= dP \cos(\widehat{dP, z}) \\ &= \gamma h d\omega \cos(\widehat{dP, z}) = \gamma h d\omega_z, \end{aligned}$$

trong đó: $d\omega_x = d\omega \cos(\widehat{dP, x})$ là hình chiếu của diện tích $d\omega$ lên mặt tọa độ thẳng góc với trục Ox và $d\omega_z = d\omega \cos(\widehat{dP, z})$ là hình chiếu của diện tích $d\omega$ lên mặt tọa độ nằm ngang tức là lên mặt tự do.

Thành phần nằm ngang của P_x của áp lực P xác định bởi:

$$P_x = \int_{\omega_x} dP_x = \gamma \int_{\omega_x} hd\omega_x .$$

Theo công thức áp lực dư lên mặt phẳng (2-30) thì có thể viết:

$$P_x = \gamma h_c \omega_x, \quad (2-39)$$

trong đó: ω_x là hình chiếu của diện tích ABA'B' lên mặt zOy; h_c là độ sâu của trọng tâm của ω_x .

Thành phần P_x này có thể tính ra dễ dàng bằng đồ áp lực, theo công thức (2-37):

$$P_x = \gamma \Omega_x b, \quad (2-40)$$

trong đó: Ω_x là diện tích đồ áp lực. Đường tác dụng của P_x đặt ở độ sâu bằng độ sâu của trọng tâm diện tích Ω_x .

Thành phần thẳng đứng P_z của áp lực P xác định bởi:

$$P_z = \int_{\omega_z} dP_z = \gamma \int_{\omega_z} hd\omega_z \quad (2-41)$$

Ta nhận xét rằng tích phân $\int_{\omega_z} hd\omega_z$ bằng thể tích W của hình lăng trụ thẳng đứng L,

giới hạn bởi mặt trụ ABA'B', hình chiếu ω_z và những mặt bên thẳng đứng tì vào đường viền của mặt trụ AB. Thể tích W có thể tích bằng:

$$W = \Omega_y b \quad (2-42)$$

trong đó: Ω_y là diện tích của hình ABba.

Vậy thành phần P_z chính là trọng lượng G của hình lăng trụ L nói trên

$$P_z = \gamma W = G \quad (2-43)$$

Đường tác dụng của thành phần P_z đi qua trọng tâm của hình lăng trụ L. Hình lăng trụ L gọi là *vật áp lực*. Vậy thành phần thẳng đứng P_z bằng trọng lượng vật áp lực.

Trong thí dụ cụ thể đang xét, theo hình 2-25, thành phần P_z phải hướng xuống dưới, có thể thì áp lực P mới hướng vào mặt trụ ABA'B' (phía trên của mặt trụ là phía chịu áp lực, phía dưới khô không chịu lực).

Giả sử ta đặt hệ tọa độ hơi khác đi một chút, tức là trục Oy không song song với đường sinh của mặt trụ ABA'B', còn trục Oz vẫn như cũ và mặt Oxy vẫn nằm ngang, khi đó thành phần $P_y \neq 0$ và cách tìm P_y cũng giống như cách tìm P_x .

Những công thức cho ta tìm ba thành phần P_x, P_y, P_z của áp lực P lên thành cong là:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \gamma h_c \omega_x \\ P_y &= \gamma h_c \omega_y \\ P_z &= \gamma W \end{aligned} \right\} \quad (2-44)$$

trong đó h_c là độ sâu của trọng tâm của mặt trụ và đồng thời cũng là độ sâu của những hình chiếu ω_x, ω_y .

$$\text{Khi đó: } P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2} \quad (2-45)$$

Trong trường hợp mặt cong là mặt cầu thì cũng có thể tính ra ba thành phần áp lực theo (2-44) và áp lực tổng hợp theo (2-45).

Ta nghiên cứu thêm về vật áp lực và phương của P_z .

Vật áp lực là thể tích giới hạn bởi thành cong mà ta đang xét, bốn mặt bên thẳng đứng, từ lên các mép của thành cong và kéo dài đến khi cắt mặt tự do hoặc phần kéo dài của mặt tự do của chất lỏng. Trọng lượng của vật áp lực biểu thị thành phần thẳng đứng P_z của áp lực P. Trong trường hợp mặt cong là mặt trụ có đường sinh nằm ngang, vật áp lực thường biểu thị bởi mặt cắt thẳng đứng của thể tích nói trên, đó là diện tích giới hạn bởi đường cong chịu lực, hai đường thẳng đứng đi qua hai đầu của đường cong và gặp mặt tự do hoặc phần kéo dài của mặt tự do (thí dụ mặt cắt ABba trên hình 2-26).

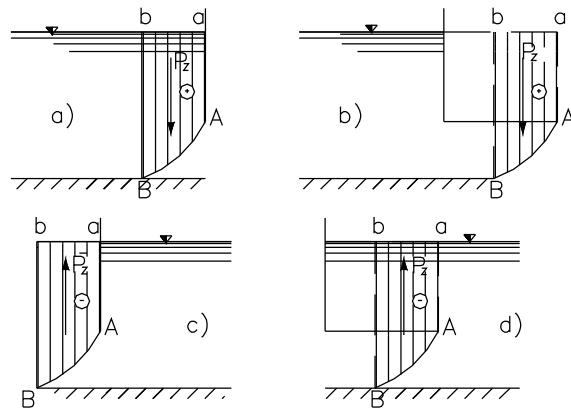
Sau đây là ba trường hợp vật áp lực:

1. Vật áp lực có chất lỏng ngay trên mặt cong (hình 2-26a):

Có thể chất lỏng chiếm toàn thể vật áp lực (hình 2-26a) hoặc chỉ có thể chiếm một phần của vật áp lực (hình 2-26b), trong cả hai trường hợp này P_z đều hướng xuống dưới. Ta qui ước P_z hướng xuống dưới, vật áp lực mang dấu +.

2. Vật áp lực không có chất lỏng ở ngay trên mặt cong (hình 2-26c, d):

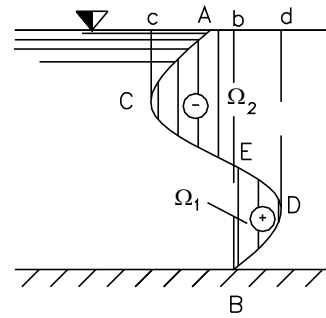
Có thể chất lỏng hoàn toàn không có trong vật áp lực (hình 2-26c) hoặc có thể chỉ chiếm một phần vật áp lực (hình 2-26d), trong cả hai trường hợp này P_z đều hướng lên trên. Ta qui ước khi P_z hướng lên trên, vật áp lực mang dấu -.



Hình 2-26

3. Mặt cong có hình dạng phức tạp, sẽ làm cho vật áp lực có hình dạng phức tạp:

Thí dụ mặt cong ACDB (hình 2-27). Theo định nghĩa về vật áp lực nói trên diện tích Ω của mặt cắt thẳng đứng của vật áp lực gồm hai bộ phận: Ω_1 và Ω_2 . Ω_1 là diện tích của hình BDE và Ω_2 là diện tích của hình ACEb. Để xác định hướng và các thành phần P_{z1} ứng với Ω_1 và P_{z2} ứng với Ω_2 , ta có thể phân đường cong phức tạp thành nhiều đoạn đơn giản để ta trở về hai trường hợp nói trên. Thí dụ đoạn cong BDE phân thành hai đoạn BD và DE; vật áp lực ứng với BD là hình BDdb và theo như qui ước nói trên mang dấu +, còn vật áp lực ứng với DE là hình DEdb mang dấu -, tổng số đại số của hai diện tích BDdb và DEdb cho ta diện tích BDE với dấu +. Ta cũng chia đường cong ECA thành hai đoạn EC và CA rồi cũng tìm vật áp lực ứng với từng đoạn, kèm theo dấu tương ứng, sau cùng cộng đại số những diện tích của vật áp lực thì tìm được diện tích ACE với dấu -.



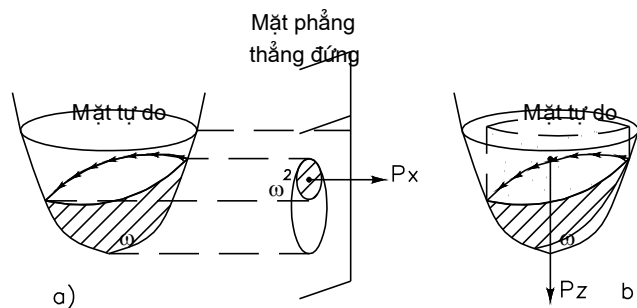
Hình 2-27

Nguyên tắc dùng vật áp lực nói trên để tìm phương hướng cho thành phần P_z áp dụng cho những trường hợp mà áp suất dư tác dụng vào mặt cong lớn hơn số không: $p_{\text{dư}} > 0$, tức là không có vấn đề áp suất chân không ($p_{\text{dư}} < 0$).

Chú ý rằng nếu thành chịu áp lực là thành phẳng thì những khái niệm nói trên về vật áp lực vẫn đúng và mặt phẳng được coi như là giới hạn của mặt cong có bán kính cong lớn vô cùng.

Đối với mặt cong là mặt ghem, như đã nói ở trên, ta không có một áp lực tổng hợp duy nhất (hình 2-28). Khi đó người ta có thể xác định áp lực theo một phương cho trước, tính bằng tổng số những hình chiếu lên phương đó của những áp lực nguyên tố. Cũng lập luận như đối với trường hợp mặt trụ tròn có đường sinh nằm ngang mà ta vừa nói ở trên, người ta đi đến hai qui tắc sau:

1. Những hình chiếu của áp lực thủy tĩnh lên mặt cong ω theo những phương nằm ngang Ox , Oy bằng áp lực thủy tĩnh tác dụng lên những hình chiếu ω_x , ω_y của mặt cong lên những mặt phẳng thẳng góc với Ox , Oy (hình 2-28a):



Hình 2-28

$$P_x = \int_{\omega_x} dP_x = \gamma \int_{\omega_x} h d\omega_x = \gamma h_{cx} \omega_x \quad (2-46)$$

$$P_y = \int_{\omega_y} dP_y = \gamma \int_{\omega_y} h d\omega_y = \gamma h_{cy} \omega_x \quad (2-47)$$

trong đó: h_{cx} và h_{cy} là độ sâu những trọng tâm diện tích ω_x và ω_y .

2. Hình chiếu P_z của áp lực thủy tĩnh lên mặt cong, theo phương thẳng đứng Oz , có trị số bằng trọng lượng của vật áp lực (hình 2-28b):

$$P_z = \gamma W \quad (2-48)$$

Phương của P_z được tìm bằng cách áp dụng những qui tắc về vật áp lực vừa nói ở trên.

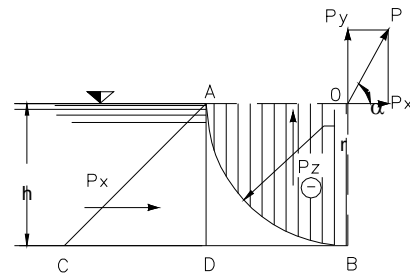
Thí dụ 5: Tìm áp lực nước tác dụng lên một cửa ống cong AB, dài $l = 3$ m, có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ diện tích mặt bên của hình trụ tròn mà bán kính bằng $r = 1$ m (hình 2-29). Độ sâu nước bằng $h = 1$ m.

Giải:

Ta tính các thành phần P_x và P_z của áp lực P.

Đồ áp lực biểu diễn thành nằm ngang của áp lực là tam giác vuông cân ACD có diện tích $\Omega_{ACD} = \frac{1}{2} h^2$.

Vậy theo (2-40) ta có:



Hình 2-29

$$P_x = \gamma \Omega_{ACD} l = \gamma \frac{1}{2} h^2 l = \frac{9.810 \times 1^2 \times 3}{2} = 14.715 \text{ N } (= 1.500 \text{ kG})$$

Thành phần thẳng đứng của áp lực biểu diễn bởi vật áp lực ABO có diện tích $\Omega_{ABO} = \frac{\pi r^2}{4}$, do đó có thể tính bằng thể tích $W = \Omega_{ABO} l = \frac{\pi r^2 l}{4}$.

Vậy theo (2-43) ta có:

$$P_z = \gamma W = \frac{\gamma \pi r^2 l}{4} = \frac{9810 \times 3.14 \times 1^2 \times 3}{4} = 23.103 \text{ N } (\approx 2.360 \text{ kG})$$

Vì ngay phía trên mặt cong không có nước, nên P_z hướng lên trên.

Áp lực P tính theo:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{14.715^2 + 23.103^2} = 27.470 \text{ N } (\approx 2.800 \text{ kG}).$$

Đường tác dụng của áp lực P đi qua tâm O, lập với đường nằm ngang một góc α mà:

$$\text{tg} \alpha = \frac{P_z}{P_x} = 1,56,$$

tức là $\alpha = 57^{\circ}20'$.

§2-11. ĐỊNH LUẬT ÁCSIMÉT

Ta xét áp lực thủy tĩnh P tác dụng vào một vật rắn có thể tích W ngập hoàn toàn trong chất lỏng (hình 2-30). Muốn vậy ta xét thành phần thẳng đứng P'_z và thành phần nằm ngang P'_x của áp lực P . Muốn xác định thành phần thẳng đứng P'_z của P ta vẽ mặt trụ thẳng đứng mà các đường sinh của mặt trụ đều là những tiếp tuyến đối với mặt ngoài của vật rắn; đường cong đi qua tất cả các điểm tiếp xúc giữa mặt trụ và mặt ngoài của vật rắn chia mặt ngoài của vật rắn thành hai phần không kín: phần trên cde và phần dưới cfe . Lực P'_{z1} tác dụng lên phần trên bằng trọng lượng của vật áp lực $abcde$ và hướng thẳng đứng; theo qui ước về dấu của vật áp lực thì P'_{z1} mang dấu +:

$$P'_{z1} = +\gamma V_{abcde}$$

Lực P'_{z2} tác dụng lên phần dưới bằng trọng lượng của vật áp lực $abcfe$ và hướng thẳng đứng lên trên; P'_{z2} mang dấu -:

$$P'_{z2} = -\gamma V_{abcfe}$$

Tổng áp lực thẳng đứng P'_z tác dụng lên toàn bộ mặt kín của $cdef$ bằng:

$$P'_z = P'_{z1} + P'_{z2} = \gamma (V_{abcde} - V_{abcfe}) = \gamma V_{cdef} = -\gamma W \quad (2-49)$$

bao giờ nó cũng hướng lên trên vì bao giờ cũng có:

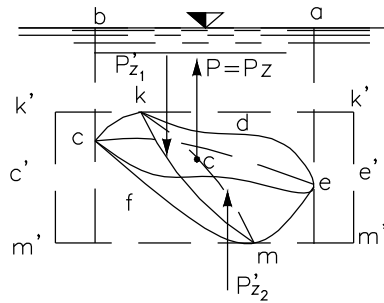
$$|P'_{z2}| > |P'_{z1}|$$

Muốn xác định thành phần nằm ngang của P_x của P ta vẽ mặt trụ nằm ngang các đường sinh đều tiếp xúc với mặt ngoài của vật rắn; đường cong đi qua cả các điểm tiếp xúc giữa mặt trụ và mặt ngoài của vật chia mặt ngoài của vật rắn thành hai thành phần không kín: phần trái kcm và phần phải kem .

Theo (2-46) áp lực dư tác dụng lên phần kcm và phần kem của mặt cong bằng tích số của diện tích hình chiếu thẳng đứng của từng phần mặt cong đó nhân với áp suất dư tại trọng tâm diện tích đó. Vì những hình chiếu thẳng đứng $k'c'm'$ và $k'e'm'$ của những mặt kcm và kem bằng nhau và trọng tâm của những hình chiếu đó ở những độ sâu bằng nhau, nên tổng hợp hai phần áp lực nằm ngang bên trái và bên phải bằng không: $P'_x = 0$; như vậy chỉ còn $P = P'_z$.

Vậy: Một vật rắn ngập hoàn toàn trong chất lỏng chịu tác dụng của một lực hướng lên trên, có trị số bằng trọng lượng khối chất lỏng bị vật rắn chiếm chỗ.

Định luật này là định luật Ácsimét, áp lực đó gọi là lực Ácsimét hoặc lực đẩy (còn gọi là lực nâng).



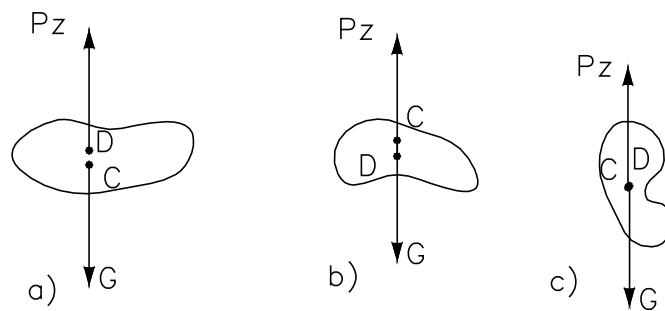
Hình 2-30

Phương của lực Acsimét đi qua trọng tâm D của khối chất lỏng bị vật rắn choán chỗ, điểm D được gọi là tâm đẩy. Chú ý rằng tâm đẩy D không phải điểm đặt của lực Acsimét.

Định luật Acsimét cũng dùng cho vật nổi, tức là vật không bị ngập hoàn toàn trong chất lỏng và nổi lên trên mặt tự do của chất lỏng. Lúc đó áp lực thủy tĩnh tác dụng lên phần bị ngập trong nước bằng trọng lượng khối chất lỏng bị phần ngập của vật rắn choán chỗ.

§2-12. SỰ CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN NGẬP HOÀN TOÀN TRONG CHẤT LỎNG

Trên cơ sở định luật Acsimét, nghiên cứu sự cân bằng của một vật rắn nói chung không đồng chất ngập hoàn toàn trong chất lỏng, vật rắn chịu tác dụng của hai lực thẳng đứng: trọng lực G đặt tại trọng tâm C của vật rắn, hướng xuống dưới và sức đẩy Acsimét P_z đặt tại tâm đẩy D, tức là tại trọng tâm vật đó khi coi vật là đồng chất, hướng lên trên.



Hình 2-31

Muốn vật đó đứng cân bằng tức là không chìm xuống, không nổi lên, không tự quay thì hai lực P_z và G phải bằng nhau và đặt cùng trên cùng một đường thẳng đứng. Vị trí của hai điểm C và D ảnh hưởng đến tính chất cân bằng của vật rắn.

1. Trong trường hợp C ở thấp hơn D (hình 2-31a) thì sự cân bằng là ổn định nếu đẩy vật dịch khỏi vị trí cân bằng thì dưới tác dụng của ngẫu lực lập bởi P_z và G , vật lại trở về vị trí cũ.

2. Trường hợp C ở cao hơn D (hình 2-31b) thì sự cân bằng là không ổn định vì nếu đẩy vật dịch khỏi vị trí cân bằng thì ngẫu lực hợp bởi P_z và G làm cho vật lộn ngược đi xa vị trí cũ và chiếm vị trí cân bằng ổn định.

3. Trường hợp C và D trùng nhau (hình 2-31c) nghĩa là trong trường hợp vật đồng chất thì vật ở trạng thái cân bằng phiếm định, nghĩa là vật đứng cân bằng với bất kỳ vị trí cân bằng nào. Vật rắn không ở trạng thái cân bằng nếu $P_z \neq G$, nếu $P_z < G$ thì vật chìm, nếu $P_z > G$ thì vật nổi lên.

§2-13. SỰ CÂN BẰNG CỦA VẬT RẮN NỔI LÊN TRÊN MẶT TỰ DO CỦA CHẤT LỎNG

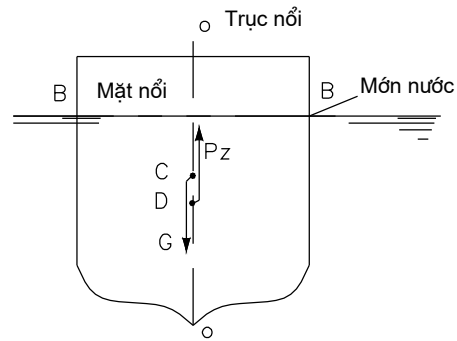
Điều kiện cân bằng của vật rắn nổi lên trên bề mặt tự do của chất lỏng không giống hẳn với điều kiện cân bằng của vật ngập hoàn toàn trong chất lỏng.

Ta xét một vật nổi trên mặt nước, thí dụ như một tấm gỗ, một con tàu v.v... Khi vật đã ở trạng thái nổi thì tất nhiên điều kiện $P_Z = G$ đã được thỏa mãn. Rõ ràng là nếu trọng tâm C của vật nổi (có thể đồng chất hoặc không đồng chất) ở thấp hơn tâm đáy D thì sự cân bằng của vật nổi là ổn định. Tuy nhiên, nếu trọng tâm C ở cao hơn tâm đáy D, vật chưa phải đã là hoàn toàn không có thể ở trạng thái cân bằng ổn định.

Ta nghiên cứu điều kiện cân bằng ổn định của vật nổi khi C ở cao hơn D.

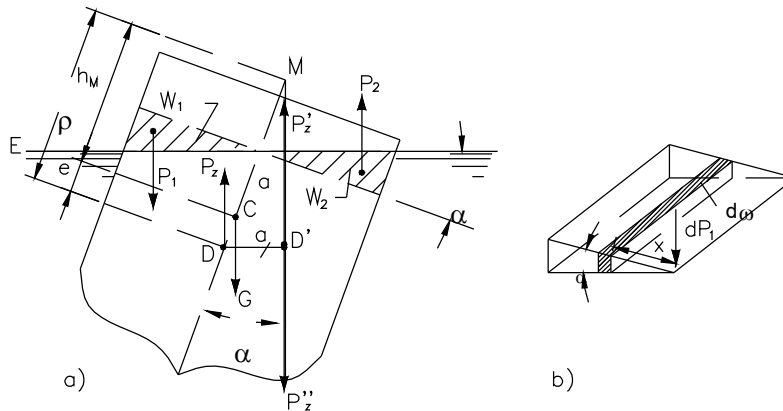
Trước hết cần định nghĩa một số yếu tố (hình 2-32):

- Mớn nước là giao tuyến của vật nổi với mặt nước.
- Mặt nổi là mặt phẳng có chu vi là đường mớn nước.
- Trục nổi là đường thẳng góc với mặt nổi qua tâm vật nổi.



Hình 2-32

Các định nghĩa trên đây ứng với lúc vật nổi ở trạng thái cân bằng. Khi vật nổi bị nghiêng đi thì tâm đáy D cũng thay đổi vị trí đến D' (hình 2-33).



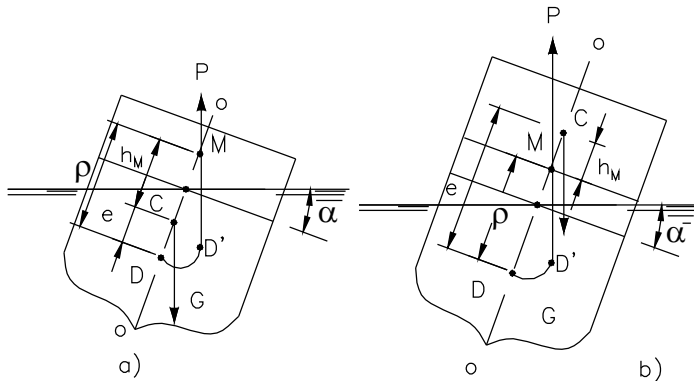
Hình 2-33

Giao điểm của trục nổi với phương của lực đẩy mới gọi là tâm định khuynh M. Khi góc nghiêng α của trục nổi và đường thẳng đứng nhỏ hơn 15° ($\alpha < 15^\circ$) thì có thể coi như tâm đáy D di chuyển trên một đoạn cung tròn tâm M bán kính là khoảng cách từ M đến D, đoạn MD gọi là bán kính định khuynh và kí hiệu là ρ . Khoảng cách từ M đến C gọi là độ cao định khuynh, ký hiệu $h_M = MC$. Khoảng cách từ C đến D ký hiệu là e. Ta có $h_M = \rho - e$. Trị số này có thể dương, âm hoặc bằng không.

Ta xét các trường hợp có thể xảy ra sau khi vật nổi bị nghiêng (hình 2-34).

- Khi M cao hơn C ($h_M > 0$) (hình 2-34a): ngẫu lực do G và P tạo nên có xu hướng làm vật nổi trở lại trạng thái cân bằng lúc đầu, ta có vật nổi ổn định.

- Khi M thấp hơn C ($h_M < 0$) (hình 2-34b): ngẫu lực có xu hướng làm vật càng nghiêng, ta có vật nổi không ổn định.



- Khi M trùng với C ($h_M = 0$): trường hợp này không tạo nên ngẫu lực mà hợp lực luôn luôn triệt tiêu, ở mọi vị trí vật đều cân bằng, do đó sau khi bị nghiêng, vật nổi vẫn ở trạng thái nghiêng mà không trở lại vị trí cân bằng ban đầu, ta có vật nổi ở trạng thái cân bằng phiếm định.

Hình 2-34

Như vậy, sự cân bằng của vật nổi được xác định không phải bởi vị trí tương ứng giữa C và D mà giữa C và M; điều kiện để vật nổi ổn định là $h_M > 0$. Muốn xác định h_M , trước hết ta cần tính ra bán kính định khuynh ρ . Sau đây là cách suy diễn công thức tính ρ .

Giả sử ta quay vật nổi đi một góc nhỏ α (hình 2-33). Lúc đó một thể tích W_1 thoát ra khỏi mặt chất lỏng và một thể tích W_2 chìm vào trong chất lỏng. Vì thể tích W chìm trong chất lỏng của vật nổi vẫn giữ không đổi, nên $W_1 = W_2$.

Giả sử lực đẩy Acsimét $P_z = \gamma W$ bị buộc chặt vào điểm D trong khi vật bị quay đi góc α ; khi đó ta bổ sung hai lực P_1, P_2 bằng nhau: lực $P_1 = \gamma W_1$ là trọng lượng khối W_1 và lực $P_2 = \gamma W_2$ là lực đẩy của chất lỏng vào khối W_2 (hình 2-33a). Trên thực tế ba lực trên không có, mà chỉ tồn tại lực đẩy $P'_z = P_z$ đặt tại tâm đẩy mới D'. Rõ ràng là lực P'_z này phải tương đương với ba lực P_z, P_1 và P_2 . Nếu ta đặt tại D' lực $P''_z = P'_z$, nhưng ngược chiều với P'_z thì hai lực P''_z và P'_z cân bằng nhau. Như vậy hệ thống bốn lực P''_z, P_z, P_1 và P_2 là một hệ thống lực cân bằng vì tổng số những hình chiếu của bốn lực đó trên một trục bất kỳ bằng không và tổng số mômen những lực đó đối với một trục bất kỳ cũng bằng không.

Mômen của những lực P_z và P''_z bằng:

$$M(P_z, P''_z) = P_z a = P_z \rho \sin \alpha = \gamma W \rho \sin \alpha$$

Mômen của P_1 đối với trục quay bằng (hình 2-33b):

$$M(P_1) = \int_{P_1} x \cdot dP_1$$

Ta tính dP_1 (hình 2-33b):

$$dP_1 = \gamma d\omega x \operatorname{tg} \alpha$$

do đó

$$M(P_1) = \int_{\omega_1} \gamma d\omega x \operatorname{tg} \alpha \cdot x = \int_{\omega_1} \gamma x^2 \operatorname{tg} \alpha d\omega$$

Vì α khá nhỏ nên ta coi $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, do đó:

$$M(P_1) = \int_{\omega_1} \gamma \alpha x^2 d\omega$$

Cũng như vậy mômen của P_2 đối với trục quay bằng:

$$M(P_2) = \int_{\omega_1} \gamma \alpha x^2 d\omega$$

Vậy tổng hợp những mômen của P_1 và P_2 bằng:

$$M(P_1, P_2) = \int_{\omega} \gamma \alpha x^2 d\omega$$

trong đó tích phân phải lấy đối với toàn bộ diện tích ω của mặt nổi.

Từ sự cân bằng của những mômen của bốn lực nói trên:

$$M(P_z, P''_z) = M(P_1, P_2)$$

ta viết được:

$$\gamma W \rho \sin \alpha = \int_{\omega} \gamma \alpha x^2 d\omega$$

do đó (coi $\sin \alpha \approx \alpha$):

$$\rho = \frac{\int_{\omega} x^2 d\omega}{W} = \frac{1}{W} \quad (2-50)$$

trong đó:

$$I = \int_{\omega} x^2 d\omega \text{ là mômen quán tính của mặt nổi đối với trục quay;}$$

W - như trên đã nói, là thể tích của chất lỏng bị choán chỗ.

Biết vị trí C, D của vật nổi cho trước, tức là đã biết trị số $CD = e$, ta tính ra được h_M theo $h_M = \rho - e$, trong đó ρ tính theo (2-50).

Trong kỹ thuật đóng tàu, thuyền thường lấy $h_M = 0,3 \div 1,5$ m tùy theo hình dạng kích thước, công dụng của tàu.

Chương III

CƠ SỞ ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT LỎNG

§3-1. NHỮNG KHÁI NIỆM CHUNG

Động lực học chất lỏng nghiên cứu những qui luật chung về chuyển động của chất lỏng. Như đã biết, khi chất lỏng thực (nhớt) chuyển động, xuất hiện sức masát trong, nên những kết luận về động lực học của chất lỏng lý tưởng và chất lỏng thực (nhớt) là khác nhau.

Động học chất lỏng nghiên cứu chuyển động của chất lỏng mà không xét những lực tác dụng. Vì vậy, phương trình động học là chung cho cả trường hợp chất lỏng lý tưởng và chất lỏng thực.

Ta coi môi trường chất lỏng chuyển động là một môi trường liên tục bao gồm vô số phân tử chất lỏng vô cùng nhỏ chuyển động, mỗi phân tử nhỏ đó được đặc trưng bởi những đại lượng cơ bản của sự chuyển động gọi là những yếu tố của chuyển động đó là:

a) Áp suất thủy động học p : Trong chuyển động của chất lỏng lý tưởng, áp suất thủy động hướng vào mặt chịu tác dụng và hướng theo pháp tuyến của mặt đó, vì thành phần tiếp tuyến không có. Do đó, áp suất thủy động của chất lỏng lý tưởng có những tính chất như áp suất thủy tĩnh. Trong chuyển động của chất lỏng thực, áp suất thủy động hướng vào mặt chịu tác dụng, nhưng không hướng theo pháp tuyến, vì nó là tổng hợp của thành phần ứng suất pháp tuyến p_n và thành phần ứng suất tiếp tuyến τ do tính nhớt gây ra.

b) Vận tốc u của phân tử chất lỏng ta gọi là lưu tốc điểm (coi phân tử chất lỏng chiếm vị trí vô cùng nhỏ như một điểm).

c) Gia tốc a của phân tử chất lỏng:

Những yếu tố của chuyển động có thể biến đổi liên tục theo vị trí phân tử và theo thời gian, vì vậy chúng là hàm số liên tục của tọa độ không gian x, y, z và thời gian t :

$$p = p(x, y, z, t); u = u(x, y, z, t); a = a(x, y, z, t).$$

§3-2. CHUYỂN ĐỘNG KHÔNG ỔN ĐỊNH VÀ CHUYỂN ĐỘNG ỔN ĐỊNH

Trong khi nghiên cứu sự chuyển động của chất lỏng chúng ta sẽ dần dần đưa ra nhiều cách phân loại nhằm đi sâu vào từng mặt của chuyển động. Ở đây chúng ta phân loại chuyển động ra chuyển động không ổn định và chuyển động ổn định.

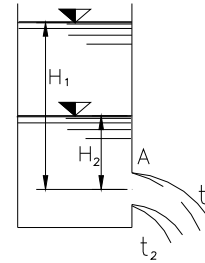
Ta gọi chuyển động không ổn định là chuyển động mà các yếu tố chuyển động phụ thuộc thời gian tức là:

$$u = u(x, y, z, t); p = p(x, y, z, t) \text{ v.v...}$$

$$\text{hoặc: } \frac{\partial u}{\partial t} \neq 0; \frac{\partial p}{\partial t} \neq 0 \text{ v.v...}$$

Thí dụ khi mực nước ở trong bể chứa thay đổi thì các yếu tố chuyển động ở một điểm bất kỳ trong môi trường chảy đều thay đổi theo thời gian.

Thí dụ nếu mực nước H giảm dần, lưu tốc ở điểm A trên luồng nước sẽ giảm dần (hình 3-1).



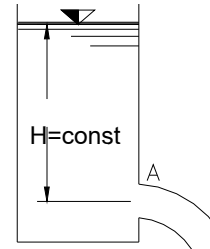
Hình 3-1

Ta gọi chuyển động ổn định là chuyển động mà các yếu tố chuyển động không biến đổi theo thời gian, tức là:

$$u = u(x, y, z); p = p(x, y, z) \text{ v.v...}$$

$$\text{hoặc: } \frac{\partial u}{\partial t} = 0; \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \text{ v.v...}$$

Thí dụ khi mực nước chảy trong bể chứa không đổi (hình 3-2) thì các yếu tố chuyển động ở một điểm bất kỳ trong môi trường chảy đều không đổi theo thời gian, thí dụ lưu tốc ở điểm A trên luồng nước luôn giữ không đổi. Chủ yếu chúng ta nghiên cứu chuyển động ổn định của chất lỏng.



Hình 3-2

§3-3. QUỈ ĐẠO - ĐƯỜNG DÒNG

Quỉ đạo là đường đi của một phần tử chất lỏng trong không gian. Khái niệm quỉ đạo đối với chúng ta khá quen thuộc, thường gặp trong vật lý, cơ học v.v...

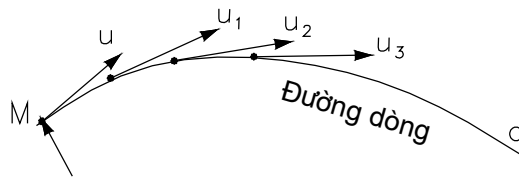
Đường dòng là đường cong tại một thời điểm cho trước, đi qua các phần tử chất lỏng có vectơ lưu tốc là những tiếp tuyến của đường ấy. Có thể vẽ đường dòng trong môi trường chất lỏng như sau:

Tại thời điểm t phần tử chất lỏng M có tốc độ \vec{u} biểu thị bằng vectơ \vec{u} , cũng ở thời điểm đó, phần tử chất lỏng M_1 ở sát cạnh phần tử M và nằm trên vectơ \vec{u} , có tốc độ u_1 , cũng ở thời điểm đó phần tử chất lỏng M_2 ở sát cạnh phần tử M_1 và nằm trên vectơ \vec{u}_1 và có tốc độ u_2 ; cứ tiếp tục làm như trên, ta có được những điểm $M_3, M_4...$ với những vectơ lưu tốc $\vec{u}_3, \vec{u}_4...$ Đường cong C đi qua các điểm $M_1, M_2, M_3, M_4...$ lấy những tốc độ $u_1, u_2, u_3, u_4...$ làm những tiếp tuyến chính là một đường dòng ở thời điểm t (hình 3-3).

Do vận tốc có thể thay đổi đối với thời gian, nên khái niệm đường dòng có liên quan chặt chẽ đến thời gian, ứng với những thời điểm khác nhau ta có những đường dòng khác nhau. Chú ý đừng lẫn khái niệm đường dòng và khái niệm quỹ đạo.

Do định nghĩa về đường dòng ta thấy hai đường dòng không thể giao nhau hoặc tiếp xúc nhau.

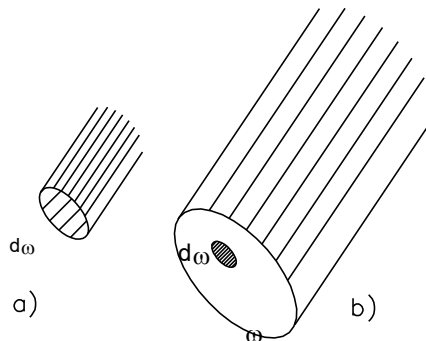
Trong chuyển động ổn định, vì các yếu tố chuyển động không thay đổi theo thời gian nên đường dòng đồng thời lại là quỹ đạo của những phần tử chất lỏng trên đường dòng ấy.



Hình 3-3

§3-4. DÒNG NGUYÊN TỐ, DÒNG CHẢY

Trong không gian chứa đầy chất lỏng chuyển động, ta lấy một đường cong kín giới hạn một diện tích vô cùng nhỏ $d\omega$, tất cả các đường dòng đi qua các điểm trên đường cong kín đó tạo thành một mặt có dạng mặt ống (hình 3-4a) gọi là ống dòng. Khối lượng chất lỏng chuyển động ở trong không gian giới hạn bởi ống dòng gọi là dòng nguyên tố. Có thể hình dung dòng nguyên tố là tập hợp những đường dòng đi qua tất cả những điểm của diện tích $d\omega$ nói trên.



Hình 3-4

Do tính chất không giao nhau của những đường dòng nên chất lỏng không thể xuyên qua ống dòng mà đi ra hoặc đi vào dòng nguyên tố.

Trong không gian chứa đầy chất lỏng chuyển động, ta lấy một đường cong kín giới hạn bởi một diện tích hữu hạn ω bao gồm vô số diện tích $d\omega$ vô cùng nhỏ và bằng cách nói trên, tạo nên vô số dòng nguyên tố; tập hợp những dòng nguyên tố đó gọi là dòng chảy (hình 3-4b). Môi trường chất lỏng chuyển động có thể coi là môi trường liên tục bao gồm vô số dòng nguyên tố, tức là môi trường đó có thể coi là một dòng chảy. Sau này trong nhiều chương, ta sẽ nghiên cứu sự chuyển động của chất lỏng dưới dạng dòng chảy (mẫu nghiên cứu) nên cần phải xác định những yếu tố mà ta gọi là yếu tố thủy lực của dòng chảy.

Nghiên cứu tính chất động học và động lực học của chất lỏng chuyển động ta có thể dùng hai mẫu chuyển động như sau:

A- Môi trường chất lỏng chuyển động coi như một tập hợp vô số dòng nguyên tố; nghiên cứu theo mẫu này, ta dễ dàng đi đến công thức tính toán cho dòng chảy có kích thước hữu hạn. Đó là bài toán một thứ nguyên (còn gọi là bài toán một chiều) và cũng là phương pháp thường dùng để suy ra những công thức tính toán.

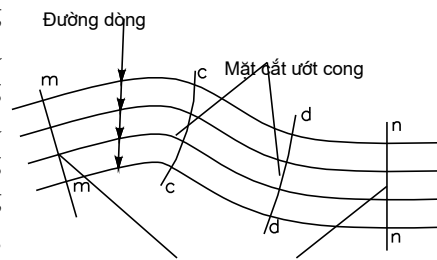
B- Môi trường chất lỏng chuyển động coi như là tập hợp vô số phần tử chất lỏng. Nghiên cứu theo mẫu này, ta thường đi đến những phương trình vi phân, nhưng khó tích phân để đi đến những công thức tính toán cho dòng chảy thực tế, có kích thước cụ thể. Đó là bài toán ba chiều. Phương pháp này có ý nghĩa rất lớn về mặt lý thuyết cũng như về phương pháp nghiên cứu.

Ta sẽ trình bày cả hai phương pháp nghiên cứu, theo hai mẫu trên.

A - MÔI TRƯỜNG CHUYỂN ĐỘNG COI NHƯ MỘT TẬP HỢP CỦA VÔ SỐ DÒNG NGUYÊN TỐ

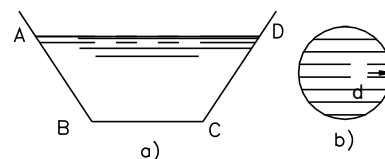
§3-5. NHỮNG YẾU TỐ THỦY LỰC CỦA DÒNG CHẢY

a) *Mặt cắt utor hoặc mặt utor*: Là mặt cắt thẳng góc với tất cả các đường dòng. Mặt cắt utor có thể là mặt phẳng (thí dụ m-m, n-n) (hình 3-5) khi các đường dòng là những đường thẳng song song, và có thể là mặt cong (thí dụ c-c, d-d) khi các đường dòng không song song. Diện tích mặt cắt utor của dòng chảy thường ký hiệu là ω , khi diện tích mặt cắt utor vô cùng nhỏ $d\omega$, thì ta có dòng nguyên tố.



Hình 3-5

b) *Chu vi utor*: Trong thực tế, chất lỏng thường chuyển động trong những biên giới rắn. Khi đó, chu vi mặt cắt utor có bộ phận là thành rắn, có bộ phận không phải là thành rắn hoặc có thể toàn bộ là thành rắn.



Hình 3-6

Chu vi utor là bề dài của phần tiếp xúc giữa chất lỏng và thành rắn trên mặt cắt utor, chu vi utor ký hiệu là χ (đọc là "khi").

Theo hình 3-6a: $\chi = AB + BC + CD$.

Theo hình 3-6b: $\chi = \pi d$.

c) *Bán kính thủy lực*: Là tỷ số giữa diện tích mặt cắt ướt ω và chu vi ướt χ , ký hiệu là R,

$$R = \frac{\omega}{\chi} \quad (3-1)$$

d) *Lưu lượng*: Là thể tích chất lỏng đi qua một mặt cắt ướt nào đó trong một đơn vị thời gian, ký hiệu là Q. Đơn vị lưu lượng thường là m³/s, l/s.

Giả thiết có một diện tích phẳng $d\omega$, tốc độ \vec{u} của chất lỏng đi qua diện tích lập với pháp tuyến của diện tích một góc α . Thể tích chất lỏng dW đi qua trong thời gian dt rõ ràng bằng thể tích hình trụ đáy $d\omega$, dài udt tức bằng tích số đáy $d\omega$ với chiều cao $udt \cos \alpha$ (hình 3-7):

$$dW = dQ \cdot dt = udt \cdot \cos \alpha \cdot d\omega.$$

Gọi u_n là hình chiếu của u lên pháp tuyến, ta có $u_n = u \cos \alpha$, vậy:

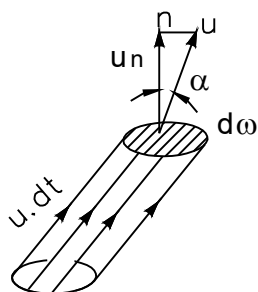
$$dQ = u_n d\omega.$$

Nếu diện tích phẳng $d\omega$ lại là mặt cắt ướt của một dòng nguyên tố thì rõ ràng lưu tốc điểm trên mặt cắt ướt phải thẳng góc với mặt đó (theo định nghĩa của mặt cắt ướt). Vậy lưu lượng nguyên tố dQ của dòng nguyên tố bằng:

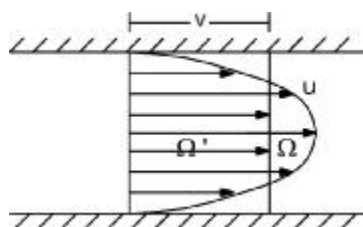
$$dQ = u d\omega. \quad (3-2)$$

Lưu lượng của toàn dòng chảy là tổng số các lưu lượng nguyên tố trên mặt cắt ướt của toàn dòng:

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_{\omega} u d\omega. \quad (3-3)$$



Hình 3-7



Hình 3-8

e) *Lưu tốc trung bình* của dòng chảy tại một mặt cắt là tỷ số lưu lượng Q đối với diện tích ω của mặt cắt ướt đó, ký hiệu bằng v , đơn vị thường đo bằng m/s, cm/s.

$$v = \frac{Q}{\omega} \quad (3-4)$$

Theo định nghĩa này ta có thể thay thế dòng chảy thực tế có sự phân bố các vectơ lưu tốc điểm u không đều trên mặt cắt ướt bằng dòng chảy tưởng tượng có các vectơ lưu tốc song song và bằng nhau trên mặt cắt ướt và bằng v sao cho lưu lượng đi qua hai dòng chảy

đó đều bằng nhau. Căn cứ vào điều giải thích này ta thấy rõ ràng việc thay thế đó chỉ làm được khi mặt cắt ướt là mặt phẳng, cho nên khái niệm lưu tốc trung bình trên mặt cắt ướt v liên quan chặt chẽ đến điều kiện mặt cắt phải là mặt phẳng hoặc nói cách khác, điều kiện các đường dòng phải là song song. Trong trường hợp dòng chảy phẳng sự thay thế nói trên có nghĩa là có thể thay thế đường cong phân bố lưu tốc điểm u bằng đường thẳng phân bố lưu tốc trung bình v sao cho diện tích đồ phân bố lưu tốc thực $\Omega = \int_{\omega} u d\omega$ bằng diện tích

hình chữ nhật $\Omega' = v\omega$ (hình 3-8).

Từ (3-3) và (3-4) ta viết được:

$$v = \frac{\int u d\omega}{\omega} \quad (3-5)$$

Như vậy, lưu lượng bằng thể tích hình trụ có đáy là mặt cắt ướt, có chiều cao bằng lưu tốc trung bình mặt cắt ướt v (hình 3-8).

Trong khi nghiên cứu nhiều vấn đề thủy lực, rất hay dùng lưu tốc trung bình mặt cắt ướt v, vì thế khái niệm này rất quan trọng.

Các yếu tố thủy lực trình bày ở trên đều nói cho một mặt cắt; chúng thay đổi từ mặt cắt này sang mặt cắt khác, tức là thay đổi theo chiều dòng chảy và là hàm số của chiều chuyển động s. Do đó, bài toán nghiên cứu theo mẫu dòng nguyên tố trở thành bài toán một chiều.

§3-6. PHƯƠNG TRÌNH LIÊN TỤC CỦA DÒNG CHẢY ỔN ĐỊNH

Chất lỏng chuyển động một cách liên tục, nghĩa là trong môi trường chất lỏng chuyển động không hình thành những vùng không gian trống không, không chứa chất lỏng. Tính chất liên tục đó có thể biểu thị bởi biểu thức toán học gọi là phương trình liên tục.

Trước tiên ta xác lập phương trình liên tục của dòng nguyên tố chảy ổn định. Trên một dòng nguyên tố ta lấy hai mặt cắt A và B có diện tích tương ứng là $d\omega_1$ và $d\omega_2$ (hình 3-9) với lưu tốc điểm tương ứng u_1, u_2 . Sau thời gian dt, thể tích chất lỏng ở trong dòng nguyên tố giới hạn bởi hai mặt A và B có vị trí mới là thể tích của dòng giới hạn bởi các mặt cắt A' và B'. Biết rằng trong chuyển động ổn định, hình dạng của dòng nguyên tố không thay đổi theo thời gian, đồng thời chất lỏng không xuyên qua ống dòng mà đi ra hoặc đi vào dòng nguyên tố. Ta có thể nói rằng: muốn trong dòng nguyên tố không có chỗ trống, đối với chất lỏng không nén được thì thể tích chất lỏng trong đoạn dòng nguyên tố giới hạn bởi hai mặt cắt ướt A và B phải là một trị số không đổi tức là: thể tích khối [A, B] = thể tích khối [A', B']. Vì thể tích khối [A', B] là chung nên ta có: thể tích khối [A, A'] = thể tích khối [B, B']. Thể tích khối [A, A'] = $d\omega_1 u_1 dt$; thể tích khối [B, B'] = $d\omega_2 u_2 dt$.

Vậy:
$$u_1 d\omega_1 dt = u_2 d\omega_2 dt$$

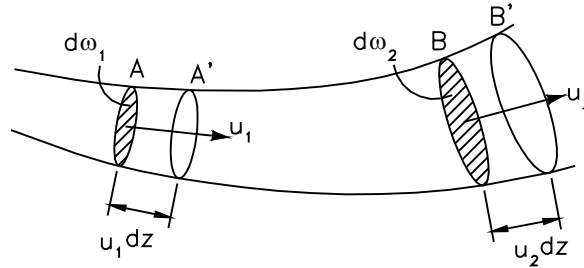
Do đó: $u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2$ (3-6)

Phương trình (3-6) là phương trình liên tục của dòng nguyên tố.

Theo (3-2) biểu thức (3-6) viết thành:

$$dQ_1 = dQ_2 \text{ hoặc } dQ = \text{const.} \quad (3-7)$$

Chú ý rằng trong phương trình (3-6) không có yếu tố lực nên nó đúng cho cả chất lỏng lý tưởng lẫn chất lỏng thực.



Hình 3-9

Từ phương trình liên tục (3-6) của dòng nguyên tố ổn định, ta suy ra *phương trình liên tục cho dòng chảy ổn định*. Ta tích phân phương trình (3-6) cho toàn mặt cắt ω :

$$\int_{\omega_1} u_1 d\omega_1 = \int_{\omega_2} u_2 d\omega_2 \quad (3-8)$$

Theo (3-5) có thể dựa vào lưu tốc trung bình mặt cắt v_1 và v_2 tương ứng với mặt cắt ω_1 và ω_2 : như vậy phương trình (3-8) viết thành:

$$v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2 \quad (3-9)$$

Đó là phương trình liên tục của dòng chảy ổn định của chất lỏng không nén được, nó đúng cho cả chất lỏng lý tưởng lẫn chất lỏng thực tế. Từ công thức (3-4) có thể biến đổi (3-8) thành: $Q_1 = Q_2$ hoặc:

$$Q = \text{const.}$$

Như vậy, trong dòng chảy ổn định, lưu lượng qua các mặt cắt đều bằng nhau. Chú ý rằng từ (3-9) có thể viết:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (3-10)$$

tức là trong dòng chảy ổn định, lưu tốc trung bình tỷ lệ nghịch với diện tích mặt cắt ướt.

Thí dụ 1: Nước chảy đây qua một ống tròn có đường kính $d_1 = 20$ cm, rồi sang một ống tròn khác $d_2 = 10$ cm, với lưu lượng 30 l/s.

Tìm tốc độ trung bình v của dòng chảy trong mỗi ống

Lưu lượng $Q = 30$ l/s = 0,03 m³/s.

Lưu tốc trong ống thứ nhất:

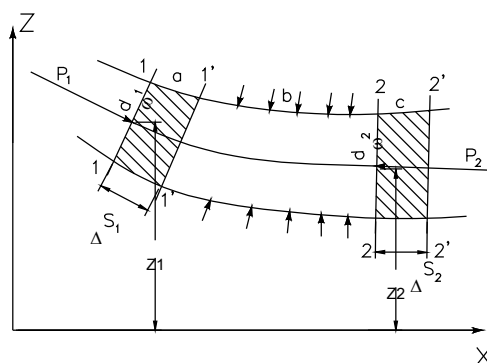
$$v_1 = \frac{Q}{\omega_1} = \frac{Q}{\pi d_1^2 / 4} = \frac{0,03}{3,14 \times 0,1^2 / 4} = 0,95 \text{ m/s}$$

Lưu tốc trong ống thứ hai:

$$v_2 = \frac{Q}{\omega_2} = \frac{Q}{\pi d_2^2 / 4} = \frac{0,03}{3,14 \times 0,1^2 / 4} = 3,8 \text{ m/s}$$

§3-7. PHƯƠNG TRÌNH BÉCNUIY CỦA DÒNG NGUYÊN TỐ CHẤT LỎNG LÝ TƯỜNG CHẢY ỔN ĐỊNH

Để suy ra phương trình Bécnuiy, ta áp dụng định luật động năng: "sự biến thiên động năng của một khối lượng nhất định khi nó di động trên một quãng đường, bằng công của các lực tác dụng lên khối lượng đó, cũng trên quãng đường đó".



Hình 3-10

Trong dòng chảy ổn định của chất lỏng lý tưởng, ta xét một đoạn dòng nguyên tố giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (hình 3-10) có diện tích tương ứng ω_1 và ω_2 . Ta lấy một mặt phẳng nằm ngang Ox làm mặt chuẩn; mặt cắt 1-1 có trọng tâm ở độ cao z_1 đối với mặt chuẩn, áp suất thủy động lên mặt cắt đó là p_1 , lưu tốc là u_1 ; mặt cắt 2-2 có những trị số tương ứng là z_2 , p_2 và u_2 . Vì những mặt cắt 1-1 và 2-2 vô cùng nhỏ nên có thể giả thiết là những trị số u_1 , p_1 và u_2 , p_2 không đổi đối với bất kỳ điểm nào trên những mặt cắt tương ứng.

Sau một thời gian vô cùng nhỏ Δt , các phần tử chất lỏng của mặt cắt 1-1 đã di động được một quãng đến vị trí 1'-1', độ dài Δs_1 của quãng đó bằng:

$$\Delta s_1 = u_1 \Delta t.$$

Cũng trong thời gian Δt , các phần tử chất lỏng của mặt cắt 2-2, di động một quãng đến vị trí mới 2'-2', độ dài Δs_2 của quãng đó bằng:

$$\Delta s_2 = u_2 \Delta t.$$

Lưu lượng qua mặt cắt ướ́t 1-1 và 2-2 bằng:

$$dQ = u_1 d\omega_1 = u_2 d\omega_2.$$

Không gian giữa 1-1 và 2'-2' có thể chia làm 3 khu: a, b, c (xem hình 3-10).

Trong thời gian Δt , sự biến thiên động năng $\Delta_{(dn)}$ của đoạn dòng nguyên tố đang xét bằng hiệu số động năng của khu c và khu a, vì động năng của khu b không đổi:

$$\Delta_{(dn)} = \rho dQ \Delta t \frac{u_2^2}{2} - \rho dQ \Delta t \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{g} dQ \Delta t \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right)$$

Ta tính đến công của các lực ngoài tác dụng lên khối đoạn dòng nguyên tố đang xét. Các lực ngoài gồm trọng lực và áp lực thủy động.

Công sinh ra bởi trọng lực $C_{tr,l}$ của đoạn dòng nguyên tố đang xét bằng công của trọng lượng khối chất lỏng khu a di chuyển một độ cao bằng $z_1 - z_2$ đi tới khu c, tức là:

$$C_{tr,l} = \gamma d\omega_1 \Delta s_1 (z_1 - z_2) = \gamma dQ \Delta t (z_1 - z_2).$$

Áp lực thủy động tác dụng lên đoạn nguyên tố đang xét gồm lực:

$$P_1 = p_1 d\omega_1, \text{ hướng thẳng góc vào mặt cắt ướ́t 1-1;}$$

$$P_2 = p_2 d\omega_2, \text{ hướng thẳng góc vào mặt cắt ướ́t 2-2;}$$

các động áp lực bên hướng thẳng góc với phương chuyển động nên không sinh ra công. Công sinh ra bởi áp lực P_1 và P_2 bằng:

$$\begin{aligned} C_{áp} &= P_1 \Delta s_1 - P_2 \Delta s_2 = p_1 d\omega_1 \Delta s_1 - p_2 d\omega_2 \Delta s_2, \\ &= p_1 d\omega_1 u_1 \Delta t - p_2 d\omega_2 u_2 \Delta t = dQ(p_1 - p_2) \Delta t. \end{aligned}$$

Theo định luật động năng ta viết được:

$$\Delta_{(dn)} = C_{tr,l} + C_{áp},$$

tức là:

$$\frac{\gamma}{g} dQ \Delta t \left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \right) = \gamma dQ \Delta t (z_1 - z_2) + dQ(p_1 - p_2) \Delta t$$

Chia hai vế cho $\gamma dQ \Delta t$, tức là viết phương trình động năng cho *một đơn vị trọng lượng chất lỏng*, ta có:

$$\frac{u_2^2}{2g} - \frac{u_1^2}{2g} = z_1 - z_2 + \frac{p_1}{\gamma} - \frac{p_2}{\gamma}$$

Từ đó:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (3-11)$$

Vì các mặt 1-1 và 2-2 của dòng nguyên tố là tùy ý chọn, nên phương trình (3-11) có thể viết dưới dạng:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const} \quad (3-12)$$

Phương trình (3-11), (3-12) gọi là *phương trình Bécnuiy của dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng chuyển động ổn định*. Phương trình này là một phương trình cơ bản của thủy lực, rất quan trọng.

§3-8. PHƯƠNG TRÌNH BÉCNUIY CỦA DÒNG NGUYÊN TỐ CHẤT LỎNG THỰC, CHẢY ỔN ĐỊNH

Ta đã biết chất lỏng thực có tính nhớt và khi nó chuyển động thì sinh ra sức ma sát trong làm cản trở chuyển động. Muốn khắc phục sức cản đó chất lỏng phải tiêu hao một phần cơ năng biến thành nhiệt năng mất đi không lấy lại được.

Vì vậy đối với chất lỏng thực: $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \neq \text{const}$, mà giảm dọc theo chiều chảy.

Nếu chất lỏng chuyển động từ mặt cắt 1-1 đến 2-2 thì:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}.$$

Ký hiệu h'_w là phần năng lượng bị tiêu hao khi một đơn vị trọng lượng chất lỏng chuyển động từ mặt cắt 1-1 đến 2-2 thì phương trình Bécnuiy của dòng nguyên tố chất lỏng thực viết cho mặt cắt 1-1 và 2-2 là:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h'_w. \quad (3-13)$$

Số hạng h'_w gọi là tổn thất năng lượng đơn vị của dòng nguyên tố, h'_w cũng còn gọi là tổn thất cột nước của dòng nguyên tố.

Nếu ta gọi $H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = \text{const}$, thì ở bất kỳ một mặt cắt 2-2 nào ở sau mặt cắt 1-1, ta đều có:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + h'_w = H = \text{const}. \quad (3-13')$$

Phương trình (3-13') cũng là một dạng của phương trình Bécnuiy của dòng nguyên tố chất lỏng thực.

§3-9. Ý NGHĨA NĂNG LƯỢNG VÀ THỦY LỰC CỦA PHƯƠNG TRÌNH BÉCNUIY VIẾT CHO DÒNG NGUYÊN TỐ CHẢY ỔN ĐỊNH

1. Ý nghĩa năng lượng của ba số hạng trong phương trình Bécnuiy

Trong phương trình Bécnuiy các số hạng đều viết đối với một đơn vị trọng lượng chất lỏng. Ta nhớ rằng ở thủy tĩnh học đã giải thích ý nghĩa năng lượng của hai số hạng z và $\frac{p}{\gamma}$;

z là vị năng đơn vị; $\frac{p}{\gamma}$ là áp năng đơn vị. Tổng số $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ đại biểu thế năng đơn vị. Còn số

hạng thứ ba $\frac{u^2}{2g}$ từ quá trình suy diễn phương trình Bécnuiy bằng định luật động năng, ta

thấy rằng: $\frac{u^2}{2g}$ chính là động năng của một đơn vị trọng lượng chất lỏng gọi tắt là *động năng đơn vị*.

Tổng số của ba số hạng: $\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right)$ trong phương trình Bécnuiy biểu thị *tổng cơ năng* của một đơn vị trọng lượng, tức là tổng số thế năng đơn vị và động năng đơn vị.

Tổng cơ năng đối với một mặt chuẩn chọn trước của một đơn vị trọng lượng chất lỏng của dòng nguyên tố gọi là *cơ năng đơn vị* của dòng nguyên tố.

Do đó phương trình Bécnuiy của dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng nói rằng: trên tất cả các mặt cắt ướt của dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng, cơ năng đơn vị của chất lỏng là một hằng số. Còn đối với dòng nguyên tố chất lỏng thực thì phương trình Bécnuiy (3-13) nói rằng: cơ năng đơn vị của dòng nguyên tố giảm đi dọc theo phương chảy.

Như vậy ý nghĩa của phương trình Bécnuiy về phương diện vật lý chính là một cách biểu đạt định luật bảo toàn năng lượng trong thiên nhiên do Lômônôxốp đề ra.

2. Ý nghĩa thủy lực của ba số hạng trong phương trình Bécnuiy

Trong phương trình Bécnuiy, số hạng thứ nhất z đại biểu độ cao của trọng tâm mặt cắt ướt nguyên tố đối với một mặt chuẩn, có thứ nguyên độ dài. Số hạng này còn gọi là độ cao hình học hoặc *cột nước vị trí*.

Số hạng thứ hai $\frac{p}{\gamma}$, như ta đã biết ở thủy tĩnh học, cũng có thứ nguyên độ dài; nếu ta có thể cùng bớt đi lượng $\frac{p_a}{\gamma}$ ở hai vế của phương trình Bécnuiy thì phương trình vẫn đúng; như vậy, trong phương trình Bécnuiy ta đã có thể dùng độ cao áp suất tuyệt đối hoặc độ cao áp suất dư. Vậy số hạng thứ hai $\frac{p}{\gamma}$ đại biểu cho độ cao áp suất của mặt cắt ướt nguyên tố, thường gọi là *cột nước áp suất*.

Số hạng thứ ba $\frac{u^2}{2g}$ của phương trình cũng có thứ nguyên là độ dài L, vì thứ nguyên của lưu tốc là LT^{-1} , của gia tốc trọng lực là LT^{-2} , nên thứ nguyên của số hạng thứ ba là:

$$\frac{(LT^{-1})^2}{LT^{-2}} = L.$$

Nó đại biểu cho độ cao mà ta đã thấy trong vật lý: đó là độ cao đạt được khi ta ném một vật theo đường thẳng đứng từ dưới lên trên với tốc độ ban đầu là u, không có trở lực gì của ngoại giới đối với sự chuyển động của vật $\left(h = \frac{u^2}{2g} \right)$, số hạng $\frac{u^2}{2g}$ gọi là *cột nước lưu tốc*.

Vậy phương trình Bécnuiry viết cho dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng (3-11) có thể biểu đạt như sau: đối với mỗi đơn vị trọng lượng chất lỏng trên một dòng nguyên tố đã biết, tổng số ba cột nước: cột nước vị trí, cột nước áp suất và cột nước lưu tốc là hằng số.

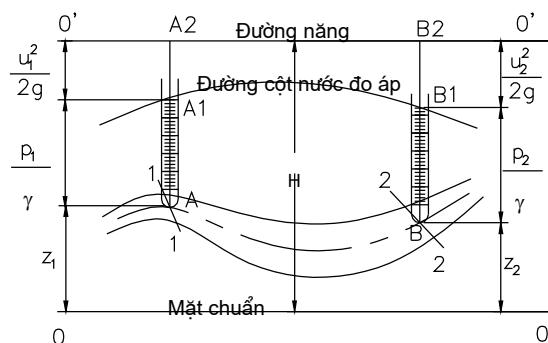
Vì các số hạng của phương trình Bécnuiry đều có thứ nguyên là độ cao, nên có thể dùng hình vẽ để phản ảnh sự biến thiên của các cột nước dọc theo dòng chảy, vẽ theo tỉ lệ xích định trước.

Giả sử có một dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng (hình 3-11) trên đó lấy hai mặt cắt 1-1 và 2-2, trọng tâm của hai mặt cắt là A và B ở độ cao z_1 và z_2 đối với mặt chuẩn 0-0. Tại điểm A của mặt cắt 1-1 ta vẽ đoạn AA_1 thẳng đứng, đại biểu cho cột nước áp suất $\frac{p_1}{\gamma}$; tại điểm A_1 , ta thêm vào một đoạn thẳng đứng A_1A_2 đại biểu cho cột nước lưu tốc $\frac{u_1^2}{2g}$.

Ta cũng làm tương tự như vậy cho điểm B của mặt cắt 2-2.

Vì tổng số $\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right)$ tại bất kỳ mặt cắt ướn nguyên tố nào trên cùng một dòng

nguyên tố là một hằng số, nên những đỉnh A_2, B_2 v.v... của tổng số những đoạn thẳng nhỏ đều cùng ở trên một đường thẳng nằm ngang cách mặt chuẩn một đoạn không đổi H. Đường thẳng đó gọi là *đường tổng cột nước*, đường này biểu diễn sự biến thiên của năng lượng đơn vị dọc dòng chảy nên còn gọi là *đường năng*. Độ cao H kể từ mặt chuẩn gọi là *cột nước động lực* của dòng chảy hoặc là *tổng cột nước*.



Hình 3-11

Đường đi qua các đỉnh đoạn $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ của các mặt cắt trên một dòng nguyên tố gọi là đường *cột nước đo áp* hoặc là *đường thế năng*. Chú ý rằng *cột nước áp suất* như đã định nghĩa, biểu thị bởi $\frac{p}{\gamma}$ thực chất là áp năng; còn *cột nước đo áp* biểu thị bởi $z + \frac{p}{\gamma}$, thực chất là thế năng. Hình dạng của đường cột nước đo áp quyết định bởi hình dạng của dòng nguyên tố. Tại nơi mà dòng mở rộng ra, lưu tốc giảm nên đường cột nước đo áp hướng lên trên; tại nơi mà dòng thu hẹp lại, lưu tốc tăng lên thì đường cột nước đo áp lại thấp xuống, do đó đường cột nước đo áp có thể là nằm ngang, lên cao hoặc xuống thấp, tức là có thể là đường thẳng, đường cong tùy theo hình dạng của dòng nguyên tố.

Ở những bài toán về dòng chảy, trong đó cột nước vị trí z không đổi dọc theo dòng nguyên tố, căn cứ vào phương trình Bécnuvi (3-11) hoặc (3-12) ta thấy:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g}$$

Từ đó suy được rằng: Ở nơi nào lưu tốc nhỏ thì áp suất thủy động lớn, ở nơi nào lưu tốc lớn thì áp suất thủy động nhỏ.

Đối với phương trình Bécnuvi viết cho dòng nguyên tố chất lỏng thực (3-13), vì cơ năng đơn vị của dòng nguyên tố giảm đi theo chiều chảy nên đường tổng cột nước không thể nằm ngang được, chỉ có thể thấp dần mà thôi; nó có thể là một đường thẳng hoặc cong vì trị số h'_w có thể tăng đều hoặc không đều dọc theo chiều chảy.

§3-10. ĐỘ DỐC THỦY LỰC VÀ ĐỘ DỐC ĐO ÁP CỦA DÒNG NGUYÊN TỐ

Ta gọi độ dốc thủy lực là tỷ số hạ thấp của đường tổng cột nước tức đường năng đối với độ dài của đoạn dòng nguyên tố trên đó thực hiện độ hạ thấp; thường dùng J' đại biểu độ dốc thủy lực của dòng nguyên tố.

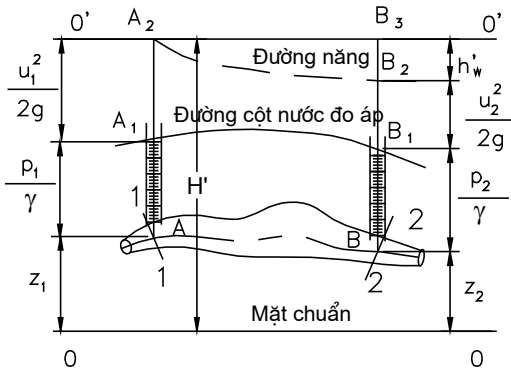
Trong trường hợp tổng quát, khi đường cột nước là đường cong (hình 3-12) thì các độ dốc ở các mặt cắt ướt không bằng nhau; khi đó thường dùng đạo hàm để biểu thị độ dốc thủy lực ở từng mặt cắt:

$$J' = -\frac{dH}{dl} = -\frac{d}{dl}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = \frac{dh'_w}{dl}, \quad (3-14)$$

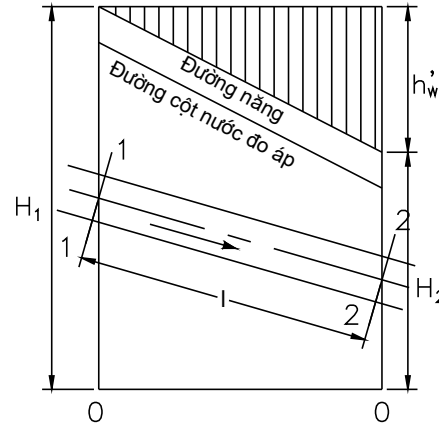
trong đó H là tổng cột nước, l là độ dài của đoạn dòng nguyên tố. Độ dốc thủy lực phải là trị số dương nên đằng trước đạo hàm phải đặt dấu âm, vì dọc theo chiều chảy số gia (dH) bao giờ cũng âm.

Khi đường tổng cột nước là một đường thẳng (hình 3-13) thì độ dốc thủy lực là:

$$J' = \frac{h'_w}{l} \quad (3-15)$$



Hình 3-12



Hình 3-13

Ta gọi độ dốc đường đo áp tức độ dốc đường thế năng là tỷ số độ thấp xuống hoặc lên cao của đường đo áp đối với độ dài của dòng nguyên tố trên đó thực hiện sự hạ thấp hoặc dâng cao đó.

Độ dốc đường đo áp của dòng nguyên tố biểu thị bằng J'_p là:

$$J'_p = \pm \frac{d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)}{dl} \quad (3-16)$$

Dấu \pm biểu thị độ gia của cột nước đo áp dọc theo dòng chảy, có thể là dương, có thể là âm. Trong trường hợp đặc biệt, khi diện tích của mặt cắt ướt $\omega = \text{const}$, tức là lưu tốc u và cột nước lưu tốc $\frac{u^2}{2g}$ không đổi dọc theo dòng chảy, độ dốc thủy lực và độ dốc đường cột nước đo áp bằng nhau $J' = J'_p$.

§3-11. PHƯƠNG TRÌNH BÉCNUYI CỦA TOÀN DÒNG (CÓ KÍCH THƯỚC HỮU HẠN) CHẤT LỎNG THỰC, CHẢY ỔN ĐỊNH

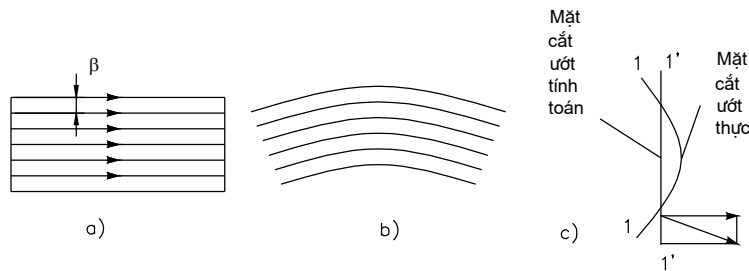
Như đã nói ở trên, môi trường liên tục chất lỏng chuyển động có kích thước hữu hạn có thể coi là tổng hợp vô số dòng nguyên tố. Để giải quyết các vấn đề thực tế, cần phải mở rộng phương trình Bécnuy của dòng nguyên tố chất lỏng thực chảy ổn định ra cho toàn dòng có kích thước hữu hạn.

Trên cùng một mặt cắt ω của dòng chảy, lưu tốc và áp suất thủy động p thường phân bố khác nhau ở các dòng nguyên tố khác nhau, quy luật phân bố thường cũng không biết;

vì vậy, sự suy rộng tìm ra phương trình Bécnuvi cho toàn dòng chảy cũng chỉ tiến hành được trong những điều kiện nhất định của dòng chảy. Điều kiện đó là *dòng chảy phải đổi dần*, chứ không đột ngột. Sau đây, chúng ta nghiên cứu trước hết về dòng chảy đổi dần.

Dòng chảy đổi dần là dòng chảy ổn định, có các đường dòng gần là đường thẳng song song, nghĩa là:

- 1- góc β giữa các đường dòng rất nhỏ
- 2- bán kính cong r của đường dòng khá lớn (hình 3-14)

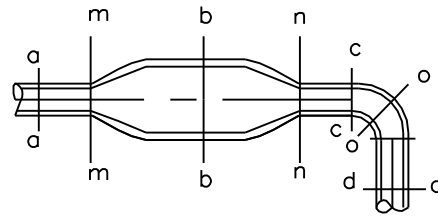


Hình 3-14

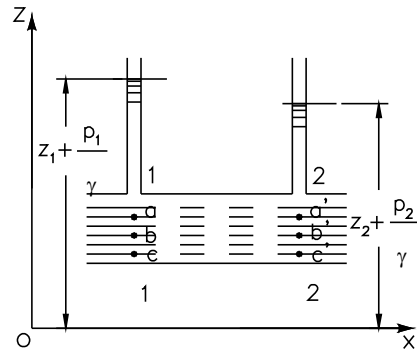
Dòng chảy như vậy có đầy đủ điều kiện cho phép ta không tính đến lực quán tính (sinh ra bởi độ cong của đường dòng) tương đối nhỏ. Mặt cắt ướt của dòng chảy đổi dần được coi như *mặt phẳng*, những đường dòng được coi như vuông góc với mặt cắt ướt phẳng; khi đó những thành phần lưu tốc và gia tốc nằm ngang trên mặt cắt ướt được coi như có thể bỏ đi (trên hình 3-14c, $u_x \approx u$, $u_y \approx 0$). Cùng một dòng chảy có thể có những mặt cắt ướt, ở đó sự chuyển động là đổi dần đồng thời có những mặt cắt ướt, ở đó sự chuyển động là đổi đột ngột (hình 3-15). Tại những mặt cắt ướt ở đó dòng chảy là đổi dần, tức là ở đó, lực quán tính không đáng kể mà chỉ có tác dụng của trọng lực là lực khối lượng độc nhất, thì áp suất thủy động không có thành phần tiếp tuyến trên những mặt cắt ướt đó (vì mặt cắt ướt được coi là phẳng và thẳng góc với đường dòng), sự phân bố áp suất thủy động hoàn toàn giống như sự phân bố áp suất thủy tĩnh. Như vậy trên những mặt cắt ướt đó, theo công thức cơ bản của thủy tĩnh (2-19), ta có:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const},$$

trong đó z , p ứng với từng vị trí trên mặt cắt ướt (hình 3-16).



Hình 3-15



Hình 3-16

Trên hình 3-16, những mặt cắt 1-1 và 2-2 là những mặt tại đó dòng chảy đổi dần; đối với những điểm trên cùng mặt cắt ướt 1-1, cột nước đo áp tức thế năng đều bằng nhau:

$$z_a + \frac{p_a}{\gamma} = z_b + \frac{p_b}{\gamma} = z_c + \frac{p_c}{\gamma} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} .$$

Đối với những điểm trên mặt cắt ướt 2-2, cột nước đo áp cũng bằng nhau:

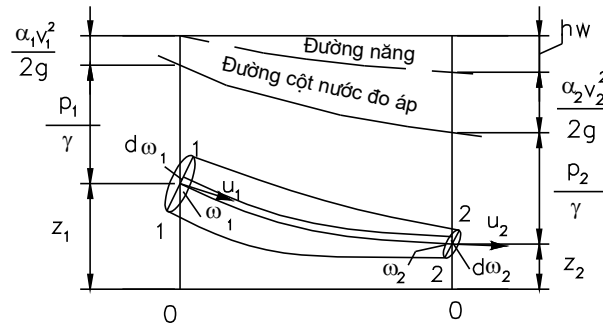
$$z'_a + \frac{p'_a}{\gamma} = z'_b + \frac{p'_b}{\gamma} = z'_c + \frac{p'_c}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} .$$

Nhưng chú ý rằng cột nước đo áp ở những mặt cắt khác nhau có trị số khác nhau:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \neq z_2 + \frac{p_2}{\gamma} .$$

Dựa vào hai khái niệm: khái niệm về dòng chảy đổi dần và khái niệm về lưu tốc trung bình mặt cắt ướt v (xem §3-5), ta có thể đi từ phương trình Bécnuiy của dòng nguyên tố suy diễn phương trình Bécnuiy của toàn dòng.

Giả thiết toàn dòng chảy thực là dòng chảy ổn định, gồm vô số dòng nguyên tố (hình 3-17). Trên toàn dòng chảy tại hai mặt cắt 1-1 và 2-2 có diện tích ω_1 và ω_2 , ta lấy một dòng nguyên tố tùy ý; theo (3-13), có thể viết phương trình Bécnuiy của dòng nguyên tố chất lỏng thực.



Hình 3-17

Ta gọi lưu lượng dòng nguyên tố là dQ , trọng lượng tương ứng là γdQ . Viết biểu thức năng lượng của toàn dòng, muốn vậy phải nhân các số hạng của phương trình Bécnuiy (3-13) cho γdQ , sau đó tích phân đối với toàn mặt cắt ω_1 và ω_2 :

$$\int_{\omega_1} \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) \gamma dQ + \int_{\omega_1} \frac{u_1^2}{2g} \gamma dQ = \int_{\omega_2} \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) \gamma dQ + \int_{\omega_2} \frac{u_2^2}{2g} \gamma dQ + \int_{\omega_2} h'_w \gamma dQ . \quad (3-17)$$

Như vậy, ta phải giải quyết ba dạng tích phân sau đây:

$$\int_{\omega} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) \gamma dQ ; \int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \gamma dQ ; \int_{\omega} h'_w \gamma dQ .$$

Tích phân thứ nhất $\int_{\omega} \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) \gamma dQ$ biểu thị tổng thế năng của chất lỏng tại mặt cắt ướt. Muốn tích phân được phải giả sử là có dòng chảy đổi dần tại mặt cắt ướt mà ta muốn tích phân, vì như trên đã nói, khi dòng chảy là đổi dần tại mặt cắt ướt đang xét, trị số $\left(z + \frac{P}{\gamma} \right)$ trên mặt cắt ướt đó là một hằng số, do đó ta có:

$$\int_{\omega} \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) \gamma dQ = \gamma \left(z + \frac{P}{\gamma} \right) \int_{\omega} dQ = \gamma Q \left(z + \frac{P}{\gamma} \right). \quad (3-18)$$

Tích phân thứ hai: $\int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \gamma dQ$ biểu thị tổng động năng của chất lỏng tại mặt cắt ướt.

Ở đây phải dùng đến khái niệm lưu tốc trung bình v để tính tích phân này.

Lưu tốc điểm u của mỗi phần tử chất lỏng trên mặt cắt ướt so với lưu tốc trung bình khác nhau một trị số $\pm \Delta u$.

Vậy: $u = v \pm \Delta u$.

Do: $dQ = u d\omega$,

nên:

$$\int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \gamma dQ = \gamma \int_{\omega} \frac{u^3}{2g} d\omega = \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} (v \pm \Delta u)^3 d\omega = \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} [v^3 \pm 3v^2 \Delta u + 3v(\Delta u)^2 \pm (\Delta u)^3] d\omega'.$$

Vì $\int_{\omega} (\Delta u)^3 d\omega$ là một đại lượng vô cùng nhỏ bậc cao bên cạnh những đại lượng vô cùng nhỏ bậc thấp hơn nên có thể bỏ đi không tính, còn số hạng $\int_{\omega} \pm \Delta u d\omega$ thì ta sẽ chứng minh nó bằng không.

$$\text{Căn cứ vào } Q = \int_{\omega} u d\omega = \int_{\omega} (v \pm \Delta u) d\omega = \int_{\omega} v d\omega + \int_{\omega} (\pm \Delta u) d\omega = Q + \int_{\omega} (\pm \Delta u) d\omega.$$

$$\text{Rõ ràng ta thấy: } \int_{\omega} (\pm \Delta u) d\omega = 0.$$

Như thế ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \gamma dQ &= \frac{\gamma}{2g} \int_{\omega} [v^3 + 3v(\Delta u)^2] d\omega = \frac{\gamma}{2g} v^3 \int_{\omega} d\omega + \frac{\gamma}{2g} 3v \int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega = \\ &= \frac{\gamma}{2g} \left[v^3 \omega + 3v \int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega \right] = \frac{\gamma}{2g} v^3 \omega \left| 1 + \frac{3 \int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega}{v^2 \omega} \right| \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\text{Đặt: } \alpha = 1 + \frac{3 \int (\Delta u)^2 d\omega}{v^2 \omega}, \quad (3-20)$$

$$\text{ta có: } \int_{\omega} \frac{u^2}{2g} \gamma dQ = \frac{\gamma}{2g} \alpha v^3 \omega = \gamma Q \frac{\alpha v^2}{2g}. \quad (3-21)$$

$$\text{hoặc từ (3-21): } \alpha = \frac{\int u^2 dQ}{v^2 Q} = \frac{\int u^3 d\omega}{v^3 \omega}. \quad (3-22)$$

Biểu thức (3-21) là tích phân động năng trong đó ta dùng lưu tốc trung bình v và đưa vào hệ số α . Theo (3-22), α là tỷ số của động năng thực của dòng chảy đối với động năng tính bằng lưu tốc trung bình. Như vậy, nguyên do có hệ số α là sự phân bố lưu tốc không đều trên mặt cắt ướt. Sự không đều đó càng lớn thì trị số α càng lớn. Từ (3-20), ta thấy được rằng hệ số α bao giờ cũng lớn hơn 1. Khi nước chảy trong ống hoặc kênh, máng, α thường bằng 1,05 đến 1,10. Hệ số α thường gọi là *hệ số sửa chữa động năng hoặc là hệ số cột nước lưu tốc*, (còn gọi là hệ số Cô-ri-ô-lít).

Tích phân thứ ba $\int_{\omega} h'_w \gamma dQ$ biểu thị tổng số tổn thất năng lượng của các dòng nguyên tố trong toàn dòng chảy từ mặt cắt 1-1 đến mặt cắt 2-2. Gọi h_w là tổn thất năng lượng trung bình của một đơn vị trọng lượng hoặc nói gọn là *tổn thất cột nước* trong đoạn dòng đó, ta có:

$$\int_{\omega} h'_w \gamma dQ = \gamma Q h_w. \quad (3-23)$$

Căn cứ vào kết quả của ba tích phân trên, ta viết được biểu thức (3-17) dưới dạng sau:

$$\gamma Q \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) + \gamma Q \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \gamma Q \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) + \gamma Q \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \gamma Q h_w \quad (3-24)$$

Viết phương trình (3-24) cho một đơn vị trọng lượng, tức là chia các số hạng cho γQ , ta được:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w. \quad (3-25)$$

Đó là *phương trình Bécnuiy của toàn dòng chảy ổn định của chất lỏng thực*, một trong những phương trình cơ bản và quan trọng nhất của thủy lực học. Muốn vận dụng đúng đắn phương trình này cần phải nắm vững những điểm sau đây:

1. Phương trình Bécnuiy của toàn dòng này không phải dùng cho dòng chảy bất kỳ mà chỉ dùng cho dòng chảy nào thỏa mãn 5 điều kiện sau đây: dòng chảy ổn định; lực khối lượng chỉ là trọng lực; chất lỏng không nén được; lưu lượng không có sự thêm bớt dọc theo dòng chảy tức là trị số không đổi; đồng thời tại mặt cắt mà ta chọn, dòng chảy phải là đổi dần, còn dòng chảy giữa hai mặt cắt đó không nhất thiết phải là chảy đổi dần.

2. Vì trị số $\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right)$ giống nhau cho mọi điểm trên cùng một mặt cắt ướt nên

khi viết phương trình Bécnuuy có thể tùy ý chọn điểm nào trên mặt cắt ướt cũng được. Như vậy không yêu cầu 2 điểm dùng để viết phương trình Bécnuuy ở hai mặt cắt phải cùng ở trên một dòng nguyên tố. Khi chọn điểm, tất nhiên nên chọn sao cho viết phương trình được đơn giản.

3. Áp suất p_1 và p_2 là động áp suất tại điểm chọn tại hai mặt cắt. Trị số đó thường có ý nghĩa áp suất tuyệt đối. Nhưng nếu bớt đi trị số p_a (áp suất không khí) ở hai vế của phương trình Bécnuuy, ta còn động áp suất dư p'_1 và p'_2 . Như vậy ta có thể mang cột nước suất áp dư $\frac{p'_1}{\gamma}$ và $\frac{p'_2}{\gamma}$ thay cho cột nước áp suất tuyệt đối $\frac{p_1}{\gamma}$ và $\frac{p_2}{\gamma}$.

4. Nói thực chặt chẽ thì $\alpha_1 \neq \alpha_2$, nhưng trong thực tế tính toán thường coi chúng bằng nhau $\alpha_1 \approx \alpha_2$.

Chú ý rằng trong phương trình Bécnuuy, sáu số hạng đầu thuộc về hai mặt cắt ướt đang xét, còn số hạng thứ bảy h_w thì thuộc về đoạn dòng giới hạn bởi hai mặt cắt ướt nói trên.

Độ dốc thủy lực của toàn dòng chảy tức là độ dốc đường năng biểu thị bằng J và độ dốc đo áp của toàn dòng chảy tức là độ dốc đường thế năng biểu thị bằng J_p có ý nghĩa hoàn toàn giống như ý nghĩa của độ dốc thủy lực và độ dốc đo áp của dòng nguyên tố chất lỏng thực (hình 3-17). Độ dốc thủy lực J viết như sau:

$$J = - \frac{d}{dl} \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g} \right) = - \frac{dH}{dl}. \quad (3-26)$$

Khi đường năng là đường thẳng thì:

$$J = \frac{h_w}{\ell} = \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right)}{\ell}. \quad (3-27)$$

Độ dốc đo áp J_p viết như sau:

$$J_p = \pm \frac{d}{dl} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right). \quad (3-28)$$

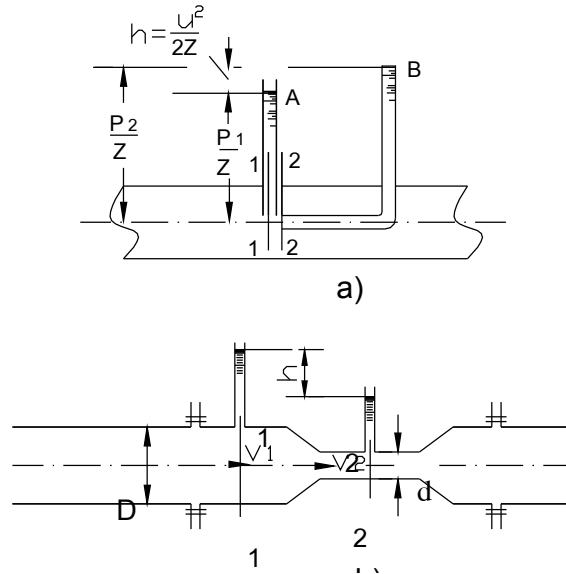
Khi đường cột nước đo áp là đường thẳng thì:

$$J_p = \pm \frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right)}{\ell}. \quad (3-29)$$

§3-12. ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH BÉCNUIY TRONG VIỆC ĐO LƯU TỐC VÀ LƯU LƯỢNG

Ứng dụng phương trình Bécnuiy ta có thể giải quyết rất nhiều vấn đề thực tế (sẽ nghiên cứu trong các chương sau). Ở đây chỉ trình bày nguyên tắc vận dụng phương trình Bécnuiy để làm các dụng cụ đo lưu tốc và lưu lượng.

1. *Ống Pitô* là một dụng cụ đo lưu tốc điểm. Ống Pitô (hình 3-18a) gồm hai ống nhỏ đường kính chừng vài milimét: một ống thẳng A (ống đo áp), một ống đầu uốn cong 90° B; hai miệng ống đặt sát nhau. Khi muốn đo lưu tốc ở điểm nào, ta đặt các miệng ống và điểm đó sao cho hướng dòng chảy song song với miệng ống A và thẳng góc với miệng ống B. Chất lỏng sẽ dâng lên trong hai ống. Sau khi mực nước tương đối ổn định, đọc độ chênh giữa hai mực nước đó, ta sẽ tính ra lưu tốc điểm theo công thức $u = \sqrt{2gh}$.



Hình 3-18

Thực vậy nếu viết phương trình Bécnuiy cho mặt cắt 1-1 (qua ống A) và mặt cắt 2-2 (qua miệng ống B) với mặt chuẩn đi qua điểm đo, ta có:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma},$$

$z_1 = z_2 = 0$, bỏ qua h_w vì 1-1 và 2-2 rất gần nhau. Do đó:

$$u_1 = \sqrt{2g \frac{p_2 - p_1}{\gamma}} = \sqrt{2gh}. \quad (3-20)$$

Để tính đến ảnh hưởng của độ nhớt chất lỏng và sự phá hoại cấu tạo dòng chảy khi đặt ống Pitô, cần thêm vào công thức trên hệ số sửa chữa φ xác định bằng thí nghiệm. Khi đó lưu tốc u được xác định theo:

$$u = \varphi \sqrt{2gh}, \quad (3-21)$$

trong đó: $\varphi = 1,00 \div 1,04$.

2. *Ống Venturi* là một dụng cụ đo lưu lượng gồm hai đoạn ống ngắn có đường kính khác nhau, ở mỗi đoạn có lắp ống đo áp (hình 3-18b).

Khi muốn đo lưu lượng dòng chảy trong ống, ta lắp ống Venturi vào giữa đường ống (hình 3-18b). Sau khi dòng chảy ổn định, đo độ chênh mực nước h giữa hai ống đo áp của ống Venturi, lưu lượng Q tính theo công thức sau:

$$Q = \mu \sqrt{h}, \quad (3-32)$$

$$\text{với: } \mu = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1}}, \quad (3-33)$$

trong đó D, d là đường kính tại hai mặt cắt lớn và nhỏ của ống Venturi, đều đã biết.

Muốn chứng minh công thức trên, ta viết phương trình Bécnuily cho mặt cắt 1-1 và 2-2, mặt chuẩn trùng với trục ống. Nếu bỏ qua h_w , ta có:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Với $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, sau khi biến đổi ta có:

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h. \quad (3-34)$$

Theo phương trình liên tục: $v_1 \omega_1 = v_2 \omega_2$, ta viết được:

$$v_2 = v_1 \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = v_1 \left(\frac{D}{d} \right)^2.$$

Thay vào phương trình (3-34), ta được:

$$h = \frac{v_1^2 \left[\left(\frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right]}{2g},$$

$$\text{hay là: } v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{D}{d} \right)^4 - 1}}.$$

Ta tính được Q theo:

$$Q = v_1 \omega_1 = \frac{\pi D^2}{4} \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{D}{d} \right)^4 - 1}} \sqrt{h} = \mu \sqrt{h},$$

trong đó μ rõ ràng có trị số như ở (3-33).

Thực ra, giữa đoạn 1-1 và 2-2 có tổn thất h_w , nên tính Q theo (3-32) sẽ cho trị số lớn hơn lưu lượng thực. Để điều chỉnh sai lệch đó, sau khi sản xuất người ta đo lưu lượng thực chảy qua ống (bằng các phương pháp chính xác khác rồi so với lưu lượng tính theo công thức (3-32), do đó xác định được hệ số sửa chữa $k = \frac{Q_d}{Q_t}$, Q_d - lưu lượng thực đo, Q_t - lưu lượng tính theo (3-32).

Công thức tính Q sẽ là:

$$Q = k\mu \sqrt{h}.$$

Chú ý là k luôn luôn nhỏ hơn 1.

§3-13. PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG CỦA TOÀN DÒNG CHẢY ỔN ĐỊNH

Định luật động lượng trong cơ học lý thuyết phát biểu như sau: “đạo hàm của động lượng của một vật thể đối với thời gian bằng hợp lực những ngoại lực tác dụng vào vật thể”:

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \vec{F} \quad (3-36)$$

hoặc:

$$d\vec{K} = d(m\vec{u}) = \vec{F} dt$$

trong đó:

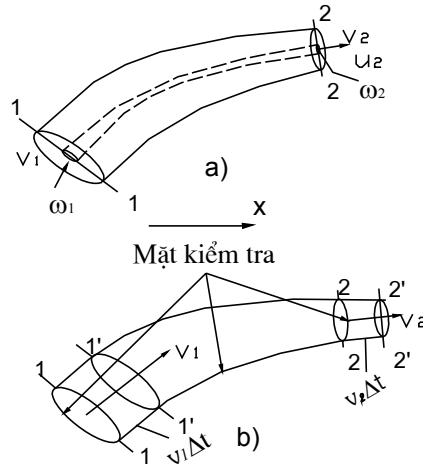
\vec{K} - véc tơ động lượng, $\vec{K} = m\vec{u}$;

m - khối lượng vật thể;

\vec{u} - vận tốc vật thể;

t - thời gian.

Trong phương trình động lượng chỉ có ngoại lực mà không có nội lực và chỉ có động lượng do ngoại lực sinh ra; nên khi vận dụng định luật động lượng cho chất lỏng chuyển động, ta chỉ cần tìm những số liệu về tình hình dòng chảy ở mặt biên giới mà không đòi hỏi phải biết tình trạng dòng chảy ở trong nội bộ dòng; đó là một điều rất thuận tiện. Đối với các trường hợp cần dùng đến phương trình động lượng, thông thường ta không cần xét toàn bộ dòng chảy như suốt cả bề dài dòng chảy trong ống, trong sông, trong kênh mà chỉ cần xét một đoạn nhất định của dòng chảy. Khi ấy, ta tách đoạn dòng cần nghiên cứu ra khỏi toàn dòng bằng một mặt kín giới hạn đoạn dòng đó được gọi là "mặt kiểm tra". Mặt kín này có thể tùy ý định, thường lấy gồm hai mặt cắt ướn và mặt bên của đoạn dòng chảy (hình 3-19b).



Hình 3-19

Công thức biểu thị định luật động lượng trong toàn dòng chất lỏng chảy ổn định được xác lập như sau.

Trong dòng chảy ổn định, lấy một đoạn của dòng giới hạn bởi các mặt bên và hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (hình 3-19a); trong đoạn dòng đó lấy một dòng nguyên tố, nghiên cứu sự biến đổi động lượng của nó trên trục x. Theo định luật động lượng ta viết được:

$$\Delta F_x \cdot dt = \rho [(u_x)_2 - (u_x)_1] dQdt \quad (3-37)$$

$$\text{hoặc: } \Delta F_x = \rho [(u_x)_2 - (u_x)_1] dQ, \quad (3-38)$$

trong đó: ΔF_x là hình chiếu lên phương x của tổng hợp những ngoại lực tác dụng lên đoạn dòng nguyên tố đang xét, $(u_x)_1$ và $(u_x)_2$ là hình chiếu lên phương x của các lưu tốc tại hai mặt cắt 1-1 và 2-2 của dòng nguyên tố. Phương trình (3-38) biểu thị rằng: trong một đơn vị thời gian, hình chiếu lên phương x của xung lượng của hợp lực các ngoại lực tác dụng vào đoạn dòng nguyên tố bằng hình chiếu lên phương x của độ biến thiên động lượng của dòng nguyên tố trong thời gian đó.

Tích phân phương trình trên cho cả mặt cắt ω và gọi F_x là hình chiếu lên trục x của ngoại lực tác động vào toàn đoạn dòng ta có:

$$F_x = \rho \int_{\omega} [(u_x)_2 - (u_x)_1] dQ \quad (3-39)$$

Trong phương trình này ta phải giải quyết loại tích phân giống như khi suy diễn phương trình Bécnuily cho toàn dòng (3-11). Có thể viết:

$$u = v \pm \Delta u.$$

Vậy:

$$\rho \int_{\omega} u dQ = \rho \int_{\omega} u^2 d\omega = \rho \int_{\omega} (v \pm \Delta u)^2 d\omega = \rho v^2 \int_{\omega} d\omega + 2\rho v \int_{\omega} \pm \Delta u d\omega + \rho \int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega.$$

Suy từ:

$$Q = \int_{\omega} u d\omega = \int_{\omega} (v \pm \Delta u) d\omega = v\omega \pm \int_{\omega} \Delta u d\omega = Q \pm \int_{\omega} \Delta u d\omega,$$

ta thấy:

$$\int_{\omega} \Delta u d\omega = 0$$

Như vậy, ta có:

$$\rho \int_{\omega} u dQ = \rho v^2 \omega \left[1 + \frac{\int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega}{v^2 \omega} \right] \quad (3-40)$$

$$\text{Đặt: } \alpha_0 = 1 + \frac{\int_{\omega} (\Delta u)^2 d\omega}{v^2 \omega} \quad (3-41)$$

ta có thể viết:

$$\rho \int_{\omega} u dQ = \rho \alpha_0 v^2 \omega = \rho \alpha_0 v Q$$

hoặc:

$$\alpha_0 = \frac{\rho \int_{\omega} u dQ}{\rho v Q} = \frac{\int_{\omega} u^2 d\omega}{v^2 \omega} \quad (3-42)$$

Hệ số α_0 như vậy là tỷ số giữa động lượng thực của đoạn dòng chảy và động lượng của đoạn dòng đó tính theo lưu tốc trung bình mặt cắt. Từ (3-41) ta thấy $\alpha_0 > 1$; thường dòng chảy trong ống, kênh, $\alpha_0 = 1,02 \div 1,05$. Hệ số α_0 gọi là *hệ số sửa chữa động lượng* hoặc *hệ số Businetscơ*.

Đưa α_0 vào phương trình (3-39) ta có:

$$F_x = \rho Q [(\alpha_0 v_x)_2 - (\alpha_0 v_x)_1] \quad (3-43)$$

$$\text{hoặc: } F_x = \rho Q [\alpha_{02} v_2 \cos(v_2, x) - \alpha_{01} v_1 \cos(v_1, x)]. \quad (3-44)$$

Viết dưới dạng véctơ ta có:

$$\vec{F} = \rho Q \left[\alpha_{02} \vec{v}_2 - \alpha_{01} \vec{v}_1 \right]. \quad (3-45)$$

Công thức đó phát biểu như sau: Trong dòng chảy ổn định, sự biến thiên của động lượng của đoạn dòng chảy trong đơn vị thời gian bằng hợp lực các ngoại lực (lực khối và lực mặt) tác dụng vào đoạn dòng trong đơn vị thời gian ấy.

Về phương trình động lượng viết cho toàn dòng chảy (3-43), (3-45), cần chú ý những điểm sau đây:

a) Dòng chảy phải là ổn định; tại những mặt cắt 1-1 và 2-2 giới hạn đoạn dòng đang xét, dòng chảy phải là đồng đều vì có như thế mặt cắt ướt mới coi được là gần phẳng, do đó những lưu tốc trung bình mặt cắt (thẳng góc với mặt cắt ướt) mới xác định hoàn toàn cả về trị số và phương hướng. Vì là dòng đồng đều tại những mặt cắt 1-1 và 2-2, nên áp suất phân bố trên những mặt cắt đó tuân theo quy luật phân bố áp suất thủy tĩnh.

b) Phương trình (3-45) có thể giải thích như sau: Trong khoảng thời gian Δt , khối chất lỏng giới hạn bởi những mặt cắt 1-1 và 2-2 đã di chuyển được một đoạn, ở vị trí mới khối chất lỏng đó giới hạn bởi những mặt cắt 1'-1' và 2'-2' (hình 3-19b). Vậy sự biến thiên của động lượng (hoặc dương, hoặc âm) trong thời gian Δt đó bằng hiệu số động lượng của đoạn dòng khi ở vị trí 1-2 và 1'-2'. Theo hình 3-19b rõ ràng là:

$$\vec{K}_{1-2} = \vec{K}_{1-1'} + \vec{K}_{1'-2}$$

$$\vec{K}_{1'-2'} = \vec{K}_{1'-2} + \vec{K}_{2-2'}$$

$$\Delta \vec{K} = \vec{K}_{1'-2'} - \vec{K}_{1-2} = \vec{K}_{2-2'} - \vec{K}_{1-1'} = \rho Q \alpha_{02} \vec{v}_2 \Delta t - \rho Q \alpha_{01} \vec{v}_1 \Delta t$$

Vì $\Delta \vec{K} = \vec{F} \Delta t$, nên suy ra:

$$\vec{F} = \rho Q \alpha_{02} \vec{v}_2 - \rho Q \alpha_{01} \vec{v}_1$$

Như vậy thấy rằng, có thể quan niệm định luật biến đổi động lượng như sau: Trong dòng ổn định, sự biến thiên động lượng của chất lỏng đi qua mặt kiểm tra trong một đơn vị thời gian bằng hợp lực của tất cả các ngoại lực (lực khối và lực mặt) tác dụng lên chất lỏng giới hạn ở bên trong mặt kiểm tra.

Chú ý rằng theo cách phát biểu này ta không nói đến sự biến thiên động lượng của chất lỏng trong đoạn dòng chảy giới hạn bởi mặt kiểm tra, mà nói đến sự biến thiên động lượng của chất lỏng đi qua mặt kiểm tra. Cách phát biểu đó không thay đổi gì thực chất của định luật động lượng. Trong nhiều trường hợp đơn giản ta áp dụng định luật động lượng theo cách phát biểu này.

Trong nhiều trường hợp thực tế, định luật động lượng không cần phải viết dưới dạng vectơ mà viết dưới dạng hình chiếu lên một trục tọa độ (3-44) là đủ giải quyết vấn đề, thường chiếu lên trục mà hướng dương hay đặt theo hướng xuôi dòng chảy.

Để đặt dấu cho đúng, có thể theo quy ước sau đây:

a) Ta coi động lượng của khối chất lỏng $\rho Q \alpha_0 v$ mang dấu + nếu chất lỏng đi ra khỏi mặt kiểm tra, mang dấu - nếu đi vào trong mặt kiểm tra.

b) Dấu của $\cos \alpha$ tùy theo trị số góc α lập nên bởi vectơ tốc độ \vec{v} và chiều dương của trục tọa độ, α có thể nhỏ hơn $\pi/2$ hoặc lớn hơn $\pi/2$.

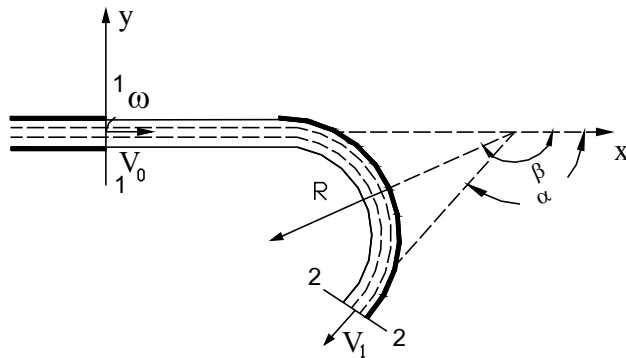
c) Dấu của số hạng biểu thị xung lực sẽ tùy theo phương của vectơ lực là dương hay âm đối với trục tọa độ.

Phương trình động lượng là một phương trình rất quan trọng dùng để giải quyết nhiều vấn đề thủy lực mà ta sẽ nghiên cứu ở những chương sau.

Cho đến nay chúng ta có ba phương trình quan trọng nhất để nghiên cứu sự chuyển động của chất lỏng, đó là phương trình liên tục, phương trình Bécnuily và phương trình động lượng; đó cũng là những công cụ cơ bản nhất để giải quyết các vấn đề tính toán thủy lực.

Thí dụ: Một luồng nước phun ra từ miệng ống hình trụ tròn diện tích $\omega = 0,0064 \text{ m}^2$, với vận tốc trung bình mặt cắt tại nơi luồng nước phun ra là $v_0 = 20 \text{ m/s}$ xô vào một mặt cong hình tròn cố định và chảy lượn theo mặt đó, vận tốc v_1 của luồng nước tại nơi ra của mặt cong lập với phương v_0 một góc $\alpha = 135^\circ$. Tính áp lực của luồng nước tác dụng vào mặt cong (hình 3-20).

Giải: Ta áp dụng phương trình động lượng cho đoạn luồng nước giới hạn bởi mặt cắt 1-1 ở miệng ống hình trụ tròn, mặt 2-2 ở nơi ra của mặt cong và mặt bên của luồng nước. Những ngoại lực tác dụng vào đoạn dòng đang xét là: áp lực P_1 tại mặt cắt 1-1; áp lực P_2 tại mặt cắt 2-2; phản lực R của mặt cong đối với luồng nước có trị số bằng áp lực P tác dụng vào mặt cong và đặt ngược chiều.



Hình 3-20

Viết phương trình động lượng cho đoạn dòng trên theo phương x là phương của vận tốc v_0 :

$$m_0 v_1 \cos \alpha - m_0 v_0 = P_1 + R \cos \beta + P_2 \cos \alpha$$

trong đó $m_0 = \frac{\gamma}{g} \omega v_0$ là khối lượng nước đi qua mặt cắt ướt trong một đơn vị thời gian.

Vì những áp suất tại mặt cắt 1-1 và 2-2 bằng áp suất không khí tức là áp suất dư ở đó bằng không, nên vế phải của phương trình trên chỉ còn số hạng biểu thị phản lực của mặt cong:

$$m_0 v_1 \cos \alpha - m_0 v_0 = R \cos \beta.$$

Vì diện tích ω của luồng nước không đổi, nên từ phương trình liên tục $\omega v_0 = \omega v_1$, ta rút ra $v_0 = v_1$, do đó:

$$m_0 v_0 (\cos \alpha - 1) = R \cos \beta.$$

Phương trình động lượng cho đoạn dòng theo phương y thẳng góc với phương x viết như sau:

$$m_0 v_1 \sin \alpha = m_0 v_0 \sin \alpha = R \sin \beta.$$

Vậy ta tính ra phản lực R theo:

$$R = \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + R^2 \sin^2 \beta} = m_0 v_0 \sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha}$$

Do đó:

$$R = 2 m_0 v_0 \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \frac{\gamma}{g} \omega v_0^2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

Thay các trị số, ta có:

$$R = 2 \times \frac{9.810}{9,81} \times 0,0064 \times 20^2 \times 0,924 \approx 4730\text{N} = 482 \text{ kG}$$

Áp lực P của luồng nước vào mặt cong có trị số bằng R và đặt ngược chiều.

§3-14. PHÂN LOẠI DÒNG CHẢY

Dòng chảy có thể phân loại theo nhiều cách. Sau đây là bảng phân loại dòng chảy cần thiết cho việc nghiên cứu tiếp theo.

Căn cứ vào các yếu tố chuyển động có biến đổi theo thời gian hay không như đã biết, ta chia thành *chuyển động ổn định* và *không ổn định*.

Sau đây chỉ phân loại dòng chảy ổn định.

1. Dòng chảy *không đều* và dòng chảy *đều*: Dòng chảy không đều là dòng chảy có các đường dòng không phải là những đường thẳng song song. Như vậy những dòng nguyên tố của dòng chảy không đều cũng không phải là thẳng song song. Chú ý rằng dọc theo dòng chảy không đều, mặt cắt ướt, lưu tốc điểm tương ứng (tức là lưu tốc điểm của các phần tử chất lỏng ở trên một đường dòng) đều thay đổi. Thí dụ: dòng chảy trong ống hình nón cụt, trong ống tròn tại nơi uốn cong, trong máng có bề rộng đáy thay đổi v.v...

Dòng chảy đều là dòng chảy có các đường dòng là những đường thẳng song song; như vậy *những dòng nguyên tố của dòng chảy đều là những đường thẳng song song*. Chú ý rằng dọc theo dòng chảy đều, hình dạng, diện tích mặt cắt, sự phân bố lưu tốc điểm tương ứng như nhau, không đổi dọc theo dòng chảy. Thí dụ dòng chảy đầy ống trong những ống thẳng v.v...

2. Dòng chảy *có áp*, *không áp*, *dòng tia*: Dòng chảy có áp là dòng chảy mà chu vi ướt của các mặt cắt ướt hoàn toàn là những thành rắn cố định. Đặc điểm của dòng chảy có áp là tại tất cả các điểm của mặt cắt ướt, áp suất thủy động không bằng áp suất không khí. Thí dụ dòng chảy đầy trong ống dẫn nước là dòng chảy có áp.

Dòng chảy không áp là dòng chảy mà chu vi ướt của các mặt cắt ướt có bộ phận là thành rắn cố định, có bộ phận là mặt tự do tiếp xúc với không khí. Chú ý rằng mặt tự do là một mặt đẳng áp vì áp suất trên mặt tự do đều bằng nhau. Dòng chảy trong sông, trong kênh là dòng chảy không áp; áp suất trên mặt tự do bằng áp suất không khí.

Nếu toàn bộ chu vi ướt của mặt cắt ướt không tiếp xúc với thành rắn mà đều tiếp xúc với không khí hoặc với chất lỏng thì dòng chảy gọi là dòng tia.

3. Dòng chảy *đối dân* và dòng chảy *đối đột ngột*:

Dòng chảy *đối dân*, như đã định nghĩa trong khi suy diễn phương trình Bécnuuy cho toàn dòng (3-11) là dòng chảy có các đường dòng gần là những đường thẳng song song. Ta nhớ lại rằng đặc điểm của mặt cắt có dòng chảy *đối dân* là trên mặt cắt lực quán tính coi như không có, do đó sự phân bố áp suất coi như theo quy luật thủy tĩnh.

Dòng chảy *đối đột ngột* là dòng chảy mà các đường dòng không thể coi được như những đường thẳng song song. Đặc điểm của các mặt cắt có dòng chảy *đối đột ngột* là trên các mặt cắt đó có tác dụng của lực quán tính đáng kể, do đó sự phân bố áp suất không tuân theo quy luật thủy tĩnh.

Một dòng chảy có thể đồng thời mang nhiều tính chất nói trong sự phân loại trên. Thí dụ: dòng chảy có thể là ổn định, không áp, *đối dân*.

Việc nghiên cứu vừa trình bày ở trên dựa trên mẫu dòng chảy bao gồm vô số dòng nguyên tố, giúp ta đạt được những công thức đặt mối liên hệ giữa các yếu tố thủy lực của những mặt cắt ướt, tiện cho việc tính toán thực tế, nhưng bị hạn chế trong việc nghiên cứu sâu mối liên hệ giữa các yếu tố thủy lực của các phân tử chất lỏng. Vì vậy, ta cần phải nghiên cứu môi trường chuyển động coi nó như một tập hợp của vô số phân tử chất lỏng.

B - MÔI TRƯỜNG CHUYỂN ĐỘNG COI NHƯ LÀ TẬP HỢP CỦA VÔ SỐ PHẦN TỬ CHẤT LỎNG

Ta sẽ nghiên cứu quy luật chuyển động của chất lỏng bằng cách nghiên cứu sự chuyển động của *từng phân tử chất lỏng*, và sẽ đạt được hệ thống những phương trình vi phân. Để có được môi trường chuyển động của toàn môi trường chất lỏng, cần phải tích phân hệ thống những phương trình vi phân đó ứng với những điều kiện biên giới và thời gian ban đầu, điều này chỉ có thể làm được trong những trường hợp không phức tạp. Phương pháp này có ý nghĩa rất lớn về mặt lý thuyết cũng như về phương pháp nghiên cứu.

§3-15. HAI PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU SỰ CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG

Ta có thể dùng hai phương pháp để nghiên cứu: Phương pháp Lagơrănggiơ và phương pháp Ôle.

1. Phương pháp Lagorănggiơ:

Theo phương pháp này người ta nghiên cứu sự chuyển động của từng phân tử chất lỏng, xác định quỹ đạo, lưu tốc, gia tốc, áp suất v.v... rồi tổng hợp sự chuyển động của tất cả các phân tử lại thì có được hình ảnh của toàn bộ môi trường chuyển động. Thực chất của phương pháp này là dùng cơ học chất điểm để nghiên cứu sự chuyển động của chất điểm trong môi trường liên tục.

Thí dụ ta theo dõi phân tử chất lỏng A, trong hệ quy chiếu là hệ tọa độ Đề các: Ở thời điểm t_0 nó ở vị trí a, b, c , đã biết, sang thời điểm t nó ở vị trí x, y, z . Những tọa độ ấy có thể biểu thị bằng những hàm số:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(a, b, c, t), \\ y &= f_2(a, b, c, t), \\ z &= f_3(a, b, c, t), \end{aligned} \right\} \quad (3-46)$$

Từ các quan hệ trên có thể xác định các thành phần lưu tốc u_x, u_y, u_z và gia tốc a_x, a_y, a_z của phân tử chất lỏng trên các trục tọa độ theo:

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad u_y = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad u_z = \frac{\partial z}{\partial t}; \quad (3-47)$$

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}; \quad (3-48)$$

đồng thời có thể vẽ được quỹ đạo của phân tử chất lỏng.

Tọa độ của các vị trí ban đầu a, b, c và thời gian t gọi là những *biến số Lagorănggiơ*.

Việc vận dụng phương pháp Lagorănggiơ phức tạp, vì vậy chỉ dùng trong một số trường hợp đặc biệt, thí dụ khi nghiên cứu sự truyền sóng.

2. Phương pháp Ole:

Theo phương pháp này người ta nghiên cứu những yếu tố thủy lực của các phân tử chất lỏng tại từng điểm cố định của không gian.

Thí dụ: Chọn một điểm cố định của không gian x, y, z ; ở thời điểm t' có phân tử A đi qua điểm ấy với lưu tốc u_A , áp suất p_A , khối lượng đơn vị ρ_A , sang thời điểm t'' có phân tử B đi qua điểm ấy với lưu tốc u_B , áp suất p_B , khối lượng đơn vị ρ_B . Như vậy, u, p, ρ đều phụ thuộc vào vị trí của điểm cố định và vào thời gian t :

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z, t), \\ p &= f_2(x, y, z, t), \\ a &= f_3(x, y, z, t), \end{aligned} \right\} \quad (3-49)$$

Tọa độ của điểm cố định x, y, z và thời gian t gọi là những *biến số Ole*. Trong trường hợp chuyển động ổn định, các yếu tố chuyển động chỉ là hàm số của tọa độ điểm chọn để xét:

$$\left. \begin{aligned} u &= f_1(x, y, z), \\ p &= f_2(x, y, z), \\ a &= f_3(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (3-50)$$

Cần chú ý rằng các yếu tố thủy lực trong phương pháp Ole là các yếu tố thủy lực của nhiều phần tử chất lỏng khác nhau cùng đi qua một điểm cố định trong không gian; còn trong phương pháp Lagorănggiơ, các yếu tố thủy lực là của cùng một phần tử di động trong không gian. Phương pháp Ole có nhiều thuận lợi hơn phương pháp Lagorănggiơ, vì vậy phương pháp Ole được áp dụng rộng rãi hơn.

Chúng ta áp dụng phương pháp Ole để nghiên cứu.

§3-16. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG DÒNG

Nghiên cứu sự chuyển động của phần tử chất lỏng theo phương pháp Ole ta thấy đặc trưng hình học của sự chuyển động không phải là quỹ đạo như ở phương pháp Lagorănggiơ mà là đường dòng.

Khái niệm về đường dòng đã định rõ ở §3-4, ở đây ta tìm phương trình vi phân của nó. Trên đường dòng ta lấy một vi phân dài ds . Hình chiếu ds lên các trục tọa độ là dx, dy, dz và hình chiếu của vectơ lưu tốc \vec{u} lên các trục là u_x, u_y, u_z . Vì lưu tốc tiếp xúc với đường dòng nên:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{u, x}) &= \frac{u_x}{u} = \frac{dx}{ds}, \\ \cos(\widehat{u, y}) &= \frac{u_y}{u} = \frac{dy}{ds}, \\ \cos(\widehat{u, z}) &= \frac{u_z}{u} = \frac{dz}{ds}, \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

từ đó ta rút ra:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (3-52)$$

Phương trình (3-52) là *phương trình vi phân của đường dòng* viết cho cả chuyển động không ổn định lẫn chuyển động ổn định.

Giả sử trên quỹ đạo của một phân tử chất lỏng, lấy một vi phân dài ds , có hình chiếu lên các trục tọa độ là dx , dy , dz (chú ý ở đây vi phân dài ds là vi phân trên quỹ đạo, khác với vi phân ds nói ở trên là vi phân trên đường dòng), ta có:

$$u_x = \frac{dx}{dt}; \quad u_y = \frac{dy}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}; \quad (3-53)$$

Do đó phương trình vi phân của quỹ đạo là:

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt. \quad (3-54)$$

Trong chuyển động không ổn định thì ở phương trình quỹ đạo (3-54), t là biến số. Nhưng trong chuyển động ổn định thì rõ ràng lưu tốc không có quan hệ gì với thời gian t , đường dòng và quỹ đạo trùng nhau và phương trình (3-52) vừa là phương trình đường dòng vừa là phương trình quỹ đạo.

Thí dụ: Viết phương trình đường dòng đi qua điểm A có tọa độ $x_A = 2$; $y_A = 4$, $z_A = 8$, biết rằng biểu thức của lưu tốc u xác định bởi các thành phần là:

$$u_x = x^2; \quad u_y = y^2; \quad u_z = z^2.$$

Giải: Phương trình vi phân của đường dòng trong chuyển động ổn định cho bởi công thức (3-52), tức là:

$$\left. \begin{aligned} u_x dy &= u_y dx, \\ u_y dz &= u_z dy. \end{aligned} \right\}$$

Trong điều kiện cụ thể của bài toán, phương trình đường dòng viết thành:

$$\left. \begin{aligned} x^2 dy &= y^2 dx, \\ y^2 dz &= z^2 dy. \end{aligned} \right\}$$

Sau khi phân tách biến số, rồi tích phân ta có:

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{dy}{y^2} + C_1,$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dz}{z^2} + C_2.$$

Kết quả tích phân cho ta:

$$-\frac{1}{x} = -\frac{1}{y} + C_1,$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{z} + C_2.$$

Phương trình đường dòng đi qua điểm A là:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} &= \frac{1}{4} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{z} &= \frac{1}{8} \end{aligned} \right\}$$

§3-17. ĐƯỜNG XOÁY, ỐNG XOÁY, PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG XOÁY

Phần tử chất lỏng khi chuyển động không những có thể đi động bằng cách tịnh tiến mà còn có thể đồng thời quay xung quanh một trục quay tức thời nào đó, thí dụ phần tử m xoay xung quanh trục 1-2 (hình 3-21a).

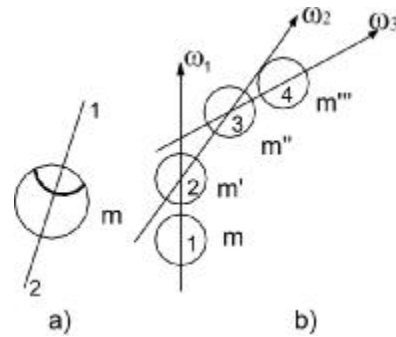
Giả sử một phần tử m có tâm ở điểm 1 đang quay xung quanh trục 1-2, trên trục đó đặt vectơ quay $\vec{\omega}_1$; cũng trên trục ấy, ta lấy một điểm 2 cách tâm của phần tử m một đoạn vô cùng ngắn, ngay lúc đó phần tử chất lỏng m' có điểm 2 là trung tâm cũng xoay xung quanh một trục 2-3

nào đó, trên trục này ta đặt vectơ quay $\vec{\omega}_2$ rồi ta lại lấy một điểm 3 cách tâm của phần tử m' một đoạn vô cùng ngắn, phần tử m'' có tâm là điểm 3 cũng quay xung quanh một trục 3-4 nào đó v.v... Cứ làm như vậy ta có được đường gãy 1-2-3-4-5 v.v... mang những vectơ quay $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3, \dots$. Nếu những đoạn vô cùng nhỏ 1-2, 2-3, 3-4, v.v... tiến tới không thì đường gãy nói trên tiến tới thành một đường cong, gọi là đường xoáy (hình 3-21b).

Đường xoáy là một đường cong đi qua các phần tử chất lỏng có vectơ vận tốc quay là tiếp tuyến của đường ấy. Cũng như đối với đường dòng, đường xoáy thay đổi theo thời gian; chỉ trong chuyển động ổn định, đường xoáy mới không phụ thuộc thời gian.

Tất cả những phần tử chất lỏng cùng quay xung quanh một đường xoáy lập nên một *chuỗi xoáy*. Trường hợp đơn giản nhất của chuỗi xoáy là chuỗi có đường xoáy cố định tức là trường hợp chuyển động ổn định của chất lỏng. Nếu qua các điểm trên đường chu vi của một vi phân diện tích $d\omega$, ta vẽ những đường xoáy thì mặt bên lập bởi tập hợp các đường xoáy gọi là *ống xoáy*.

Phần tử chất lỏng quay với tốc độ quay $\vec{\omega}$; vectơ $\vec{\omega}$ này có ba thành phần: $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, trên trục tọa độ quy chiếu. Trên đường xoáy ta lấy một đoạn dài ds có hình chiếu là dx, dy



Hình 3-21

→
 và dz ; vì ω tiếp xúc với đường xoáy nên có thể viết phương trình vi phân của đường xoáy như sau:

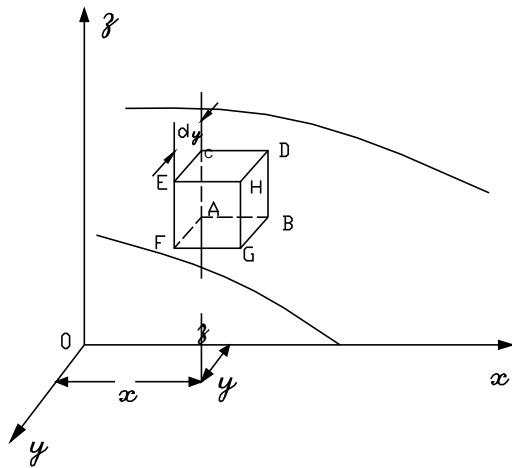
$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (3-55)$$

§3-18. PHÂN TÍCH CHUYỂN ĐỘNG CỦA MỘT PHẦN TỬ CHẤT LỎNG CHUYỂN ĐỘNG THỂ VÀ CHUYỂN ĐỘNG XOÁY

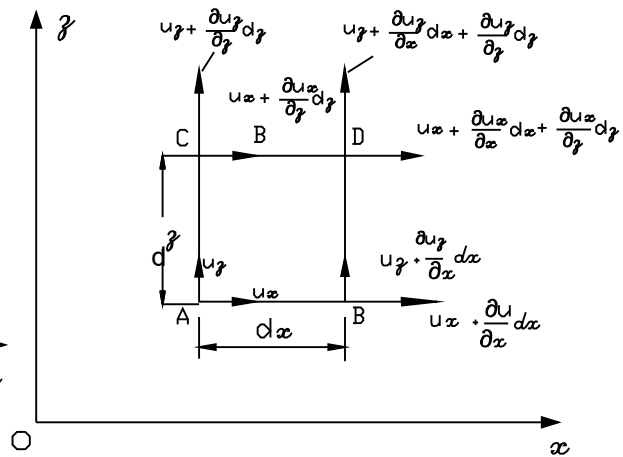
Sự chuyển động của một phần tử chất rắn như đã biết trong cơ học chất rắn có thể phân tích thành chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay. Đối với phần tử chất lỏng, sự chuyển động phức tạp hơn ở chỗ phần tử chất lỏng trong khi vẫn giữ nguyên thể tích lại có thể biến dạng: vì vậy *chuyển động của một phần tử chất lỏng có thể phân tích thành ba dạng: chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay và chuyển động biến hình*; đó là định luật Hemhôn.

Trong các nghiên cứu sau này, thường phải đề cập đến chuyển động không quay, còn gọi là chuyển động thể và chuyển động có quay, còn gọi là chuyển động xoáy của phần tử chất lỏng, cho nên dưới đây cần nghiên cứu cách biểu thị toán học điều kiện của hai loại chuyển động đó.

Ta nghiên cứu sự chuyển động của một phần tử chất lỏng, coi là một hình hộp vuông nhỏ có cạnh dx , dy và dz (hình 3-22). Trong trường hợp tổng quát, vận tốc ở những đỉnh hình hộp không bằng nhau. Để tiện sự phân tích trước hết ta xem xét sự chuyển động của một mặt nào đó của hình hộp vuông nói trên, thí dụ mặt ABCD song song với mặt tọa độ zOx (hình 3-23). Chưa kể đến sự tịnh tiến của phần tử mà ta rất dễ tính đến, ta chỉ nghiên cứu sự chuyển động của mặt ABCD dưới dạng biến hình và dạng quay.



Hình 3-22



Hình 3-23

Gọi vận tốc điểm A có tọa độ x, z là $u = f(x, z)$, các thành phần theo trục tọa độ là u_x, u_z :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_1(x, z), \\ u_z &= f_2(x, z). \end{aligned} \right\}$$

Vận tốc u của điểm D có tọa độ $x + dx, z + dz$, sẽ có các thành phần u_{D_x} và u_{D_z} là:

$$\left. \begin{aligned} u_{D_x} &= f_1(x + dx, z + dz), \\ u_{D_z} &= f_2(x + dx, z + dz). \end{aligned} \right\}$$

Khai triển theo cấp số Taylo hai hàm số trên và bỏ đi những số hạng có bậc vô cùng nhỏ lớn hơn bậc nhất, ta viết được biểu thức cho u_{D_x} và u_{D_z} như sau:

$$\left. \begin{aligned} u_{D_x} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \\ u_{D_z} &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\}$$

Cũng làm như vậy cho điểm B có tọa độ $x + dx, z$ và cho điểm C có tọa độ $x, z + dz$ ta viết ra:

– Đối với điểm B:

$$u_{B_x} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx,$$

$$u_{B_z} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx.$$

– Đối với điểm C:

$$u_{C_x} = u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz,$$

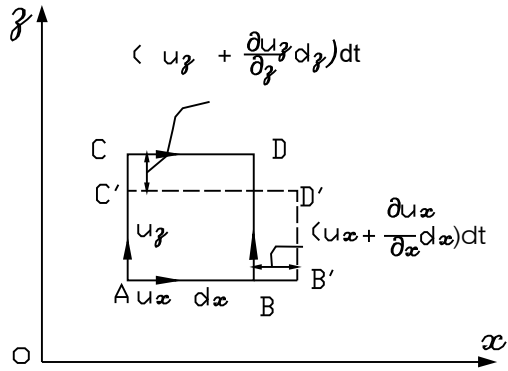
$$u_{C_z} = u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.$$

Những trị số các thành phần vận tốc của các điểm A, B, C, D, đều ghi lại trên hình 3-23. Do sự khác nhau về vận tốc của các đỉnh, các cạnh và các góc của ABCD bị biến dạng.

a) Ta xét sự biến dạng về độ dài các cạnh:

Mặt ABCD ở thời điểm t , có dạng $AB'C'D'$ ở thời điểm $t + dt$ (hình 3-24). Như vậy, cạnh AB song song với Ox chịu một sự biến hình về độ dài là: $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt$ theo phương Ox,

cạnh AC song song với Oz chịu một sự biến hình về độ dài là: $\frac{\partial u_z}{\partial z} dz dt$ theo phương Oz.



Hình 3-24

Do đó, vận tốc biến hình dài của hai cạnh trên là:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx \quad \text{và} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} dz$$

Như vậy những biểu thức:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} dy, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} dz$$

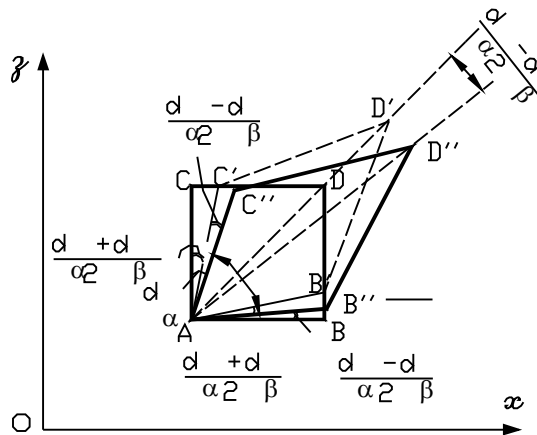
cho ta vận tốc biến hình dài.

Chia những vận tốc đó tương ứng với dx , dy , dz thì ta được những vận tốc biến hình tương đối về chiều dài hoặc vận tốc giãn nở:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

b) Ta xét sự biến dạng về góc

Hình ABCD ở thời điểm t , biến thành hình AB''C''D'' ở thời điểm $t + dt$ (hình 3-25).



Hình 3-25

Ta gọi $d\alpha$ là góc lập bởi AC và AC'' , gọi $d\beta$ là góc lập bởi AB và AB'' . Ta có thể hoàn thành sự biến hình trên lần lượt theo hai bước: 1. Biến từ $ABCD$ sang $AB'C'D'$ bằng cách quay cạnh AC theo chiều kim đồng hồ tới vị trí AC' , sao cho góc $\widehat{CAC'} = \frac{d\alpha + d\beta}{2}$ và bằng cách quay cạnh AB ngược chiều kim đồng hồ tới vị trí AB' , sao cho góc $\widehat{BAB'} = \frac{d\alpha + d\beta}{2}$, bước biến hình này có đặc điểm là đường phân giác AD' không di động và AC' , AB' đều đối xứng với AD , gọi là sự biến hình đơn thuần về góc, tức không quay; 2. Biến từ $AB'C'D'$ sang $AB''C''D''$ bằng cách quay $AB'C'D'$ xung quanh điểm A ; khi đó góc quay là $\widehat{C'AC''} = \widehat{B'AB''} = \frac{d\alpha - d\beta}{2}$, hình dạng của $AB'C'D'$ không thay đổi trong quá trình quay này, đường phân giác AD cũng quay đi một góc bằng $\frac{d\alpha - d\beta}{2}$, bước biến hình này gọi là sự quay đơn thuần. Ta tìm biểu thức toán học cho sự biến hình đơn thuần về góc, cụ thể là cho tốc độ biến hình đơn thuần về góc. Theo quy ước vừa nêu ở trên, thì góc $d\alpha$ do sự quay của cạnh AC sang AC'' trong thời gian dt , tính được theo (hình 3-26):

$$\operatorname{tg}(d\alpha) = \frac{CC''}{CA} = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z} dz dt}{dz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} dt$$

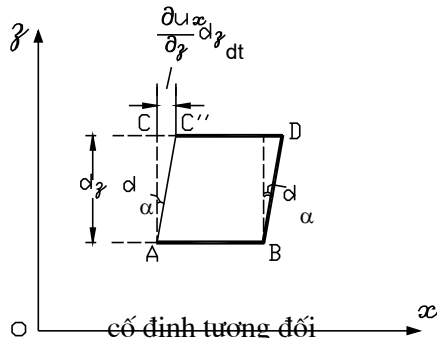
Vì $d\alpha$ là góc nhỏ nên có thể coi $\operatorname{tg}(d\alpha) \approx d\alpha$, do đó:

$$d\alpha = \frac{\partial u_x}{\partial z} dt.$$

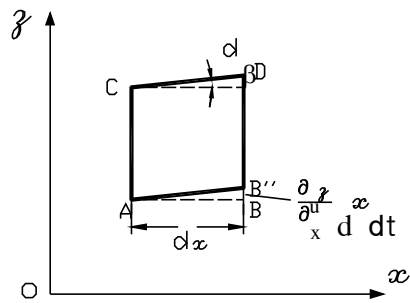
Cũng suy luận như trên đối với góc $d\beta$ (hình 3-27) ta viết được:

$$\operatorname{tg}(d\beta) = \frac{BB''}{BA} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt,$$

hoặc: $d\beta = \frac{\partial u_z}{\partial x} dt.$



Hình 3-26



Hình 3-27 $\left(BB'' = \frac{\partial u_z}{\partial x} dx dt \right)$

Theo lập luận trên, sự biến hình đơn thuần về góc thể hiện bởi góc $\frac{d\alpha + d\beta}{2}$, tốc độ θ_y của sự biến hình đơn thuần quay xung quanh trục song song với Oy là:

$$\theta_y = \frac{1}{dt} \frac{d\alpha + d\beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

Tốc độ θ_y gọi là tốc độ biến thiên đơn thuần về góc.

Cũng suy luận như trên, ta có thể viết tốc độ biến thiên đơn thuần về góc xung quanh các trục Ox và Oz. Vậy những thành phần θ_x , θ_y , θ_z của vận tốc biến hình đơn thuần về góc θ là:

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \theta_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \theta_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-56)$$

Sự biến hình dạng nói ở đây là sự biến hình về góc, nên θ còn gọi là *vận tốc biến hình góc* hoặc *vận tốc trượt*.

Như vậy vận tốc biến hình (bao gồm vận tốc biến hình tương đối về độ dài và vận tốc biến hình đơn thuần về góc) có 6 thành phần, lập thành bảng sau đây:

$\frac{\partial u_x}{\partial x}$	θ_z	θ_y
θ_z	$\frac{\partial u_y}{\partial y}$	θ_x
θ_y	θ_x	$\frac{\partial u_z}{\partial z}$

Bảng này gọi là tensor vận tốc biến hình.

c) Ta tìm hệ thức toán học cho sự quay đơn thuần, cụ thể là cho vận tốc quay đơn thuần. Theo lập luận trên, sự quay đơn thuần thể hiện bởi góc $\frac{d\alpha + d\beta}{2}$ tốc độ ω_y của sự quay đơn thuần xung quanh trục song song với Oy tính được như sau:

Tốc độ quay ω_y từ hình AB'C'D' sang AB''C''D'' bằng:

$$\omega_y = \frac{1}{dt} \cdot \frac{d\alpha - d\beta}{2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial u_x}{\partial z} dt - \frac{\partial u_z}{\partial x} dt}{dt}$$

$$\text{hoặc: } \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

Cũng suy luận tương tự, ta có thể viết toàn bộ các thành phần của tốc độ quay ω như sau:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right), \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3-57)$$

Góc quay đơn thuần ω của phần tử chất lỏng bằng:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (3-58)$$

Trong cơ học chất lỏng, hai lần vectơ vận tốc quay đơn thuần được gọi là vectơ xoáy hoặc cái xoáy; gọi vectơ xoáy bằng $\vec{\Omega}$ thì:

$$\vec{\Omega} = 2 \vec{\omega}. \quad (3-59)$$

Trong toán học người ta biểu thị hệ phương trình (3-57) bằng biểu thức:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$$

$$\text{hoặc: } \vec{\Omega} = \text{rot } \vec{u}$$

Ta mới nghiên cứu sự chuyển động của một mặt của hình hộp chất lỏng và tìm ra biểu thức toán học của vận tốc biến hình đơn thuần và vận tốc quay đơn thuần của mặt đó.

Tiếp đây, ta nghiên cứu biểu thức vận tốc của một đỉnh bất kỳ của hình hộp, coi vận tốc $u = f(x, y, z)$ của điểm $A(x, y, z)$ đã biết. Để có biểu thức tổng quát, ta sẽ tìm vận tốc u của điểm $H(x + dx, y + dy, z + dz)$, vận tốc u_H có những thành phần sau đây:

$$u_{xH} = f_1(x + dx, y + dy, z + dz),$$

$$u_{yH} = f_2(x + dx, y + dy, z + dz),$$

$$u_{zH} = f_3(x + dx, y + dy, z + dz).$$

Khai triển những hàm số trên theo cấp số Taylo, viết cho những đại lượng vô cùng nhỏ dx, dy, dz và bỏ đi những số hạng vô cùng nhỏ có bậc cao hơn bậc nhất, ta có:

$$\left. \begin{aligned} u_{xH} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz, \\ u_{yH} &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz, \\ u_{zH} &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz. \end{aligned} \right\} \quad (3-60)$$

Để thể hiện vận tốc biến hình đơn thuần và vận tốc quay đơn thuần trong vế phải của (3-60), ta biến đổi biểu thức đó bằng cách cộng vào và trừ đi ở từng phương trình những đại lượng tương ứng sau đây:

– Đối với phương trình thứ nhất: $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} dz + \frac{\partial u_y}{\partial x} dy \right)$

– Đối với phương trình thứ hai: $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dz \right)$

– Đối với phương trình thứ ba: $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dx \right)$

Sau khi biến đổi đại số ta có:

$$\left. \begin{aligned} u_{xH} &= u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dy, \\ u_{yH} &= u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dz + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dz, \\ u_{zH} &= u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dx + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) dy - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) dx. \end{aligned} \right\} \quad (3-61)$$

Đưa các biểu thức (3-56) và (3-57) về vận tốc biến hình đơn thuần và vận tốc quay đơn thuần vào biểu thức (3-61), ta có:

$$\left. \begin{aligned} u_{xH} &= u_x + \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} dx + (\theta_y dz + \theta_z dy) \right] + (\omega_y dz - \omega_z dy), \\ u_{yH} &= u_y + \left[\frac{\partial u_y}{\partial y} dy + (\theta_z dx + \theta_x dz) \right] + (\omega_z dx - \omega_x dz), \\ u_{zH} &= u_z + \left[\frac{\partial u_z}{\partial z} dz + (\theta_x dy + \theta_y dx) \right] + (\omega_x dy - \omega_y dx). \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$

Như vậy ta đã chứng minh định luật Hemhôn nói trên.

Thí dụ: Trong một chuyển động ổn định của chất lỏng mỗi phần tử chất lỏng có lưu tốc $u(x, y, z)$ được xác định bởi các thành phần:

$$u_x = 2xy; \quad u_y = 2yz; \quad u_z = 2zx.$$

Chuyển động này có xoáy hay không xoáy?

Giải: Ta tính các thành phần của các vectơ quay ω theo (3-57):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -y, \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -z, \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -x. \end{aligned}$$

Vậy $\omega \neq 0$, do đó chuyển động là có xoáy.

§3-19. CHUYỂN ĐỘNG THỂ, HÀM SỐ THỂ, HÀM SỐ DÒNG

Dòng chảy mà các phần tử chất lỏng không có chuyển động quay đơn thuần gọi là *chuyển động không xoáy* hoặc *chuyển động thể*; trái lại, dòng chảy mà các phần tử chất lỏng có chuyển động quay đơn thuần gọi là chuyển động xoáy.

Căn cứ vào những định nghĩa trên, trong chuyển động thể:

$\vec{\Omega} = 0$, hoặc $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, hoặc $\text{rot } \vec{u} = 0$; tức là:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial z}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (3-63)$$

Đó là điều kiện của chuyển động thế.

Ngược lại điều kiện của chuyển động xoáy là $\vec{\Omega} \neq 0$, tức là ít nhất một thành phần của $\vec{\omega}$ khác không.

Vì hệ thống phương trình (3-63) như đã chứng minh trong giải tích, biểu thị điều kiện cần và đủ của sự tồn tại của hàm số φ , mà đạo hàm riêng phần của các hàm số này theo các tọa độ chính là các thành phần vận tốc, nghĩa là:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (3-64)$$

Hoặc: $\vec{U} = \text{grad} \varphi \quad (3-64')$

Vì ta có u_x, u_y, u_z là những hàm số của x, y, z, t , nên rõ ràng ta có $\varphi = f(x, y, z, t)$, trong đó t coi như thông số. Hàm số $\varphi(x, y, z, t)$ được gọi là thế lưu tốc. Chuyển động nào có sự tồn tại của hàm số φ , tức là có sự tồn tại của thế lưu tốc, thì được gọi là chuyển động thế.

Ta có thể coi tổng số:

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz$$

là một vi phân toàn phần của φ , tức là:

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi \quad (3-65)$$

Mặt không gian có $\varphi = \text{const}$ được gọi là mặt đẳng thế lưu tốc: đối với mặt đó, $d\varphi = 0$ tức là:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi = 0$$

Nếu chuyển động của chất lỏng là chuyển động phẳng, tức là chỉ có hai thành phần vận tốc, thí dụ thành phần u_x, u_y , còn thành phần thứ ba triệt tiêu ($u_z = 0$) thì hàm số φ có vi phân toàn phần là:

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \quad (3-65')$$

và với $\varphi = \text{const}$, ta có $d\varphi = 0$ tức là:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

Đó là phương trình của đường đẳng thế lưu tốc trong chuyển động phẳng; mặt khác, xuất phát từ phương trình đường dòng (3-52), trong chuyển động phẳng, ta viết được:

$$u_x dy - u_y dx = 0$$

Nếu ta tìm được hàm số $\psi(x, y)$ mà:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y,$$

thì phương trình đường dòng của dòng phẳng (3-66) viết thành:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0,$$

hoặc: $d\psi = 0,$

do đó: $\psi(x, y) = \text{const}$

Hàm số $\psi(x, y)$ gọi là *hàm số dòng*; trị số hàm số dòng giữ không đổi dọc theo mỗi đường dòng. Những đường dòng khác nhau có trị số hàm số dòng khác nhau. Trong chuyển động phẳng và có thế, ta có thể đặt mối liên hệ giữa hàm số thế lưu tốc φ và hàm số dòng ψ , suy từ định nghĩa của hàm số ấy;

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad 3-66)$$

Do đó:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

Biểu thức này nói lên rằng mỗi đường cong thuộc họ $\psi = \text{const}$ cắt mỗi đường cong thuộc họ $\varphi = \text{const}$, dưới góc vuông tức là trong chuyển động thế, phẳng, những đường đẳng thế lưu tốc và những đường dòng là trục giao (hình 3-28). Như đã biết trong giải tích, những hàm số φ và ψ xác định như trên gọi là những hàm số liên hiệp.

Chú ý rằng những hàm số này đều *thỏa mãn phương trình Laplace*. Thực vậy, từ (3-66), ta viết được (lấy đạo hàm bậc hai):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \text{ và } \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}.$$

Cộng vế đối vế, ta viết được:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{và} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0,$$

hoặc dùng toán tử Laplacơ Δ (delta)

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

ta viết: $\Delta \psi = \Delta \phi = 0$.

Lại chú ý thêm rằng hệ phương trình (3-66) là điều kiện Côsi-Riêman, cho phép ta ứng dụng hàm phức để nghiên cứu chuyển động thế. Vấn đề này không trình bày ở đây.

Trong cơ học chất lỏng lý thuyết, sẽ nghiên cứu sâu về những đặc tính của các hàm số này; trong phạm vi giáo trình này, chúng ta không nghiên cứu sâu thêm.

Sau đây ta xét thêm ý nghĩa vật lý của hàm số dòng.

Giả sử ta có một dòng chảy phẳng, ổn định, giới hạn bởi hai đường dòng, hàm số dòng của hai đường dòng đó là $\psi = \psi_1$ và $\psi = \psi_2$ (hình 3-28). Ta lấy một đoạn nguyên tố ds trên mặt cắt ướn S của dòng và xét lưu lượng nguyên tố dQ chảy qua đoạn ds , gọi u_x , u_y là những hình chiếu của vận tốc và dx , dy là những hình chiếu của đoạn nguyên tố ds theo các trục tọa độ; ta thấy rất rõ trên hình vẽ (hình chiếu u_x và u_y đều dương, hình chiếu dy dương, còn dx âm) rằng:

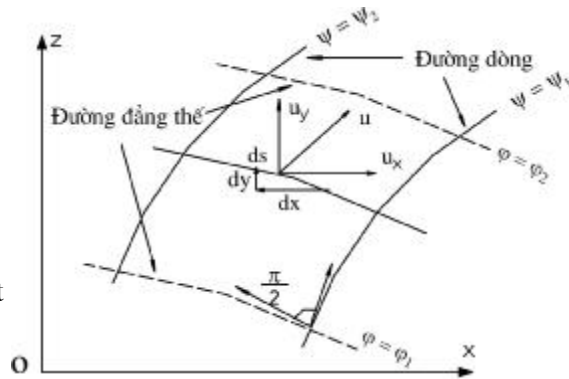
$$dQ = u_x dy - u_y dx.$$

Vì $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$

nên: $dQ = \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = d\psi \quad (3-67)$

Do đó lưu lượng Q chảy qua toàn mặt cắt S bằng:

$$Q = \int_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (3-68)$$



Hình 3-28

Vậy hiệu số những trị số hàm số dòng của hai đường dòng cho trước bằng lưu lượng chất lỏng chảy giữa hai đường dòng đó. Đó là ý nghĩa vật lý của hàm số dòng.

Hệ thống những đường dòng và những đường đẳng thế trực giao với nhau tạo nên *lưới thủy động* (hình 5-28).

Trong thực tiễn kỹ thuật, dòng chảy ở một số trường hợp có thể coi là dòng chảy thế, khi đó ta có thể xây dựng lưới thủy động để nghiên cứu chuyển động. Thí dụ: dòng thấm; mà ta sẽ nghiên cứu ở chương XVIII.

§3-20. VÀI THÍ DỤ ĐƠN GIẢN VỀ CHUYỂN ĐỘNG THỂ

a) Dòng song phẳng (dòng chảy đều)

Chất lỏng chuyển động song song với trục Ox, mỗi phần tử chất lỏng có V_0 ở xa vô cực (hình 3-29).

Ta hãy xác định thế lưu tốc $\varphi(x, y)$ và hàm số dòng $\psi(x, y)$ của chuyển động đó.

Ta biết rằng:

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy; \quad (3-65')$$

Ứng dụng vào điều kiện bài toán:

$$u_x = V_0, \quad u_y = 0,$$

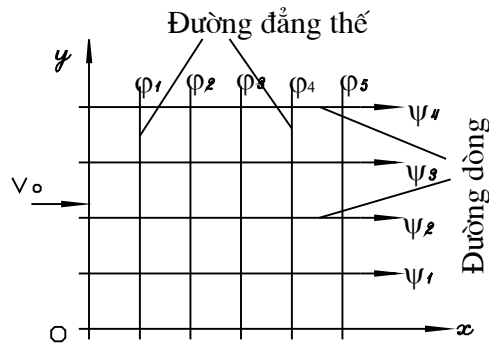
ta có: $d\varphi = V_0 dx$.

Lấy tích phân, ta được:

$$\varphi = \int V_0 dx = V_0 x + C$$

Đặt $C = 0$ thì:

$$\varphi = V_0 x. \quad (3-69)$$



Hình 3-29

Vậy những đường đẳng thế là họ những đường thẳng song song với trục Oy.

Ta tìm những hàm số dòng $\psi(x, y)$.

Ta biết rằng: $d\psi = u_x dy - u_y dx,$ (3-67)

Ứng dụng vào điều kiện bài toán: $d\psi = V_0 dy.$

Lấy tích phân, ta được: $\psi = V_0 y + C'$

Đặt $C' = 0$ thì: $\psi = V_0 y.$ (3-70)

Đường dòng là họ những đường thẳng song song với trục Ox. Ở đây ta có thể nghiệm lại rằng những hàm số φ và ψ thỏa mãn phương trình Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (V_0 x)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial (V_0 x)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} (V_0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (V_0 y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial (V_0 y)}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} (V_0) = 0$$

Hệ những đường thế lưu tốc và đường dòng là trục giao với nhau (hình 3-29).

b) Điểm nguồn và điểm tụ

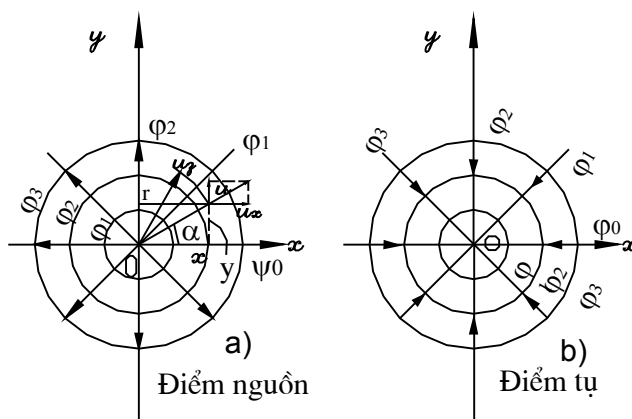
Ta gọi *điểm nguồn* (hình 3-30a) là điểm từ đó chất lỏng chảy đi, theo phương bán kính, trên mọi hướng; còn *điểm tụ* (hình 3-30b) là điểm mà chất lỏng từ mọi hướng đổ về theo phương bán kính.

Ta hãy xác định các hàm φ và ψ cho điểm nguồn.

Giả thiết rằng sự phân bố lưu tốc trên vòng tròn là đều, ta có thể viết:

$$Q = 2\pi r u,$$

trong đó Q là lưu lượng của điểm nguồn, u là vận tốc theo phương bán kính (hình 3-30a).



Hình 3-30

Vậy:

$$u_x = u \cos \alpha = \frac{Q}{2\pi r} \cos \alpha,$$

$$u_y = u \sin \alpha = \frac{Q}{2\pi r} \sin \alpha.$$

Vì $\cos\alpha = \frac{x}{r}$ và $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, nên:

$$u_x = \frac{Q}{2\pi r} \times \frac{x}{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} x,$$

$$u_y = \frac{Q}{2\pi r} \times \frac{y}{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} y.$$

Vậy: $d\varphi = u_x dx + u_y dy = \frac{Q}{2\pi r^2} (x dx + y dy) = 0.$

Rõ ràng: $\frac{Q}{2\pi r^2} \neq 0$

nên: $x dx + y dy = 0.$

Ta đã biết: $x^2 + y^2 = r^2,$

do đó, lấy vi phân, ta được: $x dx + y dy = r dr.$

Vậy có thể viết:

$$d\varphi = \frac{Q}{2\pi r^2} (x dx + y dy) = \frac{Q}{2\pi r^2} r dr = \frac{Q}{2\pi} \frac{dr}{r} = 0$$

Tích phân, ta sẽ được biểu thức của thế lưu tốc:

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + C$$

Đặt $C = 0$, ta được:

$$\varphi_{\text{nguồn}} = \frac{Q}{2\pi} \ln r \quad (3-71)$$

$$\text{hoặc: } \varphi_{\text{nguồn}} = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3-71')$$

Ta tìm hàm số dòng Ψ :

$$d\Psi = -u_y dx + u_x dy = -\frac{Q}{2\pi r^2} (y dx - x dy) = 0$$

do đó: $y dx - x dy = 0$

$$\text{hoặc: } \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

hoặc: $\ln y = \ln x + C$

$$\text{hoặc: } \ln \frac{y}{x} = C,$$

$$\text{hoặc: } y = Cx \quad (3-72)$$

Phương trình này là họ những đường thẳng đi qua gốc tọa độ. Như vậy đường dòng là những đường thẳng bán kính.

Rõ ràng hàm số $\psi(x, y) = C$ chỉ thay đổi, phụ thuộc vào góc α và là hàm bậc nhất của α . Do đó ψ có thể viết thành:

$$\psi = C'\alpha = C' \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Ta xác định C' :

Vì $\psi_2 - \psi_1 = Q$, nên ta có thể viết (ψ_1 ứng với $\alpha = 0$, ψ_2 ứng với $\alpha = 2\pi$):

$$C' \cdot 2\pi - C' \cdot 0 = Q,$$

$$\text{do đó: } C' = \frac{Q}{2\pi}$$

Vậy hàm dòng có dạng cuối cùng là:

$$\psi_{\text{nguồn}} = \frac{Q}{2\pi} \alpha = \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (3-73)$$

Xét đến điểm tụ, ta cũng lặp lại điều chứng minh trên, chỉ khác là chiều chảy thì ngược lại. Ta sẽ được:

$$\psi_{\text{tụ}} = -\frac{Q}{2\pi} \ln r = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3-74)$$

$$\psi_{\text{tụ}} = -\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (3-75)$$

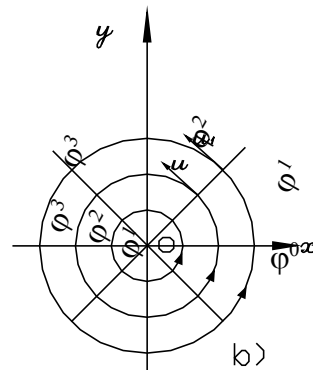
c) Chuyển động ở lân cận một xoáy đơn

Vì những hàm ψ và φ là điều hòa và liên hiệp với nhau, nên ta có thể thay đổi vai trò của chúng, ta có thể coi hàm số (3-73) là thế lưu tốc:

$$\varphi = C \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (3-76)$$

và hàm số (3-71') là hàm số dòng:

$$\psi = C \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3-77)$$



Hình 3-31

Khi đó hình ảnh chuyển động thay đổi. Đường dòng sẽ là những đường vòng tròn và đường đẳng thế sẽ là những đường thẳng xuất phát từ gốc tọa độ (hình 3-31).

Chuyển động này là không xoáy ở mọi điểm của mặt phẳng, trừ điểm O tại đó có đặt trục của một cái xoáy mà ta quy ước gọi là *xoáy đơn* (vận tốc tại chính điểm O là lớn vô cực, điều này về mặt vật lý, không thể có được).

Các thành phần u_x và u_y của vận tốc \vec{u} được xác định như sau:

Ta có:

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(C \arctg \frac{y}{x} \right) = C \left[-\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \times \frac{y}{x^2} \right] = -C \frac{y}{x^2 + y^2} ;$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(C \arctg \frac{y}{x} \right) = C \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \times \frac{1}{x} = C \frac{x}{x^2 + y^2} ;$$

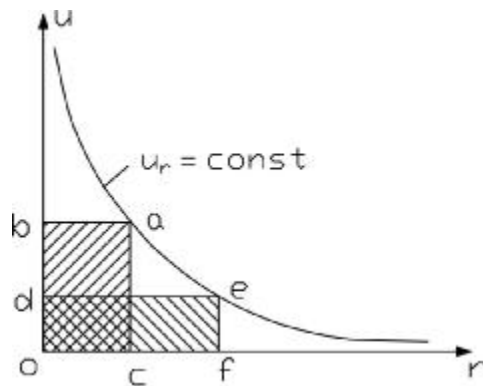
$$\text{Vậy: } u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(C)^2 \frac{y^2 + x^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Vì $C = \text{const}$ và $r^2 = x^2 + y^2$, nên: $u = \frac{C}{r}$,

hoặc: $ur = \text{const}$. (3-78)

Như vậy, trong chuyển động lân cận xoáy đơn sự phân bố vận tốc tuân theo quy luật diện tích (tức là diện tích abOca bằng diện tích defOd, hình 3-32).

Chú ý: Từ công thức (3-78), ta thấy rằng bán kính càng nhỏ thì vận tốc càng lớn. Ở giới hạn, tại gốc tọa độ O: $r = 0$, $u = \infty$.



Hình 3-32

d) Phương pháp cộng những chuyển động thế đơn giản

Ta có thể đạt được những hình dạng chuyển động phức tạp bằng cách cộng những chuyển động đơn giản.

Sau đây là một thí dụ: điểm nguồn đặt trong dòng đều.

Giả sử ta có điểm nguồn lưu lượng Q; những hàm số thế lưu tốc $\varphi_{\text{nguồn}}$ và hàm dòng $\psi_{\text{nguồn}}$ được xác định bởi (3-69) và (3-70).

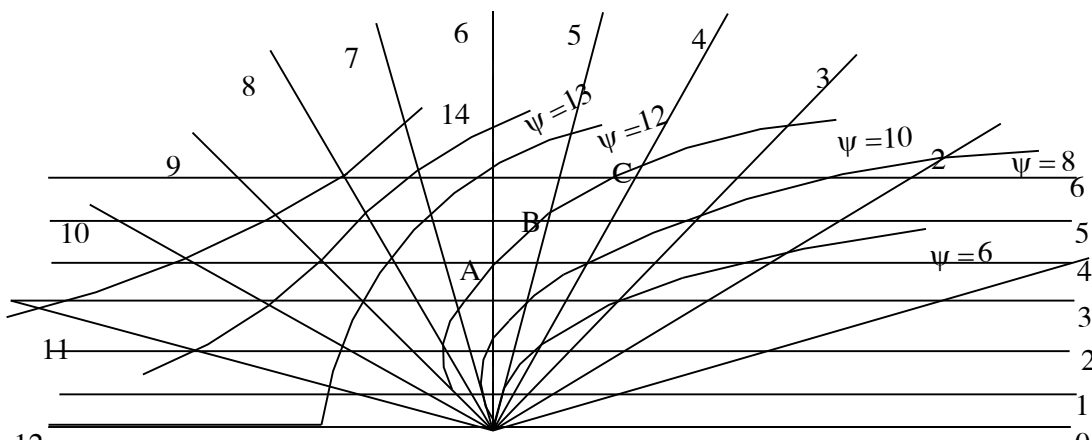
Chuyển động tổng hợp của hai dòng trên có hàm số thế lưu tốc φ (φ_1 và φ_2 là những hàm số thế ứng với dòng đều và nguồn):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = V_0x + \frac{Q}{2\pi} \ln r$$

và có hàm dòng ψ (ψ_1 và ψ_2 là những hàm số dòng ứng với dòng đều và nguồn):

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = V_0y + \frac{Q}{2\pi} \alpha.$$

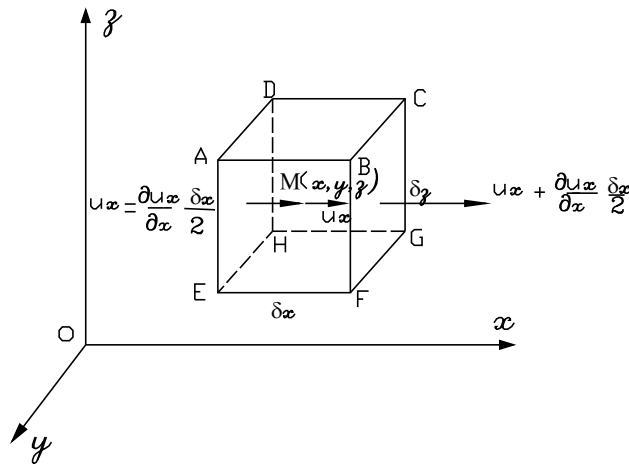
Hình ảnh chuyển động được biểu thị ở hình 3-33. Đường dòng và đường đẳng thế có thể tạo ra bằng cách sau đây. Ta vẽ các đường dòng của nguồn và của dòng đều với cùng một khoảng cách $\Delta\psi$ (nếu vẽ các đường đẳng thế của hai chuyển động thì lấy cùng một khoảng cách $\Delta\varphi$), thí dụ như trên hình 3-33: $\Delta\psi = 1$. Ta xác định hàng loạt điểm của một đường dòng tổng hợp mang trị số ψ (thí dụ $\psi = 10$) bằng cách tìm những giao điểm của đường dòng thuộc những chuyển động hợp thành mà $\psi_1 + \psi_2 = \psi$, trong đó ψ_1 và ψ_2 là những trị số của hai đường dòng hợp thành (thí dụ $\psi_1 = 4, \psi_2 = 6$ do đó $\psi_1 + \psi_2 = 4 + 6 = 10$, ta có điểm A; rồi $\psi_1 = 5, \psi_2 = 5$, do đó $\psi_1 + \psi_2 = 5 + 5 = 10$, ta có điểm B; rồi $\psi_1 = 4, \psi_2 = 6$, do đó $\psi_1 + \psi_2 = 4 + 6 = 10$, ta có điểm C, v.v... Ta nối A, B, C ... thì có đường dòng tổng hợp mà $\varphi = 10^\circ$. Chú ý rằng đường dòng $\psi = 12$ phân chia hoàn toàn nguồn với phần ngoài của mặt phẳng. Đường dòng đó có thể coi như đầu uốn cong của trụ pin.



Hình 3-33

§3-21. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN LIÊN TỤC CỦA CHẤT LỎNG KHÔNG NÉN ĐƯỢC

Trong không gian chứa đầy chất lỏng không nén được đang chuyển động ta lấy một hình hộp ABCDEFGH có vị trí cố định, các cạnh của hình hộp là δx , δy , δz , (hình 3-34). Trọng tâm của hình hộp đó là M, có tọa độ là x , y , z ; lưu tốc tại M ở thời điểm t là u , có hình chiếu u_x , u_y , u_z ; khối lượng riêng chất lỏng là ρ ; với chất lỏng không nén được thì ρ là một hằng số. Ta xác định khối lượng chất lỏng chuyển động đi vào và đi ra đối với hình hộp đó trong thời gian dt .



Hình 3-34

Ở những mặt ADHE và BCGF vận tốc theo trục x là:

$$u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \quad \text{và} \quad u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2}.$$

Trong thời gian dt , khối lượng chất lỏng chảy vào mặt ADHE là:

$$\rho \left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z dt,$$

khối lượng chất lỏng chảy ra khỏi mặt BCGF là:

$$\rho \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z dt$$

Như vậy trong thời gian dt , khối lượng chất lỏng ra vào hình hộp theo phương x chênh nhau một đại lượng:

$$\rho \left(u_x - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z dt - \rho \left(u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z dt = - \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z dt.$$

Cũng suy luận như vậy, đối với các mặt khác của hình hộp, ta viết được:

$$- \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z dt, \text{ đối với phương } y,$$

$$- \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z dt, \text{ đối với phương } z.$$

Trong thời gian dt , khối lượng chất lỏng chảy qua hình hộp thể tích $\delta x \delta y \delta z$ có chịu một sự biến đổi dM bằng tổng số các độ chênh khối lượng theo các phương:

$$\begin{aligned} dM &= - \rho \frac{\partial u_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z dt - \rho \frac{\partial u_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z dt - \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z dt \\ &= - \rho \delta x \delta y \delta z \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dt \end{aligned}$$

Chất lỏng liên tục, có nghĩa là trong hình hộp không có không gian trống không, không chứa chất lỏng. Muốn vậy, trong trường hợp chất lỏng không nén được, sự thay đổi khối lượng chất lỏng trong hình hộp phải bằng không, tức là:

$$dM = 0.$$

Vì $\rho \delta x \delta y \delta z \neq 0$ và rõ ràng $dt \neq 0$,

$$\text{nên: } \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3-79)$$

Đó là phương trình vi phân liên tục của chất lỏng không nén được.

Nhớ lại rằng trong toán học người ta gọi biểu thức bên vế trái của (3-79) là $\text{div } \vec{u}$, ta viết được phương trình vi phân liên tục dưới dạng:

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (3-79')$$

Phương trình vi phân liên tục này cũng như phương trình liên tục viết cho dòng nguyên tố (3-7) là một phương trình động học, vì vậy nó dùng cho cả chất lỏng lý tưởng lẫn chất lỏng thực.

Phương trình (3-79) nói rằng: Thể tích của chất lỏng không nén được chảy vào hình hộp trong thời gian dt bằng thể tích chất lỏng chảy ra khỏi hình hộp. Phương trình đó cũng có nghĩa là khối lượng chất lỏng chảy vào hình hộp bằng khối lượng chất lỏng chảy ra khỏi hình hộp, tức là khối lượng chất lỏng ở trong hình hộp là một hằng số. Do đó, phương trình liên tục là biểu thức của một trong những quy luật vật lý quan trọng nhất, đó là định luật bảo toàn khối lượng.

Thí dụ: Tìm biểu thức $\text{div } \vec{u}$ và viết ra phương trình liên tục của phân tử chất lỏng có lưu tốc điểm $u(x, y, z, t)$ mà các thành phần là:

$$u_x = 2x^2 + y,$$

$$u_y = 2y^2 + z,$$

$$u_z = 2z^2 + x.$$

Giải: Từ $\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$, ta viết được:

$$\text{div } \vec{u} = 4x + 4y + 4z = 4(x + y + z)$$

Phương trình liên tục của phân tử chất lỏng đó theo (3-79') viết:

$$\text{div } \vec{u} = 0$$

tức là: $x + y + z = 0$.

§3-22. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG LÝ TƯỞNG (PHƯƠNG TRÌNH Ô-LE)

Ta lấy trong môi trường chất lỏng chuyển động một khối chất lỏng hình hộp ABCDEFGH vô cùng nhỏ, có cạnh song song với những trục tọa độ và dài δx , δy và δz khối lượng riêng là ρ (hình 3-35). Hình hộp đó chịu tác dụng của những lực sau đây:

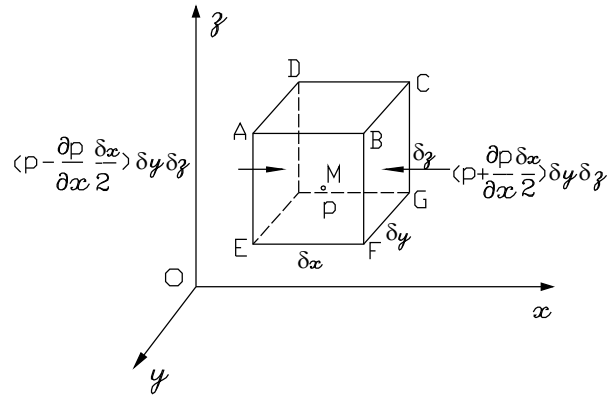
a) Lực khối lượng (thể tích); gọi F là lực khối lượng tác dụng vào một đơn vị khối lượng của chất lỏng, nó có hình chiếu là F_x, F_y, F_z . Khối lượng của hình hộp chất lỏng là $\rho \delta x \delta y \delta z$. Như vậy hình chiếu lên trục tọa độ Ox của lực khối lượng là: $F_x \rho \delta x \delta y \delta z$.

b) Lực bề mặt tức là áp lực thủy động tác dụng lên những mặt của hình hộp và tỷ lệ với diện tích những mặt đó. Gọi p là động áp suất tại trọng tâm M của hình hộp, tọa độ M là x, y, z . Vậy áp suất thủy động tại những mặt trái và phải của hình hộp là:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \text{ và } \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right).$$

Hình chiếu lên trục x của tổng hợp những lực bề mặt đó là:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right) \delta y \delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$



Hình 3-35

Tổng số đại số những hình chiếu lên trục x của các lực tác dụng lên hình hộp phải bằng tích số của khối lượng hình hộp nhân với hình chiếu của gia tốc chuyển động của trọng tâm tức là phải bằng:

$$\rho \delta x \delta y \delta z \frac{du_x}{dt}.$$

Vậy ta có:

$$\rho \delta x \delta y \delta z F_x - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z = \rho \delta x \delta y \delta z \frac{du_x}{dt}.$$

Sau khi thu gọn ta có:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt}, \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt}, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (3-80)$$

Đối với trục y, z, ta có:

Viết dưới dạng véctơ, hệ (3-80) trở thành

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{d\vec{u}}{dt}. \quad (3-80')$$

Hệ phương trình vi phân (3-80) này do Ôle đề ra năm 1755 và gọi là *hệ phương trình vi phân chuyển động Ôle của chất lỏng lý tưởng*.

Nếu chiếu lên tiếp tuyến của đường dòng, ta có thể biểu thị phương trình Ôle như sau:

$$F_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{du}{dt}, \quad (3-81)$$

trong đó F_s là hình chiếu của lực khối lượng F lên tiếp tuyến của đường dòng.

Phương trình Ole nói trên dùng cho cả chất lỏng lẫn chất khí. Đối với chất lỏng thì ρ là một hằng số, đối với chất khí thì ρ có thể biến đổi. Phương trình Ole đó dùng cho cả chuyển động không ổn định và ổn định. Nếu chất lỏng ở trạng thái tĩnh, về bên phải hệ phương trình (3-80) và (3-80') đều bằng không và những phương trình ấy có dạng của phương trình (2-6) và (2-6') mà ta đã gọi là phương trình vi phân cân bằng Ole. Nếu phần tử chất lỏng chuyển động thẳng, thí dụ theo phương x tức $u = u_x$, $u_y = u_z = 0$, thì trên mặt thẳng góc với phương chảy, áp suất phân bố theo quy luật thủy tĩnh, vì:

$$F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Đó là đặc tính của dòng chảy có các đường dòng thẳng, song song. Dòng chảy đổi dần (xem §3-11) cũng coi như có đặc tính này.

Ta có thể viết hệ phương trình (3-80) dưới dạng chi tiết hơn. Vì các hình chiếu u_x , u_y , u_z đều là hàm số liên tục của tọa độ không gian và thời gian $u_x = f(x, y, z, t)$ v.v... nên vi phân toàn phần du_x viết được thành:

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

Do đó:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (3-82)$$

Chú ý rằng những vi phân dx , dy , dz , viết ở (3-82) khác những vi phân δx , δy , δz , viết cho khối chất lỏng hình hộp dùng để suy diễn phương trình Ole (3-80).

Nhận xét rằng:

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

và thay chúng vào (3-82), ta có:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z. \\ \text{Cũng làm như vậy đối với các vi phân } du_y, du_z, \text{ ta có:} \\ \frac{du_y}{dt} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z, \\ \frac{du_z}{dt} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z. \end{aligned} \right\} \quad (3-83)$$

Đó là biểu thức về các hình chiếu của vectơ gia tốc. Ở vế phải của những biểu thức đó, có hai thành phần như sau của gia tốc:

- Thành phần *cục bộ* hoặc *định vị*, đặc trưng cho chuyển động không ổn định, biểu thị sự biến thiên của gia tốc theo thời gian, tại một vị trí không gian không đổi: đối với phương trình thứ nhất đó là số hạng $\frac{\partial u_x}{\partial t}$;

- Thành phần *khuếch tán* hoặc *chuyển vị*, biểu thị sự biến thiên của gia tốc trong không gian, ở một thời điểm nhất định: đối với phương trình thứ nhất đó là:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z$$

Hệ phương trình (3-83) viết dưới dạng vectơ, trở thành:

$$\frac{\vec{du}}{dt} = \underbrace{\frac{\vec{\partial u}}{\partial t}}_{\text{thành phần định vị}} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}_{\text{thành phần chuyển vị}} \quad (3-83')$$

trong đó:

∇ - toán tử Hamintôn "nabla", coi như một vectơ, biểu thị trong hệ tọa độ Đề các dưới dạng:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} ;$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, là những vectơ đặt trên các trục tương ứng Ox, Oy, Oz.

Mang (3-83) thay vào (3-80) ta có dạng khai triển sau đây của phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng lý tưởng:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} u_z \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_y}{\partial z} u_z \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} u_x + \frac{\partial u_z}{\partial y} u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} u_z \end{aligned} \right\} \quad (3-84)$$

Phương trình (3-84) cũng là phương trình vi phân chuyển động Ole của chất lỏng lý tưởng, nhưng viết dưới dạng khai triển.

Viết dưới dạng vectơ, hệ phương trình (3-84) trở thành:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p = \frac{\vec{\partial u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} . \quad (3-84')$$

Trong chuyển động ổn định của chất lỏng, những số hạng đầu của vế phải trong hệ phương trình (3-84) phải bằng không:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$$

Trong hệ phương trình chuyển động Ôle có 4 ẩn số: p, u_x, u_y, u_z . 3 phương trình của hệ phương trình chuyển động Ôle không đủ để giải 4 ẩn. Mang hệ thống ấy kết hợp với phương trình liên tục (3-79):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

thì có 4 phương trình giải 4 ẩn số và có điều kiện giải quyết được vấn đề chuyển động của chất lỏng không nén được.

§3-23. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG LÝ TƯỞNG VIẾT DƯỚI DẠNG PHƯƠNG TRÌNH GƠRÔMÊCÔ

Biến đổi phương trình vi phân chuyển động Ôle dưới dạng khai triển (3-84) làm sao cho xuất hiện yếu tố chuyển động quay, đó là sự cống hiến của Gôrômêcô.

Từ (3-84) ta viết lại phương trình đầu tiên:

$$F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z};$$

và viết đạo hàm riêng phần theo trục x của $\frac{u^2}{2}$, ta có:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2} \right) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}.$$

Đem hai phương trình vừa viết ra trừ vế đối vế, ta được:

$$\begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + u_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3-85)$$

Như đã phân tích ở trên về các thành phần của vectơ quay $\vec{\omega}$ theo (3-57), ta có:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = 2\omega_y$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z$$

thay vào (3-85) ta viết ra:

$$\left. \begin{aligned} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z), \\ \text{Đồng thời cũng có:} \\ F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x), \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2}{2} \right) + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y). \end{aligned} \right\} \quad (3-86)$$

Hệ phương trình (3-86) viết dưới dạng vectơ trở thành:

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \text{rot } \vec{u} \times \vec{u}. \quad (3-86')$$

Đó là phương trình Gorômêcô công bố năm 1881. Đây là dạng khai triển làm ta thấy cụ thể hơn rằng phương trình Ôle ứng dụng được cho chuyển động không ổn định và chuyển động ổn định, cho chuyển động xoáy và chuyển động thế.

Trong nhiều trường hợp thường gặp ở thực tế, lực khối lượng F là lực có thế; khi đó, như đã biết trong cơ học lý thuyết, ta có thể viết:

$$F_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z}$$

và
$$-d\pi = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

trong đó $\pi(x, y, z)$ gọi là hàm số thế.

Khi đó phương trình đầu của (3-86) viết thành:

$$-\frac{\partial \pi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z),$$

$$\left. \begin{aligned}
\text{hoặc} \quad & \frac{\partial}{\partial x} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z), \\
\text{Đồng thời} \quad & \frac{\partial}{\partial y} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_y}{\partial t} + 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x), \\
& \frac{\partial}{\partial z} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial u_z}{\partial t} + 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y).
\end{aligned} \right\} (3-87)$$

Hệ phương trình (3-87) này là viết cho trường hợp lực khối lượng là lực có thế.

Viết dưới dạng vectơ, hệ phương trình (3-87) trở thành:

$$\text{grad} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{rot } \vec{u} \wedge \vec{u}, \quad (3-87')$$

hoặc nếu gọi: $\pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = E$

và $\text{rot } \vec{u} = \vec{\Omega}$,

thì phương trình (3-87') viết được lại thành:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} E + \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = 0. \quad (3-87'')$$

Trong trường hợp chuyển động ổn định:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0, \quad \text{tức} \quad \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} = 0$$

hệ phương trình (3-87) viết thành:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_z \omega_y - u_y \omega_z), \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_x \omega_z - u_z \omega_x), \\
\frac{\partial}{\partial z} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) &= 2(u_y \omega_x - u_x \omega_y).
\end{aligned} \right\} (3-88)$$

Hệ phương trình (3-88) viết dưới dạng vectơ trở thành:

$$\text{grad} \left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2} \right) = \text{rot } \vec{u} \wedge \vec{u} \quad (3-88')$$

hoặc: $\text{grad} E + \vec{\Omega} \wedge \vec{u} = 0 \quad (3-88'')$

§3-24. TÍCH PHÂN HỆ THỐNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG LÝ TƯỞNG

Ta nghiên cứu việc tích phân hệ thống phương trình vi phân chuyển động Ôle viết dưới dạng triển khai Gorômêcô (3-86). Ta xét trường hợp thường gặp: lực khối lượng là lực có thế và chuyển động là ổn định; đó là trường hợp biểu thị bởi hệ phương trình (3-88), ta nhân hai vế của mỗi phương trình trong hệ (3-88) riêng biệt với dx , dy , dz , rồi cộng vế đối vế, ta được:

$$d\left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2}\right) = 2\left[(\omega_y u_z - \omega_z u_y)dx + (\omega_z u_x - \omega_x u_z)dy + (\omega_x u_y - \omega_y u_x)dz\right]$$

$$\text{Hoặc: } d\left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2}\right) = 2D \quad (3-89)$$

trong đó D là định thức sau đây:

$$D = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} .$$

Việc tích phân phương trình (3-89) sẽ được đơn giản nhiều trong trường hợp $D = 0$. Ta chỉ xét trường hợp này, khi đó:

$$d\left(-\pi - \frac{p}{\rho} - \frac{u^2}{2}\right) = 0$$

Lấy tích phân, ta được:

$$\pi + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C = \text{const} . \quad (3-90)$$

Biểu thức (3-90) được gọi là *tích phân Bécnuiy*. Tích phân này nói rằng tổng cơ năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng lý tưởng (bao gồm thế năng biểu thị bởi π , áp năng - bởi $\frac{p}{\rho}$, động năng - bởi $\frac{u^2}{2}$) là một hằng số, trong trường hợp $D = 0$.

Ta xét những trường hợp $D = 0$. Ta biết rằng một định thức triệt tiêu, nếu những số hạng của một hàng (hoặc một cột) nào bằng không hoặc nếu những số hạng của một hàng (hoặc một cột) tỷ lệ với những số hạng của một hàng (hoặc cột) khác. Như vậy có 4 trường hợp $D = 0$ sau đây:

$$1. \quad \omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

Đó là trường hợp chuyển động thế. Khi đó trong phương trình (3-90) hằng số tích phân C có trị số như nhau cho bất kỳ điểm nào trong môi trường chuyển động, vì ở trường hợp này, $D = 0$ với bất kỳ dx, dy, dz nào, tức là với bất kỳ đoạn ds nào, không nhất thiết ds phải lấy dọc theo đường dòng. Nói một cách khác, trong chuyển động thế, cơ năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng lý tưởng ở bất kỳ điểm nào trong dòng chảy cũng đều bằng nhau.

$$2. \quad \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z}$$

Đó là phương trình đường dòng. Khi đó tích phân (3-90) đúng cho từng đường dòng riêng biệt, với những trị số C riêng cho từng đường dòng. Ở trường hợp này, trong biểu thức của D những thành phần của ω có thể khác không, nghĩa là chuyển động có thể là chuyển động xoáy. Vậy tích phân Bécnuiy có thể ứng dụng cho chuyển động xoáy, nhưng hằng số C của tích phân có trị số khác nhau dọc những đường dòng khác nhau. Vậy cơ năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng lý tưởng không đổi dọc theo một đường dòng.

$$3. \quad \frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} .$$

Đó là phương trình đường xoáy. Khi đó tích phân (3-90) đúng cho từng đường xoáy riêng biệt, với những trị số C riêng cho từng đường xoáy. Rõ ràng là tích phân Bécnuiy ứng dụng cho chuyển động xoáy trong trường hợp này, nhưng hằng số C của tích phân có trị số khác nhau dọc những đường xoáy khác nhau. Như vậy cơ năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng lý tưởng không đổi dọc theo một đường xoáy.

$$4. \quad \frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z} .$$

Tỉ lệ thức này chứng tỏ tại mỗi điểm, phương của lưu tốc trùng với phương của vận tốc quay, hoặc nói cách khác là đường dòng trùng với đường xoáy; chuyển động có đặc trưng này gọi là *chuyển động xoắn*, phần tử chất lỏng vừa di động vừa quay xung quanh đường dòng. Trong trường hợp chuyển động xoắn, tích phân (3-90) có hằng số C giữ cùng một trị số cho bất kỳ điểm nào trong môi trường chuyển động, vì cũng giống như trường hợp chuyển động thế nói trên, ở đây D triệt tiêu, không phụ thuộc tọa độ của phần tử chất lỏng. Như vậy cơ năng của một đơn vị khối lượng chất lỏng lý tưởng trong chuyển động xoắn có trị số như nhau ở bất kỳ điểm nào của môi trường chất lỏng chuyển động.

Bốn điểm kết luận trên có thể thấy ngay bằng cách biện luận phương trình vectơ (3-88"), như sau:

1. Với $\vec{\Omega} = 0$, tức trong *chuyển động thẳng*, thì rõ ràng theo (3-88"), ta có:

$$\text{grad}E = 0,$$

do đó: $E = \text{const}$,

với tất cả mọi điểm.

2. Nhân vô hướng hai vế của (3-88") với \vec{u} thì được

$$\vec{u} \cdot \text{grad}E = u \left(\frac{\vec{u}}{u} \cdot \text{grad}E \right) = 0$$

$$\text{hoặc: } u \left(\frac{\vec{u}}{u} \cdot \text{grad}E \right) = u \frac{dE}{ds} = 0$$

$$\text{do đó: } \frac{dE}{ds} = 0.$$

Chú ý rằng ds là lấy trên đường dòng (vì nhân vô hướng với \vec{u}) nên:

$$E = \text{const} \quad (\text{dọc đường dòng}).$$

3. Nhân vô hướng hai vế của (3-88") với $\vec{\Omega}$ thì được:

$$\vec{\Omega} \cdot \text{grad}E = \Omega \cdot \left(\frac{\vec{\Omega}}{\Omega} \cdot \text{grad}E \right) = 0.$$

$$\text{hoặc: } \Omega \cdot \left(\frac{\vec{\Omega}}{\Omega} \cdot \text{grad}E \right) = \Omega \frac{dE}{d\ell} = 0$$

$$\text{do đó: } \frac{dE}{d\ell} = 0.$$

Chú ý rằng $d\ell$ là lấy trên đường xoáy (vì nhân vô hướng với $\vec{\Omega}$) nên:

$$E = \text{const} \quad (\text{dọc đường xoáy}).$$

4. Với $\vec{\Omega} \parallel \vec{u}$, ta sẽ có $\vec{\Omega} \times \vec{u} = 0$ và theo (3-88")

$$\text{grad}E = 0$$

do đó: $E = \text{const}$

với tất cả mọi điểm.

Đó là trường hợp của *chuyển động xoắn*.

Sau khi xác định phạm vi ứng dụng của tích phân Bécnuiy (3-90), ta xét hai trường hợp về lực khối lượng có thể thường gặp trong thủy lực học: trường hợp lực có thể đơn thuần là trọng lực và trường hợp lực có thể là trọng lực và lực quán tính.

1. Trường hợp lực có thể là trọng lực

Trong hệ tọa độ vuông góc mà trục Oz đặt theo phương thẳng đứng hướng lên trên, khi lực khối lượng là trọng lực thì:

$$F_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z} = -g$$

Do đó: $\pi = gz + C$.

Biểu thức (3-80) viết thành:

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const.}$$

Nếu viết cho một đơn vị trọng lượng, ta chia hai vế cho g và được:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = C, \quad (3-91)$$

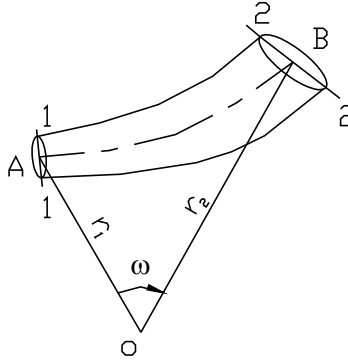
C là hằng số tích phân. Biểu thức (9-31) thường được gọi là phương trình Bécnuiy, là một trong những phương trình quan trọng nhất trong thủy lực.

Chú ý rằng khi nghiên cứu phương trình Bécnuiy của dòng nguyên tố chất lỏng lý tưởng chảy ổn định (§3-7), ta tìm được biểu thức (3-12) giống như biểu thức (3-91). Nhưng khi suy diễn biểu thức (3-12) bằng định luật động năng, hằng số C (tức là trị số năng lượng đơn vị có trị số không đổi dọc theo dòng nguyên tố đang xét; ở những dòng nguyên tố khác nhau C có trị số khác nhau. Kết luận này của phương trình (3-12) ứng với trường hợp 2 của phương trình (3-90), tức là trường hợp C giữ không đổi dọc theo đường dòng. Rõ ràng là cách suy diễn phương trình Bécnuiy theo mẫu dòng nguyên tố và bằng định luật động năng không cho ta thấy hết được 4 trường hợp ứng dụng của nó, như vừa trình bày ở trên. Suy diễn phương trình Bécnuiy (3-91) từ tích phân Bécnuiy (3-90), ta có thể kết luận rằng phương trình Bécnuiy (3-91) áp dụng được cho cả chuyển động thế và chuyển động xoáy. Trong chuyển động thế, cơ năng đơn vị ở bất kỳ điểm nào của dòng chảy cũng đều bằng nhau; trong chuyển động xoáy, cơ năng đơn vị giữ không đổi hoặc dọc theo đường dòng hoặc dọc theo đường xoáy, cơ năng đơn vị có trị số khác nhau ở những đường dòng khác nhau hoặc ở những đường xoáy khác nhau; riêng ở trường hợp đặc biệt là chuyển động xoáy đồng thời là chuyển động xoắn, thì cơ năng đơn vị có trị số như nhau ở mỗi điểm của môi trường chất lỏng chuyển động.

2. Trường hợp lực có thể là trọng lực và lực quán tính

Giả sử lực quán tính là lực ly tâm, xuất hiện trong trường hợp hệ thống chất lỏng quay xung quanh một trục. Thí dụ chất lỏng chuyển động theo đường đi AB và đường đi AB này lại quay xung quanh một trục thẳng đứng với tốc độ góc ω (hình 3-36). Như vậy, ngoài gia tốc trọng lực g , mỗi phần tử chất lỏng còn chịu thêm một gia tốc $\omega^2 r$ do lực ly tâm sinh ra, r là khoảng cách của phần tử chất lỏng đang xét đến trục quay; khi đó:

$$F_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x} = \omega^2 x, \quad F_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y} = \omega^2 y, \quad F_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z} = -g.$$



Hình 3-36

Vậy từ $-\mathrm{d}\pi = F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z$, sau khi tích phân ta có:

$$-\pi = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz + C' = \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz + C',$$

trong đó C' là hằng số tích phân.

Từ phương trình (3-90), ta viết được:

$$gz - \frac{\omega^2 r^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (3-92)$$

Viết cho một đơn vị trọng lượng chất lỏng, phương trình (3-92) có dạng:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = C \quad (3-93)$$

Đối với hai điểm 1 và 2 cùng lấy trên một đường dòng, ta viết được (3-93) dưới dạng

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} - \frac{\omega^2 r_2^2}{2g}, \quad (3-94)$$

trong đó chú ý rằng u_1 và u_2 là vận tốc của chuyển động tương đối, tức là vận tốc đối với hệ thống chất lỏng đang quay.

Nếu đặt: $h_i' = \frac{\omega^2}{2g}(r_2^2 - r_1^2)$ và gọi h_i' là cột nước quán tính trong đoạn đường dòng từ điểm 1 đến điểm 2, phương trình (3-94) viết thành:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} - h_i' \quad (3-95)$$

Trong trường hợp chất lỏng nhớt, có tổn thất năng lượng h_w' khi một đơn vị trọng lượng chất lỏng di chuyển từ điểm 1 đến điểm 2, phương trình Bécnuuy có tính đến lực quán tính (3-95) viết thành:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w' - h_i' \quad (3-96)$$

Một thí dụ ứng dụng phương trình (3-96) là trường hợp dòng chảy trong đường rãnh (với vận tốc tương đối là u) giữa các tấm lá của máy thủy lực quay với vận tốc góc là ω .

§3-25. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG NHỚT (Phương trình Naviê-Stốc)

Những phương trình chuyển động của chất lỏng lý tưởng có lực mặt là ứng suất pháp tuyến p tại một điểm của phân tố diện tích đang xét, trị số của ứng suất tại điểm đó không phụ thuộc vào hướng đặt của phân tố diện tích.

Phương trình đó dưới dạng véctơ là (3-80')

$$\frac{\vec{du}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p$$

Khi chất lỏng là chất lỏng nhớt, thì đối với lượng vô hướng p đó, ta phải cộng thêm những ứng suất pháp tuyến và tiếp tuyến; những ứng suất này phụ thuộc phương hướng của nhân tố diện tích, do đó ứng suất tại một điểm của phân tố diện tích $d\omega$ nói chung không còn vuông góc với $d\omega$. Phương trình chuyển động của chất lỏng nhớt viết thành:

$$\frac{\vec{du}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad}p - \vec{f}, \quad (3-97)$$

trong đó \vec{f} là tập hợp những lực nhớt hoặc ứng suất nhớt, tác dụng lên đơn vị khối lượng của chất lỏng.

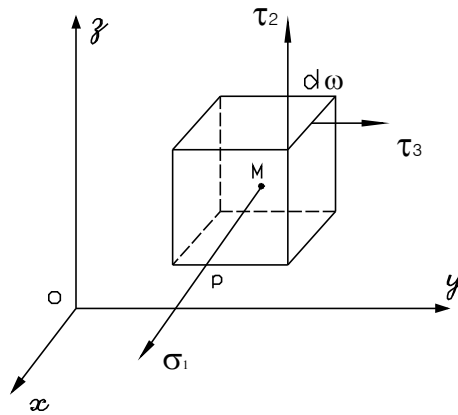
1. Xác định những ứng suất trong chuyển động của chất lỏng nhớt

Ta xét chuyển động của một phần tử chất lỏng, vận tốc tại tâm $M(x, y, z)$ là $u(x, y, z, t)$. Tại một thời điểm cho trước, ứng suất lên một phân tố diện tích $d\omega$ có tâm M phụ thuộc phương hướng của phân tố đó.

Ta đã biết (§1-6) rằng có thể xác định được ứng suất tại M khi đã biết những ứng suất tác dụng lên ba phân tố diện tích có tâm M và vuông góc với những trục tọa độ. Gọi $p + \sigma$ là những thành phần pháp tuyến và τ là những thành phần tiếp tuyến, ta có thể lập bảng sau đây về những ứng suất, đối xứng đối với đường chéo thứ nhất (bảng này còn gọi là tensor ứng suất):

$$\begin{array}{|ccc|} \hline p + \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & p + \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & p + \sigma_3 \\ \hline \end{array} \quad (3-98)$$

Ở đây, áp suất p là lượng vô hướng, không phụ thuộc phương của $d\omega$, còn những thành phần σ và τ đều là những ứng suất nảy sinh ra do nguyên nhân nhót (chú ý rằng đối với chất lỏng lý tưởng thì $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$).



Hình 3-37

Hình 3-37 cho thấy các ứng suất đối với một phân tố diện tích $d\omega$ vuông góc với Ox .

Riêng những ứng suất nhót lập thành bảng sau đây (bảng này còn gọi là tensor ứng suất nhót):

$$\begin{array}{|ccc|} \hline \sigma_1 & \tau_3 & \tau_2 \\ \tau_3 & \sigma_2 & \tau_1 \\ \tau_2 & \tau_1 & \sigma_3 \\ \hline \end{array} \quad (3-99)$$

ứng với nội dung sau đây:

Ứng suất tác dụng lên mặt vuông góc với	Ứng suất song song với		
	Ox	Oy	Oz
Ox	σ_1	τ_3	τ_2
Oy	τ_3	σ_2	τ_1
Oz	τ_2	τ_1	σ_3

Sau đây ta xác định quan hệ giữa các ứng suất do nguyên nhân nhớt và những đặc trưng của chuyển động của chất lỏng nhớt.

2. Những quan hệ giữa biến hình và những ứng suất nhớt

Ta đã biết chuyển động của một phần tử chất lỏng có thể phân tích thành ba dạng: chuyển động tịnh tiến, chuyển động quay và chuyển động biến hình.

Trong chuyển động tịnh tiến và quay, phần tử chất lỏng di chuyển thành một khối như vật rắn. Những đặc trưng thuộc tính của chất lỏng chỉ thể hiện trong sự biến hình của phần tử chất lỏng, như vậy những hiện tượng về tính nhớt tất nhiên phải đặc biệt gắn với những biến hình đó. Từ đó ta có thể coi rằng những ứng suất nhớt có quan hệ với những vận tốc biến hình: vận tốc biến hình tương đối về độ dài và vận tốc biến hình góc. Nếu ta giả thiết rằng những vận tốc biến hình đó là nhỏ, ta có thể khai triển những quan hệ đó ra cấp số Taylo và chỉ giữ những số hạng đầu. Như vậy ta có thể viết ra những hàm số tuyến tính và thuần nhất biểu thị hai giả thiết sau đây về những ứng suất nhớt.

Giả thiết thứ nhất: Những thành phần tiếp tuyến τ của những ứng suất nhớt tỉ lệ với những vận tốc biến hình góc, tức là:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= -\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \\ \tau_2 &= -\mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \\ \tau_3 &= -\mu \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{3-100}$$

Như vậy những biến hình góc tương ứng với sự trượt ở bên trong phần tử.

Giả thiết thứ hai: Những thành phần pháp tuyến σ của những ứng suất nhớt là những hàm tuyến tính của những vận tốc biến hình tương đối về độ dài:

$$\left. \begin{aligned}\sigma_1 &= -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_2 &= -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \sigma_3 &= -2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{3-101}$$

Hai giả thiết này được nghiệm đúng đối với chuyển động của *chất lỏng không nén được*, đồng chất, đẳng hướng và có vận tốc biến hình nhỏ; hệ số tỉ lệ μ chính là hệ số nhớt mà ta đã biết.

3. Áp suất tại một điểm trong chất lỏng chuyển động

Ta xem xét một phần tử diện tích $d\omega$ có tâm M, đặt vuông góc với trục Ox; thành phần ứng suất pháp tuyến của phần tử diện tích đó (hình 3-37) là:

$$p_1 = p + \sigma_1 = p - 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (3-102)$$

trong đó p là áp suất tại điểm M không phụ thuộc hướng đặt của $d\omega$ xung quanh M. Khi xét một phần tử chất lỏng, chúng ta đã biết là p luôn luôn hướng vào phía trong của phần tử, ta cũng sẽ đặt hướng σ_1 là dương theo cùng chiều.

Khi chất lỏng đứng cân bằng, tất cả các đạo hàm đều triệt tiêu, chỉ còn lại ứng suất pháp tuyến p ; đó là áp suất của chất lỏng lý tưởng. Ta thấy lại rằng trạng thái tĩnh của chất lỏng lý tưởng và của chất lỏng nhớt là như nhau.

Khi chất lỏng thực có một vận tốc, mà xung quanh điểm M tất cả những gradien vận tốc như $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ đều nhỏ, thì sự phân bố áp suất cũng gần tương tự như ở chuyển động của chất lỏng lý tưởng; điều này thường xảy ra trong thực tiễn tại những vùng chảy ở xa mặt rắn.

4. Phương trình Naviê-Stốc

Ta viết phương trình chuyển động của một phần tử chất lỏng thực hình hộp, có cạnh dx, dy, dz , bằng cách lập luận như đối với chuyển động của phần tử chất lỏng lý tưởng, chỉ khác là trong trường hợp này ta phải cộng thêm những lực nhớt.

Ta hãy viết phương trình động lực học trên trục Ox (hình 3-38). Hình chiếu lên Ox của ba loại lực tác dụng là:

- Lực khối:

$$F_x = \rho dx dy dz;$$

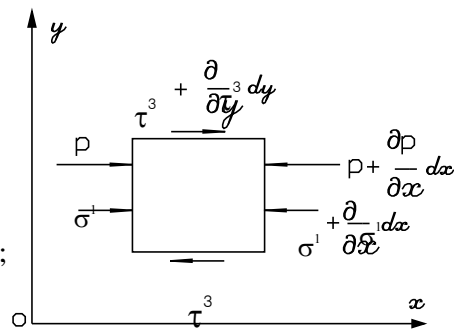
- Áp lực:

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz;$$

- Những lực sinh ra bởi những ứng suất nhớt tác dụng lên các mặt khác nhau của hình hộp:

Trên những mặt vuông góc với Ox:

$$\left[\sigma_1 - \left(\sigma_1 + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx \right) \right] dy dz = - \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx dy dz;$$



Hình 3-38

Trên những mặt vuông góc với Oy:

$$\left[\tau_3 - \left(\tau_3 + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} dy \right) \right] dx dz = - \frac{\partial \tau_3}{\partial y} dx dy dz ;$$

Trên những mặt vuông góc với Oz:

$$\left[\tau_2 - \left(\tau_2 + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} dz \right) \right] dx dy = - \frac{\partial \tau_2}{\partial z} dx dy dz .$$

Như vậy tổng hợp những lực nhót chiếu lên Ox là:

$$- \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Hình chiếu lên Ox của lực quán tính là:

$$\rho dx dy dz \frac{du_x}{dt}$$

Vậy phương trình động lực học viết theo trục Ox là:

$$\frac{du_x}{dt} \rho dx dy dz = \rho F_x dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz - \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) dx dy dz$$

hoặc:

$$\frac{du_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} \right) \quad (3-103)$$

Nếu thay σ_1 , τ_3 , τ_2 bằng những trị số rút ra từ (3-100) và (3-101), ta viết lại (3-103) thành:

$$\frac{du_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{2\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right)$$

hoặc:

$$\frac{du_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \quad (3-104)$$

trong đó: v - hệ số nhót động học, $v = \frac{\mu}{\rho}$.

Nhận xét rằng có thể dùng toán tử Δ để viết:

$$\Delta u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2},$$

và do tính liên tục của chất lỏng mà ta có thể viết:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

nên phương trình (3-104) thu gọn lại được thành:

$$\frac{du_x}{dt} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_x \quad (3-105)$$

Lập luận tương tự đối với phương trình động lực trên các trục Oy và Oz, thì ta đạt được hệ thống ba phương trình vi phân chuyển động của chất lỏng nhớt không nén được, gọi là *phương trình Naviê-Stốc*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_x \\ \frac{du_y}{dt} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta u_y \\ \frac{du_z}{dt} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z \end{aligned} \right\} \quad (3-106)$$

hoặc viết dưới dạng véctơ:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{u}. \quad (3-107)$$

So sánh với (3-97), thì:

$$-\vec{f} = \nu \Delta \vec{u}. \quad (3-108)$$

Hệ phương trình (3-106) được Naviê tìm ra năm 1822 xuất phát từ những giả thiết về những lực phân tử và được Stốc lập lại năm 1845, theo lập luận đang được trình bày, xuất phát từ giả thiết là những ứng suất pháp tuyến và tiếp tuyến do tính nhớt gây ra là những hàm số tuyến tính của những vận tốc biến hình, phù hợp với định luật ma sát trong Niuton.

Nếu người ta biết tích phân phương trình Naviê-Stốc, có tính đến những điều kiện biên biểu thị bằng hàm số của thời gian và nói riêng có tính đến lực của thành, thì người ta có thể giải những bài toán thủy động lực học bằng giải tích.

Việc tích phân các phương trình này vấp phải những khó khăn chưa giải quyết được, vì những số hạng liên quan đến tính nhớt $\left(\nu \Delta \vec{u} \right)$ và những số hạng liên quan đến gia tốc

$\frac{d\vec{u}}{dt}$ đều cùng một độ lớn. Đây chính lại là điều người ta thường gặp trong thực tiễn, tại vùng lân cận những thành rắn. Vì vậy thường phải dùng thí nghiệm để dễ nghiên cứu những điều kiện của dòng chảy.

5. Một số trường hợp đặc biệt, đơn giản của phương trình Naviê-Stốc

a) Nếu $v = 0$, ta trở lại phương trình chuyển động Ôle của chất lỏng lý tưởng (3-80) hoặc (3-80').

b) Nếu $v = 0$ và $\vec{u} = 0$, ta trở lại phương trình Ôle thủy tĩnh (2-6) hoặc (2-6').

c) Nếu chuyển động là thẳng và đều, tức là $\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ và $\Delta\vec{u} = 0$, ta tìm lại phương trình thủy tĩnh (2-6) hoặc (2-6') và áp suất tại mọi điểm của chất lỏng tuân theo định luật thủy tĩnh.

d) Ta có một ống dòng với *độ cong không đáng kể*, vận tốc \vec{u} song song với trục Ox. Như vậy $u = u_x$ và $u_y = u_z = 0$. Phương trình Naviê-Stốc viết cho các trục Oy và Oz trở thành:

$$\left. \begin{aligned} F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Điều đó chứng tỏ rằng trên mặt phẳng zOy vuông góc với đường dòng, sự phân bố áp suất tuân theo quy luật thủy tĩnh. Ở đây ta lại thấy đặc tính của dòng đối dẫn mà ta đã nêu ở §3-11.

e) Nếu dòng chảy có *thế lưu tốc* thì ta có thể viết theo (3-64')

$$\vec{u} = \text{grad}\varphi$$

và do đó:

$$\Delta\vec{u} = \Delta\text{grad}\varphi = \text{grad}\Delta\varphi = 0.$$

Vậy phương trình Naviê-Stốc, trong trường hợp này, đã trở thành phương trình chuyển động Ôle của chất lỏng lý tưởng (3-80). Ta có thể nói rằng khi dòng chảy của chất lỏng nhớt có thế lưu tốc, thì chuyển động ấy được coi như chuyển động của chất lỏng lý tưởng.

6. Suy diễn phương trình Bécnuily của chất lỏng thực

Trong nhiều trường hợp thường gặp ở thực tế, lực khối \vec{F} là lực có thế và ở trường hợp này ta xét lực đó là trọng lực.

Như vậy ta có:

$$\vec{F} = -\text{grad}(gz) \quad (3-109)$$

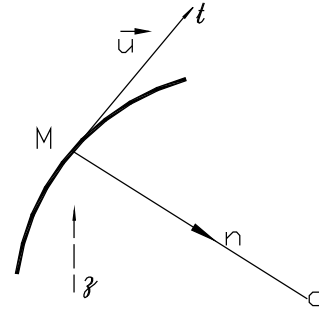
trục z đặt thẳng đứng, chiều dương hướng lên trên. Phương trình Naviê-Stốc, trong trường hợp này, có thể viết dưới dạng véctơ như sau:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\text{grad}(gz) - \frac{1}{\rho} \text{grad}p - \vec{f} \quad (3-110)$$

hoặc:
$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\text{grad}\left(gz + \frac{p}{\rho}\right) - \vec{f} \quad (3-111)$$

3 véctơ này đều cùng nằm trong một mặt phẳng, \vec{f} là sức ma sát đối với một đơn vị khối lượng chất lỏng.

Chiếu đẳng thức véctơ này lên tiếp tuyến Mt và lên pháp tuyến Mn của quỹ đạo, những thành phần của $\frac{d\vec{u}}{dt}$ lần lượt là $\frac{du}{dt}$ và $\frac{u^2}{R}$ (R là bán kính cong MC của quỹ đạo tại M), (hình 3-39).



Hình 3-39

Chúng ta có được (đối với chuyển động ổn định):

$$u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}\left(gz + \frac{p}{\rho}\right) - f_t, \quad (3-112)$$

$$\frac{u^2}{R} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(gz + \frac{p}{\rho}\right) - f_n \quad (3-113)$$

trong đó f_t và f_n là những hình chiếu của lực ma sát \vec{f} .

Nhân hai vế của phương trình thứ nhất cho một vi phân dài trên quỹ đạo $ds = udt$, ta được đẳng thức sau đây, viết theo quỹ đạo (cũng là theo đường dòng):

$$udu = -d\left(gz + \frac{p}{\rho}\right) - f_t ds \quad (3-114)$$

$$\text{hoặc: } d\left(\frac{u^2}{2}\right) = -d\left(gz + \frac{p}{\rho}\right) - f_t ds \quad (3-115)$$

Đặt $f_t ds = d\tau$ là công nguyên tố sinh ra trên quỹ đạo bởi những lực ma sát đối với một đơn vị khối lượng. Chia cho g , ta được:

$$d\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) = -\frac{d\tau}{g} = -dh'_w \quad (3-116)$$

$$\text{hoặc: } d\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + h'_w\right) = 0 \quad (3-117)$$

dh'_w là công nguyên tố sinh ra bởi lực ma sát đối với một đơn vị trọng lượng của chất lỏng tức là *tổn thất cột nước*.

Tích phân dọc theo quỹ đạo, ta được:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} + h'_w = \text{const} = H. \quad (3-118)$$

Đó là phương trình Bécnuiy viết cho một đơn vị trọng lượng chất lỏng thực, mà ta đã gặp ở (3-13'), (§3-8); ý nghĩa thủy lực hoặc hình học của đẳng thức (3-118) được thấy rõ trên hình 3-12, (§3-10).

Chương IV

TỒN THẤT CỘT NƯỚC TRONG DÒNG CHẢY

§4-1. NHỮNG DẠNG TỒN THẤT CỘT NƯỚC

Trong phương trình Bécnuivy viết cho toàn dòng chảy thực (3-25), số hạng h_w là năng lượng của một đơn vị trọng lượng chất lỏng bị tổn thất để khắc phục sức cản của dòng chảy trong đoạn dòng đang xét. Ta còn gọi h_w là tổn thất cột nước.

Để tiện việc nghiên cứu, ta chia tổn thất cột nước làm hai dạng:

- Tổn thất dọc đường sinh ra trên toàn bộ chiều dài dòng chảy đều hoặc không đều đối dân, ta ký hiệu tổn thất này bằng h_d ; thí dụ: tổn thất trong ống thẳng dẫn nước.

- Tổn thất cục bộ sinh ra tại những nơi cá biệt, ở đó dòng chảy bị biến dạng đột ngột; ta ký hiệu tổn thất này bằng h_c ; thí dụ: tổn thất tại nơi ống uốn cong, ống mở rộng, nơi có đặt khóa nước v.v...

Nguyên nhân của tổn thất cột nước, dù dưới dạng nào, cũng do sự ma sát giữa các phân tử chất lỏng tức do ma sát trong sinh ra. Công tạo nên bởi lực ma sát này biến thành nhiệt năng mất đi không thể lấy lại cho dòng chảy.

Với giả thiết là các dạng tổn thất trên xảy ra độc lập đối với nhau, thì tổn thất năng lượng h_w của dòng chảy có thể viết như sau:

$$h_w = \sum h_d + \sum h_c, \quad (4-1)$$

trong đó:

$\sum h_d$ - tổng cộng các tổn thất dọc đường của dòng chảy;

$\sum h_c$ - tổng cộng các tổn thất cục bộ của dòng chảy.

Trong những tiết sắp tới, ta nghiên cứu kỹ sự tổn thất dọc đường của dòng chảy đều. Trước hết, ta cần tìm phương trình cơ bản của dòng chảy đều.

§4-2. PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN CỦA DÒNG CHẢY ĐỀU

Ta cần tìm mối quan hệ giữa tổn thất cột nước dọc đường với ma sát trong dòng chảy đều.

Trong dòng chảy đều có áp hoặc không áp (dòng chảy đầy ống hoặc ở kênh hở), ta lấy một đoạn dòng dài l giới hạn bởi những mặt cắt ướt 1-1 và 2-2 (hình 4-1a và 4-1b), phương chảy lập với phương thẳng đứng một góc θ .

Gọi ω là diện tích mặt cắt, trong dòng chảy đều $\omega = \text{const}$ dọc theo dòng chảy. Độ cao của trọng tâm các mặt cắt 1-1 và 2-2 đối với mặt chuẩn nằm ngang 0-0 là z_1 và z_2 áp suất thủy động tại những tâm ấy là p_1 và p_2 . Trong dòng chảy đều áp suất thủy động trên mặt cắt ướt phân bố theo quy luật thủy tĩnh (xem §3-22). Trong ống (tức là dòng chảy có áp) thì áp suất tại trọng tâm có thể biểu thị qua cột nước áp suất $\frac{p_1}{\gamma}$ và $\frac{p_2}{\gamma}$ kể từ trọng tâm mặt cắt, còn trong kênh hở (tức là dòng chảy không áp) thì áp suất tại trọng tâm đo bởi độ ngập sâu của trọng tâm. Ta gọi τ_0 là ứng suất tiếp tuyến biểu thị sự ma sát trên đơn vị diện tích, trên mặt thành ống hoặc kênh.

Các ngoại lực tác dụng lên đoạn dòng chất lỏng chảy đều, chiếu theo phương của trục dòng là:

1. Lực khối lượng: ở đây lực khối lượng duy nhất là trọng lực $G = \gamma\omega l$, có điểm đặt tại trọng tâm đoạn dòng; hình chiếu của nó lên trục dòng chảy là $G\cos\theta = \gamma\omega l\cos\theta$. Trong dòng chảy đều không có gia tốc, do đó, lực quán tính bằng không.

2. Lực mặt:

a) Có động áp lực $P_1 = p_1\omega$ và $p_2 = p_2\omega$ tác dụng thẳng góc với mặt cắt ướt; những lực này song song với phương của trục dòng và hướng vào nội bộ đoạn dòng, còn các áp lực thủy động tác dụng lên mặt bên của đoạn dòng đều thẳng góc với trục dòng, do đó hình chiếu lên trục dòng bằng không.

b) Ngoài ra, ở mặt bên của đoạn dòng đang xét còn sức ma sát đặt ngược chiều chảy, bằng tích số của ứng suất tiếp tuyến τ_0 với diện tích mặt bên: $\tau_0\chi l$, trong đó χ là chu vi ướt.

Vì là chảy đều, tức chuyển động không có gia tốc, nên tổng số hình chiếu các lực trên phương trục dòng bằng không:

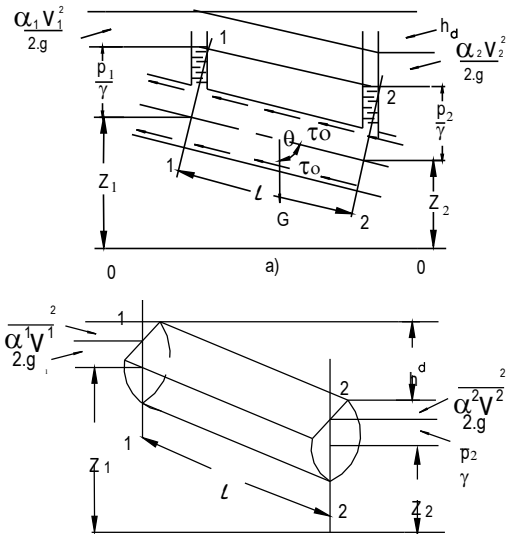
$$p_1\omega - p_2\omega - \tau_0\chi l + \gamma\omega l\cos\theta = 0 \quad (4-2)$$

Trên hình vẽ ta thấy:

$$\cos\theta = \frac{z_1 - z_2}{l} \quad (4-3)$$

Sau khi thay $\cos\theta$ bằng các trị số ở (4-3) và chia các số hạng của phương trình (4-2) cho trọng lượng $G = \gamma\omega l$ sẽ được:

$$\frac{\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)}{l} = \frac{\tau_0 \chi}{\gamma \omega} = \frac{\tau_0}{\gamma R} \quad (4-4)$$



Hình 4-1

Mặt khác, ta viết phương trình Bécnuuy cho hai mặt cắt 1-1 và 2-2:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_d$$

Trong trường hợp dòng chảy đều là có áp, ta có $v_1 = v_2$ và $\alpha_1 = \alpha_2$, do đó:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = h_d \quad (4-5)$$

Trong trường hợp dòng chảy đều là không áp, ngoài $v_1 = v_2$ và $\alpha_1 = \alpha_2$: ta còn có $p_1 = p_2$ vì độ sâu trọng tâm của hai mặt cắt đều bằng nhau, do đó:

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = z_1 - z_2 = h_d \quad (4-6)$$

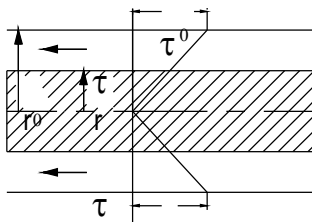
Mang những kết quả (4-5) và (4-6) thay vào (4-4) ta được:

$$\frac{\tau_0}{\gamma R} = \frac{h_d}{l}$$

Trong dòng chảy đều, tổn thất cột nước chỉ là tổn thất dọc đường h_d ; vì tỷ số $\frac{h_d}{l}$ là độ dốc thủy lực J nên:

$$\boxed{\frac{\tau_0}{\gamma} = RJ} \quad (4-7)$$

Đó là *phương trình cơ bản của dòng chảy đều*, dùng cho cả dòng chảy có áp lẫn dòng chảy không áp. Phương trình này đặt mối liên hệ giữa tổn thất cột nước dọc đường (qua J) với sức ma sát, cụ thể là với ứng suất tiếp (qua τ_0). Sự tổn thất cột nước đó phụ thuộc vào trạng thái chảy của chất lỏng mà ta sẽ nghiên cứu kỹ ở tiết tiếp sau.



Hình 4-2

Chú ý rằng tổn thất cột nước của dòng không ổn định hoặc của dòng ổn định không đều rất khó tính ra, nên thường phải giả thiết là có thể mượn công thức tổn thất cột nước của dòng chảy đều để tính.

Nhận xét. Theo cách lập luận trên, đối với dòng chảy đều có áp, phương trình (4-7) còn đúng cho phần của dòng chảy đều có bán kính $r < r_0$ (hình 4-2, phần gạch chéo). Ở phần này, ta gọi τ là ứng suất tiếp, bán kính thủy lực được tính bằng $R = \frac{r}{2}$ và theo (4-7) ta viết:

$$\frac{\tau}{\gamma} = J \frac{r}{2} \quad (4-8)$$

Đối với toàn ống bán kính r_0 , ứng suất tiếp là τ_0 , ta viết:

$$\frac{\tau_0}{\gamma} = J \frac{r_0}{2}$$

Như vậy, chia hai đẳng thức trên về đối vế, ta có:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0}$$

hoặc: $\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}$ (4-9)

Vậy: ứng suất tiếp biến thiên theo quy luật bậc nhất trên mặt cắt ống; tại tâm ($r = 0$), ứng suất tiếp bằng 0; tại thành ống ($r = r_0$), ứng suất tiếp có trị số cực đại τ_0 (hình 4-2).

Quy luật bậc nhất này cũng đúng cho dòng chảy không áp.

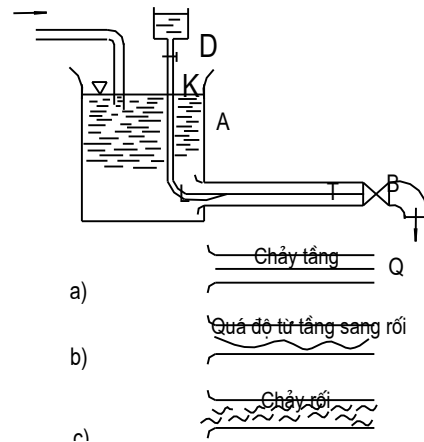
§4-3. HAI TRẠNG THÁI CHUYỂN ĐỘNG CỦA CHẤT LỎNG

1. *Thí nghiệm Rây-nôn*: Trong thực tế tồn tại hai trạng thái chảy khác nhau của chất lỏng nhớt. Tùy theo trạng thái chảy mà cấu tạo của dòng chảy, sự phân bố lưu tốc, sự phân bố ứng suất tiếp, tổn thất năng lượng v.v... có những quy luật khác nhau. Từ đầu thế kỷ thứ 19 người ta đã sơ bộ biết có những trạng thái chảy khác nhau này (Haghen, năm 1839 và 1840; Mendélép năm 1880); nhưng tới năm 1883, nhà vật lý học Anh O. Rây-nôn mới chứng minh bằng thí nghiệm rằng trong thực tế tồn tại hai trạng thái chảy khác biệt nhau một cách sâu sắc. Đó là một sự khám phá lớn về quy luật chuyển động của chất lỏng thực; làm cho môn thủy lực có cơ sở để phát triển mạnh mẽ lên một bước quan trọng.

Thí nghiệm Rây-nôn trình bày một cách sơ lược như dưới đây (hình 4-3).

Một thùng A khá lớn chứa nước, gắn vào nó có một ống thủy tinh dài T, có đường kính không đổi: một đầu ống này cắm sâu vào trong thùng A có miệng vào hình loa L để cho nước đi vào ống được thuận. Ở đầu kia của ống có khóa B để điều chỉnh lưu lượng đi qua ống; phía dưới chỗ ra của ống T đặt một thùng đo lưu lượng. Phía trên thùng A đặt bình D đựng nước màu có tỷ trọng của nước; gắn vào bình D một ống nhỏ, ở đầu kia của ống nhỏ này lắp một cái kim để dẫn nước màu từ bình vào ống, trên ống nhỏ cũng có khóa K để điều chỉnh lưu lượng nước màu.

Trình tự thí nghiệm như sau:



Hình 4-3

Trước hết, giữ mực nước trong thùng A cố định, không dao động. Bắt đầu thí nghiệm, mở khóa B rất ít cho nước chảy từ thùng A vào ống T. Đợi sau vài phút để dòng chảy trong ống ổn định, mở khóa K cho nước màu chảy vào ống. Lúc này quan sát ống thủy tinh T, ta thấy hiện lên một vệt màu nhỏ căng như sợi chỉ, điều này chứng tỏ rằng dòng màu và dòng nước trong ống chảy riêng rẽ không xáo trộn lẫn vào nhau. Nếu mở khóa từ từ thì hiện tượng trên có thể tiếp tục trong một thời gian nào đó. Khi đã mở đến một mức nhất định (lưu tốc trong ống đạt tới một trị số nào đó) thì vệt màu bị dao động thành hình sóng. Tiếp tục mở khóa nữa, vệt màu bị đứt đoạn, sau cùng hoàn toàn hòa lẫn vào dòng nước; lúc này dòng màu xáo trộn vào dòng nước trong ống (hình 4-3a, b, c).

Trạng thái chảy trong đó các phần tử chất lỏng chuyển động theo những tầng lớp không xáo trộn vào nhau gọi là trạng thái chảy tầng.

Trạng thái chảy trong đó các phần tử chất lỏng chuyển động vô trật tự, hỗn loạn gọi là trạng thái chảy rối.

Thí nghiệm mô tả ở trên là thí nghiệm về sự chuyển biến của dòng chảy từ trạng thái chảy tầng sang trạng thái chảy rối.

Nếu ta làm thí nghiệm ngược lại, tức là vặn khóa nhỏ lại cho lưu tốc trong ống từ lớn đến nhỏ thì thấy đến một lúc nào đó, vệt màu đang không rõ lại dần dần xuất hiện và cuối cùng hiện rõ thành sợi chỉ màu, tức là dòng chảy đang từ trạng thái chảy rối chuyển sang trạng thái chảy tầng.

Trạng thái chảy quá độ từ tầng sang rối hoặc từ rối sang tầng gọi là trạng thái chảy phân giới.

Lưu tốc ứng với dòng chảy chuyển từ trạng thái chảy tầng sang trạng thái chảy rối gọi là lưu tốc phân giới trên, ký hiệu $v_{Ktrên}$. Lưu tốc, ứng với lúc dòng chảy chuyển từ trạng thái chảy rối sang trạng thái chảy tầng gọi là lưu tốc phân giới dưới, ký hiệu $v_{Kdưới}$.

Qua thực nghiệm thấy: $v_{Ktrên} > v_{Kdưới}$.

Thí nghiệm chứng tỏ: lưu tốc phân giới không những phụ thuộc vào loại chất lỏng mà còn phụ thuộc vào đường kính ống làm thí nghiệm. Vì vậy, không thể dùng một vận tốc giới hạn nào để làm tiêu chuẩn chung phân biệt trạng thái chảy cho mọi loại chất lỏng hoặc với mọi loại đường ống được. Sau đây là cách xác định tiêu chuẩn phân biệt đó.

2. Tiêu chuẩn phân biệt hai trạng thái chảy

Dựa vào kết quả nhiều thí nghiệm, Rây-nôn đã dùng một đại lượng không thứ nguyên để đặc trưng cho trạng thái chảy, đó là số Rây-nôn, ký hiệu Re :

$$\boxed{Re = \frac{vd}{\nu}} \quad (4-10)$$

trong đó: v - lưu tốc trung bình mặt cắt;

d - đường kính ống;

ν - hệ số nhớt động học.

Trong biểu thức (4-10), đại lượng chiều dài có thể khác nhau: hoặc là đường kính d , hoặc là bán kính thủy lực R v.v... Nếu cần phân biệt để tránh nhầm lẫn, thì khi dùng đường kính d trong (4-10), ta ký hiệu Re_d , khi dùng bán kính thủy lực R ta ký hiệu Re_R .

Số Râyôn có thể coi là tỷ số giữa lực quán tính và lực ma sát nhớt. Thực vậy, vì lực quán tính là:

$$F_1 = \rho \frac{du}{dt} W$$

và lực nhớt là:

$$F_2 = \mu \frac{du}{dn} S$$

(trong đó W là thể tích, S là diện tích) nên tỷ số giữa chúng:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho \frac{du}{dt} W}{\mu \frac{du}{dn} S} = \frac{dn}{dt} \frac{W}{vS} = \frac{vl}{v}$$

rõ ràng biểu thị số Râyôn.

Trị số Râyôn tương ứng với trị số phân giới từ chảy tầng sang chảy rối, hoặc ngược lại từ chảy rối sang chảy tầng, gọi là trị số Râyôn phân giới, ký hiệu bằng Re_K .

Ứng với $v_{Ktrên}$, ta có Râyôn phân giới trên:

$$Re_{Ktrên} = \frac{v_{Ktrên} \cdot d}{\nu}$$

Ứng với $v_{Kdưới}$, ta có Râyôn phân giới dưới:

$$Re_{Kdưới} = \frac{v_{Kdưới} \cdot d}{\nu}$$

Trạng thái chảy ứng với số Râyôn $Re < Re_{Kdưới}$ bao giờ cũng là chảy tầng

Trạng thái chảy $Re > Re_{Ktrên}$ bao giờ cũng là chảy rối.

Trạng thái chảy có $Re_{Kdưới} < Re < Re_{Ktrên}$ có thể là chảy tầng hoặc chảy rối, nhưng thường là chảy rối, vì lúc này trạng thái chảy tầng không bền, chỉ cần một xáo động nhỏ cũng đủ làm cho nó biến thành chảy rối.

Qua nhiều thí nghiệm ta thấy rằng $Re_{Ktrên}$ không có một trị số xác định, thường dao động từ 12.000 đến 50.000. Trái lại, $Re_{Kdưới}$ đối với mọi loại chất lỏng và đối với đường kính khác nhau đều có một trị số không đổi và bằng 2.320. Do đó, $Re_{Kdưới}$ được dùng làm tiêu chuẩn để phân biệt trạng thái chảy. Ta coi rằng khi $Re < 2.320$ sẽ có trạng thái chảy tầng; khi $Re > 2.320$ sẽ có trạng thái chảy rối.

Đối với kênh dẫn, ta dùng bán kính thủy lực R thay cho đường kính d trong công thức (4-10): $Re_R = \frac{vR}{\nu}$. Thí nghiệm cho biết: khi $Re_R < 580$, trạng thái chảy là chảy tầng; khi $Re_R > 580$, trạng thái chảy là chảy rối. Trong thực tế công trình thủy lợi, trừ dòng thấm dưới đất, tuyệt đại đa số dòng chảy trong ống, trong kênh, trong sông thiên nhiên là chảy rối. Chỉ trong phòng thí nghiệm, khi làm các thí nghiệm mô hình, có thể gặp dòng chảy tầng.

Cần chú ý rằng những trị số Raynôn phân giới nêu trên là ứng với những dòng chảy đều trong ống và kênh.

3. Ảnh hưởng của trạng thái chảy đối với quy luật tổn thất cột nước

Trạng thái chảy rất quan trọng đối với quy luật tổn thất cột nước. Khi tốc độ chảy càng tăng, sự xáo trộn của các phần tử chất lỏng càng mạnh, do đó, chuyển động của chất lỏng càng gặp nhiều trở lực hơn. Vì vậy, trong dòng chảy rối, tổn thất năng lượng lớn hơn trong dòng chảy tầng và càng tăng khi tốc độ càng lớn. Ta nghiên cứu quan hệ giữa tổn thất cột nước dọc đường h_d và tốc độ trung bình v ứng với một loại chất lỏng nhất định, với một ống tròn nhất định. Trên ống tròn dùng để thí nghiệm (hình 4-4), lấy một đoạn dài l đặt giữa hai mặt cắt 1-1 và 2-2, ở đó có gắn ống đo áp; ứng với mỗi lưu tốc v ta đo được một độ chênh mực nước h_d trong hai ống đo áp. Áp dụng phương trình Bécnuiy cho những mặt cắt 1-1 và 2-2, ta viết được:

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_d$$

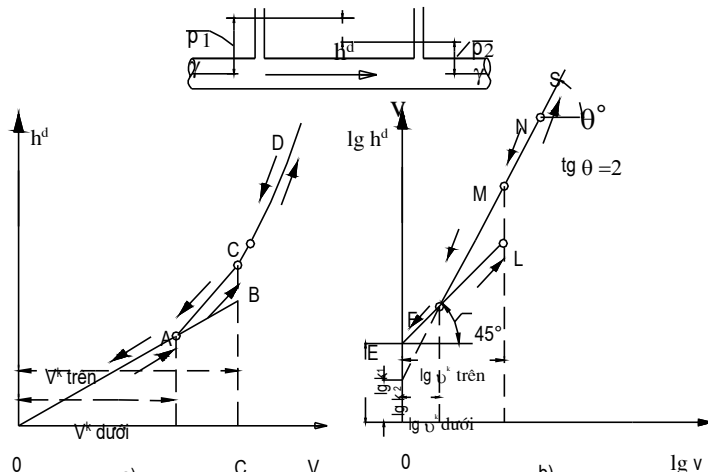
Vì đường kính ống $d = \text{const}$, nên dòng chảy là chảy đều: $v_1 = v_2$; $\alpha_1 = \alpha_2$; vì ống đặt nằm ngang, nên $z_1 = z_2$. Vậy phương trình trên viết lại thành:

$$h_d = \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

Tức là tổn thất cột nước bằng độ chênh mực nước ở hai ống đo áp (hình 4-4).

Trên đồ thị với trục tung biểu thị h_d và trục hoành biểu thị v , ta vẽ đường quan hệ giữa h_d và v trên cơ sở những điểm thí nghiệm.

Qua hình vẽ (hình 4-4a) ta thấy:



Hình 4-4

- Ứng với trạng thái chảy tầng ($v < v_{K\text{dưới}}$), đường biểu diễn OA là đường thẳng đi qua gốc:

$$h_d = k_1 v \quad (4-11)$$

trong đó k_1 là hằng số tỷ lệ.

Như vậy: trong dòng chảy tầng tổn thất cột nước dọc đường h_d tỷ lệ bậc nhất với lưu tốc trung bình mặt cắt v .

- Ứng với trạng thái chảy rối ($v > v_{Ktrên}$), đường biểu diễn AD là một đường cong có dạng:

$$h_d = k_2 v^m, \quad (4-12)$$

trong đó k_2 là hằng số tỷ lệ; m là số mũ, $m = 1,7 \div 2,0$ trong đoạn AC, $m = 2$ trong đoạn CD.

Như vậy: trong dòng chảy rối tổn thất cột nước dọc đường h_d tỷ lệ với bậc m của lưu tốc trung bình mặt cắt v , trị số m biến đổi từ 1,7 đến 2.

- Trong khu vực $v_{Kdưới} < v < v_{Ktrên}$ tồn tại 2 đoạn AB và AC: đoạn AB ứng với trường hợp quá độ từ chảy tầng sang chảy rối, đoạn AC ứng với trường hợp quá độ từ chảy rối sang chảy tầng.

Nếu lấy lôgarít hai vế của (4-11) ta được:

$$lgh_d = lgk_1 + lgv. \quad (4-13)$$

Trên hình 4-4b, phương trình (4-13) biểu thị bằng đường thẳng EL, lập với trục hoành một góc bằng 45° .

Nếu lấy lôgarít hai vế (4-12) ta được:

$$lgh_d = lgk_2 + mlgv. \quad (4-14)$$

Trên hình 4-4b, phương trình (4-14) biểu thị bởi đoạn FS gồm hai phần:

FM có $1,7 \leq m \leq 2$ và phần MN có $m = 2$. Sau đây, chúng ta nghiên cứu công thức tổng quát tính tổn thất dọc đường trong dòng chảy đều chung cho trạng thái chảy tầng và chảy rối, chung cho chảy có áp và không áp.

Thí dụ 1: Tìm trạng thái chảy của nước trong ống có đường kính $d = 200$ mm, lưu tốc trung bình $v = 1$ m/s, hệ số động học nhớt $\nu = 0,01$ cm²/s.

Giải: Ta tính trị số Re theo (4-10); với $v = 100$ cm/s, $d = 20$ cm, $\nu = 0,01$ cm²/s, ta tính ra:

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{100 \times 20}{0,01} = 200.000 > 2.320$$

Vậy trạng thái chảy là chảy rối.

Thí dụ 2: Tìm trạng thái chảy của dầu trong ống có đường kính $d = 150$ mm, lưu tốc trung bình $v = 0,3$ m/s, hệ số nhớt động học $\nu = 0,28$ cm²/s.

Giải: Ta tính trị số Re theo (4-10); với $v = 30$ cm/s, $d = 15$ cm, $\nu = 0,28$ cm²/s, ta tính ra:

$$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{30 \times 15}{0,28} = 1.600 < 2.320$$

Vậy trạng thái chảy là chảy tầng.

§4-4. TRẠNG THÁI CHẢY TẦNG TRONG ỐNG

Trạng thái chảy tầng đặc trưng bởi số Raynôn ($Re < 2,320$), nói chung, trong thực tế ít gặp. Nó chỉ xuất hiện trong ống dẫn dầu của máy móc, trong nước ngầm dưới đất v.v... Nhiều vấn đề chảy tầng có thể hoàn toàn giải quyết bằng lý luận.

Việc nghiên cứu dòng chảy tầng không những giúp ta tính toán các dòng chảy tầng khi cần thiết mà qua đó, còn giúp ta so sánh và phân biệt sâu hơn dòng chảy tầng với dòng chảy rối, do đó, có thể hiểu dòng chảy rối được rõ hơn. Ta nghiên cứu dòng chảy tầng về mặt sau đây:

1. Sự phân bố lưu tốc trong dòng chảy tầng

Trong trạng thái chảy tầng, ứng suất tiếp hoàn toàn sinh ra bởi tính nhớt của chất lỏng và được xác định theo công thức của Niu-ton (1-7), viết ở trường hợp này dưới dạng:

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr}, \quad (4-15)$$

trong đó: μ - hệ số nhớt động lực;

u - lưu tốc của lớp chất lỏng;

r - khoảng cách từ tâm ống đến lớp chất lỏng đang xét.

Chú ý rằng lưu tốc u càng tăng khi càng ra giữa ống, tức là khi r càng giảm, do đó, bao giờ cũng có $\frac{du}{dr} < 0$, cho nên, muốn cho τ luôn luôn dương, cần phải đặt dấu trừ phía trước $\frac{du}{dr}$.

Mặt khác, ta đã biết trong dòng chảy đều, theo (4-8):

$$\tau = \gamma J \frac{r}{2} \quad (4-8)$$

Muốn xác định quy luật phân bố lưu tốc u , ta so sánh (4-8) với (4-15) và viết:

$$\gamma J \frac{r}{2} = -\mu \frac{du}{dr}$$

do đó:

$$du = -\frac{\gamma J}{2\mu} r dr.$$

Sau khi tích phân, ta có:

$$u = -\frac{\gamma J}{4\mu} r^2 + C \quad (4-16)$$

Để xác định hằng số C, ta xét điều kiện biên giới: tại thành ống ($r = r_0$), có $u = 0$.

$$\text{Vậy: } 0 = -\frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2 + C,$$

$$\text{do đó: } C = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2.$$

Thay vào (4-16) ta được:

$$\boxed{u = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)} \quad (4-17)$$

Theo (4-17), ta thấy rằng sự phân bố lưu tốc trên mặt cắt của dòng chảy tầng tuân theo quy luật Parabol (hình 4-5): tại thành ống $u = 0$, tại tâm ống có lưu tốc lớn nhất u_{\max} bằng:

$$u_{\max} = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2 = \frac{\gamma J}{16\mu} d^2 \quad (4-18)$$

Vậy công thức (4-17) có thể viết dưới dạng:

$$u = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (4-19)$$

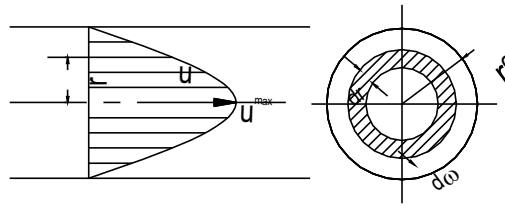
Nhân đây, ta xác định quan hệ giữa lưu tốc trung bình v và lưu tốc cực đại u_{\max} . Trên mặt cắt ướt của dòng chảy tầng trong ống trên, ta lấy một diện tích vô cùng nhỏ hình vành khăn $d\omega$, khoảng cách tới tâm ống là r , tại đó dòng chảy có lưu tốc là u (hình 4-5). Lưu lượng dQ đi qua $d\omega$ là:

$$dQ = u d\omega,$$

diện tích $d\omega$ tính bằng:

$$d\omega = 2\pi r dr,$$

do đó: $dQ = 2\pi u r dr.$



Hình 4-5

Lưu lượng đi qua toàn mặt cắt Q bằng:

$$Q = \int_{\omega} dQ = \int_0^{r_0} 2\pi u r dr = 2\pi \int_0^{r_0} u r dr$$

Thay u bằng biểu thức (4-17), ta được:

$$Q = 2\pi \frac{\gamma J}{4\mu} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr$$

$$Q = \frac{\pi \gamma}{8\mu} J r_0^4 = \frac{\pi \gamma}{128\mu} J d^4 \quad (4-20)$$

hoặc: $Q = MJd^4$, (4-20')

trong đó: $M = \frac{\pi\gamma}{128\mu}$.

Hệ số M chỉ phụ thuộc loại chất lỏng.

Công thức (4-20) hoặc (4-20') biểu diễn định luật Poazơ (1840): lưu lượng của dòng chảy tầng qua ống tròn tỉ lệ với độ dốc thủy lực và tỉ lệ bậc 4 với đường kính (hoặc bán kính).

Chú ý rằng ta có thể kiểm nghiệm công thức Poazơ bằng thí nghiệm một cách khá chính xác và bằng công thức này ta có thể làm thí nghiệm để xác định hệ số nhớt μ của chất lỏng cần xét.

Đưa u_{\max} tính theo (4-18) vào công thức (4-20) ta viết được:

$$Q = \pi r_0^2 \frac{u_{\max}}{2}$$

Lưu tốc trung bình tính bằng:

$$v = \frac{Q}{\omega} = \frac{\pi r_0^2 \frac{u_{\max}}{2}}{\pi r_0^2},$$

hoặc: $v = \frac{u_{\max}}{2}$ (4-21)

Như vậy, trong dòng chảy tầng, *lưu tốc trung bình bằng nửa lưu tốc cực đại*; ta có thể viết:

$$v = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2 = \frac{\gamma J}{32\mu} d^2 \quad (4-21')$$

2. Tổn thất dọc đường trong dòng chảy tầng

Từ (4-21') có:

$$J = 32 \frac{\mu v}{\gamma d^2}$$

Thay thế $J = \frac{h_d}{l}$ vào phương trình trên, ta có:

$$h_d = \frac{32\mu l}{\gamma d^2} v = Av, \quad (4-22)$$

trong đó $A = \frac{32\mu l}{\gamma d^2}$ không phụ thuộc v.

Công thức (4-22) nói rằng trong dòng chảy tầng tổn thất cột nước dọc đường tỉ lệ bậc nhất với lưu tốc trung bình dòng chảy. Điều này phù hợp với thí nghiệm, nêu ở công thức

(4-11). Trong thủy lực, tổn thất cột nước thường được biểu thị theo cột nước lưu tốc $\frac{v^2}{2g}$.

Ta có thể nhân và chia (4-22) cho $\frac{v}{2}$, đồng thời thay $\gamma = \rho g$:

$$h_d = \frac{32\mu l}{\rho\gamma d^2} v = \frac{32\mu l}{\rho\gamma d^2} \frac{v}{2} \frac{2}{v} = \frac{64}{v d} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

hoặc:

$$h_d = \frac{64}{\text{Re}} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}, \quad (4-23)$$

hoặc:

$$h_d = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (4-24)$$

trong đó:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (4-25)$$

λ gọi là hệ số ma sát. Đó là một số không thứ nguyên, chỉ phụ thuộc số Râyôn mà không phụ thuộc vào thành rắn. Chú ý rằng trong dòng chảy tầng, dấu ta biểu thị tổn thất cột nước dọc đường bằng công thức (4-24), trong đó, về hình thức, h_d tỉ lệ với v^2 nhưng về thực chất thì h_d tỉ lệ với v , vì trong hệ số λ có v ở mẫu số.

Công thức (4-24) được gọi là công thức Đácxy. Ta sẽ thấy rằng trong trường hợp chảy rối, tổn thất dọc đường cũng sẽ tính bằng công thức Đácxy (§4-7), nhưng khi đó hệ số λ có trị số khác với (4-25): cách tìm sẽ nói ở §4-8.

3. Hệ số α trong ống chảy tầng: biết quy luật phân bố lưu tốc u trên mặt cắt ướt và biết trị số lưu tốc trung bình mặt cắt v , có thể tính hệ số α theo (3-22):

$$\alpha = \frac{\int u^3 d\omega}{v^3 \omega}$$

Thay $u = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$; $d\omega = 2\pi r dr$:

$$v = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2 ; \omega = \pi r_0^2,$$

ta có: $\alpha = 2 \quad (4-26)$

Thí nghiệm cho biết trong dòng chảy rối $\alpha = 1,05 \div 1$; như vậy trong dòng chảy tầng sự phân bố lưu tốc trên mặt cắt rất không đều so với sự phân bố trong dòng chảy rối.

4. *Tính chất chuyển động xoáy của dòng chảy tầng.* Mới thoạt nhìn, dễ nghĩ rằng dòng chảy tầng không phải là chuyển động xoáy. Nhưng xuất phát từ định nghĩa chuyển động xoáy xác định các thành phần $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ của vectơ vận tốc góc quay $\vec{\omega}$ theo (3-57'), ta sẽ thấy rằng dòng chảy tầng là chuyển động xoáy.

Thực vậy, sự phân bố lưu tốc trong dòng chảy tầng trong ống là:

$$u_y = 0; u_z = 0; u_x = \frac{\gamma J}{4\mu} \left[r_0^2 - (y^2 + z^2) \right] \text{ theo (4-17), các thành phần của vectơ góc}$$

quay theo (3-57) là:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = 0 \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -\frac{\gamma J}{4\mu} z, \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{\gamma J}{4\mu} y. \end{aligned} \right\} \quad (4-27)$$

Vậy $\vec{\omega} \neq 0$, dòng chảy tầng là chuyển động xoáy.

Phương trình vi phân của đường xoáy theo (3-52), bằng:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z},$$

Trong trường hợp dòng chảy tầng trong ống, thay biểu thức (4-18) vào, ta có:

$$\omega_z dy - \omega_y dz = 0,$$

$$\text{tức là: } \frac{\gamma J}{4\mu} (y dy + z dz) = 0.$$

Sau khi tích phân ta được:

$$y^2 + z^2 = C.$$

Như vậy, *đường xoáy là những vòng tròn, đồng tâm với trục ống.*

Tóm tắt lại, trong dòng chảy tầng, nguyên nhân gây ra tổn thất cột nước là tính nhớt của chất lỏng, tính nhớt có tác dụng làm sự phân bố lưu tốc trên mặt cắt ngang khá không đều, do đó gây ra chuyển động xoáy của các phần tử chất lỏng; tổn thất cột nước tỉ lệ bậc nhất với lưu tốc trung bình mặt cắt.

Sau đây, ta nghiên cứu sự quá độ của dòng chảy từ trạng thái chảy tầng sang trạng thái chảy rối.

§4-5. SỰ QUÁ ĐỘ TỪ TRẠNG THÁI CHẢY TẦNG SANG TRẠNG THÁI CHẢY RỐI

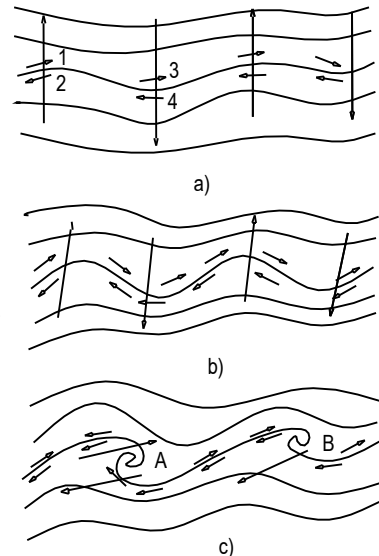
Ta nghiên cứu quá trình chuyển biến của các lớp chất lỏng từ trạng thái chảy tầng sang trạng thái chảy rối. Các lớp chất lỏng giữ trạng thái chảy tầng bền vững với những số Raynôn nhỏ hơn trị số Raynôn phân giới Re_K , nhưng khi vượt qua trị số Re_K thì dòng chảy tầng trở thành không bền vững đối với một sự xáo động nhỏ. Quá trình phát triển sự không bền vững đó có thể sơ lược giải thích như sau: giả sử có một lớp chất lỏng chảy tầng ở cách thành rắn một khoảng nhất định, do một sự xáo động nào đó xuất hiện sự uốn khúc nhẹ nhàng của một đường dòng, tạo thành một loạt những đỉnh lồi và đáy lõm của đường dòng đó (hình 4-6a). Tại khu vực đỉnh nhọn, ở phía trên đỉnh, khoảng cách giữa các đường dòng bé đi (điểm 1), lưu tốc tăng lên, do đó, áp lực giảm đi; tại phía dưới đỉnh, khoảng cách giữa các đường dòng tăng lên (điểm 2), lưu tốc giảm đi, do đó, áp lực lớn lên. Như vậy, độ chênh áp lực giữa phần dưới và phần trên ở vùng đỉnh nhọn sẽ càng ngày càng tăng lên, độ lồi của đường dòng càng phát triển. Trong khi đó, ở vùng đáy lõm thì ở phía trên đáy (điểm 3), áp lực tăng lên và ở phía dưới đáy (điểm 4), áp lực giảm đi; sự không cân bằng về lực xung quanh khu vực đáy lõm cũng làm cho độ lõm của đường dòng phát triển. Xu thế uốn khúc của toàn đường dòng ngày càng mạnh (hình 4-6b), cuối cùng hình thành những xoáy A, B v.v... (hình 4-6c), dứt hẳn khỏi lớp chất lỏng và bứt vào dòng chảy một cách vô hướng; những xoáy đó lại phân chia thành vô số xoáy nhỏ hơn, ở các lớp đều có hiện tượng hình thành các xoáy lớn, xoáy nhỏ như trên làm dòng chảy mất dần tính chất chảy thành lớp mà trở nên bao gồm vô số xoáy nhỏ di động hỗn loạn, tuy nhiên đều có xu thế xuôi dòng. Đó là sự mất bền vững của lớp chảy tầng để chuyển sang chảy rối.

Những yếu tố sau đây có ảnh hưởng đến độ bền vững của lớp chảy tầng:

- Gradient lưu tốc $\frac{du}{dy}$; nếu $\frac{du}{dy} = 0$, tức tốc độ ở các lớp đều bằng nhau thì không thể

sinh ra những xoáy được; $\frac{du}{dy}$ càng lớn thì càng có khả năng sinh ra các xoáy;

- Khối lượng đơn vị và độ nhớt của chất lỏng; giả sử chất lỏng bị xáo động, rõ ràng nếu khối lượng đơn vị ρ càng lớn thì càng dễ hình thành các xoáy; ngược lại, nếu độ nhớt μ càng lớn thì càng cản trở sự hình thành các xoáy. Chú ý về tính nhớt có đặc điểm sau đây; giả sử chất lỏng không có tính nhớt, như vậy không có gradient lưu tốc và cũng do đó, không hình thành các xoáy được; suy luận như vậy thì thấy ở tính nhớt có sự thống nhất mâu thuẫn là: tính nhớt là căn nguyên gây ra sự hình thành các xoáy nhưng tính nhớt đồng thời lại có tác dụng hạn chế những xoáy đó phát triển.



Hình 4-6

- Thành rắn có tác dụng hạn chế sự xáo động, khoảng cách y của lớp đang xét đến thành rắn càng nhỏ thì sự xáo động càng yếu, tính bền vững của lớp chảy tầng càng tăng.

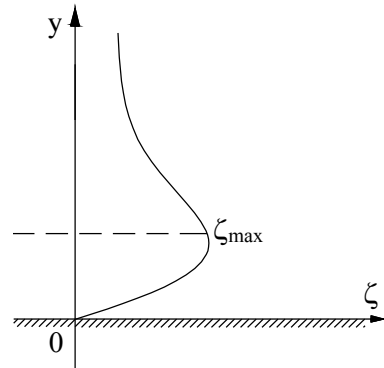
Do đó muốn biết tác động của ngoại giới sẽ làm cho những xáo động trong chất lỏng tiếp tục phát triển lên hay dần dần tiêu diệt đi, cần phải xét sự quan hệ giữa bốn yếu tố nói trên: $\frac{du}{dy}$, ρ , μ và y .

H. Rao-xơ đề nghị *chỉ tiêu bền vững* ζ của một lớp chảy tầng như sau:

$$\zeta = \frac{\rho y^2 \frac{du}{dy}}{\mu}, \quad (4-28)$$

ζ càng lớn, thì càng kém bền vững, ngược lại ζ càng nhỏ thì sự bền vững càng tăng cường. Tiêu chuẩn này có cấu tạo giống số Rây-nôn.

Ta thấy ở sát thành rắn, $y = 0$ nên $\zeta = 0$; ở rất xa thành rắn $\frac{du}{dy} = 0$ nên $\zeta = 0$; như vậy, tồn tại một trị số cực đại ζ_{\max} ở một nơi nào đó; ở nơi đó, sự bền vững của lớp chảy tầng là kém nhất. Còn có hình thành các xoáy hay không, thì còn phải xem trị số ζ có lớn hơn trị số phân giới ζ_K cần phải xác định (hình 4-7).



Hình 4-7

Ta có thể suy diễn bằng lý luận để xác định vị trí y ứng với trị số $\zeta = \zeta_{\max}$ và xác định ζ_{\max} .

1. *Tính y*: Ta lập biểu thức của ζ theo (4-28). Muốn vậy, phải xác định $\frac{du}{dy}$. Ta đã biết trong ống tròn, chảy tầng, sự phân bố lưu tốc theo (4-17):

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu} (r_0^2 - r^2)$$

Vậy gradien lưu tốc là:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\gamma J}{4\mu} 2r \frac{dr}{dy}$$

vì $r = r_0 - y$, nên:

$$\frac{dr}{dy} = -1$$

và
$$\frac{du}{dy} = \frac{\gamma}{2\mu} (r_0 - y)$$

Biểu thức ζ viết thành:

$$\zeta = \frac{\rho y^2 \frac{du}{dy}}{\mu} = \frac{\gamma \rho J}{2\mu^2} y^2 (r_0 - y). \quad (4-29)$$

Ta tìm trị số ζ_{\max} ; muốn vậy, lấy đạo hàm ζ đối với y và đặt $\frac{d\zeta}{dy} = 0$, giải ra được:

$$y = \frac{2}{3} r_0. \quad (4-30)$$

Vậy trong dòng chảy tầng ở ống tròn, tại nơi cách thành $\frac{2}{3} r_0$ lớp chất lỏng có khuynh hướng sinh ra những xoáy nước đầu tiên.

2. Tính ζ_{\max} và ζ_K :

Thay $y = \frac{2}{3} r_0$ vào (4-28), ta có:

$$\zeta_{\max} = \frac{\gamma \rho J}{2\mu^2} \left(\frac{2}{3} r_0 \right)^2 \left(r_0 - \frac{2}{3} r_0 \right) = \frac{2}{27} \cdot \frac{\gamma \rho J}{\mu^2} r_0^3 \quad (4-31)$$

Ta có thể viết lại biểu thức ζ_{\max} để làm xuất hiện số Re. Muốn vậy, chú ý rằng lưu tốc trung bình v theo (4-21) viết thành: $v = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2$, và dùng đường kính $d = 2r_0$, ta viết lại (4-31) như sau:

$$\zeta_{\max} = \frac{16}{27} \cdot \frac{\rho}{\mu} \left(\frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2 \right) r_0 = \frac{8}{27} \cdot \rho \frac{vd}{\mu} = \frac{8}{27} Re \quad (4-32)$$

Ta đã coi rằng dòng chảy tầng chuyển sang rối khi $Re_K = 2.320$; vậy chỉ tiêu ζ_K lấy bằng ζ_{\max} có trị số bằng:

$$\zeta_K = \zeta_{\max} = \frac{8}{27} Re_K = \frac{8}{27} \cdot 2320 = 680.$$

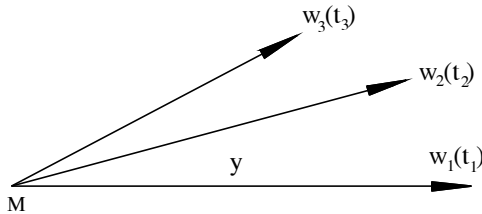
Vậy với $\zeta > \zeta_K = 680$ thì một sự xáo trộn nhỏ nào từ bên ngoài vào cũng có khả năng gây ra xoáy nước, làm dòng chảy tầng chuyển sang chảy rối.

§4-6. TRẠNG THÁI CHẢY RỐI TRONG ỐNG

Chúng ta nghiên cứu dòng chảy rối về những mặt sau đây:

1. Lưu tốc thực, lưu tốc trung bình thời gian, lưu tốc mạch động. Động năng của dòng chảy rối

Khi dòng chảy chuyển sang trạng thái chảy rối, môi trường chất lỏng coi như đầy các phân tử chất lỏng chuyển động hỗn loạn, nhưng nói chung có xu thế đi xuôi dòng. Lưu tốc điểm phụ thuộc thời gian và thay đổi cả về trị số lẫn phương hướng.

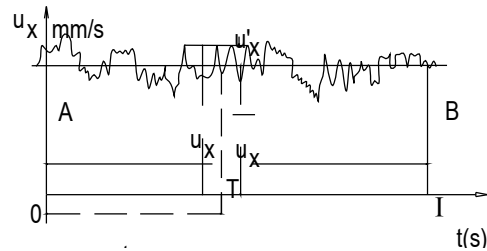


Hình 4-8

Nếu gọi $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ là lưu tốc tại một điểm cố định M lúc t_1, t_2, t_3 , ta có hình 4-8. Những lưu tốc này gọi là *lưu tốc tức thời* hoặc *lưu tốc thực*. Như vậy, thực chất của chuyển động rối là một chuyển động không ổn định.

Nếu dùng dụng cụ đo lường riêng để đo thành phần u_x dọc trục ống của lưu tốc tức thời u của các phân tử chất lỏng đi qua M trong một khoảng thời gian nào đó, (tức là đo được các trị số $u_{1x}, u_{2x}, u_{3x}, v. v. \dots$) rồi vẽ lên đồ thị $u_x \sim t$ (hình 4-9), ta vẽ được một đường cong rất phức tạp, không thể dùng phương trình toán học để biểu diễn được (ở đây ta đặt trục x trùng với trục ống, hướng theo chiều chảy).

Nếu xét trong một thời gian rất ngắn thì thấy sự biến đổi của u_x có tính chất ngẫu nhiên, không theo một quy luật nào. Nhưng xét trong một thời gian tương đối dài T_x thì thấy u_x biến đổi có quy luật, nó tăng, giảm xung quanh một trị số không đổi $\overline{u_x}$. Người ta gọi $\overline{u_x}$ là *lưu tốc trung bình thời gian*. Trị số $\overline{u_x}$ xác định bởi công thức:



Hình 4-9

$$\overline{u_x} = \frac{\int_0^T u_x dt}{T}, \quad (4-33)$$

tức là bằng tỷ số giữa diện tích hình chữ nhật OABI và thời gian T. Nếu ta nhân hai vế (4-33) cho $d\omega$ thì có thể viết:

$$T \overline{u_x} d\omega = \int_0^T u_x d\omega dt. \quad (4-34)$$

Biểu thức (4-34) nói rằng thể tích chất lỏng đi qua diện tích đo trong thời gian T tính theo u_x , thành phần chiếu lên phương x của lưu tốc thực và tính theo lưu tốc trung bình thời gian $\overline{u_x}$ là bằng nhau.

Hiện tượng thay đổi lưu tốc không ngừng xung quanh một vị trí trung bình thời gian của lưu tốc là hiện tượng *mạch động lưu tốc*. Hiện tượng mạch động được giải thích bằng sự xáo trộn hỗn loạn của những phần tử chất lỏng. Hiệu số giữa lưu tốc tức thời (lưu tốc thực) và lưu tốc trung bình thời gian gọi là *lưu tốc mạch động*. Nếu xét theo phương x, lưu tốc mạch động u'_x tính bằng:

$$u'_x = u_x - \overline{u_x} \quad (4-35)$$

Lưu tốc mạch động u'_x có thể dương hoặc âm: ta sẽ chứng minh rằng trị số trung bình thời gian của lưu tốc mạch động bằng không, nghĩa là:

$$\overline{u'_x} = 0$$

Thực vậy, theo (4-35), ta có:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_x dt = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{u_x} dt + \frac{1}{T} \int_0^T u'_x dt$$

Theo (4-33), số hạng ở vế trái viết thành $\overline{u_x}$; số hạng thứ hai ở vế phải viết thành $\overline{u'_x}$. Đẳng thức trên đây có dạng:

$$\overline{u_x} = \overline{u_x} + \overline{u'_x}.$$

Do đó: $\overline{u'_x} = 0$

Đi đôi với hiện tượng mạch động của lưu tốc, động áp lực cũng có hiện tượng mạch động, nó biểu hiện ở sự lên xuống không ngừng của mực nước trong ống đo áp quanh một vị trí trung bình thời gian:

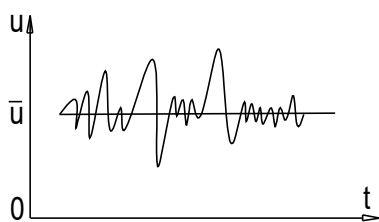
$$p = \overline{p} + p', \quad (4-36)$$

trong đó: p - động áp lực tức thời; \overline{p} - động áp lực trung bình thời gian; p' - mạch động động áp lực, có thể dương hoặc âm.

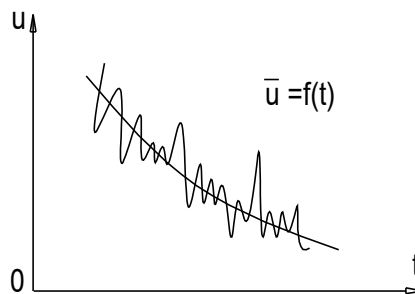
Dòng chảy rối thực chất là dòng chảy không ổn định rất phức tạp; để tiến hành được việc nghiên cứu những quy luật chuyển động của dòng chảy rối, người ta *thay thế dòng chảy rối thực bằng dòng chảy rối trung bình thời gian*, trong đó, người ta không nghiên cứu lưu tốc thực u mà nghiên cứu lưu tốc trung bình thời gian \overline{u} . Nếu lưu tốc trung bình thời gian \overline{u} không phụ thuộc thời gian thì ta có *dòng chảy rối trung bình thời gian ổn định* (hình 4-10). Nếu \overline{u} phụ thuộc thời gian thì ta có *dòng chảy rối trung bình thời gian không ổn định* (hình 4-11).

Dòng chảy trung bình thời gian nêu trên (dòng chảy tưởng tượng) gọi là *mẫu dòng chảy Rây-nôn - Buxinetscơ*, do O. Rây-nôn (năm 1895) và J. Buxinetscơ năm (1897) đề nghị. Đối với mẫu đó, các yếu tố thủy lực như lưu tốc, áp lực..., các đường dòng, quỹ đạo v.v... đều mang tính chất trung bình thời gian.

Đối với dòng chảy rối (trung bình thời gian) đều (có áp hoặc không áp) thì đường dòng của nó là những đường thẳng song song. Đối với dòng chảy rối (trung bình thời gian) đối dẫn, đường dòng của nó là những đường gần như thẳng và gần như song song với nhau. Như vậy, trong những dòng trung bình thời gian nói trên, ta có thể chia dòng chảy thành những dòng nguyên tố hoặc những lớp chất lỏng nằm giữa những đường dòng. Những dòng nguyên tố đó, những lớp đó cũng như những đường dòng đó - cần nhắc lại một lần nữa - là những dòng nguyên tố, những lớp cũng như những đường dòng *trung bình thời gian*.



Hình 4-10



Hình 4-11

Như vậy, cho đến nay, chúng ta đã đưa ra ba khái niệm lưu tốc, cần tóm tắt lại và phân biệt chúng.

a) *Lưu tốc thực u* tại điểm đang xét trong dòng chảy là tốc độ chuyển động thực tế của phần tử chất lỏng khi đi qua điểm đó. Lưu tốc thực ở các điểm khác nhau thường khác nhau. Trong dòng chảy tầng, lưu tốc thực đó căn bản không có mạch động. Còn trong dòng chảy rối nó có mạch động. Người ta có thể ghi lại lưu tốc thực (thường là một thành phần của lưu tốc thực) bằng những phương pháp hiện đại, thí dụ bằng phương pháp quay phim, các phương pháp ghi dao động v.v...

b) *Lưu tốc trung bình thời gian u-bar* tại điểm đang xét là một lưu tốc tưởng tượng, ứng với điểm đó của mặt cắt; ở những điểm khác nhau lưu tốc trung bình thời gian có thể khác nhau, vì khái niệm trung bình ở đây là nói đối với thời gian, chứ không phải nói với diện tích mặt cắt ướt. Trong dòng chảy tầng, không có mạch động nên không có sự khác nhau giữa lưu tốc thực và lưu tốc trung bình thời gian. Còn trong dòng chảy rối thì lưu tốc trung bình thời gian (không mạch động) khác hẳn lưu tốc thực (có mạch động); biểu thức cho lưu tốc trung bình thời gian là:

$$\bar{u} = \frac{\int_0^T u dt}{T}$$

Trị số của \bar{u} đo được bằng ống Pi-tô trong phòng thí nghiệm, bằng lưu tốc kế trong đo đạc thủy văn v.v... Chú ý rằng để có được trị số tương đối chính xác, cần phải để dụng cụ đo tại điểm cần xét trong một thời gian nhất định, đủ lâu. Thí dụ quy phạm đo đạc thủy văn yêu cầu đặt lưu tốc kế ở những điểm gần đáy sông trong 5 ÷ 10 phút, ở gần mặt tự do trong 1 ÷ 2 phút.

c) *Lưu tốc trung bình mặt cắt* v cũng là lưu tốc tương ứng với toàn mặt cắt ướt, nó có trị số như nhau tại tất cả các điểm trên mặt cắt vì khái niệm trung bình ở đây là nói với mặt cắt. Biểu thức cho lưu tốc trung bình mặt cắt là:

$$v = \frac{\int \bar{u} d\omega}{\omega} = \frac{Q}{\omega} \quad (3-5)$$

Rõ ràng lưu lượng tính theo lưu tốc trung bình mặt cắt cũng bằng lưu lượng thực của dòng chảy. Khái niệm lưu tốc trung bình mặt cắt v chỉ dùng cho mặt cắt ướt phẳng hoặc coi được như là phẳng (xem lại §3-6). Lưu tốc trung bình mặt cắt v xác định theo (3-5).

Chúng ta hãy xem xét động năng của dòng chảy rối.

Như đã biết, trong phương trình Bécnuiy, động năng của một đơn vị trọng lượng chất lỏng được biểu thị bởi số hạng $\frac{\alpha v^2}{2g}$, trong đó α là hệ số sửa chữa động năng, được tính theo (3-22). Hệ số α phụ thuộc sự phân bố không đều của vận tốc trung bình thời gian \bar{u} trên mặt cắt ngang của dòng chảy.

Giả sử ta có hai dòng chảy trong hai kênh láng trụ như nhau, có lưu lượng Q bằng nhau, độ sâu h như nhau, do đó vận tốc trung bình v bằng nhau (hình 4-12). Hai dòng chảy này có thể còn có những vận tốc trung bình thời gian tại những điểm tương ứng A và B bằng nhau: $\bar{u}_A = \bar{u}_B$, (hình 4-12a và a'). Nhưng nếu một dòng có độ rối cao hơn thì động năng của nó phải lớn hơn (hình 4-12b và b').

Ta có thể coi rằng động năng của dòng rối bao gồm hai thành phần: động năng tính theo vận tốc trung bình thời gian và động năng tính theo vận tốc mạch động u' .

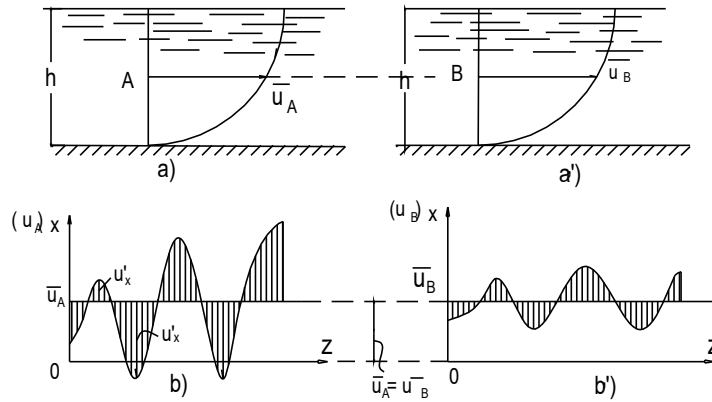
Nếu trong trường hợp dòng chảy tầng động năng được biểu thị bởi số hạng $\frac{\alpha v^2}{2g}$, trong đó α - hệ số sửa chữa động năng, chỉ tính đến sự phân phối không đều của vận tốc trên mặt cắt ướt, thì ở trường hợp dòng chảy rối, động năng phải được biểu thị bởi số hạng $\frac{\alpha_c v^2}{2g}$, trong đó:

$$\alpha_c = \alpha + \alpha_b \quad (4-37)$$

α_b - hệ số sửa chữa bổ sung, có tính đến mạch động lưu tốc dọc ở các điểm trên mặt cắt ướt.

Trị số α_b chỉ tính khi có độ rối lớn, điều này có thể xảy ra ở một số nơi, thí dụ ở sau những nơi mở rộng đột ngột.

Như vậy, do mức độ mạch động khác nhau, nên đồ phân bố vận tốc trung bình thời gian \bar{u} trên mặt cắt ướt ở hình 4-12(a) và (a'), phải có hình dạng khác nhau.



Hình 4-12

2. Ứng suất tiếp trong dòng chảy rối

Trong dòng chảy rối, do sự xáo động, các phân tử chất lỏng đi nhanh rơi vào khu vực các phân tử đang chuyển động chậm hơn và ngược lại, các phân tử đang đi chậm rơi vào khu vực các phân tử đang chuyển động nhanh hơn. Khi đó, các phân tử đi nhanh sẽ thúc đẩy các phân tử đi chậm phải chuyển động nhanh lên và ngược lại, các phân tử đi chậm sẽ kìm hãm các phân tử đi nhanh phải chuyển động chậm hơn. Theo mẫu dòng chảy trung bình thời gian Rây-nôn - Buxinetsơ thì sự xáo trộn nói trên của các phân tử chất lỏng có thể coi như sự xáo trộn từ lớp chất lỏng này sang lớp chất lỏng khác (khái niệm lớp ở đây là nói các lớp của dòng trung bình thời gian) và tác dụng lôi đi, hãm lại của các phân tử chất lỏng có thể coi như tác dụng lôi đi, hãm lại giữa các lớp chất lỏng khác nhau. Như vậy, kết quả của sự xáo trộn các phân tử trong dòng chảy rối là tạo nên tác dụng lôi đi, hãm lại giữa các lớp chất lỏng, giống như *tác dụng của ứng suất tiếp* giữa những lớp đó. Sức ma sát trong này, do sự rối của dòng chảy gây ra, gọi là sức ma sát rối và ứng suất tiếp tương ứng gọi là *ứng suất tiếp rối*. Như vậy sức cản thủy lực do ma sát rối tạo nên trong trường hợp dòng chảy rối, khác với sức cản thủy lực trong trường hợp dòng chảy tầng, không trực tiếp phụ thuộc tính nhớt giữa các lớp.

Buxinetsơ (1887) biểu thị ứng suất tiếp rối $\tau_{\text{rối}}$ tương tự như ứng suất tiếp nhớt trong dòng chảy tầng:

$$\tau_{\text{rối}} = \eta \frac{du}{dy}, \quad (4-38)$$

trong đó η - hệ số nhớt rối, phụ thuộc chủ yếu vào cấu tạo rối của dòng chảy thay đổi từ điểm này sang điểm khác trong môi trường chảy.

Viết lại phương trình chuyển động Naviê-Stốc (3-106) của phân tử chất lỏng thực, nhưng trong đó, các thành phần tốc độ và áp suất đều tính đến mạch động (phương trình này được giảng trong giáo trình cơ học chất lỏng, gọi là phương trình Rây-nôn), Rây-nôn (1895) chứng minh rằng ứng suất tiếp rối biểu thị theo:

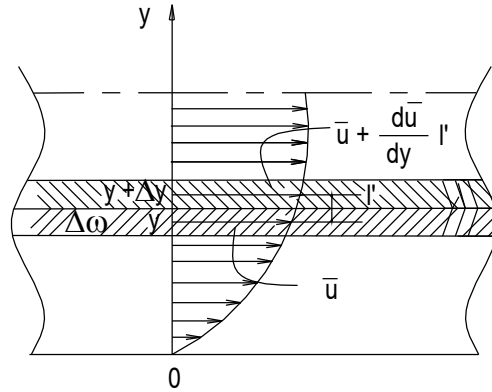
$$\tau_{\text{rối}} = -\overline{\rho u_x u_y} \quad (4-39)$$

trong đó u'_x , u'_y là lưu tốc mạch động theo phương dọc dòng chảy (x) và phương ngang dòng chảy (y), $\overline{u'_x u'_y}$ là trị số trung bình thời gian của tích số u'_x và u'_y .

Hai biểu thức trên (4-38) và (4-39) chưa giúp ta giải quyết vấn đề phân bố lưu tốc trên mặt cắt ngang.

Porantơ (1926) giải thích sự xuất hiện $\tau_{\text{rối}}$ bằng sự trao đổi động lượng giữa hai lớp chất lỏng như sau:

Trong dòng chảy ở ống phẳng, ta lấy hai lớp chất lỏng kề nhau, một lớp cách thành rắn một đoạn y, lớp kia cách y + Δy (hình 4-13). Các phần tử chất lỏng liên tục theo mạch động lưu tốc u'_y mà ra vào, cắt ngang mặt phân chia hai lớp, nhưng do tính chất liên tục của chất lỏng, khối lượng của mỗi lớp trong lúc đó vẫn không đổi. Nhưng động lượng của mỗi lớp đều có biến đổi. Động lượng giảm đi ở lớp có tốc độ lớn và tăng lên ở lớp có tốc độ nhỏ. Giả sử có một phần tử chất lỏng từ lớp thứ nhất (tọa độ y) lọt vào lớp thứ hai (tọa độ y + Δy), trước



Hình 4-13

khi lọt vào, phần tử đó có lưu tốc trung bình thời gian theo phương trục là \bar{u} . Ta ký hiệu con đường mà phần tử đã đi để “hòa mình” với chất lỏng trong lớp thứ hai bằng l' . Giả thiết rằng đoạn l' thẳng góc với phương chảy chung. Tại vị trí mà phần tử này coi được là đã hòa mình với chất lỏng trong lớp thứ hai, lưu tốc trung bình thời gian theo phương trục sẽ khác đi một đại lượng bằng:

$$\frac{d\bar{u}}{dy} l'. \quad (4-40)$$

Trong thời gian Δt, khối lượng chất lỏng Δm đi qua một diện tích Δω của mặt phân chia là:

$$\Delta m = \rho \Delta \omega \left| u'_y \right| \Delta t,$$

trong đó $\left| u'_y \right|$ là trị số tuyệt đối của lưu tốc mạch động, sử dĩ viết như vậy vì Δm là một số dương.

Từ đó, động lượng trong lớp thứ hai sẽ có sự biến thiên bằng:

$$\Delta K = \Delta m \frac{d\bar{u}}{dy} l' = \rho \Delta \omega \left| u'_y \right| \Delta t \frac{d\bar{u}}{dy} l'.$$

Rõ ràng là sự biến thiên về động lượng của lớp chất lỏng đang xét – theo định luật động lượng, phải bằng xung lượng I của lực tác dụng lên mặt phân chia hai lớp ấy; xung lượng I bằng tích số lực bên $T = \tau_{\text{rối}} \Delta\omega$ tác dụng lên mặt bên nhân với thời gian Δt :

$$I = \tau_{\text{rối}} \Delta\omega \cdot \Delta t, \quad (4-41)$$

trong đó $\tau_{\text{rối}}$ là ứng suất tiếp rối. Ta có thể viết $\Delta K = I$, tức là:

$$\rho \Delta\omega \left| u_y' \right| \Delta t \frac{d\bar{u}}{dy} l' = \tau_{\text{rối}} \Delta\omega \Delta t. \quad (4-42)$$

Từ đó, ta biểu thị ứng suất tiếp trên mặt phân chia hai lớp theo:

$$\tau_{\text{rối}} = \rho \left| u_y' \right| l' \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (4-43)$$

Ta so sánh (4-43) và (4-39) thì thấy rằng:

$$\left| u_x' \right| = l' \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (4-44)$$

Bởi vì khó đo được đại lượng u_y' Porantơ đã đưa ra giả thuyết rằng lưu tốc mạch động theo hướng ngang u_y' cũng có độ lớn tương tự như lưu tốc mạch động theo hướng dọc u_x' , tức là tỷ lệ với đại lượng $l' \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)$, tức là:

$$u_y' = kl' \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right), \quad (4-45)$$

trong đó k là hằng số tỷ lệ.

Như vậy:

$$\tau_{\text{rối}} = \rho kl'^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2,$$

hoặc:

$$\tau_{\text{rối}} = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2, \quad (4-46)$$

trong đó $l^2 = kl'^2$; Porantơ gọi đại lượng l là *độ dài đường xáo trộn*. Công thức (4-46) biểu diễn ứng suất tiếp sinh ra do sự xáo trộn rối được gọi là *phương trình Porantơ*. Ta nhận thấy rằng gradien của các lưu tốc trung bình thời gian $\frac{d\bar{u}}{dy}$ càng lớn bao nhiêu thì ứng suất tiếp càng lớn bấy nhiêu.

Liên hệ đến công thức (4-38), ta có thể suy từ công thức (4-46) trong đó hệ số nhớt rối η có thể biểu thị bởi:

$$\eta = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|. \quad (4-47)$$

Trong chuyển động rối, sự ma sát do tính nhớt của chất lỏng cũng vẫn tiếp tục xảy ra; ứng suất tiếp do ma sát nhớt gây ra ở đây ký hiệu bằng $\tau_{\text{tầng}}$ tính theo công thức Niuton (1-7); vậy ứng suất tiếp tổng quát là:

$$\tau = \tau_{\text{tầng}} + \tau_{\text{rối}} = \mu \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2. \quad (4-48)$$

Biểu thức này cho thấy ứng suất tiếp trong dòng chảy rối gồm có hai thành phần: phần ma sát nhớt (số hạng thứ nhất) và phần ma sát rối do sự xáo trộn các phần tử chất lỏng tạo nên, kéo theo sự truyền động lượng đi ngang dòng chảy (số hạng thứ hai).

Chúng ta nhận thấy rõ ràng số hạng thứ nhất tỷ lệ với bậc nhất của lưu tốc, còn số hạng thứ hai tỷ lệ với bình phương lưu tốc. Trong trạng thái chảy tầng, không có sự xáo trộn, do đó số hạng thứ hai bằng không; vì thế, ứng suất tiếp và do đó, cả tổn thất cột nước dọc đường trong trạng thái chảy tầng đều tỷ lệ với bậc nhất của lưu tốc. Khi trạng thái chảy rối phát triển mạnh, số hạng thứ hai lớn hơn số hạng thứ nhất rất nhiều lần, có thể bỏ không tính trị số ứng suất do ma sát nhớt, do đó, ứng suất tiếp tỷ lệ với bình phương của lưu tốc. Nếu cả hai số hạng cùng lớn thì kết quả là ứng suất tiếp tổng cộng tỷ lệ với lưu tốc theo một bậc lũy thừa m nào đó trong khoảng:

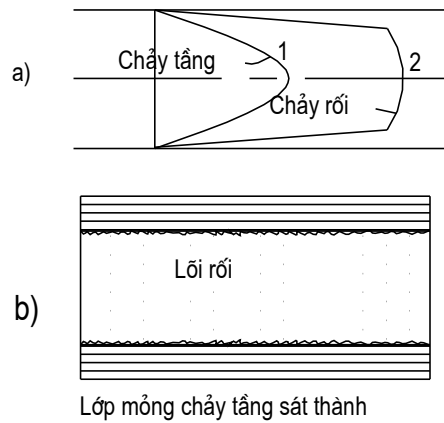
$$1 < m < 2.$$

Biểu thức (4-46) có thể dùng để suy ra quy luật phân bố lưu tốc trên mặt cắt ngang trong dòng chảy rối. Trước khi làm việc suy diễn này, cần xác định những điều kiện chảy rối mà ta nghiên cứu trong tiết này. Đó là: a) dòng chảy rối xảy ra ở bên trong những thành rắn (trong ống, trong kênh hở v.v... chứ không phải là dòng chảy rối bao quanh vật rắn); b) mức độ rối đã phát triển đầy đủ. Điều kiện thứ nhất có liên quan đến sự hình thành “lớp mỏng chảy tầng” dọc theo thành rắn và tính chất “độ nhám” của thành; điều kiện thứ hai có liên quan đến “tầng biên giới” và “đoạn đầu” của dòng chảy.

Tiếp đây ta nghiên cứu mấy vấn đề có liên quan đến hai điều kiện đó.

3. Lớp mỏng chảy tầng; các thành nhám và trơn thủy lực

Như chúng ta đã biết, trạng thái chảy rối được đặc trưng bởi sự xáo trộn các phần tử chất lỏng. Số Ray-nôn càng lớn thì sự xáo trộn xảy ra càng mạnh, nhưng sự xáo trộn đó phân bố không đều trên mặt cắt ngang của ống, sông hoặc kênh. Ở càng gần sát thành, những chuyển động ngang của các phần tử càng vấp phải những ranh giới rắn nên gặp nhiều khó khăn, vì thế, càng gần sát thành rắn, dòng chảy càng có xu thế chảy thành tầng lớp không xáo trộn với nhau, do đó, hình thành dòng chảy tầng trong một lớp mỏng (hình 4-14) gọi là *lớp mỏng chảy tầng*. Ranh giới của lớp mỏng chảy tầng chưa được xác định thực rõ ràng. Như vậy, *trong dòng chảy rối, không phải toàn bộ chất lỏng là chuyển động rối, mà ở sát thành bao giờ cũng có lớp mỏng chảy tầng*. Khu vực chảy rối được gọi là *lõi rối* (hình 4-14).



Hình 4-14

Độ dày δ_t của lớp mỏng chảy tầng có thể tính như sau:

- Trong lớp mỏng chảy tầng có độ dày δ_t , ta giả thiết lưu tốc phân bố theo đường thẳng, tức là: $\frac{u_t}{\delta_t} = \frac{du}{dy}$, trong đó:

y - khoảng cách kể từ thành ống, theo phương thẳng góc với thành ống;

u_t - lưu tốc tại $y = \delta_t$.

- Trong phạm vi lớp mỏng chảy tầng, theo (4-9), ta thấy rằng:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} = \tau_0 \left(\frac{r_0 - y}{r_0} \right) = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0} \right) \approx \tau_0;$$

vậy ta có:

$$\tau_0 = \mu \frac{du}{dy} = \rho \nu \frac{u_t}{\delta_t},$$

hoặc:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{u_t}{\delta_t}.$$

Ta đặt:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (4-49)$$

và chú ý rằng đại lượng $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ có thứ nguyên tốc độ LT^{-1} , được gọi là *lưu tốc động lực*.

Vậy:

$$\delta_t = v \frac{u_t}{u_*^2}$$

hoặc:

$$\frac{u_t}{u_*} = \frac{u_* \delta_t}{v} = N \quad (4-50)$$

trong đó N là số không thứ nguyên, có cấu tạo như số Raynôn; theo thí nghiệm của Nicurátso thì $N = 11,6$ (theo các tác giả khác thì N nhỏ hơn).

Từ (4-50) ta có:

$$\delta_t = \frac{Nv}{u_*} = \frac{11,6v}{u_*} \quad (4-51)$$

Chú ý rằng có thể suy δ_t từ phương trình cơ bản của dòng chảy đều:

$$\frac{\tau_0}{\rho} = gRJ.$$

Từ phương trình này ta có:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gRJ}, \quad (4-52)$$

do đó viết được:

$$\delta_t = \frac{11,6v}{\sqrt{gRJ}} = \frac{23,2v}{\sqrt{gdJ}}.$$

Nếu thay J bằng trị số suy từ công thức Đácxy (4-24):

$$J = \frac{h_d}{l} = \frac{\lambda}{d} \frac{v^2}{2g},$$

ta có:

$$\delta_t = \frac{32,8d}{Re\sqrt{\lambda}}. \quad (4-53)$$

Để có khái niệm về độ lớn của δ_t , ta xác định trị số của δ_t trong trường hợp dòng nước chảy đều trong ống với lưu tốc trung bình $v = 1$ m/s, hệ số nhớt động học là $\nu = 0,0101$ cm²/s, $\lambda = 0,02$, áp dụng công thức (4-53) ta có:

$$\delta_t = \frac{32,8d}{Re\sqrt{\lambda}} = \frac{32,8v}{v\sqrt{\lambda}} = \frac{32,8 \times 0,0101}{100\sqrt{0,02}} = 0,023 \text{ cm.}$$

Như vậy độ dày của lớp mỏng chảy tầng rất nhỏ.

Việc xác định bề dày của lớp mỏng chảy tầng cần thiết cho sự phân loại các thành rắn ra thành nhám thủy lực và thành trơn thủy lực. Việc phân loại đó tiến hành như sau.

Một vật liệu bất kỳ không được tinh chế cẩn thận luôn luôn có bề mặt nhám. Các mấu gồ ghề phân bố không đều hoặc ít, hoặc nhiều, chiều cao trung bình các mấu Δ gọi là *độ nhám tuyệt đối*, có thể lấy làm đặc trưng định lượng của độ nhám. Tuy nhiên, đại lượng này không thể đánh giá hoàn toàn tác dụng cản trở của độ nhám, bởi vì rõ ràng có ảnh hưởng của hình dạng, số lượng và sự sắp xếp tương hỗ các mấu gồ ghề.

Ta có thể nêu lên rằng tác dụng của độ nhám của thành rắn đối với sức cản thủy lực phụ thuộc những yếu tố sau đây của thành nhám:

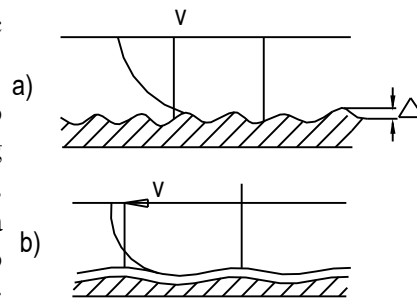
a) Độ cao của mấu gồ ghề Δ , vào cỡ phân số của mm; đó là độ nhám tuyệt đối, như đã biết;

b) Tỷ số giữa độ cao của mấu Δ và đường kính d hoặc bán kính r của ống: $\frac{\Delta}{d}$ (hoặc $\frac{\Delta}{r}$)

đó là độ nhám tương đối;

c) Hình dạng của những mấu: ảnh hưởng của những mấu nhọn và mấu uốn khúc đến tổn thất cột nước là khác nhau tuy cùng một độ cao và một trị số Re .

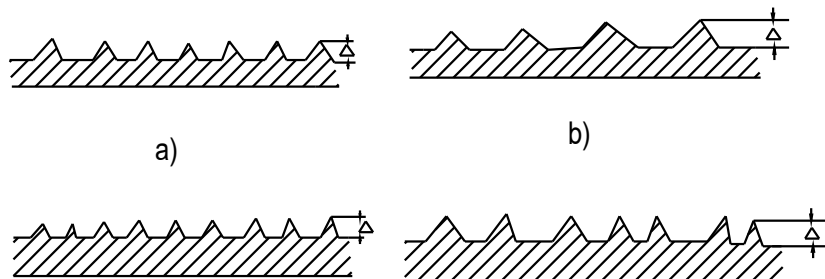
Đó là do cấu tạo của thành nhám. Những cấu tạo tinh thể (gang, thép, xi-măng) thường tạo nên những mấu nhọn; những cấu tạo bằng kính hoặc có tính nhớt, dẻo (thủy tinh, chì, bi-tum, chất dẻo) thường cho ta những mấu nhám lượn sóng. Rõ ràng sức cản ở ống có thành rắn nhiều mấu nhọn (hình 4-15a) sẽ lớn hơn sức cản ở ống có mặt thành uốn sóng (hình 4-15b).



Hình 4-15

d) Sự phân bố những gồ ghề trên mặt: thưa hoặc dày (hình 4-16a và b), những khoảng cách đều hoặc không đều trên mặt... (hình 4-16c và d).

Theo (4-53), chiều dày lớp mỏng chảy tầng δ_i càng bé, nếu mức độ chảy rối càng lớn, nghĩa là chiều dày lớp mỏng giảm đồng thời với sự tăng số Raynôn. Vì thế, có thể có những sự tương quan dưới đây giữa lớp mỏng chảy tầng và độ nhám tuyệt đối:

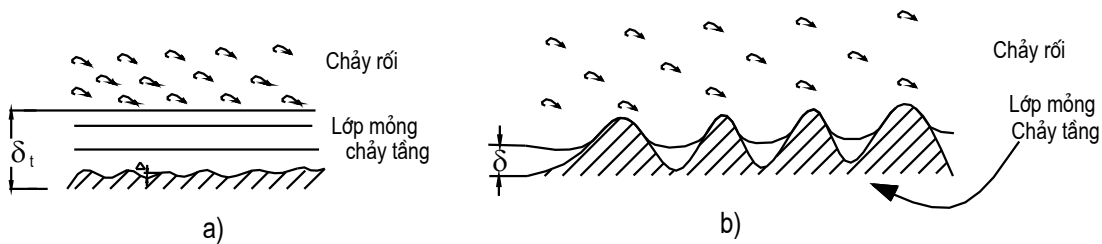


Hình 4-16

Lớp mỏng chảy tầng che kín hoàn toàn những chỗ lồi của các mấu gồ ghề ($\delta_t > \Delta$): dòng chảy rối không có tác dụng qua lại trực tiếp với mặt nhám của thành rắn, dòng chất lỏng chảy dọc theo lớp mỏng chảy tầng. Sự tổn thất cột nước dọc đường không phụ thuộc độ nhám của thành. Trong trường hợp này, thành rắn gọi là *thành trơn thủy lực* (hình 4-17a).

Nếu chiều dày lớp mỏng chảy tầng bé hơn độ nhám tuyệt đối ($\delta_t < \Delta$) và do đó những mấu gồ ghề nhô ra từ dưới lớp mỏng chảy tầng thì thành rắn gọi là *thành nhám thủy lực* (hình 4-17b). Trong trường hợp này, ở sát thành các lớp chất lỏng phải uốn khúc để vượt qua những đỉnh gồ ghề, do đó tạo ra khả năng hình thành những xoáy nước bứt khỏi các lớp chất lỏng gần thành rắn, di chuyển vào lõi rối (về khả năng hình thành xoáy nước, xem lại §4-5). Càng nhiều xoáy nước như vậy sinh ra và đi vào lõi rối thì sức cản càng lớn, tổn thất cột nước càng nhiều; vì vậy ở dòng chảy có thành nhám thủy lực, sức cản lớn hơn ở dòng chảy có thành trơn thủy lực.

Chú ý rằng độ nhám của thành rắn làm tăng ma sát dòng chảy theo cách nói trên chứ không giống sự ma sát ngoài giữa hai mặt nhám của vật rắn.



Hình 4-17

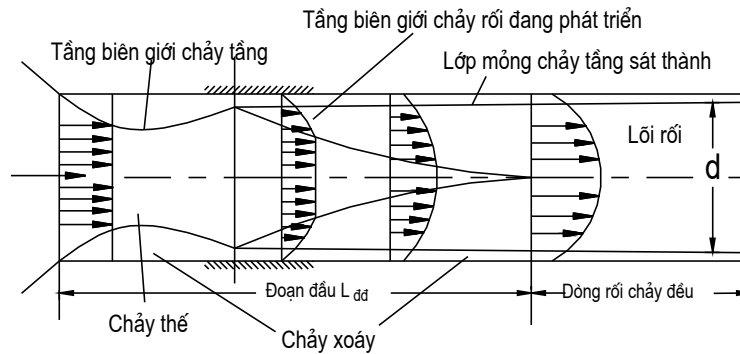
Rõ ràng là quy luật tổn thất cột nước dọc đường trong dòng chảy rối phụ thuộc tính chất thành rắn là trơn hay nhám. Cần nhấn mạnh rằng khái niệm thành trơn, thành nhám là khái niệm thủy lực chứ không phải khái niệm thuần túy hình học. Khái niệm đó là tương đối: cũng cùng một độ nhám tuyệt đối, trong trường hợp này, thành rắn là trơn (thường khi Re khá nhỏ), trong trường hợp khác, thành rắn lại là nhám (thường khi Re lớn).

4. Đoạn đầu của dòng chảy. Tầng biên giới

Giả thiết có một bể chứa nước khá lớn, ta đặt một ống dẫn nước dài, mặt cắt hình tròn, nối với bể đó, đường ống có hình cong rất thuận cho dòng chảy (hình 4-18). Ngay tại mặt cắt đầu tiên của ống, các phân tử chất lỏng có tốc độ trung bình thời gian bằng nhau, đồ phân bố lưu tốc là hình chữ nhật. Càng đi vào sâu trong ống các phân tử gần thành rắn càng chuyển động chậm, do đó đồ phân bố lưu tốc thay đổi từ mặt cắt nọ sang mặt cắt kia. Kể từ một mặt cắt nhất định, đồ phân bố lưu tốc mới trở thành không đổi dọc theo dòng chảy đều. Đoạn dài trên đó xảy ra sự quá độ của đồ phân bố lưu tốc từ hình chữ nhật sang dạng ổn định gọi là *đoạn đầu dòng chảy*. Thí nghiệm chứng tỏ trong ống có dòng chảy rối, đoạn đầu dòng chảy có độ dài l_{dd} bằng:

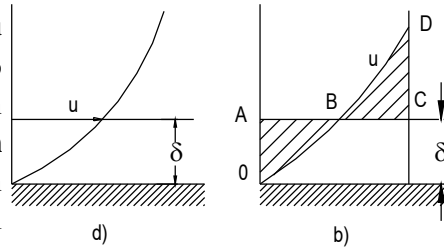
$$l_{dd} = (25 \div 50)d, \quad (4-57)$$

trong đó d là đường kính ống.



Hình 4-18

Trong đoạn l_{dd} này, nghiên cứu đồ phân bố lưu tốc trung bình thời gian của từng mặt cắt ta thấy có thể chia đồ phân bố làm hai khu vực, một khu ở phần giữa ống có tốc độ bằng nhau và một khu ở vùng thành ống có tốc độ thay đổi; dọc theo dòng chảy thì miền lập bởi khu có tốc độ bằng nhau bé dần và kết thúc tại mặt cắt cuối cùng của đoạn đầu; còn miền lập bởi



Hình 4-19

các khu có tốc độ thay đổi phát triển lên và hết đoạn đầu thì phát triển hoàn toàn, miền này gọi là *tầng biên giới*, dòng chảy ở miền này là dòng có xoáy. Không đi sâu vào lý luận về tầng biên giới, ở đây ta chỉ nêu lên rằng, trong tầng biên giới lại có hai vùng có trạng thái chảy khác nhau: một vùng rất mỏng sát thành bao giờ cũng chảy tầng gọi là *tầng biên giới chảy tầng*, vùng còn lại gọi là *tầng biên giới chảy rối*.

Bề dày của tầng biên giới δ ở khu vực đoạn đầu dòng chảy này có thể tính sơ bộ như sau:

Cách 1: Đó là khoảng cách δ từ thành rắn đến nơi mà vận tốc u biến đổi rất ít, khoảng 1% (hình 4-19a).

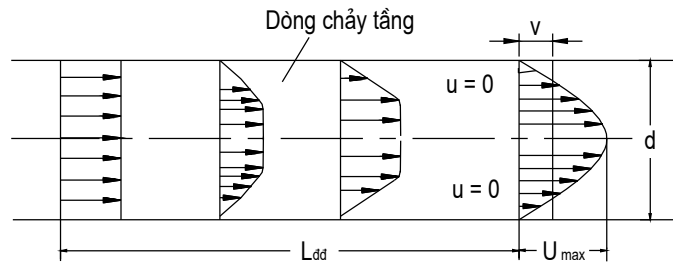
Cách 2: Ta xác định một đường thẳng ABC song song với thành rắn, phân chia đồ thị phân bố vận tốc thành hai diện tích bằng nhau OAB và BCD (hình 4-19b); khoảng cách δ từ thành rắn đến đường ABC là bề dày của tầng biên giới.

Sau đoạn đầu của dòng chảy đều chỉ còn có tầng biên giới chảy tầng mà ta gọi là *lớp mỏng chảy tầng* và tầng biên giới chảy rối mà ta gọi là *lõi rối*.

Đối với trường hợp dòng chảy đều trong kênh hở, cấu tạo của đoạn đầu cũng tương tự như trên.

Chú ý rằng ở dòng chảy tầng, cũng có khái niệm về đoạn đầu dòng chảy như đã nói ở trên (hình 4-20); thí nghiệm cho thấy có thể xác định độ dài đoạn đầu của dòng chảy tầng theo:

$$l_{dd} = 0,065 \text{ Re } d \quad (4-55)$$



Hình 4-20

Sự phân bố lưu tốc trong dòng chảy rối mà ta trình bày tiếp theo đây là nói cho dòng chảy rối, chuyển động đều, có cấu tạo rối đã phát triển, tức là ở sau đoạn đầu dòng chảy.

5. Sự phân bố lưu tốc trong dòng chảy rối

Chúng ta xét biểu thức ứng suất tiếp (4-46), viết cho ống tròn có bán kính r_0 :

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2,$$

trong đó:

$$y = r_0 - r.$$

y là khoảng cách từ thành rắn đến lớp chất lỏng ở cách tâm một đoạn r .

Biểu thức (4-46) có thể viết thành:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = l \frac{d\bar{u}}{dy}, \quad (4-56)$$

ở đây l là độ dài đường xáo trộn. Về độ dài l , có nhiều giả thuyết.

Thí dụ:

- Theo đề nghị của Cécman:

$$l = \alpha \frac{d\bar{u}}{dy} \left| \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right|. \quad (4-57)$$

- Theo đề nghị của Xátkêvít:

$$l = \alpha y \sqrt{1 - \frac{y}{r_0}}. \quad (4-58)$$

- Theo thí nghiệm của Nicurátơ (1930) làm ở ống tròn, ở những nơi gần thành rắn: ($y < 0,1r$):

$$l = 0,4y. \quad (4-59)$$

- Porantơ đề nghị:

$$l = \alpha y. \quad (4-60)$$

Hệ số α (kapa) ở những công thức trên được gọi là hằng số thông dụng. Theo Porantơ, hằng số α là một trị số cố định. Ngày nay ta đã biết rõ ràng trong những dòng khác nhau, α có khác ít nhiều mà không hoàn toàn cố định trong phạm vi mặt cắt.

Nếu sử dụng công thức (4-60) của Porantơ, công thức (4-56) viết lại thành:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \alpha y \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (4-61)$$

Theo Porantơ, ở lân cận thành rắn có thể coi rằng $\tau = \tau_0$ do đó:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_*, \quad (4-62)$$

trong đó như đã biết theo (4-49), u_* gọi là lưu tốc động lực. Chú ý rằng u_* không biểu thị một lưu tốc có ý nghĩa vật lý nào.

Đem kết quả (4-62) đưa vào đẳng thức (4-61), ta có:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \alpha y \frac{d\bar{u}}{dy}$$

hay là:

$$u_* = \alpha y \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (4-63)$$

Từ nay về sau ta viết u thay cho \bar{u} tức là lưu tốc trung bình thời gian. Tích phân phương trình (4-63), ta được:

$$u = \frac{u_*}{\alpha} \ln y + C, \quad (4-64)$$

tức là tốc độ trung bình thời gian của dòng chảy rối phân bố theo quy luật lôgarít của khoảng cách y kể từ thành rắn.

Thí nghiệm của Nicurátơ chứng minh rằng có thể suy rộng biểu thức (4-64) cho toàn dòng chảy, Porantơ đã viết ra biểu thức phân bố lưu tốc trên toàn mặt cắt như sau.

Trên trục ống, tức là ở chỗ $y = r_0$, lưu tốc sẽ cực đại:

$$u_{\max} = \frac{u_*}{\alpha} \ln r_0 + C. \quad (4-65)$$

Trừ vế đối vế, hai đẳng thức (4-64) và (4-65) được biểu thị về độ thiếu hụt lưu tốc:

$$u_{\max} - u = \frac{u_*}{\alpha} (\ln r_0 - \ln y). \quad (4-66)$$

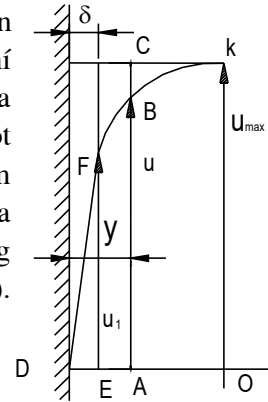
Từ đó biểu thức về độ thiếu hụt tương đối lưu tốc viết thành:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{r_0}{y} \quad (4-67)$$

Độ thiếu hụt lưu tốc $u_{\max} - u$ tương ứng với đoạn BC trên đồ phân bố vận tốc (hình 4-21). Công thức (4-66) và (4-67) được nhiều thí nghiệm xác nhận, những công thức đó chỉ rõ ràng hình dạng của phần FK trên đường cong phân bố vận tốc là không đổi với một đường kính ống cho trước, không phụ thuộc lưu lượng và độ nhám của thành rắn. Như vậy định luật phân bố sự thiếu hụt tương đối của vận tốc điểm là giống nhau đối với tất cả các dòng chảy rối trong ống. Đó là định luật lôgarít của độ thiếu hụt lưu tốc tương đối (4-67).

Thay $\alpha = 0,4$ vào công thức (4-67), ta có:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = 5,57 \lg \frac{r_0}{y} \quad (4-68)$$



Hình 4-21

Đồ phân bố lưu tốc trên mặt cắt của dòng chảy rối được biểu thị trên hình (4-13). Trong khu vực của lớp mỏng chảy tầng lưu tốc tăng lên rất nhanh gần như theo quy luật đường thẳng (nói chặt chẽ thì ở đây lưu tốc phải phân bố theo parabol, phù hợp với trạng thái chảy tầng). Ở phần chính của dòng chảy rối (đường cong 2), lưu tốc phân bố đều hơn là ở trạng thái chảy tầng (đường cong 1): nếu với trạng thái chảy tầng có: $\frac{u_{\max}}{v} = 2$, thì với trạng thái chảy rối, tỉ số đó nhỏ hơn rất nhiều và khi trị số Re càng lớn thì tỉ số $\frac{u_{\max}}{v}$ giảm càng nhiều.

Số Râyôn	2700	10^6	10^8
Tỉ số $\frac{u_{\max}}{v}$	1,33	1,66	1,11

Bằng những số liệu trên chúng ta chứng minh được rằng: trong dòng chảy rối, nếu độ rối càng lớn thì sự phân bố lưu tốc trên mặt cắt càng có khuynh hướng bình quân hóa. Như đã nói ở trên, điều đó có thể cắt nghĩa bằng hiện tượng xáo trộn phân tử chất lỏng: các phân tử có tốc độ lớn khi lẫn vào lớp chảy chậm hơn sẽ có khuynh hướng làm lớp chảy chậm tăng tốc độ lên và ngược lại. Với $Re \rightarrow \infty$, sự phân bố lưu tốc tiến tới phân bố đều, mà sự phân bố đều của lưu tốc là đặc tính có thể có được ở dòng chất lỏng không nhớt, đồng thời cũng là đặc tính của chuyển động thế; như vậy khi độ rối cực lớn, có thể coi sự phân bố lưu tốc như trong chuyển động của chất lỏng lý tưởng hoặc trong chuyển động thế.

Vấn đề phân bố lưu tốc trên mặt cắt ngang của dòng chảy rối tuy đã được nghiên cứu nhiều trên cơ sở kết hợp lý luận và thực nghiệm và đã đạt được một số kết quả quan trọng, nhưng còn tồn tại rất nhiều câu hỏi chưa được sáng tỏ, thí dụ như về sự xác định độ dài xáo trộn l , về sự quy định khoảng cách y để quy luật phân bố lưu tốc theo lôgarít bắt đầu có hiệu lực, về ảnh hưởng của độ nhám đến quy luật phân bố đó...

Ngoài quy luật phân bố lưu tốc theo hàm số lôgarít như đã nói ở trên cũng còn nhiều đề nghị khác, thí dụ quy luật số mũ. Cácman (năm 1921), trên cơ sở nghiên cứu lý thuyết đã đề nghị đối với ống trơn:

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right)^{\frac{1}{m}},$$

trong đó: r_0 - bán kính ống;

r - khoảng cách từ tâm mặt cắt ướt đến điểm xét vận tốc u ;

m - mẫu số của số mũ, phụ thuộc số Râynon Re_d .

Có thể xác định m theo bảng sau:

Re_d	10^4	10^5	$3 \cdot 10^5$	10^6
m	7	8	9	10

Theo A. D. Ansun (1956), quy luật này còn dùng được cho ống nhám, nếu số mũ được tính theo:

$$\frac{1}{m} = 0,9 \sqrt{\lambda}$$

Hệ số λ sẽ được nói đến ở §4-7.

Phương hướng hiện đại của sự xác định quy luật phân bố lưu tốc là nghiên cứu cấu tạo rối của dòng chảy.

6. Sự phân chia 3 khu vực trong dòng chảy rối

Sự phân bố lưu tốc trong lớp mỏng chảy tầng có thể suy diễn dễ dàng bằng cách thay trong công thức (4-50) u_1 bằng u và thay δ_1 bằng y . Ta được:

$$u = \frac{u_*^2}{\nu} y. \quad (4-69)$$

Tại ranh giới của lớp mỏng chảy tầng và phần còn lại của dòng chảy, nghĩa là tại nơi $y = \delta$, (bề dày của lớp mỏng chảy tầng), vận tốc u có trị số đặc biệt $u_1 = EF$ (hình 4-21); ở đó u_1 bị chi phối bởi hai quy luật:

- Quy luật (4-69) về sự phân bố vận tốc trong lớp mỏng chảy tầng có độ dày δ :

$$u = \frac{u_*^2}{\nu} y. \quad (4-70)$$

- Quy luật lôgarít về độ thiếu hụt lưu tốc (4-68) đúng cho phần còn lại của dòng chảy:

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{y}. \quad (4-71)$$

Cho $y = \delta$ vào hai công thức này thì ta được:

$$u_1 = \frac{u_*^2}{v} \delta$$

và:
$$\frac{u_{\max} - u_1}{u_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{\delta}.$$

Loại δ ở hai biểu thức vừa mới đạt được ta có:

$$u_{\max} = u_1 + 5,75 u_* \lg \frac{u_*^2 r_0}{u_1 v}. \quad (4-72)$$

Mặt khác, từ (4-68), ta rút ra trị số u_{\max} :

$$u_{\max} = u + 5,75 u_* \lg \frac{r_0}{y}. \quad (4-73)$$

Từ (4-73) và (4-72), ta viết:

$$u + 5,75 u_* \lg \frac{r_0}{y} = u_1 + 5,75 u_* \lg \frac{u_*^2 r_0}{u_1 v},$$

hoặc:
$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_1}{u_*} - 5,75 \lg \frac{r_0}{y} + 5,75 \lg \left(\frac{u_* y}{v} \frac{u_* r_0}{y u_1} \right),$$

hoặc:
$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_1}{u_*} + 5,75 \lg \frac{u_*}{u_1} + 5,75 \lg \frac{u_* y}{v}. \quad (4-74)$$

Với những trị số Râynon lớn hơn 10^5 , ta có thể coi là:

$$\frac{u_1}{u_*} + 5,75 \lg \frac{u_*}{u_1} = \text{const} = 5,5,$$

khi đó quy luật lôgarít về sự thiếu hụt lưu tốc có dạng sau đây:

$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{u_* y}{v}. \quad (4-75)$$

Như vậy tùy theo độ lớn của biểu thức không thứ nguyên $\frac{u_* y}{v}$, ta phân biệt ba khu từ thành ống đến trung tâm (hình 4-21):

a) $\frac{u_* y}{\nu} < 10$; khu lớp mỏng chảy tầng; tính nhớt có tác dụng ưu thế so với tính rối.

Ở đây quy luật phân bố vận tốc cho bởi công thức (4-70):

$$u = \frac{u_*^2}{\nu} y \quad (4-70)$$

hoặc: $\frac{u}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}$

biểu thị bởi đường cong (A) ở đồ thị trên hình 4-22. Đồ phân bố lưu tốc biểu diễn bởi đường thẳng DF trên hình 4-21.

b) $10 < \frac{u_* y}{\nu} < 30$; khu quá độ. Ở đây tính nhớt và tính rối tác động đồng thời, những

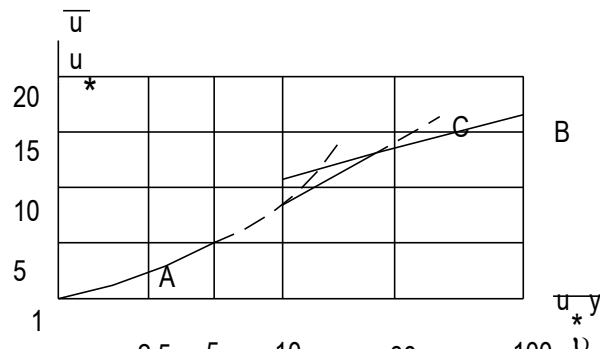
ứng suất tiếp ma sát nhớt $\mu = \frac{du}{dy}$ và ma sát rối $\overline{\rho u'_x u'_y}$ có cùng một độ lớn (lân cận điểm F

ở hình 4-21). Ta có $\frac{u}{u_*} = f\left(\frac{u_* y}{\nu}\right)$. Knútsen và Kátđơ (1958) đề nghị công thức cho khu

này là:

$$\frac{u}{u_*} = 11,5 \lg \frac{u_* y}{\nu} - 3,05, \quad (4-76)$$

biểu diễn bằng đường thẳng (C) ở đồ thị trên hình 4-22.



Hình 4-22

c) $\frac{u_* y}{\nu} > 30$ ứng với phần chủ yếu của dòng chảy (phần FK trên hình 4-21). Ở đây

ảnh hưởng của tính nhớt không đáng kể so với ảnh hưởng của độ rối. Sự phân bố vận tốc ở đây tuân theo quy luật lôgarít về sự thiếu hụt lưu tốc.

$$\frac{u_{\max} - u}{u_*} = 5,75 \lg \frac{r_0}{y}.$$

hoặc:
$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{u_* y}{\nu}.$$

biểu thị bởi đường thẳng (B) (hình 4-22).

Trong thực tiễn kỹ thuật, thường phải xác định tổn thất năng lượng của dòng chảy. Đối với dòng chảy tầng, có thể dùng lý luận đi từ quy luật phân bố lưu tốc trên mặt cắt ngang mà tính ra hệ số λ , rồi suy ra tổn thất cột nước theo công thức Đácxy. Đối với dòng chảy rối, chưa có khả năng làm được như đối với dòng chảy tầng, mà chủ yếu phải dựa vào thí nghiệm để xác định hệ số λ trong công thức Đácxy. Quy luật biến thiên của λ trong dòng chảy rối được Nicurátso phát hiện ra (1932 - 1933), đã đưa việc nghiên cứu sự tổn thất năng lượng trong dòng chảy rối phát triển lên một bước mới.

§4-7. CÔNG THỨC TỔNG QUÁT ĐÁCXY TÍNH TỔN THẤT CỘT NƯỚC h_d TRONG DÒNG CHẢY ĐỀU - HỆ SỐ TỔN THẤT DỌC ĐƯỜNG λ - THÍ NGHIỆM NICURÁTSO

a) *Phân tích những yếu tố ảnh hưởng đến ứng suất tiếp tại thành rắn trong dòng chảy rối và suy diễn công thức tổng quát Đácxy*

Nghiên cứu bằng thí nghiệm dòng chảy rối trong ống tròn có đường kính d , độ nhám tuyệt đối của thành rắn Δ , lưu tốc trung bình v , với chất lỏng có khối lượng đơn vị ρ và hệ số nhớt μ , ta thấy rõ ràng là ứng suất tiếp tại thành rắn τ_0 phụ thuộc tất cả những yếu tố trên, tức là τ_0 là hàm số của những biến số độc lập nói trên:

$$\tau_0 = f(v, d, \Delta, \rho, \mu).$$

Xuất phát từ *nguyên tắc đồng nhất về thứ nguyên* của Fuariê (1882) phát biểu rằng một phương trình biểu thị một mối quan hệ vật lý nào đó giữa một số đại lượng phải đồng nhất về thứ nguyên, tức là thứ nguyên của mỗi vế của phương trình phải như nhau, ta thấy rõ ràng vế phải không thể là tổng số những đại lượng khác nhau đó được mà bắt buộc phải là tích số, tức là:

$$\tau_0 = C v^a d^b \rho^c \mu^d \Delta^e \quad (4-77)$$

trong đó C là hằng số không thứ nguyên; a, b, c, d, e là những số mũ chưa biết.

Viết thứ nguyên của từng đại lượng rồi thay vào phương trình (4-77), ta được:

$$\frac{M}{T^2 L} = \left(\frac{L}{T}\right)^a (L)^b \left(\frac{M}{L^3}\right)^c \left(\frac{M}{LT}\right)^d (L)^e.$$

Số mũ ứng với các thứ nguyên cơ bản M, L, T ở hai vế phải bằng nhau, do đó:

$$\text{Ứng với M: } 1 = c + d,$$

$$\text{Ứng với L: } -1 = a + b - 3c - d + e,$$

$$\text{Ứng với T: } -2 = -a - d.$$

Giải a, b, c theo d và e, ta được:

$$\tau_0 = C v^{2-d} d^{d-e} \rho^{1-d} \mu^d \Delta^e,$$

$$\text{hoặc: } \tau_0 = C \left(\frac{\mu}{v d \rho} \right)^d \left(\frac{\Delta}{d} \right)^e \rho v^2,$$

$$\text{hoặc: } \tau_0 = f_1 \left(\frac{v d \rho}{\mu}, \frac{\Delta}{d} \right) \rho \frac{v^2}{2}, \quad (4-78)$$

với $Re = \frac{v d \rho}{\mu}$, ta có:

$$\tau_0 = f_1 \left(Re, \frac{\Delta}{d} \right) \rho \frac{v^2}{2}. \quad (4-79)$$

$$\text{Gọi: } \psi = f_1 \left(Re, \frac{\Delta}{d} \right), \quad (4-80)$$

công thức (4-79) được viết lại như sau:

$$\tau_0 = \psi \rho \frac{v^2}{2}. \quad (4-81)$$

Trong dòng chảy đều, theo (4-7):

$$\tau_0 = \gamma R J.$$

Ta có thể thay trị số đó của τ_0 vào (4-81) và được:

$$\gamma R J = \psi \rho \frac{v^2}{2}. \quad (4-82)$$

Biết rằng $J = \frac{h_d}{l}$, sau khi thay trị số đó của J vào (4-82), ta có:

$$h_d = \psi \frac{l}{R} \cdot \frac{v^2}{2 \left(\frac{\gamma}{\rho} \right)} = \psi \frac{l}{R} \frac{v^2}{2g}. \quad (4-83)$$

Đối với ống tròn, $R = \frac{d}{4}$, ta có:

$$h_d = 4\psi \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (4-84)$$

Gọi $\lambda = 4\psi$, ta được:

$$h_d = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}. \quad (4-85)$$

trong đó λ là *hệ số ma sát* không thứ nguyên, xác định chủ yếu bằng thí nghiệm. Công thức (4-85) gọi là *công thức Đácxy*, tìm ra năm 1856.

Để tiện dùng công thức Đácxy cho những dòng chảy đều trong những tiết diện không tròn, ta thay đường kính d trong công thức ấy bằng bán kính thủy lực R theo $d = 4R$; ta có:

$$h_d = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g} \quad (4-86)$$

Công thức Đácxy dưới dạng (4-85) và (4-86) là công thức tổng quát tính tổn thất cột nước dọc đường cho dòng chảy đều, dùng cho cả dòng chảy tầng lẫn dòng chảy rối. Nên nhớ lại rằng trong trường hợp chảy tầng, ta cũng đã suy diễn ra công thức Đácxy (4-24), trong đó hệ số λ được tính bằng lý thuyết theo (4-25).

b) Hệ số tổn thất dọc đường λ

Khi suy diễn công thức (4-85), ta đã gọi $\lambda = 4\psi$ mà ψ được xác định theo (4-80).

Vậy:

$$\lambda = f_1 \left(\text{Re}, \frac{\Delta}{d} \right) \quad (4-87)$$

tức là hệ số ma sát dọc đường Đácxy của dòng chảy rối phụ thuộc số Raynôn và độ nhám tương đối. Ta đã biết trong trường hợp chảy tầng thì:

$$\lambda_{\text{tầng}} = \frac{64}{\text{Re}}, \quad (4-25)$$

còn $\lambda_{\text{rối}}$ được xác định bằng thí nghiệm.

c) Thí nghiệm của Nicurátso

Mục đích của thí nghiệm Nicurátso là xác định cụ thể quy luật biến thiên của λ mà biểu thức chung đã được nêu ra dưới dạng (4-87).

Nicurátso đã cho các ống có đường kính khác nhau một độ nhám xác định bằng cách bôi vào phía trong các thành ống một thứ sơn không thấm nước và đổ cho đầy ống một loại

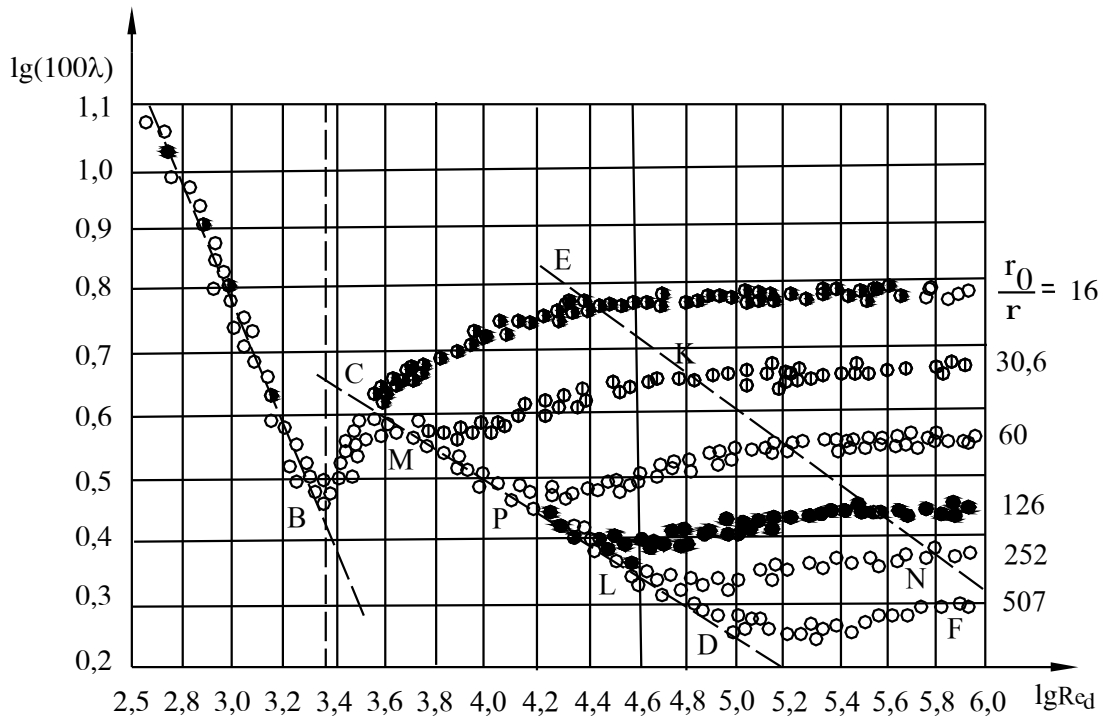
cát đã được lựa chọn có độ thô xác định. Cát dính vào thành; đợi sau khi sơn cứng lại, thì đổ cát thừa ra. Gọi Δ là đường kính trung bình của các hạt cát, r_0 là bán kính của ống, Nicurátso đã có được những ống có độ nhám tương đối $\frac{\Delta}{r_0}$ và độ nhám tuyệt đối Δ . Những ống này dùng để thí nghiệm về tổn thất cột nước dọc đường. Muốn thế ta cho nước chảy qua ống với các lưu lượng khác nhau tức là với các lưu tốc trung bình v khác nhau và ứng với mỗi trường hợp v , đo mực giảm sút của cột nước đo áp h_d trên một đoạn dài xác định l , đoạn dài này không lấy ở phạm vi đoạn đầu $l_{dd} = (25 \div 50)d$ (xem công thức (4-57)), rồi tính những trị số tương ứng của hệ số ma sát λ tự công thức Đácxy (4-14):

$$h_d = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g},$$

từ đó rút ra:
$$\lambda = \frac{h_d}{l} \frac{d2g}{v^2}.$$

Nicurátso đã ghi lại những kết quả thí nghiệm trên một biểu đồ có trục hoành độ là $lgRe$, trục tung độ là $lg100\lambda$ (hình 4-23).

Trên biểu đồ này, những kết quả thí nghiệm làm với những ống có cùng một độ nhám tương đối được ghi lại bằng cùng một loại ký hiệu (chú ý rằng những ống đó có thể có đường kính d khác nhau và độ nhám tuyệt đối Δ khác nhau).



Hình 4-23

Phân tích biểu đồ này, ta có thể chia làm năm khu vực:

1. Đường thẳng AB: *khu chảy tầng*. Những điểm thí nghiệm trong trạng thái chảy tầng đều nằm trên đường thẳng này. Chúng ta nhận thấy rằng ở đây gặp tất cả các dạng dấu hiệu, điều đó có nghĩa là *trong trạng thái chảy tầng, hệ số ma sát λ không phụ thuộc vào độ nhám của ống*, tức là $\lambda = f(Re)$. Theo đường AB, ta thấy λ giảm đi khi Re tăng lên. Mối quan hệ giữa λ và Re được biểu diễn bằng công thức (4-25) đã tìm được bằng lý luận khi nghiên cứu dòng chảy tầng: $\lambda = \frac{64}{Re}$.

Như vậy thí nghiệm Nicurátso xác minh được sự đúng đắn của định luật ma sát nhớt Niuton và của sự phân tích lý thuyết về trạng thái chảy tầng trong ống.

2. Một số lớn điểm nằm lộn xộn giữa đường thẳng AB và điểm C: *khu quá độ từ chảy tầng sang chảy rối*. Những điểm này ứng với thí nghiệm khi dòng chảy quá độ từ trạng thái chảy tầng sang trạng thái chảy rối. Đối với vùng ngắn này chưa xác định được một quy luật nào cả.

3. Đường thẳng CD: *khu chảy rối ống trơn thủy lực*. Đường thẳng này ứng với những thí nghiệm làm cho những thành ống trơn thủy lực. Chúng ta nhận thấy rằng vì những điểm tương ứng với những ống có độ nhám tương đối $\frac{\Delta}{r_0}$ khác nhau đều nằm trên đường thẳng

đó, nên rõ ràng *trong những ống trơn thủy lực, hệ số ma sát λ chỉ phụ thuộc vào số Râyônô và không phụ thuộc vào độ nhám* tức $\lambda = f(Re)$. Ta có thể giải thích điều này từ khái niệm ống trơn thủy lực: thực vậy, vì lớp mỏng chảy tầng có độ dày δ_t lớn hơn độ nhám tuyệt đối Δ trong ống trơn thủy lực, nên những lớp chất lỏng chảy gần thành rắn đều trượt trên lớp mỏng chảy tầng mà không chịu ảnh hưởng của độ nhám. Tuy nhiên khu vực của các số Râyônô ứng với thành trơn thủy lực càng hẹp khi độ nhám tương đối của thành càng lớn.

Theo biểu đồ, với những ống có độ nhám tương đối là $\frac{\Delta}{r_0} = 1/500$, khu vực này là CD. Còn

đối với những độ nhám tương đối lớn hơn thí dụ đối với $\frac{\Delta}{r_0} = \frac{1}{60}$ thì khu vực này lại hẹp

hơn, chỉ còn lại CP. Đường thẳng CD được gọi là đường thẳng Boladiut, biểu thị công thức Boladiut mà ta sẽ nói ở tiết sau.

4. Khu vực giữa đường thẳng CD và đường chấm chấm EF: *khu chảy rối ống nhám thủy lực*. Trong khu vực này λ phụ thuộc vào số Re và vào độ nhám: $\lambda = f\left(Re, \frac{\Delta}{r_0}\right)$. Trong

trường hợp thành nhám thủy lực lớp mỏng chảy tầng không bao phủ được các mấu nhám, nên các lớp chất lỏng phải chảy bao quanh những mấu, tạo nên những xoáy nước, do đó tăng thêm sức cản: vì vậy độ nhám có ảnh hưởng đến sức cản. Thực vậy sự phụ thuộc của λ

vào Δ được biểu hiện ở chỗ ứng với mỗi loại $\frac{\Delta}{r_0}$ có một đường riêng; thí dụ đối với $\frac{\Delta}{r_0} = \frac{1}{30}$ có đường MK và đối với $\frac{\Delta}{r_0} = \frac{1}{250}$ có đường LN, còn sự phụ thuộc vào Re được biểu diễn bằng độ cong và tính chất không nằm ngang của các đường này.

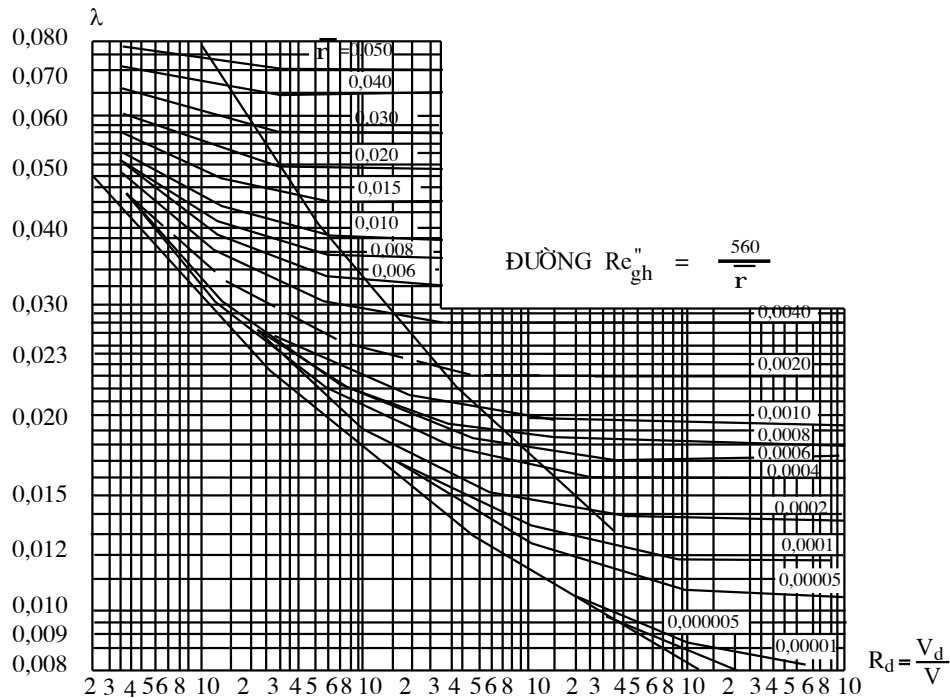
5. Những điểm tương ứng với *thành hoàn toàn nhám thủy lực* đều nằm sang bên phải đường EF: *khu vực cản bình phương lưu tốc*. Trong khu vực này tất cả các đường $\lambda = f\left(\text{Re}, \frac{\Delta}{r_0}\right)$ đều nằm ngang, nghĩa là *khi thành hoàn toàn nhám, λ không phụ thuộc vào Re mà chỉ phụ thuộc vào độ nhám tương đối $\frac{\Delta}{r_0}$* : $\lambda = f\left(\frac{\Delta}{r_0}\right)$. Với Re lớn như vậy, độ dày của lớp mỏng chảy tầng rất nhỏ so với độ nhám, nên ở khu vực gần thành ống sức cản tạo nên bởi sự ma sát nhớt giữa các lớp chất lỏng nhỏ hơn rất nhiều so với sức cản tạo nên bởi sự sinh ra các xoáy nước khi bao quanh các mấu nhám; vì thế ảnh hưởng của Re đối với λ có thể bỏ qua so với ảnh hưởng của $\frac{\Delta}{r_0}$ đối với λ . Liên hệ đến công thức Đácxy, do λ không phụ thuộc Re, ta thấy h_w tỉ lệ với v^2 , cho nên khu vực này thường được gọi là *khu vực sức cản bình phương* tức là sức cản tỉ lệ với bình phương lưu tốc. Khu vực này còn gọi là khu mô hình tự động (sẽ nghiên cứu trong phần lý luận mô hình).

Sự biểu thị các quy luật này là công trình khoa học quan trọng của Nicurátso. Các quy luật này có thể ứng dụng cho sự chuyển động của các loại chất lỏng khác nhau, như dầu hỏa chẳng hạn. Tuy nhiên, những thí nghiệm của Nicurátso mới chỉ được tiến hành với độ nhám nhân tạo (cát), nên khi áp dụng những kết quả của thí nghiệm này vào các ống thường dùng trong thực tế, cần phải thận trọng: độ nhám của các ống do Nicurátso làm thí nghiệm đều cùng một loại (cát đều hạt), trong khi đó thực tế các loại độ nhám có thể là khác nhau (độ nhám trên mặt bê tông, mặt gỗ, đá, mặt gạch v.v...). Năm 1938 nhà nghiên cứu Liên xô Degiôđa đã công bố những kết quả tương tự như kết quả của Nicurátso làm đối với những kênh hở có độ nhám nhân tạo.

Trong nhiều năm từ 1940 đến nay nhiều nhà khoa học đã nghiên cứu các quy luật tổn thất cột nước trong các ống sử dụng trong thực tế, có độ nhám tự nhiên (ống thép, gang và các ống khác). Về mặt định tính, kết quả của các tác giả này nói chung là tương tự với những kết quả của Nicurátso. Tuy nhiên, cũng thấy được sự khác nhau căn bản: ở các ống có độ nhám tự nhiên, các đường $\lambda = f(\text{Re})$ trong khu vực thành nhám (ở biểu đồ Nicurátso, đó là khu vực giữa đường thẳng CD và đường chấm EF) không nâng cao lên mà đều đi xuống.

Trên hình (4-24) biểu diễn đồ thị Còloborúc và Oaito, ghi lại những kết quả thí nghiệm làm với những ống có độ nhám tự nhiên. Trên đồ thị đó, có những đường chấm chấm giới hạn khu vực cản bình phương; vị trí của đường đó được xác định theo $\text{Re}_{\text{gióihạn}}'' = \frac{560}{\Delta}$; với

$Re > Re''_{giới hạn}$ thì sức cản là ở khu bình phương, $\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d}$ là độ nhám tương đối. Ở Liên Xô (cũ) G. A. Murin, F. A. Sêvêlêp cũng đạt được những đồ thị tương tự.



Hình 4-24

Từ những sự khảo sát trình bày tóm tắt ở trên, ta thấy khi giải quyết những vấn đề thực tế, cần lựa chọn đúng hệ số λ (hay C) mà hệ số này lại đồng thời phụ thuộc vào trạng thái chảy và trạng thái trơn, nhám thủy lực của thành rắn như đã nêu ở công thức (4-73). Dưới đây là những công thức xác định hệ số λ và hệ số C dùng để tính tổn thất cột nước dọc đường.

§4-8. CÔNG THỨC SEDI - CÔNG THỨC XÁC ĐỊNH NHỮNG HỆ SỐ λ VÀ C ĐỂ TÍNH TỔN THẤT CỘT NƯỚC DỌC ĐƯỜNG CỦA DÒNG CHẢY ĐỀU TRONG CÁC ỐNG VÀ KÊNH HỎ

1. Công thức Sedi

Trong dòng chảy đều, việc xác định lưu tốc trung bình mặt cắt v là rất quan trọng. Từ công thức Đácxy (4-86):

$$h_d = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

ta rút ra: $v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{R} \sqrt{\frac{h_d}{l}}$,

hoặc: $v = C \sqrt{RJ}$, (4-88)

trong đó, C - hệ số Sedi,

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}. \quad (4-89)$$

Công thức (4-88) gọi là công thức Sedi, một công thức rất quan trọng trong thủy lực học. Hệ số Sedi có thứ nguyên căn số bậc hai của gia tốc (\sqrt{m}/s) và được xác định bằng thí nghiệm.

Biết lưu lượng $Q = \omega v$, ta có thể viết:

$$Q = \omega C \sqrt{RJ}. \quad (4-90)$$

Công thức (4-88) và (4-90) được sử dụng rộng rãi trong thủy lực và đặc biệt cho dòng chảy đều trong kênh hở (xem chương VIII). Nhà kỹ sư Pháp Sedi tìm được công thức đó bằng phương pháp thí nghiệm năm 1775, khi nghiên cứu định luật dòng chảy trên sông. Lúc đầu ông nghĩ rằng hệ số C là đại lượng không đổi và cho nó bằng $C = 50 \sqrt{m}/s$. Sau đó ông nhận xét rằng đại lượng C phụ thuộc nhiều yếu tố: độ nhám, dạng hình học và kích thước mặt cắt ngang của lòng sông và còn phụ thuộc vào cả lưu tốc dòng chảy.

Chúng ta nhận thấy rằng công thức Đácxy và công thức Sedi có thể suy diễn ra nhau. Cả hai đều biểu thị mối quan hệ giữa lưu tốc trung bình của dòng chảy với tổn thất cột nước dọc đường do ma sát gây ra. Muốn sử dụng những công thức đó, cần biết cách tính các trị số của hệ số λ và C.

Một lần nữa chúng ta nhấn mạnh rằng bởi vì hệ số λ là hệ số không thứ nguyên, nên có thể sử dụng công thức Đácxy trong bất kỳ hệ thống đơn vị nào; còn đại lượng C có thứ nguyên là căn số bậc hai của gia tốc, nên chỉ có thể sử dụng công thức Sedi trong hệ thống đơn vị dùng để biểu thị C. Các trị số C đều tính thành \sqrt{m}/s , nên khi áp dụng công thức Sedi, cần phải biểu thị lưu tốc v thành m/s , gia tốc trọng lực thành m/s^2 , bán kính thủy lực R và độ dài l thành mét; lúc đó tổn thất cột nước cũng đo bằng mét.

2. Những công thức xác định hệ số Đácxy λ

a) *Trạng thái chảy tầng:*

Đối với trạng thái chảy tầng trong ống tròn, chúng ta đã có công thức:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{A}{Re}. \quad (4-91)$$

Khi các mặt cắt ngang ống không tròn, tử số sẽ hơi khác với 64. Theo Idobátso đối với mặt cắt hình vuông $A = 57$, đối với tam giác đều $A = 53$, đối với hình vành khăn và khe hở phẳng $A = 96$.

Đối với mặt cắt không tròn cần phải tính số Re theo biểu thức:

$$Re = \frac{vd_{td}}{v},$$

trong đó d_{td} gọi là đường kính tương đương, tức là một đại lượng bậc nhất nào đó được chọn tương đương với đường kính.

Đối với hình vuông có cạnh a ta có: $d_{td} = a$; đối với hình tam giác đều $d_{td} = 0,58a$; đối với hình vành khăn và khe hở phẳng có chiều rộng là a thì $d_{td} = 2a$.

Những trị số đã cho này là chính xác đối với dòng chảy có áp.

$$\text{Đối với kênh hở: } \lambda = \frac{24}{Re_R}. \quad (4-92)$$

b) Trạng thái chảy rối trong các thành trơn thủy lực:

Khi $Re \leq 100.000$, công thức Bôladít (1912) là thích hợp (đường thẳng CD trên đồ Nicurátso hình 4-23):

$$\lambda_{trơn} = \frac{0,316}{Re^{1/4}}. \quad (4-93)$$

Khi $Re \geq 100.000$ (nhưng với điều kiện thành trơn), dùng công thức Cónacóp (1947):

$$\lambda_{trơn} = \frac{1}{(1,8 \lg Re_d - 1,5)^2}; \quad (4-94)$$

đối với $Re < 100.000$, công thức này cũng cho những kết quả tốt. Các trị số tính λ theo (4-94) có thể tra phụ lục 4-1. Đối với ống trơn người ta còn áp dụng công thức Nicurátso (1933):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{trơn}}} = 2 \lg \left(Re_d \sqrt{\lambda_{trơn}} \right) - 0,8, \quad (4-95)$$

thích hợp cho $Re = 5.000 \div 3.000.000$; và có thể mở rộng cho cả $Re > 3.000.000$.

c) Trạng thái chảy rối trong khu thành hoàn toàn nhám thủy lực, công thức Porantơ - Nicurátso:

Dựa trên thí nghiệm của Nicurátso, Porantơ đề nghị công thức sau đây gọi là công thức Porantơ - Nicurátso:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_{\text{nhám}}}} = 2 \lg \frac{d}{\Delta} + 1,14 = 2 \lg \left(3,71 \frac{d}{\Delta} \right) \quad (4-96)$$

thích hợp cho thành hoàn toàn nhám, vừa dùng được cho độ nhám nhân tạo, vừa dùng được cho độ nhám tự nhiên; công thức này ứng với các đường cong ở khu vực thành nhám thủy lực trên đồ thị Nicurátso (hình 4-23) và trên đồ thị Còloborúc – Oaitơ (hình 4-24). Trị số độ nhám Δ tra ở phụ lục 4-2 (coi $\Delta = \Delta_{\text{td}}$), hoặc tra ở bảng 4-1.

d) Khu vực thành nhám:

Có thể dùng công thức Antosun (1952):

$$\lambda = 0,1 \left(\frac{1,46\Delta}{d} + \frac{100}{\text{Re}} \right)^{0,25}, \quad (4-97)$$

hoặc:
$$\lambda \approx 0,11 \left(\frac{\Delta}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}. \quad (4-97')$$

Công thức Antosun (4-97') ở khu vực thành nhám thủy lực dẫn đến công thức Sifrixon:

$$\lambda = 0,11 \sqrt[4]{\frac{\Delta}{d}}. \quad (4-97'')$$

Công thức này có thể dùng thay cho (4-96) trong điều kiện: $\frac{\Delta}{d} < 0,007$.

Δ tra theo bảng 4-1.

Bảng 4-1

Tên vật liệu làm ống	Δ (mm)
Ống thép mới	0,065 ÷ 0,1
Ống thép dùng chưa cũ	0,10 ÷ 0,15
Ống gang mới	0,25 ÷ 1,0
Ống gang đã dùng	1,0 ÷ 1,5

e) Công thức Còloborúc (1939) dùng cho ống có độ nhám tự nhiên: Đối với khu vực sức cản bình phương trong ống có độ nhám tự nhiên, như vừa nói ở trên, có thể dùng công thức Porantơ - Nicurátso (4-96).

Đối với khu vực thành nhám thủy lực trong ống có độ nhám tự nhiên, Còloborúc đề nghị (1939):

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\Delta_{td}}{3,7d} + \frac{2,51}{\text{Re}_d \sqrt{\lambda}} \right) \quad (4-98)$$

trong đó Δ_{td} là độ nhám tương đương.

Độ nhám tương đương Δ_{td} là độ nhám tương đương của một thành ống có mấu gồ ghề đều và phân bố đều, sao cho trong khu vực sức cản bình phương trị số λ ở thành ống tương đương này bằng trị số λ ở thành ống có độ nhám tự nhiên. Độ nhám tương đương được xác định như sau: xét trạng thái chảy ở khu vực bình phương sức cản, bằng thí nghiệm và dùng công thức Đácxy (4-85), xác định λ ; rồi dùng công thức (4-96) để xác định Δ ; đó là Δ_{td} .

Nếu giảm Δ_{td} đến số không thì công thức (4-98) dẫn tới công thức (4-95), nếu tăng Re_d đến vô cực thì dẫn tới công thức (4-96).

Bảng cho những trị số Δ_{td} , xem ở phụ lục 4-2. Trong những năm gần đây, có nhiều công trình nghiên cứu cho biết những trị số Δ của từng loại ống. Có thể tìm những trị số Δ ở các sổ tay thủy lực.

g) *Nhận xét bổ sung*: Trong trường hợp ống thép và ống gang đã sử dụng, trị số λ có thể tính theo công thức kinh nghiệm của Sêvêlêp:

- Với $\text{Re}_d \geq 9,2 \cdot 10^5$ (khu bình phương sức cản):

$$\lambda = \frac{0,021}{d^{0,3}} \approx \frac{0,021}{\sqrt[3]{d}} \quad (4-99)$$

- Với $\text{Re}_d \leq 9,2 \cdot 10^5$ (khu trước sức cản bình phương):

$$\lambda = \left(\frac{1,5 \cdot 10^{-6}}{d} + \frac{1}{\text{Re}_d} \right)^{0,3} \quad (4-100)$$

trong đó d – tính ra m.

3. Tiêu chuẩn giới hạn các khu vực thành trơn, thành nhám, khu sức cản bình phương

a) *Theo chiều dày của lớp mỏng chảy tầng*:

Ở trên chúng ta đã đưa ra công thức tính chiều dày lớp mỏng chảy tầng:

$$\delta_t = \frac{32,8d}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \quad (4-53)$$

Theo đồ thị thí nghiệm của Nicurátso, điểm cuối của khu thành trơn xác định bởi công thức:

$$\frac{\Delta}{d} \text{Re} \sqrt{\lambda} \cong 8 \quad (4-101)$$

và điểm đầu của khu hoàn toàn nhám, tức là khu sức cản bình phương đặc trưng bởi:

$$\frac{\Delta}{d} \text{Re} \sqrt{\lambda} \cong 200. \quad (4-102)$$

Do đó so sánh (4-101), (4-102) với (4-53), ta thấy ứng với thành trơn

$$\delta_t \geq 4\Delta,$$

ứng với thành nhám hoàn toàn:

$$\delta_t \leq \frac{\Delta}{6}.$$

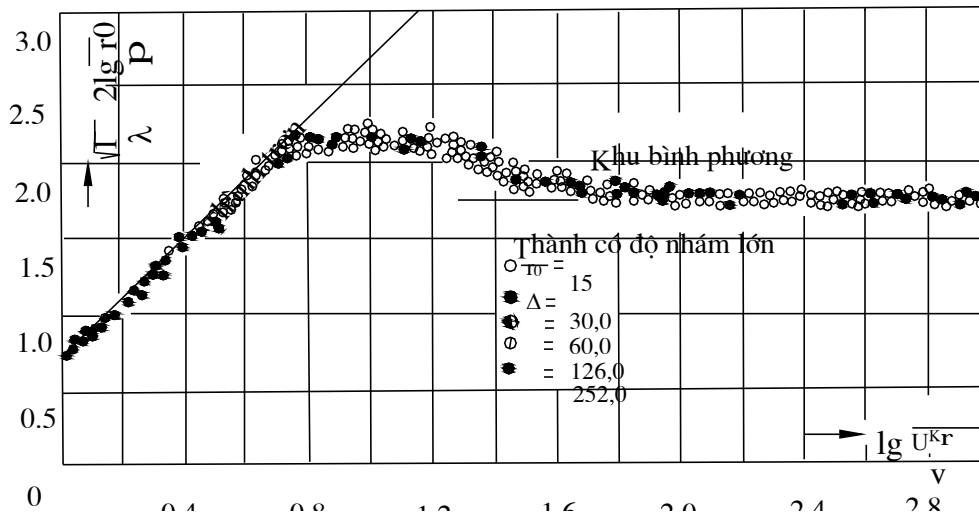
Khu thành nhám, khi:

$$\frac{1}{4} < \frac{\Delta}{\delta_t} < 6. \quad (4-103)$$

b) Theo các số Râyôn giới hạn:

b1) Với những số liệu dùng để lập đồ thị Nicurátso (hình 4-23), ta có thể lập một đồ thị khác với các tọa độ là $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2 \lg \frac{r}{\Delta}\right)$ và $\lg \frac{u_* \Delta}{v}$ (hình 4-25). Đáng chú ý là tất cả các điểm thí nghiệm đều nằm trên cùng một đường thẳng.

Phân tích những số liệu thí nghiệm đó, ta thấy:



Hình 4-25

1. Khi $lg \frac{u_* \Delta}{v} < 0,55$ tức là khi $\frac{u_* \Delta}{v} < 3,55$, những điểm thí nghiệm nằm trên đường thẳng “ống trơn”.

Biết rằng theo (4-52):

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{gRJ},$$

mà theo công thức Sedi (4-88):

$$v = C\sqrt{RJ},$$

ta có được quan hệ giữa lưu tốc động lực u_* và lưu tốc trung bình mặt cắt v như sau:

$$u_* = \sqrt{g} \frac{v}{C}$$

hoặc chú ý đến $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ (4-89)

ta có: $u_* = \sqrt{\frac{g\lambda}{8g}} v = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} v$. (4-104)

Thay trị số của u_* vào bất đẳng thức $\frac{u_* \Delta}{v} < 3,55$, ta được:

$$\frac{u_* \Delta}{v} = \frac{v\sqrt{\lambda}}{\sqrt{8}} \frac{\Delta}{v} \frac{d}{d} < 3,55,$$

hoặc: $Re \sqrt{\lambda} \frac{\Delta}{d} < 10$. (4-105)

Nếu trong biểu thức này ta thay λ bằng công thức (4-93) ở thành trơn, thì được:

$$Re_{\text{trơn}} \leq 27 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{8/7} \quad (4-106)$$

2. Sau khi có:

$$lg \frac{u_* \Delta}{v} > 1,83 \quad \text{hoặc} \quad \frac{u_* \Delta}{v} > 67,6,$$

ta sẽ đạt trị số cho nơi bắt đầu khu bình phương sức cản:

$$Re_{\text{bp}} \approx 191 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{d}{\Delta} \quad (4-107)$$

hoặc
$$\text{Re}_{\text{bp}} \approx 21,6C \frac{d}{\Delta} \quad (4-108)$$

trong đó C là hệ số Sedi.

3. Trong khoảng

$$3,55 < \frac{u_* \Delta}{v} < 67,6$$

tức là
$$27 \left(\frac{d}{\Delta} \right)^{8/7} < \text{Re} < 191 \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{d}{\Delta}, \quad (4-109)$$

ta có khu quá độ từ thành trơn sang thành nhám trong đó λ vừa phụ thuộc số Re, vừa phụ thuộc độ nhám tương đối.

b2) Sử dụng đồ thị Còloborúc và Oaitơ h. 4-24, ta chú ý đến hai đường chấm chấm dùng để tách riêng ra khu sức cản trước bình phương mà đặc trưng là:

$$\lambda = f(\text{Re}, \bar{\Delta}),$$

trong đó:
$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d}.$$

Số Râyôn tương ứng với khu đó nằm trong giới hạn.

$$(\text{Re}_d)'_{\text{gh}} < \text{Re}_d < (\text{Re}_d)''_{\text{gh}}$$

Trong trường hợp:

$$4000 \leq \text{Re}_d \leq (\text{Re}_d)'_{\text{gh}}$$

ta có khu vực ống trơn, phù hợp với quy luật $\lambda = f(\text{Re})$.

Trong trường hợp :

$$\text{Re}_d \geq (\text{Re}_d)''_{\text{gh}}$$

ta có khu vực bình phương, phù hợp với quy luật $\lambda = f(\bar{\Delta})$.

Theo Atosun, những trị số Re giới hạn $(\text{Re}_d)'_{\text{gh}}$ và $(\text{Re}_d)''_{\text{gh}}$ có thể tính gần đúng theo những công thức sau đây:

$$(\text{Re}_d)'_{\text{gh}} \approx \frac{10}{\bar{\Delta}} \quad (4-110)$$

$$(\text{Re}_d)''_{\text{gh}} \approx \frac{500}{\bar{\Delta}}. \quad (4-111)$$

Sử dụng những công thức vừa nêu, ta có thể giải quyết vấn đề:

a) khi nào ống cho trước coi được là ống trơn và lúc đó có thể tính toán mà không cần xét đến độ nhám;

b) khi nào ống cho trước coi được là ở khu bình phương sức cản và lúc đó có thể không cần xét đến số Re.

Ta cũng còn có thể sử dụng những công thức sau đây để xác định những giới hạn thành trơn $(Re_d)'_{gh}$ và giới hạn thành nhám $(Re_d)''_{gh}$.

c) Theo lưu tốc giới hạn

Từ công thức (4-108), mà ta viết lại như sau:

$$\frac{vd}{v} = 21,6C \frac{d}{\Delta}$$

ta có thể tính được trị số lưu tốc giới hạn khu sức cản bình phương:

$$v = 21,6 \frac{v}{\Delta} C$$

Giả thiết $v = 1,31 \text{ mm}^2/\text{s}$, ta có:

$$v \text{ (m/s)} = \frac{0,00002824(\text{m}^{1,5})}{\Delta(\text{m})} \cdot C(\text{m}^{0,5} / \text{s})$$

Với những trị số Δ (mm) như sau:

$\Delta = 0,45$ đối với ống thép mới,

$\Delta = 0,50$ đối với ống gang mới,

$\Delta = 1,35$ đối với ống “thường”,

người ta đã lập bảng 4-2 để tính v_{gh} .

Bảng 4-2

Loại ống	Đường kính ống, mm								
	50	100	200	300	400	500	600	1000	1100
	Trị số v_{gh} (m/s), bắt đầu khu bình phương								
Ống thép mới	2,8	3,2	3,5	3,7	3,8	3,9	4,0	4,2	4,5
Ống gang mới	2,5	2,8	3,1	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0
Ống “thường”	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,2	1,3	1,3

Thí nghiệm chứng tỏ trong nhiều trường hợp, đặc biệt đối với những loại ống “thường” (tức ống đã sử dụng một số năm vẫn còn tốt), không có sự phân biệt lớn lắm giữa λ và $\lambda_{b,p}$, cũng như giữa C và $C_{b,p}$, (những công thức tính λ và C là những công thức dùng cho khu bình phương và khu thành nhám, ký hiệu b.p). Bảng 4-3 cho thấy điều đó.

Bảng 4-3

Loại ống	$\frac{\lambda}{\lambda_{b,p}}$	$\frac{C}{C_{b,p}}$
Thép mới	1,10	0,95
Gang mới	1,22	0,91
“thường”	1,03	0,98

Tuy nhiên đối với những ống đặc biệt, sự phân biệt này có thể lớn.

Thí dụ: cho một ống thép hình trụ hàn nguyên khối, đã sử dụng nhưng còn tốt. Đường kính ống $d = 120$ mm; chiều dài $l = 500$ m. Tính tổn thất cột nước dọc đường, nếu dòng chảy là dầu hỏa có lưu lượng $Q = 40$ l/s và hệ số nhớt động học của dầu hỏa ở nhiệt độ $t = 15^{\circ}\text{C}$ và $\nu = 0,027$ cm²/s.

Lời giải: Độ nhám ống, tra ở phụ lục 4-2 là $\Delta = 0,04$ mm. Do đó độ nhám tương đối

$$\bar{\Delta} = \frac{\Delta}{d} = \frac{0,04}{120} = 0,00033.$$

Lưu tốc trung bình:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0,04}{3,14 \times 0,12^2} = 3,54 \text{ m/s.}$$

Số Re_d :

$$Re_d = \frac{vd}{\nu} = \frac{354 \times 12}{0,027} = 1,57 \cdot 10^5.$$

Ta tính các trị số Râyôn giới hạn theo (4-110) và (4-111):

$$(Re_d)'_{gh} = \frac{10}{\bar{\Delta}} = 3 \cdot 10^4,$$

$$(Re_d)''_{gh} = \frac{500}{\bar{\Delta}} = 1,51 \cdot 10^6.$$

Vậy rõ ràng

$$(\text{Re}_d)'_{\text{gh}} < \text{Re}_d < (\text{Re}_d)''_{\text{gh}},$$

do đó dòng chảy là ở khu thành nhám.

Trên đồ thị (4-25) có thể tra ra:

$$\lambda = 0,0186.$$

Ta có thể dùng công thức Antosun (4-97):

$$\lambda = 0,1 \left(1,46 \bar{\Delta} + \frac{100}{\text{Re}_d} \right)^{0,25} = 0,1 \left(1,46 \cdot 0,00033 + \frac{10^2}{1,57 \cdot 10^5} \right)^{0,25} = 0,0183.$$

Tổn thất dọc đường:

$$h_d = \lambda \frac{l v^2}{d 2g} = 0,0186 \times \frac{500}{0,12} \times \frac{3,54^2}{2 \times 9,81} = 49,5 \text{ m cột dầu hỏa.}$$

4. *Những công thức kinh nghiệm xác định hệ số Sedi C.* Đối với dòng chảy rối ở khu vực cân bằng phương, người ta hay dùng công thức Sedi, từ đó suy ra tổn thất cột nước; hệ số Sedi có thứ nguyên, tính ra $\sqrt{\text{m}}/\text{s}$, bán kính thủy lực R tính ra mét.

Công thức có dạng số mũ.

a) Công thức Maninh (1890):

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \quad (4-112)$$

trong đó n - hệ số nhám, $n < 0,020$; R - bán kính thủy lực, $R < 0,5\text{m}$.

Công thức này cho kết quả tốt đối với ống và kênh hở. Bảng phụ lục 4-4 cho những trị số C tính theo công thức này.

b) Công thức Phoócơrâyme (1923):

$$C = \frac{1}{n} R^{1/5} \quad (4-113)$$

Công thức này thích hợp đối với các kênh đất trong trạng thái tốt với $n > 0,020$ (không cỏ, không sập lở, không có đá lớn).

c) Công thức Pavolópski (1925):

$$C = \frac{1}{n} R^y \quad (4-114)$$

trong đó $y = f(n, R)$ là số mũ, phụ thuộc độ nhám và bán kính thủy lực.

Công thức này đề ra trên cơ sở nghiên cứu tổng hợp các công thức trước. Công thức này dùng cả cho ống và kênh hở, với $R < 3,0 \div 5,0$ m.

Các trị số của hệ số nhám n có thể tìm ở phụ lục 4-3. Số mũ y được xác định theo công thức đầy đủ:

$$y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - 0,75\sqrt{R}(\sqrt{n} - 0,1) \quad (4-115)$$

Trong thực tế Pavolópski thấy rằng có thể áp dụng công thức giản đơn:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1,5\sqrt{n} \text{ khi } R < 1\text{m} \\ y &= 1,3\sqrt{n} \text{ khi } R > 1\text{m} \end{aligned} \right\} \quad (4-116)$$

Các trị số tìm được của y thường nằm trong giới hạn $\frac{1}{4} - \frac{1}{6}$, nhưng cũng có thể cho y ngoài giới hạn đó, có thể lấy các trị số $\frac{1}{3}$ và $\frac{1}{7}$. Các kết quả cũng khá chính xác, nếu lấy

các trị số y bằng các phân số đơn giản có mẫu số nguyên, nghĩa là $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$.

A. M. Latuscencóp đề nghị lấy y theo bảng dưới đây bao gồm phần lớn những điều kiện thực tế:

Bảng 4-4

Loại kênh	$R < 1\text{m}$	$R > 1\text{m}$	y
Kênh có độ nhám bé	$0,015 < n < 0,018$	$0,015 < n < 0,020$	1/6
Kênh có độ nhám trung bình	$0,018 < n < 0,025$	$0,020 < n < 0,030$	1/5
Kênh có độ nhám lớn	$0,025 < n < 0,035$	$0,030 < n < 0,040$	1/4

Công thức Maninh (4-112) và công thức Phoócôrrâyme (4-113) là những trường hợp riêng của công thức Pavolópski (4-114).

Thường thường trong khi tính toán, người ta không tính đại lượng y rồi tính C mà dùng các biểu đồ sẵn có cho C , những bảng biểu đồ đó được lập ra theo công thức Pavolópski với số mũ tính theo công thức đầy đủ (4-115) (xem phụ lục 4-5).

Công thức không có dạng số mũ. Sau đây giới thiệu vài công thức:

d) Công thức Găngghilê-Cútte rút gọn (1869):

$$C = \frac{23 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{23n}{\sqrt{R}}}, \quad (4-117)$$

trong đó n - hệ số nhám xác định theo bảng, xem phụ lục 4-3.

Công thức này dùng cho sông và kênh đào. Một số chuyên gia cho rằng việc áp dụng công thức này đối với $R > 3m$ có cơ sở hơn là công thức Pavolópski.

e) Công thức I. I. Agorótskin (1949):

$$C = 17,72(k + l g R), \quad (4-118)$$

trong đó k - thông số về độ nhám của kênh, k có quan hệ với n như sau:

$$k = \frac{1}{17,72n} = \frac{0,05643}{n} \quad (4-119)$$

Trị số k , xem phụ lục 4-3.

Để tiện việc tính toán hệ số C , trong các sổ tay thủy lực có nhiều bảng tính sẵn hoặc đồ thị.

§4-9. TỔN THẤT CỘT NƯỚC CỤC BỘ - NHỮNG ĐẶC ĐIỂM CHUNG

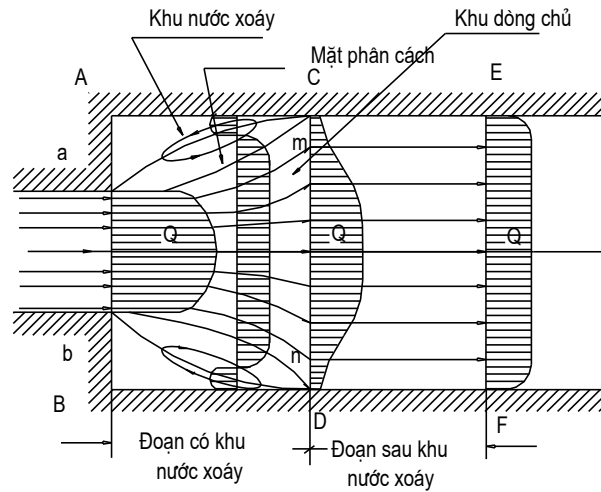
Cho đến nay chúng ta đã nghiên cứu sự tổn thất cột nước trong dòng chảy đều mà ta gọi là tổn thất cột nước dọc đường. Nguyên nhân vật lý của sự tổn thất đó là sức ma sát giữa các phân tử chất lỏng do tính nhớt và sự xáo trộn rối tạo nên; tính chất trơn nhám thủy lực của thành rắn và mức độ rối của dòng chảy là hai yếu tố có ảnh hưởng lớn nhất đến sức cản đối với dòng chảy, loại sức cản này còn được gọi là *sức cản bề mặt*.

Sự tổn thất cột nước đặc biệt lớn ở những nơi mà dòng chảy thay đổi đột ngột về phương hướng, về dạng mặt cắt ướt, tức là tại những nơi mà những đường dòng và những mặt cắt ướt đều cong, (thí dụ tại những nơi uốn cong, mở rộng, co hẹp mặt cắt một cách đột ngột), ở những nơi có những vật chướng ngại cho dòng chảy (thí dụ ở chỗ có cửa van, có đập v.v...); tổn thất cột nước tại những nơi này gọi là tổn thất cục bộ, sức cản loại này gọi là *sức cản hình dạng*.

Sau đây ta nghiên cứu hiện tượng vật lý của tổn thất cục bộ, ta chỉ xét tổn thất trong trạng thái chảy rối.

Tại những nơi có tổn thất cột nước cục bộ thường xảy ra những hiện tượng sau đây: sự hình thành khu nước xoáy, sự tách khỏi thành rắn, sự tăng cường mạch động lưu tốc và áp lực, sự phân bố lại lưu tốc trên mặt cắt v.v... Những hiện tượng đó liên quan chặt chẽ với nhau và thường xảy ra cùng một lúc. Ta xét hai trường hợp cụ thể: trường hợp dòng chảy mở rộng đột ngột và trường hợp dòng chảy co hẹp đột ngột.

1. Trường hợp dòng chảy mở rộng đột ngột (hình 4-26). Tại khu vực dòng chảy mở rộng đột ngột ABCD có thể thấy rõ hai khu: khu dòng chủ abCD và khu nước xoáy, gồm hai nơi aAC và bBD, hai khu đó có ranh giới là mặt phân chia amC và bnD.

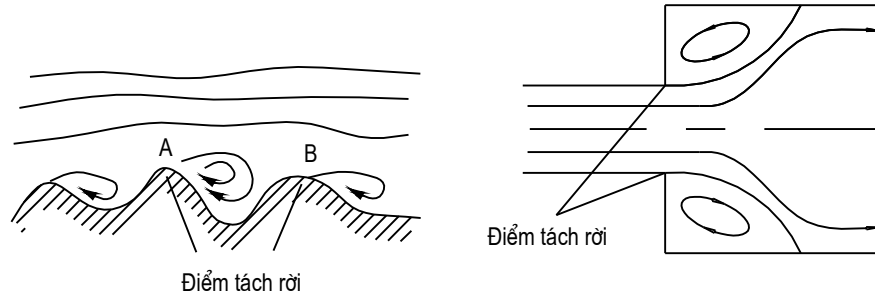


Hình 4-26

Khu dòng chủ là khu dòng chảy đi xuôi, có lưu lượng $Q_{chủ}$ bằng lưu lượng Q trước và sau khi mở rộng đột ngột: $Q_{chủ} = Q$; khu nước xoáy là khu có nước vừa chảy ngược vừa chảy xuôi, lưu lượng chảy xuôi $Q'_{xuôi}$ bằng lưu lượng chảy ngược $Q'_{ngược}$: $Q'_{xuôi} = Q'_{ngược}$. Tính theo những đại lượng trung bình thời gian thì khu nước xoáy coi như không tham gia vào sự chuyển động của dòng chủ; đồng thời trong khu đó có một “đường lưu tốc bằng không” aC và bD , trên đó lưu tốc trung bình thời gian bằng không. *Mặt phân chia* amC và bnD là mặt tưởng tượng, có giá trị trung bình thời gian; khái niệm về mặt phân chia dựa vào khái niệm khu dòng chủ và khu nước xoáy, rất có ích cho việc phân tích nhiều hiện tượng thủy lực ở vùng mở rộng đột ngột. Thực tế thì các phần tử chất lỏng ở hai khu đã xâm nhập lẫn nhau rất mãnh liệt xung quanh vị trí của mặt phân chia, làm cho mặt này không ổn định, không bền vững, liên tục có những sự uốn cong tức thời và cục bộ; theo thuyết truyền động lượng của Porantơ thì có thể coi rằng sự xáo trộn mãnh liệt xung quanh vị trí của mặt phân chia tạo nên ứng suất tiếp tuyến lớn ở khu đó; mặt khác sự uốn cong tức thời và cục bộ của mặt phân chia là nguyên nhân sinh ra những xoáy nước từ cỡ lớn phân thành những cỡ nhỏ, bứt vào dòng chủ và bị cuốn đi hoặc bứt vào khu xoáy, gây nên sự xáo trộn càng tăng cường; do đó sinh ra những mạch động lớn về lưu tốc và áp lực trong hai khu, chủ yếu trong khu dòng chủ. Như vậy, *mặt phân chia là khu vực tập trung tổn thất năng lượng tại những nơi mở rộng đột ngột.*

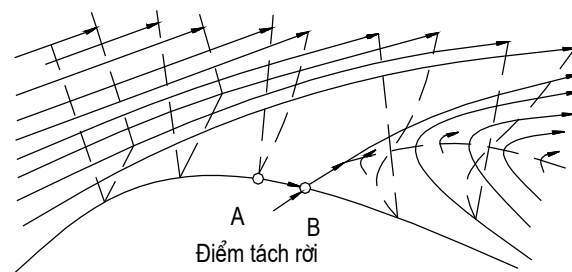
Sự hình thành khu nước xoáy làm cho mạch động áp lực và lưu tốc tăng lên đột ngột, đồng thời làm cho đồ phân bố lưu tốc trung bình thời gian biến dạng rất mạnh. Trên một đoạn dài nhất định trong khu vực mở rộng có quá trình sau đây diễn biến theo chiều dài đó: Các mạch động áp lực và lưu tốc nảy sinh ra, phát triển mạnh mẽ và yếu dần cho tới khi những mạch động đó trở thành những mạch động của dòng chảy đều; trong khi đó đồ phân bố lưu tốc đang từ dạng phân bố trong dòng chảy đều, bị biến dạng đột ngột rồi cuối cùng hồi phục lại dạng phân bố trong dòng chảy đều. Vậy trong khu vực mở rộng đột ngột, có thể chia thành hai đoạn dài: một đoạn từ nơi bắt đầu đến nơi kết thúc mặt phân chia được gọi là *đoạn khu xoáy* ($AB - CD$), đoạn tiếp theo từ nơi kết thúc mặt phân chia đến nơi mà đồ phân bố lưu tốc trung bình thời gian và độ lớn của mạch động lưu tốc và áp lực đã có lại

những đặc tính của mạch động bình thường trong dòng chảy đều gọi là *đoạn sau khu xoáy* hoặc *đoạn quá độ* (CD - EF). Do những mạch động nói trên, động năng của dòng chảy ở mặt cắt CD lớn hơn khá nhiều so với động năng ở mặt cắt EF.



Hình 4-27

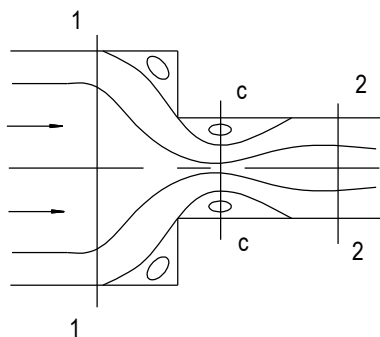
Đi kèm theo sự hình thành những khu nước xoáy và sự tăng cường mạch động thường có hiện tượng dòng chảy *tách rời thành rắn*. Hiện tượng này thường xảy ra trong hai trường hợp: a) trường hợp *biến dạng đột ngột của thành rắn*, làm dòng chảy không thể chuyển động bám theo hình dạng thành rắn, mà do quán tính phải tách khỏi thành rắn; khi đó điểm tách rời thường thường ở chỗ có biến dạng đột ngột, thí dụ trường hợp máu gồ ghề ở thành rắn, trường hợp lòng dẫn mở rộng đột ngột (hình 4-27a và b); b) trường hợp *dòng chảy bao quanh vật rắn*: nếu vật rắn có dạng biến đổi đột ngột thì trở về trường hợp trên: nếu vật rắn có dạng biến đổi từ từ thì sát thành rắn bao giờ cũng hình thành lớp biên giới chảy tầng sát thành mà độ dày ngày một tăng dọc theo chiều dài của vật rắn (hình 4-28); khi bao quanh vật rắn thì do lớp chảy tầng sát thành ngày một dày nên áp lực ở vùng đó ngày một tăng, dòng chảy càng ở gần thành rắn chảy càng chậm, đến một chỗ nhất định thì lưu tốc ở gần thành rắn bằng không; điểm ở vật rắn ứng với chỗ $u = 0$ gọi là *điểm tách rời*, ngay sau đó dòng chảy đột ngột uốn cong, tách khỏi thành rắn tạo nên dòng chủ và mặt vật rắn là khu nước xoáy (hình 4-28). Những hiện tượng dòng chảy tách rời khỏi thành, hình thành khu nước xoáy, tăng cường mạch động lưu tốc, đặc biệt dễ xảy ra ở những khu mở rộng, ở đó dòng chảy có gia tốc âm tức là chảy chậm dần, áp lực tăng dần. Tại khu đó, theo quan điểm hiện đại, mặt phân chia là nơi sinh ra xáo trộn mạnh mẽ, do đó là nơi tập trung tổn thất năng lượng.



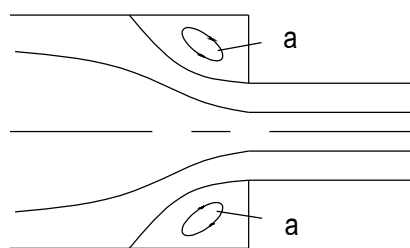
Hình 4-28

2. Sau đây là xét trường hợp *dòng chảy co hẹp đột ngột* (hình 4-29). Đặc điểm của dòng chảy co hẹp đột ngột là có một đoạn co hẹp từ 1-1 đến C-C, trong đó lưu tốc tăng dần, áp lực giảm dần và một đoạn mở rộng từ C-C đến 2-2, trong đó lưu tốc giảm dần, áp lực

tăng dần. Ở đoạn đầu hiện tượng tách rời khỏi thành chủ yếu là do sự biến đổi đột ngột của hình dạng thành rắn và do đó sinh ra khu xoáy nhỏ; những khu xoáy này đặt ở vùng tốc độ ngày càng tăng lên nên mặt phân chia ổn định và bền vững hơn và có những uốn cong tức thời và cục bộ ít hơn so với mặt phân chia ở đoạn mở rộng đột ngột; do đó ở đoạn co hẹp, sự trao đổi phân tử chất lỏng giữa khu dòng chủ và khu xoáy, sự nảy sinh ra những xoáy nhỏ trên mặt phân chia đều không nhiều và không mạnh bằng so với đoạn dòng mở rộng; như vậy ở đoạn co hẹp tổn thất năng lượng ít hơn rất nhiều. Trái lại, ở đoạn mở rộng từ C-C đến 2-2, tổn thất năng lượng rất lớn so với đoạn trên, sự phân tích giống như đã nói ở trường hợp mở rộng đột ngột. Vậy đối với sự co hẹp đột ngột, *tổn thất cột nước cục bộ tập trung vào đoạn mở rộng*. Chú ý rằng sơ đồ chảy khi co hẹp đột ngột vẽ như sơ đồ chảy khi mở rộng đột ngột mà chỉ cần đổi chiều của các đường dòng là vẽ không đúng (hình 4-30). Vì hai khu nước xoáy a không lớn như vẽ trên hình mà chỉ là hai vùng khá nhỏ.

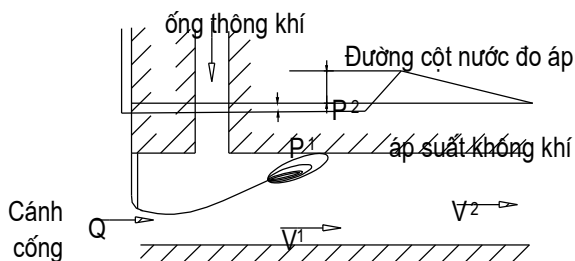


Hình 4-29

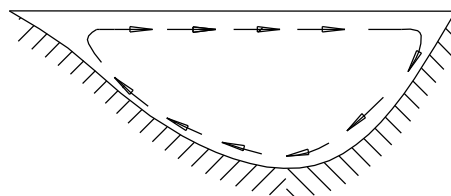


Hình 4-30

Đáng đặc biệt chú ý là tại những nơi co hẹp đột ngột (bao gồm cả đoạn co hẹp và đoạn mở rộng), có mặt cắt co hẹp là mặt cắt ở đó lưu tốc có trị số lớn nhất, áp lực nhỏ nhất, nên ở vùng co hẹp đột ngột có hiện tượng hạ thấp áp lực; tùy theo tốc độ tại nơi co hẹp mà áp lực đó có thể hạ thấp tới mức gây ra chân không, thậm chí gây ra hiện tượng hóa khí, kèm theo đó là hiện tượng mạch động áp lực và mạch động lưu tốc rất lớn. Những hiện tượng đó tạo nên những sức cản lớn cho dòng chảy, ngoài ra sự không ổn định của áp lực thấp còn kéo theo sự rung động của thành rắn. Chính vì vậy mà thông thường ở cửa vào những ống ngầm, những hầm nước, phải đặt ống thông khí để hạn chế sự hạ thấp áp lực và làm giảm rung động (hình 4-31).

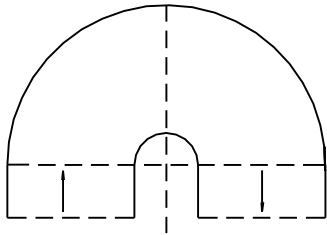


Hình 4-31

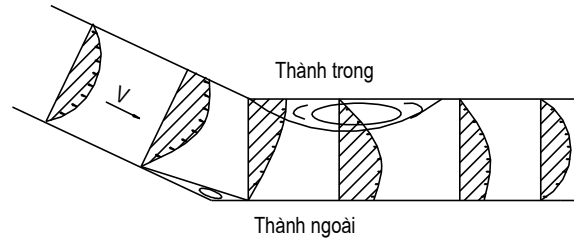


Hình 4-32

Dòng chảy tại những nơi có tổn thất cục bộ là dòng chảy biến đổi đột ngột rất phức tạp, chưa được nghiên cứu nhiều. Để sơ bộ phân tích những yếu tố vật lý, có thể coi hiện tượng mở rộng và hiện tượng co hẹp là hai hiện tượng cơ bản, phân tích như đã trình bày trên và vận dụng để nghiên cứu những trường hợp khác. Cần nói thêm rằng ở những vùng có tổn thất cục bộ thường xảy ra dòng chảy *thứ cấp* bên cạnh dòng chảy chính, thí dụ: dòng chảy ngang ở nơi uốn cong của sông và tạo nên tình trạng bờ bãi, bờ xói (hình 4-32), dòng chảy ngang ở nơi uốn cong của ống (hình 4-33), những dòng chảy ngang thứ cấp đó hợp với dòng chảy chính thành dòng *chảy xoắn*.



Hình 4-33



Hình 4-34

Khi dòng chảy uốn cong, (hình 4-34) những phần tử chất lỏng chịu tác dụng của lực ly tâm (quán tính), do đó ở thành rắn phía ngoài động áp lực tăng lên và ở phía trong động áp lực giảm xuống (trường hợp ống). Điều này dẫn đến cột nước lưu tốc giảm đi ở phía ngoài và tăng lên ở phía trong, gây ra sự biến dạng của đồ phân bố lưu tốc (sự phân bố của lưu tốc).

Để tiện tính toán, người ta giả thiết rằng tổn thất cột nước cục bộ coi như xảy ra tập trung vào một mặt cắt điển hình nhất, chọn trong đoạn dài có những đặc trưng của sự tổn thất cục bộ.

Để xác định tổn thất cục bộ người ta thường dùng công thức Vétsbátso:

$$h_c = \zeta_c \frac{v^2}{2g} , \quad (4-120)$$

trong đó ζ_c - hệ số tổn thất cục bộ, thường thường xác định bằng thí nghiệm v – lưu tốc trung bình, lấy ở mặt cắt trước hoặc sau nơi tổn thất cục bộ, tùy theo cách xác định ζ_c . Trong nhiều trường hợp thực tế, dòng chảy ở những chỗ cần tính tổn thất cục bộ là dòng chảy rối thuộc khu vực cân bằng phương, do đó hệ số ζ_c không phụ thuộc Re (tức là không phụ thuộc v và d) mà chỉ phụ thuộc dạng hình học của chỗ có tổn thất cục bộ.

Sau đây ta xét trường hợp xác định hệ số ζ_c bằng lý luận, đó là trường hợp mở rộng đột ngột.

§4-10. TỔN THẤT CỤC BỘ KHI ỐNG ĐỘT NGỘT MỞ RỘNG - CÔNG THỨC BOÓCĐA

Giả sử ta có dòng chất lỏng trong đoạn ống có mặt cắt mở rộng đột ngột diện tích ω sang Ω (hình 4-35). Thí nghiệm cho thấy những đường dòng không lượn theo thành mở rộng của ống, giữa thành mở rộng của ống và mặt cắt ngoài của dòng chủ giới hạn bởi những đường dòng ac-bd hình thành một khu vực đầy chất lỏng chuyển động vòng quanh tại chỗ gọi là khu xoáy.

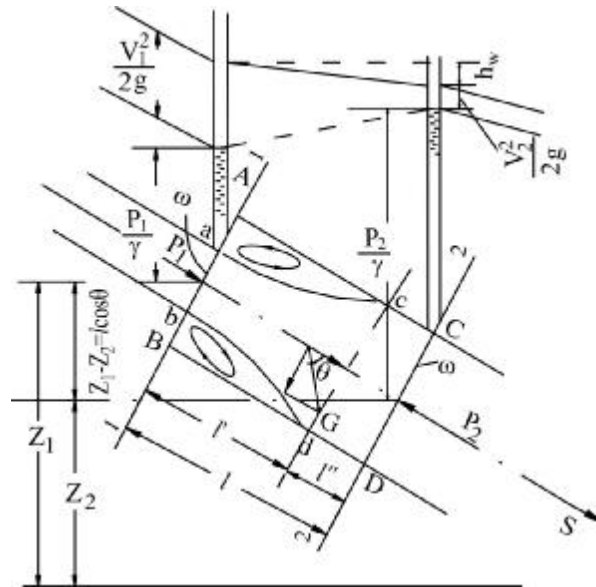
Khu xoáy dài một quãng l' , trong phạm vi đoạn l' này, dòng chảy không thể coi là đổi dần được. Do đó sự mở rộng đột ngột của dòng chảy, trong đoạn l' phát sinh ra mạch động lưu tốc rất lớn, mạch động này tắt dần ở sau đoạn l' , trên một đoạn l'' ; tới mặt cắt 2-2 cấu tạo mạch động được hồi phục lại như ở dòng chảy rối bình thường.

Vẽ hai mặt cắt 1-1 và 2-2 giới hạn khu ta xét (hình 35). Dòng chảy tại 1-1 và 2-2 là đổi dần nên có thể viết phương trình Bécnuuy:

$$h_{dm} = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \right) \quad (4-121)$$

trong đó h_{dm} biểu thị tổn thất vì đột ngột mở rộng.

Để xác định những trị số bên vế phải của phương trình (4-121), ta áp dụng định luật động lượng cho đoạn dòng ABCD, mặt kiểm tra là mặt ABCD giới hạn đoạn dòng đó.



Hình 4-35

Ta viết phương trình động lượng (3-45) theo phương s của trục ống:

$$F_s = \rho Q(\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1),$$

F_s là hợp lực những hình chiếu lên trục ống của các ngoại lực tác dụng lên đoạn dòng ABCD. Những ngoại lực đó gồm:

a) Động áp lực ở mặt cắt 1-1 có thể coi là phân bố theo quy luật thủy tĩnh, vì trong khu dòng chảy a-b, các đường dòng đều song song và trong khu nước xoáy a-A, b-B chất lỏng di động rất chậm coi như đứng tại chỗ. Gọi p_1 là động áp suất tại trung tâm của mặt cắt 1-1 và coi áp suất ở mọi điểm trên mặt cắt 1-1 cũng đều bằng p_1 , ta có áp lực trên mặt 1-1 bằng:

$$P_1 = p_1 \Omega,$$

p_1 đặt theo phương s, có dấu dương.

Động áp lực ở mặt cắt 2-2, cũng phân bố theo quy luật thủy tĩnh và bằng:

$$P_2 = p_2 \Omega,$$

trong đó p_2 là áp suất tại trọng tâm mặt cắt 2-2 và coi áp suất ở mọi điểm trên mặt cắt đều bằng p_2 .

P_2 đặt ngược phương s, có dấu âm.

b) Trọng lực G của đoạn dòng ABCD, chiếu lên phương s, có biểu thức:

$$G \cos \theta = \gamma \Omega / \cos \theta = \gamma \Omega (z_1 - z_2),$$

trong đó θ là góc lập bởi trục ống và đường thẳng đứng.

Góc $\theta < \frac{\pi}{2}$ nên hình chiếu $G \cos \theta$ nằm theo phương s, có dấu +.

c) Sức ma sát dọc thành ống coi không đáng kể vì đoạn dài l tương đối ngắn.

d) Các phản lực của thành ống, thẳng góc với trục ống nên hình chiếu lên phương s bằng không.

Như vậy:

$$F_s = P_1 - P_2 + G \cos \theta = (p_1 - p_2) \Omega + G \cos \theta.$$

Sự biến thiên động lượng ΔK tính như sau:

a) Động lượng khối chất lỏng đi vào mặt kiểm tra là $\rho Q \alpha_{01} v_1$ mang dấu âm; góc chiếu lên phương s là θ , nên vẫn giữ dấu âm.

b) Động lượng khối chất lỏng đi ra khỏi mặt kiểm tra là $\rho Q \alpha_{02} v_2$ mang dấu dương; góc chiếu lên phương s là θ nên vẫn giữ dấu dương.

Như vậy:

$$\Delta K = \rho Q \alpha_{02} v_2 - \rho Q \alpha_{01} v_1;$$

theo (3-43):

$$\rho Q (\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1) = (p_1 - p_2) \Omega + G \cos \theta.$$

Thay $Q = v_2\Omega$ và thu gọn phương trình trên ta có:

$$\rho v_2 (\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1) = p_1 - p_2 + \gamma(z_1 - z_2).$$

Thay trị số đó vào (4-121):

$$h_{dm} = \frac{v_2(\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1)}{g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} - \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}.$$

Thí nghiệm cho biết trị số của α_0 và của α đều gần bằng nhau và gần bằng 1 nên có thể viết:

$$\boxed{h_{dm} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g}}. \quad (4-122)$$

Nếu gọi hiệu số $v_1 - v_2$ là “độ hụt lưu tốc” khi dòng chảy mở rộng đột ngột, ta có thể phát biểu kết quả trên như sau:

“Tổn thất cột nước cục bộ vì dòng chảy mở rộng đột ngột bằng cột nước của “độ hụt lưu tốc”. Định luật này gọi là “*định luật Boócđơ*”.

Công thức Boócđơ có thể viết theo cột nước lưu tốc trước chỗ mở rộng v_1 hoặc sau chỗ mở rộng v_2 :

$$h_{dm} = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g},$$

hoặc:
$$h_{dm} = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g}.$$

Ứng dụng phương trình liên tục $v_1\omega = v_2\Omega$ hoặc $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\Omega}{\omega}$, ta có:

$$h_{dm} = \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g}$$

Viết theo dạng tổng quát của tổn thất cột nước cục bộ (4-120), ta có:

$$h_{dm} = \zeta'_{dm} \frac{v_1^2}{2g}$$

hoặc:
$$h_{dm} = \zeta''_{dm} \frac{v_2^2}{2g}$$

trong đó hệ số tổn thất cục bộ vì mở rộng đột ngột là:

$$\zeta'_{dm} = \left(1 - \frac{\omega}{\Omega}\right)^2, \quad (4-123)$$

$$\zeta_{dm}'' = \left(\frac{\Omega}{\omega} - 1 \right)^2 \quad (4-124)$$

Công thức Boócđơ cũng dùng cho trường hợp lòng dẫn là kênh hở.

§4-11. MỘT SỐ DẠNG TỔN THẤT CỤC BỘ TRONG ỐNG

Sau đây là một số trường hợp thường gặp về tổn thất cục bộ trong ống; những hệ số tổn thất cục bộ đều tìm được bằng thí nghiệm. Những hệ số dưới đây đều dùng với lưu tốc tại mặt cắt đặt sau nơi có tổn thất cục bộ (theo chiều chảy).

1. Co hẹp đột ngột (hình 4-36)

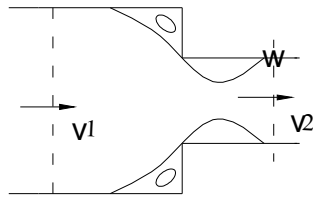
$$\zeta_{ch} = 0,5 \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right)$$

2. Miệng vào ống

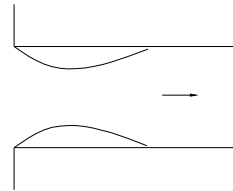
Sắc mép (hình 4-37) $\zeta_{vào} = 0,50$

Mép tròn, thuận $\zeta_{vào} = 0,20$

Mép vào rất thuận $\zeta_{vào} = 0,05$



Hình 4-36



Hình 4-37

3. Miệng ra của ống (hình 4-38) (dùng với lưu tốc trước chỗ mở rộng):

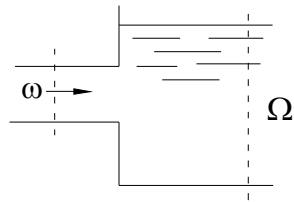
$$\zeta_{ra} = \left(1 - \frac{\omega}{\Omega} \right)^2$$

Nếu Ω khá lớn so với ω , thì $\zeta_{ra} = 1$.

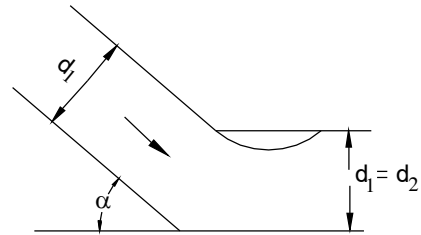
4. Nơi ống tròn uốn cong

a) Uốn đột ngột thành góc α (hình 4-39); quan hệ giữa ζ và α , khi $d_1 = d_2$ (đúng với $d < 50\text{mm}$):

α	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
ζ	0,20	0,30	0,40	0,55	0,70	0,90	1,10



Hình 4-38



Hình 4-39

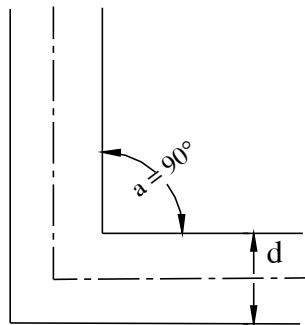
b) Uốn đột ngột thành góc $\alpha = 90^\circ$ (hình 4-40); quan hệ giữa ζ và d :

d(m)	0,20	0,25	0,34	0,39	0,49
ζ	1,70	1,3	1,1	1,0	0,83

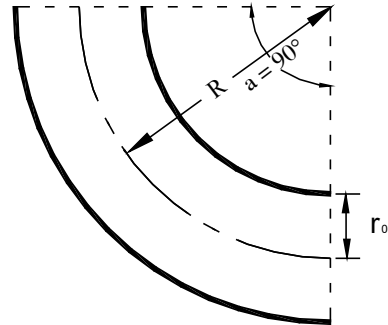
c) Uốn dần dần thành góc $\alpha = 90^\circ$ (hình 4-41); $\zeta = f\left(\frac{r_0}{R}\right)$:

$$\zeta = 0,13 + 1,85 \left(\frac{r_0}{R}\right)^{3,5},$$

trong đó, r_0 - bán kính ống; R - bán kính cong của trục ống.



Hình 4-40



Hình 4-41

Trị số ζ cho trong bảng sau đây:

$\frac{r_0}{R}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
ζ	0,13	0,14	0,16	0,21	0,29	0,44	0,66	0,98	1,41	1,98

Nếu $\alpha \neq 90^\circ$ thì bảng trên vẫn có thể dùng được bằng cách nhân ζ ở bảng đó với $\frac{\alpha}{90^\circ}$.

5. Cửa van phẳng trong ống tròn (hình 4-42)

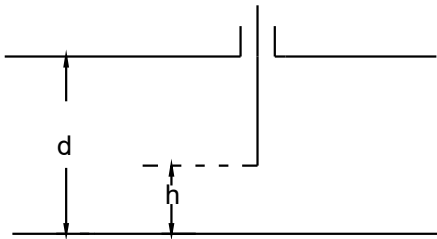
$$\zeta = f\left(\frac{d-h}{d}\right)$$

$\frac{d-h}{d}$	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8
ζ	0	0,07	0,26	0,81	2,06	5,52	17,0	97,8

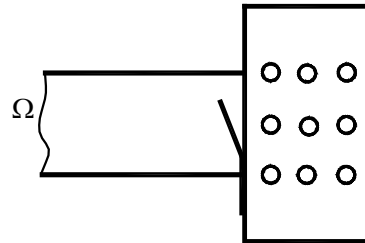
6. Van một chiều ở ống hút của bơm, có kèm theo lưới ngăn rác (hình 4-43)

Có thể dùng trị số ζ tùy theo đường kính d của ống hút như sau:

d, mm	50	75	100	125	150	200	250	300	400
ζ	10	8	7	6,5	6	5	4,5	4	3



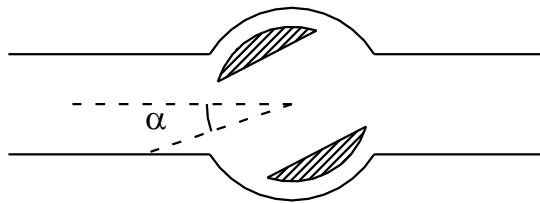
Hình 4-42



Hình 4-43

Nếu không có van một chiều mà chỉ có lưới:

$$\zeta = 5 \div 6$$



Hình 4-44

7. Khóa nước (hình 4-44). Hệ số ζ phụ thuộc góc mở α cho bởi bảng sau đây:

α°	5	10	20	30	40	50	60	70	80
ζ	0,05	0,29	1,56	5,47	17,3	52,6	206	486	∞

Chương V

DÒNG CHẢY RA KHỎI LỖ VÀ VÒI - DÒNG TIA

A - DÒNG CHẢY RA KHỎI LỖ VÀ VÒI

§5-1. KHÁI NIỆM CHUNG

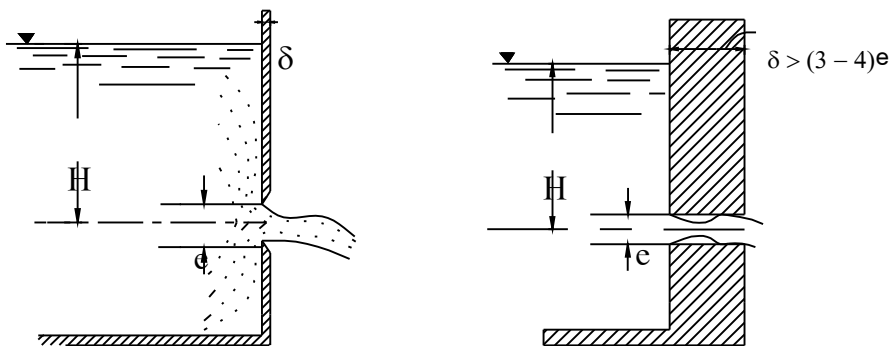
Trên thành bình chứa chất lỏng có khoét một lỗ, dòng chất lỏng chảy qua lỗ gọi là *dòng chảy ra khỏi lỗ*; vòi là một ống ngắn dính liền với thành bình chứa, dòng chất lỏng chảy qua vòi là *dòng chảy ra khỏi vòi*. Lý thuyết về dòng chảy qua lỗ, qua vòi là cơ sở cho sự tính toán thủy lực về cống lấy nước, cống tháo nước, âu thuyền, máy phun đào đất, vòi chữa cháy v.v...

Tổn thất năng lượng của dòng chất lỏng chảy qua lỗ, qua vòi chủ yếu là do khắc phục sức cản cục bộ tại ngay nơi có lỗ, có vòi; do đó tổn thất cột nước hầu như hoàn toàn là tổn thất cục bộ.

Theo tính chất của dòng chảy khỏi lỗ, có thể phân loại lỗ như sau:

1. Theo độ cao e của lỗ so với cột nước H tính từ trọng tâm của lỗ, mà phân ra: lỗ nhỏ, lỗ to (hình 5-1).

a) Nếu $e < \frac{H}{10}$ thì gọi là *lỗ nhỏ*. Ta coi rằng cột nước tại các điểm của lỗ nhỏ đều bằng nhau và bằng cột nước H tại trọng tâm của lỗ.



Hình 5-1

b) Nếu $e \geq \frac{H}{10}$ thì gọi là *lỗ to*. Cột nước tại phần trên và phần dưới của lỗ to có trị số khác nhau rõ rệt.

2. Theo độ dày của thành lỗ, có thể phân ra lỗ thành mỏng và lỗ thành dày;

a) Nếu lỗ có cạnh sắc và độ dày δ của thành lỗ không ảnh hưởng đến hình dạng của dòng chảy ra thì gọi là *lỗ thành mỏng*;

b) Nếu độ dày $\delta > (3 \div 4)e$, ảnh hưởng đến hình dạng dòng chảy ra thì loại lỗ này gọi là *lỗ thành dày*.

3. Theo tình hình nối tiếp của dòng chảy ra, có thể chia thành:

a) *Chảy tự do*: khi dòng chảy ra khỏi lỗ tiếp xúc với không khí.

b) *Chảy ngập*: khi dòng chảy ra khỏi lỗ bị ngập dưới mặt chất lỏng.

c) *Chảy nửa ngập*: khi mặt chất lỏng tại phía ngoài lỗ nằm ở trong phạm vi độ cao lỗ.

§5-2. DÒNG CHẢY TỰ DO, ỔN ĐỊNH QUA LỖ NHỎ THÀNH MỎNG

Dòng chảy khỏi lỗ, khi cột nước tác dụng H không đổi, là một dòng chảy ổn định, tức là lưu tốc, áp lực đều không thay đổi với thời gian.

Khi chất lỏng chảy ra khỏi lỗ, ở ngay trên mặt lỗ, các đường dòng không song song, nhưng cách xa lỗ một đoạn nhỏ, độ cong của các đường dòng giảm dần, các đường dòng trở thành song song với nhau, đồng thời mặt cắt ướt của luồng chảy co hẹp lại; mặt cắt đó gọi là *mặt cắt co hẹp*. Vị trí mặt cắt này phụ thuộc hình dạng của lỗ; đối với lỗ hình tròn, mặt cắt co hẹp ở cách lỗ chừng một nửa đường kính lỗ. Tại mặt cắt co hẹp, dòng chảy có thể coi là dòng đối xứng; ra khỏi mặt cắt co hẹp, dòng chảy hơi mở rộng ra và rơi xuống dưới tác dụng của trọng lực.

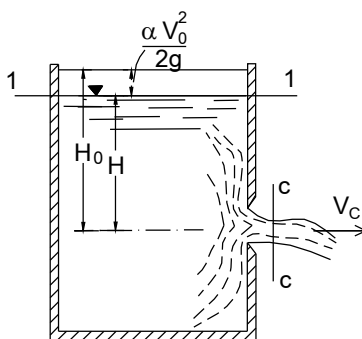
Ta cần tìm công thức tính lưu lượng của lỗ.

Lấy hai mặt cắt: 1-1 ở mặt tự do trong thùng chứa và C-C tại mặt cắt co hẹp của dòng chảy ra, ta chọn mặt chuẩn nằm ngang 0-0 đi qua trọng tâm của lỗ (hình 5-2) rồi viết phương trình Bécnuuiy cho một điểm đặt tại mặt cắt 1-1 và cho điểm đặt tại trọng tâm C-C:

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g} = 0 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h_w, \quad (5-1)$$

trong đó H là cột nước kể từ trọng tâm của diện tích lỗ, v_0 là lưu tốc trung bình tại mặt cắt 1-1, v_c là lưu tốc trung bình tại mặt cắt C-C; h_w là tổn thất của dòng chảy đi từ 1-1 đến C-C, ở đây chủ yếu là tổn thất cục bộ qua lỗ:

$$h_w = \zeta \frac{v_c^2}{2g}$$



Hình 5-2

Đặt $H_0 = H + \frac{\alpha_1 v_0^2}{2g}$ thì phương trình (5-1) viết thành:

$$H_0 = (\alpha_c + \zeta) \frac{v_c^2}{2g},$$

Do đó lưu tốc trung bình tại mặt cắt co hẹp C-C là:

$$v_c = \sqrt{\frac{1}{\alpha_c + \zeta}} \sqrt{2gH_0},$$

hoặc:

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH_0} \quad (5-2)$$

trong đó φ là hệ số lưu tốc của lỗ:

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{\alpha_c + \zeta}}$$

vì $\alpha_c \approx 1$, nên:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \quad (5-3)$$

Lưu lượng Q chảy qua lỗ là:

$$Q = v_c \omega_c = \varphi \omega_c \sqrt{2gH_0},$$

trong đó ω_c là diện tích của mặt cắt co hẹp.

Đặt ε là hệ số co hẹp tức là tỉ số diện tích mặt cắt co hẹp và diện tích lỗ, ta có:

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega} \quad (5-4)$$

Vậy lưu lượng là:

$$Q = \varphi \varepsilon \omega \sqrt{2gH_0} = \mu \omega \sqrt{2gH_0} \quad (5-5)$$

trong đó $\mu = \varphi \varepsilon$ là *hệ số lưu lượng* của lỗ. Nên chú ý rằng, ở lỗ nhỏ thì hệ số lưu lượng μ chủ yếu biến đổi theo hình dạng của lỗ, còn ít có quan hệ với cột nước H.

Những công thức (5-2) và (5-5) nói trên là những công thức cơ bản của dòng chảy ổn định, tự do, qua lỗ nhỏ thành mỏng. Tiếp đây ta thảo luận đến các loại co hẹp của dòng chảy qua lỗ nhỏ và các dạng của dòng chảy ra.

1. *Các loại co hẹp của dòng chảy ra khỏi lỗ.* Ta thấy rõ sự co hẹp của mặt cắt dòng chảy ra khỏi lỗ có ảnh hưởng rất lớn đến lưu lượng. Các phần tử chất lỏng chảy dọc thành bình chứa, rồi chảy về lỗ theo một đường cong có độ cong nào đó.

Nếu đặt lỗ sát ngay một cạnh của thành bình thì đường dòng tương ứng là một đường thẳng và bộ phận đường dòng chảy ở biên giới đó của lỗ không có co hẹp. Như vậy ta có thể chia ra (hình 5-3a):

- a) *lỗ co hẹp toàn bộ* khi trên chu vi lỗ đều có co hẹp hoặc nhiều hoặc ít (lỗ 1, lỗ 2).
- b) *lỗ co hẹp không toàn bộ* khi có một phần nào đó trên chu vi lỗ không co hẹp (lỗ 3, lỗ 4).

So với co hẹp toàn bộ thì khi co hẹp không toàn bộ, hệ số lưu lượng tất nhiên tăng lên. Theo Pavolópski, hệ số lưu lượng μ_c khi có co hẹp không toàn bộ tính theo công thức:

$$\mu_c = \mu \left(1 + 0,4 \frac{p}{\chi} \right), \quad (5-6)$$

trong đó μ là hệ số lưu lượng khi có co hẹp toàn bộ và đồng thời hoàn thiện; p là độ dài biên giới lỗ trên đó không co hẹp; χ là toàn bộ chu vi lỗ.

Nếu lỗ khoét ở chỗ khá xa các cạnh của thành bình chứa và xa mặt cắt tự do thì độ cong của các đường dòng là lớn nhất và dòng chảy sẽ co hẹp về mọi hướng, khi đó ta gọi là *co hẹp hoàn thiện*.

Sự co hẹp gọi là không hoàn thiện nếu vị trí của lỗ đặt gần các cạnh bình chứa hoặc mặt tự do, sao cho cạnh bình chứa hoặc mặt tự do ảnh hưởng không nhiều đến độ cong các đường dòng (cụ thể là giảm mức độ co hẹp).

Thí nghiệm chứng tỏ:

a) Co hẹp hoàn thiện xảy ra khi khoảng cách của cạnh lỗ đến bất kỳ một cạnh nào của thành bình đều không nhỏ hơn ba lần kích thước theo phương tương ứng của lỗ, thí dụ lỗ 1 ở hình (5-3a): $L_1 > 3b_1$ và $L_2 > 3b_2$.

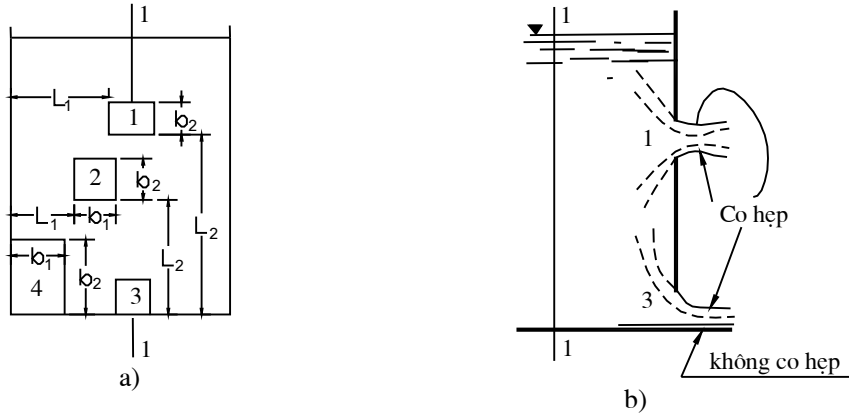
b) Co hẹp không hoàn thiện xảy ra khi khoảng cách từ bất kỳ một cạnh lỗ nào đến một cạnh thành bình chứa nhỏ hơn ba lần kích thước theo phương tương ứng của lỗ tức là lỗ càng gần mặt thành bình thì sự co hẹp càng yếu đi, thí dụ lỗ 2,3, 4, trên hình 5-3a, có:

$$L_1 < 3b_1 \text{ hoặc } L_2 < 3b_2.$$

Khi sự co hẹp là co hẹp toàn bộ, nhưng không hoàn thiện thì hệ số lưu lượng $\mu_{k,h,t}$ sẽ lớn hơn hệ số lưu lượng μ ứng với lúc co hẹp toàn bộ và hoàn thiện:

$$\mu_{k,h,t} = \mu \left[1 + 0,64 \left(\frac{\omega}{\Omega} \right)^2 \right], \quad (5-7)$$

trong đó ω là diện tích lỗ, Ω là diện tích có tiếp xúc với chất lỏng của thành bình trên đó có khoét lỗ.



Hình 5-3

Đối với dòng chảy tự do ra khỏi lỗ tròn, khi co hẹp toàn bộ và hoàn thiện, thì các trị số hệ số tổn thất của lỗ ζ , hệ số lưu tốc φ , hệ số co hẹp ε và hệ số lưu lượng μ về cơ bản là các hằng số; đối với lỗ tròn thành mỏng $d \geq 1\text{cm}$, với $Re = \frac{v_c d}{\nu} > 10^5$, $H \geq 2\text{m}$ (đối với nước) chúng ta có những trị số sau đây: $\zeta = 0,05 \div 0,06$; $\varepsilon = 0,63 \div 0,64$; $\varphi = 0,97 \div 0,98$; $\mu = 0,60 \div 0,62$, trung bình lấy $\mu = 0,61$. Những trị số này nên nhớ. Người ta thường dùng lỗ nhỏ, thành mỏng để đo lưu lượng.

2. *Hình dạng của dòng chảy tự do ra khỏi lỗ.* Quỹ đạo của dòng chảy ra khỏi lỗ khoét trên thành đứng có thể tính theo cách sau đây: ta lấy trọng tâm của mặt cắt co hẹp C-C làm gốc tọa độ (hình 5-4), lưu tốc trung bình ở đó là v_c ; ta coi được rằng phần tử chất lỏng chuyển động theo quỹ đạo của một vật rắn rơi có tốc độ ban đầu v_c ; phương trình của quỹ đạo chuyển động này đã được nghiên cứu trong cơ học chất rắn; nó có dạng:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_c t \\ y &= \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

trong đó $v_c = \varphi \sqrt{2gH_0}$, t là thời gian cần để phần tử chất lỏng đi tới điểm (x, y) : loại t ở hệ (5-8), ta có:

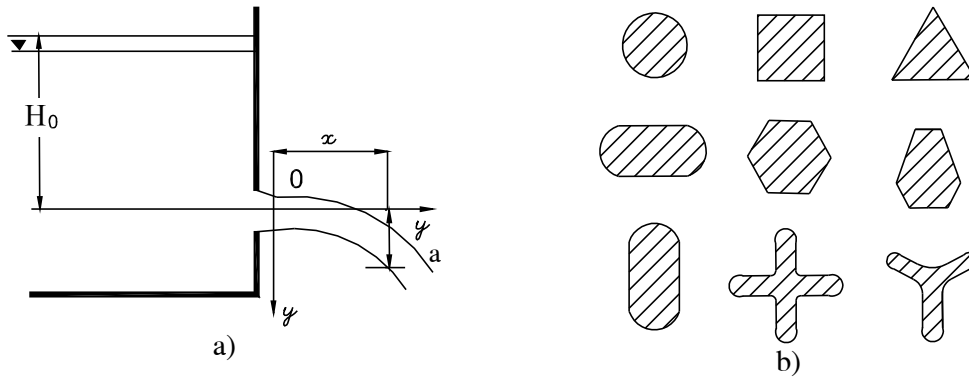
$$x^2 = 4\varphi^2 H_0 y. \quad (5-9)$$

Đó là phương trình parabol và quỹ tích dòng chảy ra khỏi lỗ là một parabol.

Đối với lỗ tròn nhỏ, khi $\varphi = 0,97$ thì:

$$x^2 = 3,76 H_0 y. \quad (5-10)$$

Cần chú ý rằng mặt cắt của dòng chảy ra khỏi lỗ nhỏ thành mỏng biến đổi hình dạng một cách liên tục, chủ yếu do mức độ co hẹp về các phương hướng không như nhau, đồng thời do tác dụng của sức căng mặt ngoài. Thí dụ dòng chảy ra khỏi lỗ hình tròn có mặt cắt biến dạng thành hình elíp, ra khỏi lỗ hình vuông dòng chảy có mặt cắt biến thành hình tám cạnh, rồi hình chữ thập; tự lỗ tam giác, mặt cắt dòng chảy biến thành hình chữ Y (hình 5-4b).



Hình 5-4

§5-3. DÒNG CHẢY NGẬP, ỔN ĐỊNH, QUA LỖ THÀNH MỎNG

Khi ở sau lỗ có mặt tự do của chất lỏng nằm cao hơn lỗ, dòng chảy ra khỏi lỗ bị ngập, lúc đó ta có dòng chảy ngập. Cột nước tác dụng bằng hiệu số cột nước ở thượng lưu với hạ lưu. Do đó, đối với dòng chảy ngập không cần phân biệt lỗ to lỗ nhỏ.

Đối với dòng chảy ngập ổn định cũng dùng phương trình Bécnuuy để tìm công thức tính lưu lượng. Ta lấy hai mặt cắt 1-1 và 2-2 khá cách xa lỗ, tại hai mặt đó dòng chảy phù hợp với điều kiện chảy đối dân (hình 5-5), lấy mặt chuẩn là mặt phẳng nằm ngang đi qua trọng tâm O của lỗ và giả định lưu tốc trung bình tại mặt cắt 2-2 có thể bỏ đi được. Phương trình Bécnuuy viết cho mặt cắt ướt 1-1 và 2-2 là:

$$h_1 + \frac{P_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = h_2 + \frac{P_a}{\gamma} + h_w \quad (5-11)$$

trong đó: $\frac{\alpha v_0^2}{2g}$ là cột nước lưu tốc tiến gần; h_w là tổng số tổn thất cột nước khi chất lỏng qua lỗ, tính theo lưu tốc v_c tại mặt cắt co hẹp C-C và hệ số sức cản $\Sigma \zeta$:

$$h_w = \sum \zeta \frac{v_c^2}{2g}.$$

Sau khi thu gọn ta có:

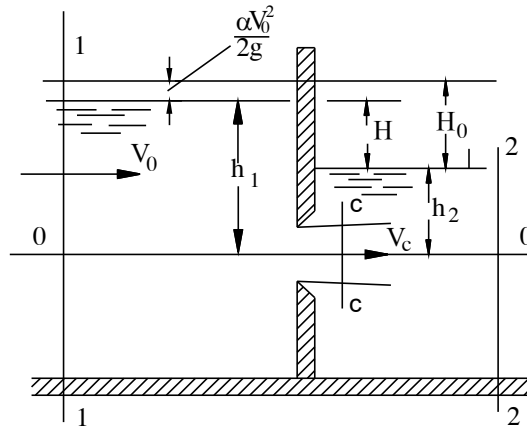
$$h_1 - h_2 + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = \sum \zeta \frac{v_c^2}{2g}.$$

hoặc:

$$H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = H_0 = \sum \zeta \frac{v_c^2}{2g},$$

trong đó H là hiệu số cột nước của thượng và hạ lưu, $H = h_1 - h_2$; do đó:

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{\sum \zeta}} \sqrt{2gH_0}$$



Hình 5-5

Đặt $\frac{1}{\sqrt{\sum \zeta}} = \varphi$ thì được:

$$v_c = \varphi \sqrt{2gH_0}.$$

Cũng như ở trên, hệ số co hẹp là:

$$\varepsilon = \frac{\omega_c}{\omega}$$

Vậy lưu lượng qua lỗ bị ngập là:

$$Q = \omega_c v_c = \varepsilon \omega \varphi \sqrt{2gH_0}.$$

hoặc: $Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0}$, (5-12)

trong đó μ là hệ số lưu lượng của lỗ bị ngập, $\mu = \varepsilon \varphi$.

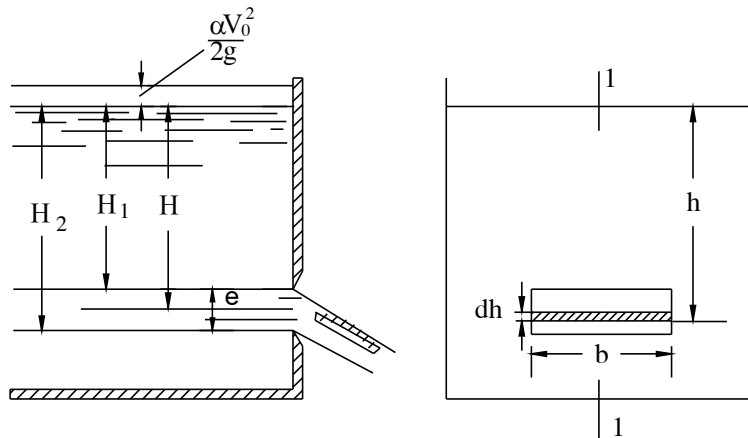
Tổn thất cột nước h_w bao gồm tổn thất khi qua lỗ $\zeta \frac{v_c^2}{2g}$ và tổn thất vì đột nhiên mở rộng do chỗ dòng chất lỏng từ mặt cắt co hẹp chảy vào bể nước ở hạ lưu $\frac{(v_c - v_2)^2}{2g}$; vì $v_2 \approx 0$, nên tổn thất đột nhiên mở rộng bằng $\frac{v_c^2}{2g}$.

$$\text{Vậy: } h_w = \sum \zeta \frac{v_c^2}{2g} = (\xi + 1) \frac{v_c^2}{2g}, \quad (5-13)$$

$$\text{do đó hệ số lưu tốc bằng: } \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi}} \quad (5-14)$$

Như vậy hệ số lưu tốc ở lỗ bị ngập (5-14) và hệ số lưu tốc khi chảy tự do qua lỗ (5-3) bằng nhau: ở hai trường hợp, hệ số co hẹp ϵ không khác gì nhau, do đó công thức dòng chảy ra khỏi lỗ khi chảy tự do và khi bị ngập giống nhau chẳng những về hình thức mà hệ số lưu lượng μ căn bản giống nhau. Khác nhau chủ yếu ở chỗ khi chảy ngập H là độ chênh cột nước thượng lưu và hạ lưu nếu không kể đến lưu tốc trung bình ở mặt cắt thượng và hạ lưu; còn khi chảy tự do H là cột nước kể từ trọng tâm của lỗ.

§5-4. DÒNG CHẢY TỰ DO ỔN ĐỊNH QUA LỖ TO THÀNH MỎNG



Hình 5-6

Ở lỗ to, cột nước tại bộ phận trên và bộ phận dưới của lỗ có trị số khác nhau lớn. Ta phân chia mặt cắt ướt của lỗ to thành nhiều giải nằm ngang, cao dh , ở đó dòng chảy qua những giải vì phân ấy được coi là dòng chảy qua lỗ nhỏ và như vậy lỗ to là do nhiều lỗ nhỏ hợp lại. Ta nghiên cứu một thí dụ: đó là trường hợp lỗ to hình chữ nhật.

Lỗ to hình chữ nhật rộng b , cột nước tác dụng lên trọng tâm của một vi phân diện tích lỗ to là h (hình 5-6) và giả thiết hệ số lưu lượng đi qua vi phân diện tích đó là μ' . Dùng công thức lưu lượng chảy qua lỗ nhỏ thành mỏng ta có:

$$dQ = \mu' \sqrt{2gh} (bdh). \quad (5-15)$$

Lưu lượng chảy qua lỗ to là:

$$Q = b \int_{H_{01}}^{H_{02}} \mu' \sqrt{2gh} dh$$

hoặc:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} (H_{02}^{3/2} - H_{01}^{3/2}), \quad (5-16)$$

trong đó μ là hệ số lưu lượng của lỗ to và giả định bằng trị số trung bình của vô số hệ số lưu lượng μ' của lỗ nhỏ.

Gọi H_0 là cột nước của trọng tâm lỗ to, vậy:

$$H_{02} = H_0 + \frac{c}{2} = H_0 \left(1 + \frac{c}{2H_0} \right).$$

và
$$H_{01} = H_0 - \frac{c}{2} = H_0 \left(1 - \frac{c}{2H_0} \right),$$

trong đó c là độ cao của lỗ.

Thay vào hệ thức (5-16), có:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H_0^{3/2} \left[\left(1 + \frac{c}{2H_0} \right)^{3/2} - \left(1 - \frac{c}{2H_0} \right)^{3/2} \right] \quad (5-17)$$

Khai triển theo nhị thức Niuton số hạng trong ngoặc vuông:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H_0^{3/2} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{2H_0} + \frac{3}{8} \cdot \frac{c^2}{4H_0^2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{c^3}{8H_0^3} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{c}{2H_0} + \frac{3}{8} \cdot \frac{c^2}{4H_0^2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{c^3}{8H_0^3} \right) \right] \\ Q &= \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} H_0^{3/2} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{c}{H_0} - \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 \right] = \mu b c \sqrt{2g} H_0 \left[1 - \frac{1}{96} \cdot \left(\frac{c}{H_0} \right)^2 \right] \\ Q &= \mu \omega \sqrt{2g} H_0 \left[1 - \frac{1}{96} \cdot \left(\frac{c}{H_0} \right)^2 \right] \quad (5-18) \end{aligned}$$

trong đó ω là diện tích lỗ to.

Vì lượng $\frac{1}{96} \left(\frac{c}{H_0} \right)^2$ rất nhỏ so với 1 nên có thể bỏ đi. Vậy công thức lưu lượng chảy tự do qua lỗ to thành mỏng hình chữ nhật là:

$$Q = \mu \omega \sqrt{2gH_0} \quad (5-19)$$

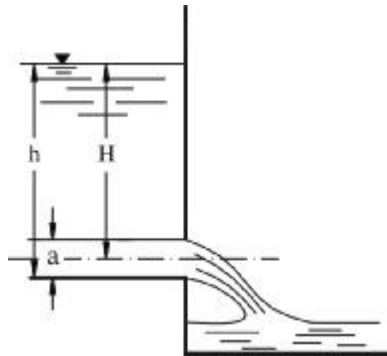
Suy luận theo cách trên, đối với lỗ to hình tròn ta cũng đi tới công thức có dạng giống như công thức (5-19), nhưng trị số μ khác.

Thí nghiệm của Pavolópki cho những trị số μ ứng dụng vào lỗ to như sau (bảng 5-1).

Bảng 5-1. Hệ số lưu lượng μ của lỗ to

Loại lỗ	μ
- Lỗ loại trung, dòng chảy co hẹp đều đặn về mọi phương, không có tấm dẫn nước:	0,65
- Lỗ loại to, dòng chảy co hẹp đều đặn về mọi phương, nhưng là co hẹp không hoàn thiện:	0,70
- Lỗ khoét ở đáy, không co hẹp ở cạnh đáy, sự co hẹp về các phương khác có ảnh hưởng rõ rệt:	0,65 ÷ 0,70
- Lỗ khoét ở đáy, không co hẹp ở cạnh đáy, sự co hẹp về các phương khác có ảnh hưởng vừa phải:	0,70 ÷ 0,75
- Lỗ khoét ở đáy, không co hẹp ở cạnh đáy, sự co hẹp ở hai bên rất hòa hoãn:	0,80 ÷ 0,85
- Lỗ khoét ở đáy, không co hẹp ở cạnh đáy, sự co hẹp ở các phương khác rất bé:	0,90

Thí dụ 1: Tìm lưu lượng qua một cống hình chữ nhật có bề rộng $b = 2,5$ m, độ mở của cánh cống $a = 0,8$ m, chiều sâu ở thượng lưu $h = 2$ m (hình 5-7).



Hình 5-7

Giải: Trọng tâm của lỗ chịu tác dụng của cột nước H bằng:

$$H = h - \frac{a}{2} = 2 - \frac{0,8}{2} = 1,6 \text{ m.}$$

Như vậy tỉ số $\frac{a}{H} = \frac{0,8}{1,6} = 0,5 > 0,1$, ta phải coi lỗ cống đang xét là lỗ to. Theo bảng

5-1, ta có thể chọn $\mu = 0,85$. Với $H_0 \approx H$, tính lưu lượng theo công thức (5-19), ta được:

$$Q = 0,85 \times 0,8 \times 2,5 \times 4,43 \times \sqrt{1,6} = 9,8 \text{ m}^3/\text{s}$$

§5-5. DÒNG CHẢY NỬA NGẬP, ỔN ĐỊNH, QUA LỖ TO THÀNH MỎNG

Vấn đề này chưa được nghiên cứu đầy đủ. Trong các sách tham khảo có hai loại phương pháp tính lưu lượng chảy qua lỗ nửa ngập.

Bảng 5-2. Bảng cho trị số của hệ số ngập σ ở trong lỗ thành mỏng nửa ngập

H_1/H_2 \ h_r/H_2	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0,1	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98	0,98	0,98	0,98	0,98	0,97	-
0,2	0,98	0,98	0,97	0,97	0,96	0,96	0,95	0,95	0,94	-	-
0,3	0,97	0,96	0,96	0,95	0,93	0,92	0,91	0,91	-	-	-
0,4	0,96	0,95	0,93	0,92	0,90	0,88	0,87	-	-	-	-
0,5	0,94	0,92	0,90	0,87	0,84	0,82	-	-	-	-	-
0,6	0,91	0,89	0,85	0,80	0,76	-	-	-	-	-	-
0,7	0,86	0,82	0,76	0,68	-	-	-	-	-	-	-
0,8	0,78	0,71	0,58	-	-	-	-	-	-	-	-
0,9	0,62	0,43	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1,0	0,00	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Một phương pháp là chia thành hai bộ phận:

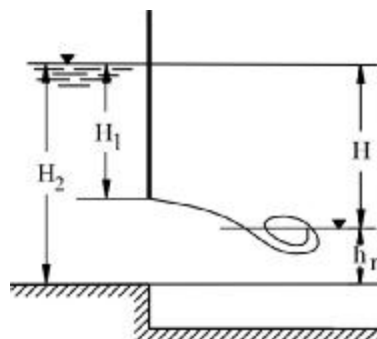
1. Một bộ phận trên tính theo chảy tự do, lưu lượng là Q_1 ;
2. Một bộ phận dưới tính theo chảy ngập, lưu lượng là Q_2 ;

Sau đó tính Q theo:

$$Q = Q_1 + Q_2.$$

Một phương pháp khác do Pavolópski đề nghị là dùng công thức:

$$Q = \sigma \mu \omega \sqrt{2gH_0} \quad (5-20)$$



Hình 5-8

trong đó σ là hệ số ngập; μ là hệ số lưu lượng khi chảy không ngập; $H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}$, H là độ chênh mực nước ở thượng lưu và hạ lưu. Trị số của σ tìm bằng phương pháp thí nghiệm xem ở bảng (5-2), $\sigma = f\left(\frac{H_1}{H_2}, \frac{h_n}{H_2}\right)$. Trong nhiều trường hợp, nếu $h_n \leq \frac{H_2 - H_1}{2}$, có thể tính như dòng chảy không ngập.

§5-6. DÒNG CHẢY KHÔNG ỔN ĐỊNH QUA LỖ NHỎ THÀNH MỎNG

Khi dòng chảy qua lỗ mà mặt chất lỏng thay đổi trong bình chứa thì sinh ra dòng chảy không ổn định. Dòng chảy không ổn định là một trong những vấn đề phức tạp của thủy lực. Ở đây chỉ nghiên cứu dòng chảy không ổn định khi độ cao của mặt chất lỏng trong bình chứa thay đổi từ từ tức là trong thời gian rất ngắn, có thể coi là mặt nước cân bằng không thay đổi; như vậy trong thời gian rất ngắn có thể ứng dụng công thức chảy ổn định qua lỗ nhỏ thành mỏng. Sau đây ta nghiên cứu mấy trường hợp đơn giản.

Ta gọi $Q = f_1(t)$ là lưu lượng chảy qua lỗ ra khỏi bình chứa, $q = f_2(t)$ là lưu lượng chảy vào bình chứa; $h = f_3(t)$ là cột nước đối với trọng tâm lỗ và $\Omega = f_4(h)$ là diện tích mặt tự do trong bình chứa. Lưu lượng chảy qua lỗ tính theo: $Q = \mu\omega\sqrt{2gh_0}$.

Ta chia khoảng thời gian lớn T ra nhiều thời đoạn vô cùng nhỏ dt , ứng với mỗi thời đoạn, cột nước tác dụng h_0 coi như không đổi, do đó trong thời đoạn dt , thể tích chất lỏng chảy ra khỏi bình chứa Qdt , thể tích chảy vào bình chứa là qdt và thể tích tăng lên hoặc giảm đi trong bình chứa là Ωdh .

Ta quy ước rằng lưu lượng chảy vào bình chứa là số dương ($q > 0$) và chảy ra khỏi bình là số âm ($Q < 0$). Tổng số đại số thể tích chất lỏng chảy vào và chảy ra bằng sự biến thiên thể tích của bình chứa trong thời đoạn đang xét:

$$qdt - Qdt = \Omega dh,$$

do đó:

$$dt = \frac{\Omega dh}{q - Q} \quad (5-21)$$

Phương trình vi phân này cho phép ta giải quyết các bài toán dòng chảy không ổn định qua lỗ, kết hợp với những phương trình cho biết quy luật cụ thể của q , Q và Ω .

Ta xét 3 trường hợp riêng sau đây:

1. Mặt nước thượng lưu biến đổi, dòng chảy tự do qua lỗ nhỏ

Giả thiết là chất lỏng chảy qua lỗ nhỏ vào không khí, ta phải tính thời gian T_{1-2} cần thiết để mực nước trong bình từ vị trí 1-1 đến vị trí 2-2 (hình 5-9).

Bài toán này có thể giải được trong trường hợp $q \neq 0$. Tuy nhiên để giản đơn việc trình bày, ta giả thiết rằng $q = 0$.

Ta có thể viết lại phương trình (5-21) như sau:

$$dt = \frac{\Omega dh}{-\mu\omega\sqrt{2gh_0}} \quad (5-22)$$

Tích phân phương trình (5-22) từ $h_0 = H_{01}$ đến $h_0 = H_{02}$, ta tính ra được thời gian T_{1-2} :

$$T_{1-2} = \int_{H_{01}}^{H_{02}} \frac{\Omega dh}{-\mu\omega\sqrt{2gh_0}}$$

Bài toán có thể giải hoàn toàn nếu biết rõ biểu thức toán học của hàm số $\Omega = f_4(h)$ và nếu tính ra được tích phân $\int \frac{\Omega dh}{\sqrt{h_0}}$.

Để đơn giản việc tính toán, giả thiết rằng $\Omega = \text{const}$, (hình 5-9) và không cần tính lưu tốc tiến gần v_0 ($v_0 \approx 0$), tức là coi $h_0 \approx h$, ta đạt được kết quả sau đây:

$$T_{1-2} = \frac{\Omega}{-\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_{01}}^{H_{02}} \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{2\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} (\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (5-23)$$

Nếu $H_2 = 0$ thì công thức (5-23) thành:

$$T_{1-2} = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}}, \quad (5-24)$$

hoặc:

$$T_{1-2} = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}}. \quad (5-24')$$

Trong công thức (5-24'), ΩH_1 là thể tích chất lỏng chảy ra khỏi bình chứa, còn $\mu\omega\sqrt{2gH_1}$ là lưu lượng qua lỗ dưới cột nước H_1 giữ không đổi. Vậy công thức (5-24') biểu thị thời gian cần cho chất lỏng, dưới tác dụng của cột nước H_1 không đổi, sẽ chảy ra khỏi lỗ một thể tích là $2\Omega H_1$. Do đó có thể kết luận rằng: khi cột nước thay đổi, thời gian cần để tháo cạn bình chứa có tiết diện hình trụ bằng hai lần thời gian cần thiết để tháo ra một thể tích tương đương nhưng dưới tác dụng của cột nước không đổi.

Nếu bình chứa không phải là hình trụ mà có hình dạng bất kỳ, thí dụ trong trường hợp hồ chứa, thì trên cơ sở xác định được $\Omega = f(h)$ (chẳng hạn xác định bằng cách trắc địa địa hình), ta tính ra được những thời đoạn Δt theo (5-22) với những Δh tương ứng (chọn Δh đủ nhỏ để coi Ω như là hằng số):

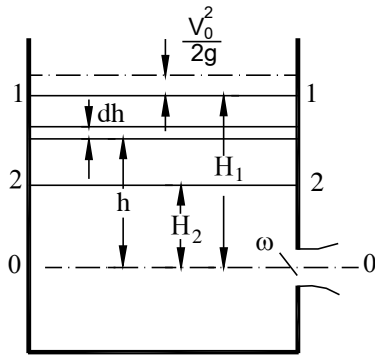
$$\Delta t = \frac{\Omega \Delta h}{\mu\omega\sqrt{2gh}}$$

và có được: $T = \sum \Delta t$.

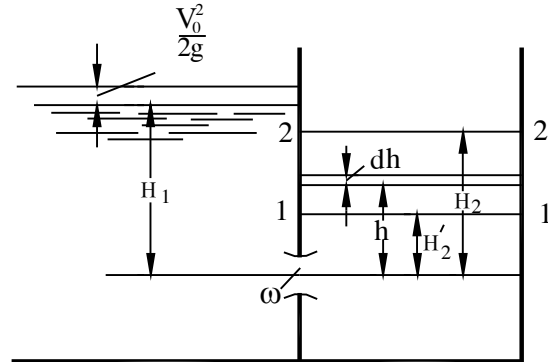
2. Mặt nước thượng lưu không đổi, mặt nước hạ lưu thay đổi (hình 5-10)

Ta phải tính thời gian T_{1-2} cần thiết để mực nước ở hạ lưu dâng từ vị trí 1-1 đến vị trí 2-2. Viết lại phương trình (5-21), trong đó, đối với bình chứa hạ lưu mà nói, ta có:

$$Q = 0, \quad q = \mu\omega\sqrt{2g(H_1 - h)}$$



Hình 5-9



Hình 5-10

Do đó:

$$dt = \frac{\Omega dh}{\mu\omega\sqrt{2g(H_1 - h)}} \quad (5-25)$$

Tích phân (5-25) từ $h = H_2'$ đến $h = H_2$, ta có được thời gian T_{1-2} phải tìm:

$$T_{1-2} = \int_{H_2'}^{H_2} \frac{\Omega dh}{\mu\omega\sqrt{2g(H_1 - h)}} \quad (5-26)$$

Để đơn giản việc trình bày, giả thiết $\Omega = \text{const}$ (hình 5-10), ta có:

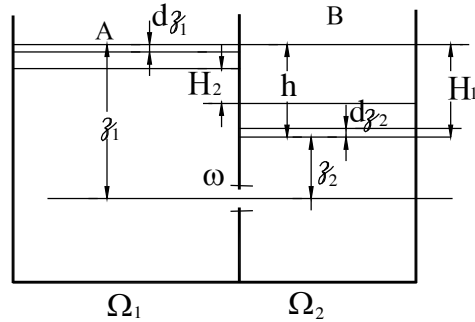
$$T_{1-2} = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_2'}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{(H_1 - h)}} = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \int_{H_2'}^{H_2} \frac{dh(H_1 - h)}{\sqrt{(H_1 - h)}} = \frac{\Omega}{\mu\omega\sqrt{2g}} \left(\sqrt{H_1 - H_2'} - \sqrt{H_1 - H_2} \right)$$

Giả thiết lúc ban đầu tháo nước vào hạ lưu $H_2' = 0$ và ta để cho mực nước hạ lưu lên ngang mực nước thượng lưu tức là $H_2 = H_1$ thì thời gian cần thiết cho đây bình chứa hạ lưu bằng:

$$T_{1-2} = \frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu\omega\sqrt{2g}} = \frac{2\Omega H_1}{\mu\omega\sqrt{2gH_1}} \quad (5-27)$$

So sánh (5-27) và (5-24'), ta thấy rằng: cùng ở điều kiện H_1 và Ω như nhau, thời gian cần để tháo cạn và chảy đầy bình chứa hoàn toàn giống nhau.

3. Mặt nước thượng và hạ lưu đều thay đổi (hình 5-11)



Hình 5-11

Ta có hai bình chứa A và B thông nhau bằng lỗ có diện tích ω , cột nước trên lỗ ở bình A là z_1 , ở bình B là z_2 ; khi nước chảy qua lỗ thì mặt tự do ở A hạ xuống và mặt tự do ở B tăng lên, do đó độ chênh cột nước $z_1 - z_2 = h$ tác dụng vào lỗ cũng giảm dần cho đến khi mực nước ở hai bình chứa cao bằng nhau, thì chất lỏng không chảy qua lỗ nữa. Ta tìm thời gian T_{1-2} cần thiết để cho mực nước ở A và B ngang nhau.

Đứng về phía một bình, thí dụ bình B mà nói, thì công thức (5-21) viết thành (đối với bình B, chỉ có lưu lượng vào tức $q \neq 0$, không có lưu lượng ra tức $Q = 0$):

$$dt = \frac{\Omega_2 dz_2}{\mu \omega \sqrt{2g(z_1 - z_2)}} \quad (5-28)$$

Vì $h = z_1 - z_2$, công thức (5-28) viết thành:

$$dt = \frac{\Omega_2 dz_2}{\mu \omega \sqrt{2gh}} \quad (5-29)$$

Thể tích chất lỏng bớt đi ở bình A bằng thể tích chất lỏng tăng lên ở bình B, trong cùng một thời gian:

$$-\Omega_1 dz_1 = \Omega_2 dz_2 \quad (5-30)$$

Vì z_1 giảm đi khi t tăng lên, do đó dz_1 là số âm, nên phải đặt dấu (-) trước dz_1 để về trái đẳng thức (5-30) thành số dương.

Như vậy:

$$-dz_1 = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} dz_2 \quad (5-31)$$

Ta lại có:

$$dh = dz_1 - dz_2 = -\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} + 1\right) dz_2 = -\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{\Omega_1} dz_2$$

Từ đó rút ra:

$$dz_2 = -\frac{\Omega_1}{\Omega_1 + \Omega_2} dh.$$

Thay trị số dz_2 trên vào (5-29), ta được:

$$dt = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{dh}{\mu \omega \sqrt{2gh}}.$$

Để đơn giản việc tính toán, giả thiết $\Omega_1 = \text{const}$, $\Omega_2 = \text{const}$, như vậy có thể tích phân (khi $t = t_1$, $h = H_1$; khi $t = t_2$, $h = H_2$):

$$T_{1-2} = \int_{t_1}^{t_2} dt = -\frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \int_{H_1}^{H_2} \frac{dh}{\sqrt{h}},$$

$$T_{1-2} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} 2(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}). \quad (5-32)$$

Giả thiết lúc $t = t_2$, $H_2 = 0$ tức là mực nước hai bình ngang nhau, công thức (5-32) viết thành:

$$T_{1-2} = \frac{2\Omega_1 \Omega_2}{\Omega_1 + \Omega_2} \cdot \frac{\sqrt{H_1}}{\mu \omega \sqrt{2g}} \quad (5-33)$$

Nếu tiết diện của một bình rất lớn so với bình kia thì công thức (5-33) trở thành (5-27):

$$T_{1-2} = \frac{2\Omega \sqrt{H}}{\mu \omega \sqrt{2g}}.$$

§5-7. DÒNG CHẢY QUA VÒI

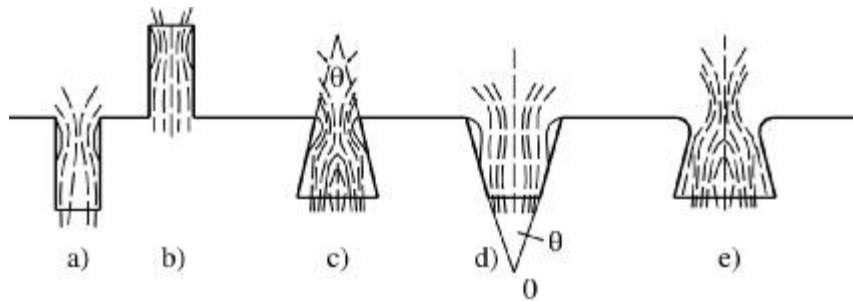
Vòi là một đoạn ống ngắn, gắn vào lỗ thành mỏng, có độ dài khoảng vài lần đường kính lỗ; chất lỏng chảy qua vòi thường sinh ra co hẹp ở chỗ vào vòi, sau đó mở rộng ra và chảy đầy vòi. Khoảng không gian giữa mặt ngoài dòng chảy tại chỗ co hẹp và mặt thành vòi là một khu nước xoáy, áp lực nhỏ hơn áp lực không khí nên ở đó hình thành chân không. Trị số chân không lớn nhỏ tùy theo cột nước tác dụng vào vòi. Vì trong vòi có sinh ra chân không nên lưu lượng của vòi thông thường lớn hơn lưu lượng của lỗ; đó là đặc tính cơ bản của vòi; chú ý rằng vòi chỉ có đặc tính trên, khi chất lỏng chảy đầy vòi.

Người ta thường phân vòi làm ba loại:

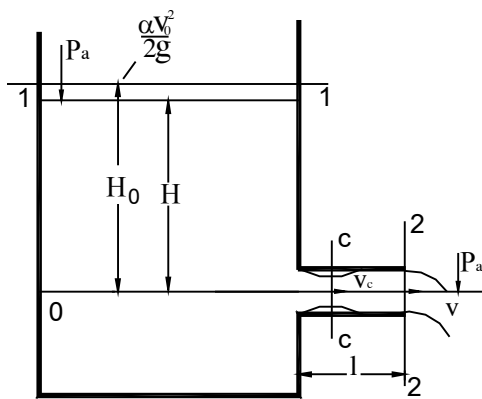
1. Vòi hình trụ tròn: tùy theo vị trí gắn vòi mà chia vòi làm vòi trụ tròn gắn ngoài (hình 5-12a), vòi trụ tròn gắn trong (hình 5-12b).

2. Vòi hình nón: hình nón có thể mở rộng hoặc thu hẹp theo phương chảy; từ đó có thể chia làm vòi hình nón mở rộng (hình 5-12c) và hình nón thu hẹp (hình 5-12d).

3. Vòi hình đường dòng (hình 5-12e).



Hình 5-12



Hình 5-13

Vòi hình trụ tròn gắn ngoài (hình 5-13) còn gọi là vòi Venturi - là một ống thẳng hình trụ tròn, dài $l = (3 \div 4) d$, d là đường kính vòi. Ta gọi cột nước tại trọng tâm mặt cắt ngang của vòi là H . Ta lấy mặt cắt 1-1 đi qua mặt tự do trong bình chứa và mặt cắt 2-2 tại chỗ ra của vòi, mặt chuẩn là mặt nằm ngang đi qua trọng tâm của 2-2. Viết phương trình Bécnuuy cho một điểm ở 1-1 và cho điểm trọng tâm của 2-2:

$$H + \frac{P_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = \frac{P_a}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v^2}{2g} + h_w, \quad (5-34)$$

trong đó v là lưu tốc trung bình tại mặt cắt 2-2; đặt:

$$H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}$$

ta có:

$$H_0 = \frac{\alpha_2 v^2}{2g} + h_w$$

Tổn thất năng lượng h_w do: tổn thất ở thành lỗ tính theo lưu tốc v_c tại mặt cắt co hẹp:

$\zeta_1 \frac{v_c^2}{2g}$; tổn thất vì dòng nước tự mặt co hẹp đột nhiên mở rộng để chảy ra đây vòi: $\zeta_2 \frac{v^2}{2g}$

và tổn thất dọc đường: $\lambda \frac{l v^2}{d 2g}$. Vậy:

$$h_w = \zeta_1 \frac{v_c^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l v^2}{d 2g}. \quad (5-35)$$

Ta biết rằng hệ số súc cản vì mở rộng đột ngột là:

$$\zeta_2 = \left(\frac{\omega}{\omega_c} - 1 \right)^2 = \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2,$$

ε là hệ số co hẹp, ω_c là diện tích mặt cắt co hẹp; vì $v_c \omega_c = v \omega$, do đó $v_c = \frac{v}{\varepsilon}$.

Thay các trị số trên vào (5-35), ta có:

$$h_w = \left[\frac{\zeta_1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 + \lambda \frac{l}{d} \right] \frac{v^2}{2g},$$

do đó:

$$H_0 = \left[\alpha_2 + \frac{\zeta_1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 + \lambda \frac{l}{d} \right] \frac{v^2}{2g}$$

tức:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \frac{\zeta_1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}} \cdot \sqrt{2gH_0}$$

lấy $\alpha_2 = 1$ và đặt:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha_2 + \frac{\zeta_1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right)^2 + \lambda \frac{l}{d}}} = \varphi \quad (5-36)$$

thì $v = \varphi \sqrt{2gH_0}$. (5-37)

Cuối cùng, công thức lưu lượng viết được dưới dạng:

$$Q = v\omega = \varphi\omega\sqrt{2gH_0} = \mu\omega\sqrt{2gH_0}. \quad (5-38)$$

Dòng chảy ra khỏi vòi, tại nơi ra không có hiện tượng co hẹp, vì thế, hệ số co hẹp tại lỗ ra của vòi bằng 1; như vậy hệ số lưu tốc φ và hệ số lưu lượng μ của vòi bằng nhau.

Từ hệ thức (5-36) và (5-38) có thể thấy: khi độ dài l của vòi tăng lên thì $\lambda \frac{l}{d}$ cũng tăng theo, kết quả làm μ giảm đi, và ngược lại l ngắn thì μ tăng; nhưng l phải ngắn có giới hạn vì điều kiện làm việc của vòi là khu vực chân không không bị phá hoại; nếu vòi quá ngắn thì dòng chảy trở thành qua lỗ, μ cũng giảm. Người ta nghiên cứu ra rằng μ lớn nhất khi độ dài l của vòi là $l = (3 \div 4)d$. Ống ngắn như vậy mới gọi là vòi.

Theo tài liệu về chảy qua lỗ: $\zeta_1 = 0,06$, $\varepsilon = 0,64$, lấy $\frac{l}{d} = 3$ và $\lambda = 0,02$ thì theo (5-36) có thể tìm ra $\mu = \varphi = 0,82$.

Nếu so sánh công thức lưu lượng chảy qua vòi (5-38) và công thức lưu lượng chảy qua lỗ (5-4) ta thấy hai công thức hoàn toàn giống nhau, hai công thức ấy khác nhau chủ yếu ở trị số của hệ số lưu lượng: $\mu_{lỗ} \approx 0,61$, $\mu_{vòi} = 0,82$. Như vậy $\mu_{vòi}$ gấp 1,34 lần $\mu_{lỗ}$.

Nếu trong công thức về hệ số lưu tốc của vòi (5-36), ta thay $\varepsilon = 0,64$, $\lambda = 0,02$, $\alpha_2 = 1$, thì muốn cho $\mu = \varphi = 0,61$, ta phải có $\frac{l}{d} \approx 55$. Vậy lưu lượng qua một ống dài bằng 55 lần đường kính ống vẫn bằng lưu lượng qua lỗ. Nếu ống ngắn hơn thì lưu lượng lớn hơn.

Tiếp đây là tính trị số chân không trong vòi. Ta lấy mặt cắt 1-1 và c-c (hình 5-13) rồi viết phương trình Bécnuiy:

$$H + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{\alpha v_0^2}{2g} = \frac{p_c}{\gamma} + \frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h'_w \quad (5-39)$$

trong đó: p_c là áp lực tại mặt cắt co hẹp c-c, h'_w là tổn thất cột nước từ 1-1 đến c-c tức là tổn thất qua lỗ $\zeta_1 \frac{v_c^2}{2g}$; gọi $H_0 = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g}$ và $\frac{v}{\varepsilon} = v_c$, đồng thời lấy $\alpha_c = 1$, thay cả vào (5-39), sau khi thu gọn có:

$$\frac{p_a - p_c}{\gamma} = \left(\frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{\zeta_1}{\varepsilon^2} \right) \frac{v^2}{2g} - H_0$$

Gọi $h_{c,k}$ là độ cao chân không và từ (5-37) rút ra: $\frac{v^2}{2g} = \varphi^2 H_0$, ta thay vào biểu thức trên:

$$h_{c,k} = \frac{p_a - p_c}{\gamma} = \left[(1 + \zeta_1) \left(\frac{\varphi}{\varepsilon} \right)^2 - 1 \right] H_0$$

với: $\zeta_1 = 0,06$, $\varepsilon = 0,64$, $\mu = \varphi = 0,82$, ta có:

$$h_{c,k} = 0,75 H_0. \quad (5-40)$$

Hệ thức (5-40) cho thấy độ cao chân không trong vòi phụ thuộc H và có trị số khá lớn.

Để thấy rõ thêm tác dụng của chân không trong vòi đối với lưu lượng của vòi từ (5-39) ta viết:

$$\frac{\alpha_c v_c^2}{2g} + h'_w = H + \frac{\alpha v_0^2}{2g} + \frac{p_a - p_c}{\gamma}$$

Vì $h'_w = \zeta_1 \frac{v_c^2}{2g}$, trong đó ζ_1 là tổn thất chảy qua lỗ, ta viết:

$$(\alpha_c + \zeta_1) \frac{v_c^2}{2g} = H_0 + h_{ck},$$

hoặc với $\alpha_c = 1$ và từ (5-3) ta viết được:

$$v_c = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_1}} \sqrt{2g(H_0 + h_{ck})} = \varphi_{lỗ} \sqrt{2g(H_0 + h_{ck})}$$

do đó:

$$Q = v_c \omega_c = v_c \varepsilon \omega_{lỗ} = \varepsilon \varphi_{lỗ} \omega_{lỗ} \sqrt{2g(H_0 + h_{ck})} = \mu_{lỗ} \omega_{lỗ} \sqrt{2g(H_0 + h_{ck})} \quad (5-41)$$

Rõ ràng là so với công thức lưu lượng qua lỗ (5-5), công thức (5-41) cho thấy $Q_{vòi} > Q_{lỗ}$, do tác dụng của chân không.

Ta thấy rằng nếu tăng H_0 thì độ cao chân không h_{ck} tăng lên; do đó lưu lượng cũng tăng lên; nhưng ta không thể tùy tiện tăng H_0 được vì trị số chân không có giới hạn, xác định bởi trị số áp lực bốc hơi; nếu chân không trong vòi quá lớn, tức là áp suất tuyệt đối ở khu chân không quá nhỏ, thì có khả năng không khí bên ngoài chui qua lỗ ra của vòi mà đi vào khu chân không và phá hoại chân không. Muốn vòi làm việc được thì trị số chân không trong vòi không được lớn hơn trị số chân không giới hạn, tính bằng 7 m; theo (5-40) thì cột nước có tác dụng của vòi H_0 không được lớn hơn giới hạn:

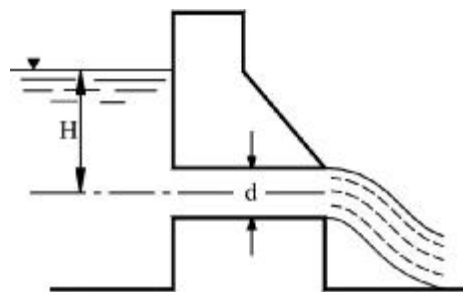
$$H_{0gh} = \frac{7}{0,75} = 9 \text{ m.}$$

Do đó hai điều kiện đầy đủ cho vòi hình trụ tròn gắn ngoài có thể làm việc được bình thường và ổn định là:

- 1) $l = (3 \div 4) d$,
- 2) $h_{ck} \leq 7 \text{ m}$ hoặc $H_0 \leq 9 \text{ m}$.

Dùng vòi hình trụ gắn ngoài, ta có thể tăng lưu lượng được 32% so với dùng lỗ nhỏ thành mỏng.

Thí dụ: Để thoát nước qua một cái đập, người ta đặt một ống ngắn hình trụ tròn (hình 5-14) có đường kính $d = 1,0 \text{ m}$, dài $l = 4,0 \text{ m}$, tâm ống ở cách mặt nước thượng lưu $H = 3 \text{ m}$. Tính lưu lượng.



Hình 5-14

Giải: Vì $l = 4d$ nên ta có thể coi ống ngắn đó như vòi hình trụ tròn gắn ngoài. Hệ số lưu lượng của vòi bằng $\mu = 0,82$.

Theo (5-38) ta có:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH} = 0,82 \times \frac{\pi}{4} \times 1^2 \times 4,43\sqrt{3} = 4,35 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Vì $H = 3,0 \text{ m} < H_{0\text{gh}} = 9 \text{ m}$ nên chân không trong vòi được bảo đảm không bị phá hoại.

Các loại vòi khác: Mỗi loại vòi có đặc tính riêng. Vòi hình trụ tròn gắn trong, còn gọi là vòi Boócđơ (hình 5-12b) có khu vực chân không với $l > 3d$, có tổn thất nhiều hơn vòi Venturi. So với lỗ nhỏ thành mỏng, vòi này tăng lưu lượng được 15%. Vòi hình nón mở rộng (hình 5-12c) giống như vòi hình trụ tròn, cũng sinh ra chân không ở mặt cắt co hẹp và trị số chân không tăng lên khi góc của hình nón tăng lên; nó có năng lực cho một lượng nước tương đối lớn chảy qua, nhưng lưu tốc tại lỗ ra tương đối nhỏ. Do đó, vòi hình nón mở rộng dùng cho chỗ nào cần chân không lớn, thí dụ như: bơm phun, thang máy thủy lực v.v... và dùng cho chỗ nào cần lưu tốc ở lỗ ra tương đối nhỏ, thí dụ: khí cụ làm mưa nhân tạo. Vòi hình nón thu hẹp (hình 5-12d) dùng để tăng lưu tốc ở lỗ ra, do đó tạo nên dòng tia có động năng lớn, thí dụ: dùng làm vòi phun trong máy đào đất thủy lực, làm vòi phun trong máy tuabin thủy lực kiểu xung kích, làm vòi phun chữa cháy. Vòi hình đường dòng (hình 5-12e) có sức cản nhỏ nhất, cho nên có hệ số lưu lượng to nhất và dòng tia ở lỗ ra có động năng lớn nhất.

Ta có thể so sánh động năng của dòng chảy ra khỏi lỗ và ra khỏi các loại vòi.

Lưu lượng qua lỗ, vòi, như đã biết, biểu thị bởi:

$$Q = \mu\omega\sqrt{2gH_0};$$

Lưu tốc qua lỗ, vòi biểu thị bởi:

$$v = \varphi\sqrt{2gH_0}.$$

Động năng của dòng chảy ra khỏi lỗ, vòi tính bởi:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma\mu\omega}{2g} \sqrt{2gH_0} \varphi^2 \cdot 2gH_0 = \mu\varphi^2\gamma\omega H_0\sqrt{2gH_0}.$$

Vậy với những trị số γ , ω , H_0 bằng nhau thì khả năng thoát nước và động năng của dòng chảy qua lỗ, vòi phụ thuộc μ và $\mu\varphi^2$. Từ những trị số ghi trong bảng 5-3, ta thấy muốn có dòng chảy mang động năng lớn, ta dùng vòi hình nón thu hẹp và vòi hình đường dòng, hoặc có thể dùng lỗ nhỏ thành mỏng; muốn có dòng mang động năng nhỏ, ta dùng vòi hình nón mở rộng.

Bảng 5-3. Bảng so sánh năng lực công tác của lỗ thành mỏng và các loại vòi

Loại vòi và lỗ	Hệ số tổn thất ζ	Hệ số co hẹp ε	Hệ số lưu tốc φ	Hệ số lưu lượng μ	$\mu\varphi^2$
Lỗ tròn thành mỏng	0,06	0,64	0,97	0,62	0,583
Vòi trụ tròn gắn ngoài	0,50	1,0	0,82	0,82	0,551
Vòi trụ tròn gắn trong	1,0	1,0	0,707	0,707	0,358
Vòi hình nón mở rộng ($\theta = 5^\circ \div 7^\circ$)	4,0 ~ 3,0	1,0	0,45 - 0,50	0,45 - 0,50	0,091
Vòi hình nón thu hẹp ($\theta = 13^\circ 24'$)	0,09	0,98	0,96	0,94	0,894
Vòi hình đường dòng	0,06	1,0	0,98	0,98	0,913

Chú ý: Các trị số trong bảng là nói cho mặt cắt lỗ ra của vòi.

B - DÒNG TIA

§5-8. PHÂN LOẠI, TÍNH CHẤT DÒNG TIA

1. Định nghĩa: Dòng chất lỏng có kích thước hữu hạn, không bị giới hạn bởi những thành rắn, chuyển động trong môi trường chất lỏng cùng loại hoặc khác loại, được gọi là *dòng tia*.

Người ta phân biệt dòng tia ngập và dòng tia không ngập.

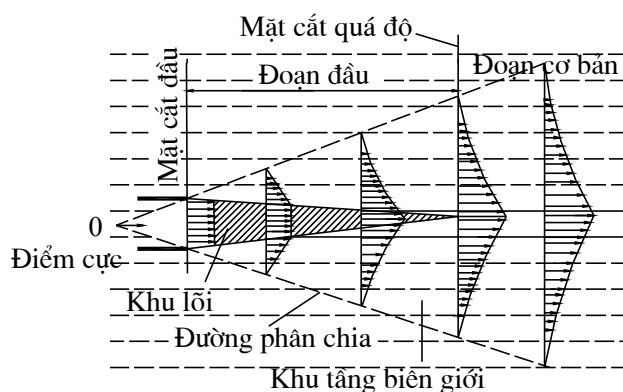
Dòng tia ngập là dòng tia chuyển động trong môi trường chất lỏng cùng loại hoặc trong không gian đầy nước. Thí dụ: dòng nước từ những vòi đặt ngậm dưới mặt nước trong sông phun ra để khuấy những phù sa lắng đọng.

Dòng tia không ngập là dòng tia chuyển động trong môi trường khí. Thí dụ: những dòng tia của vòi chữa cháy, của máy phun mưa, của các ống phun.

Dòng tia ngập đã được nghiên cứu tương đối nhiều so với dòng tia không ngập.

Trạng thái chảy trong dòng tia có thể là chảy tầng hoặc chảy rối, nhưng thường gặp trong thực tế là trạng thái chảy rối. Dưới đây ta chỉ đề cập đến trạng thái chảy rối của dòng tia.

2. Dòng tia ngập: Dòng tia, chảy vào môi trường chất lỏng cùng loại hoặc trong nước, do đó ma sát với chất lỏng xung quanh mà mở rộng dần ra rồi tiêu tan vào môi trường chất lỏng. Trong quá trình dòng tia mở rộng, những phần tử chất lỏng ở môi trường không chuyển động, tiếp xúc với dòng tia, bị lôi đi theo; do đó một khối lượng chất lỏng nhất định bị thu hút vào chuyển động.



Hình 5-15

Cấu tạo của dòng tia, dựa vào sự phân tích đồ phân bố lưu tốc trên những mặt cắt ngang của dòng tia, bao gồm (hình 5-15):

a) *Khu lõi hoặc khu tốc độ không đổi*, bắt đầu từ mặt cắt đầu ở miệng vòi, nhỏ dần và kết thúc ở mặt cắt tại đó chỉ có tốc độ ở trục dòng tia bằng tốc độ u_0 tại mặt cắt đầu; trong phạm vi khu lõi, tốc độ mọi điểm đều bằng u_0 . Đường giới hạn khu lõi là đường nối các điểm giới hạn của miền có tốc độ không đổi bằng u_0 . Thí nghiệm chứng minh rằng đường giới hạn này là một đường thẳng.

b) *Khu tầng biên giới* là khu có tốc độ liên tục biến đổi cho tới nơi có tốc độ bằng không. Đường nối các điểm tốc độ bằng không là đường phân chia; đường phân chia này cũng có tính chất của đường phân chia đã được miêu tả ở §4-6. Thí nghiệm chứng tỏ đường phân chia là một đường thẳng: trên thực tế có sự trao đổi những phần tử chất lỏng bằng mạch động giữa khu tầng biên giới và môi trường chất lỏng xung quanh đường phân chia.

Theo chiều dài của dòng tia, có thể chia làm hai đoạn:

a) *Đoạn đầu*, từ mặt cắt đầu đến mặt cắt quá độ tức là mặt cắt kết thúc khu lõi; trong phạm vi hai đường phân chia ở đoạn đầu, có hai khu: khu lõi và khu tầng biên giới.

b) *Đoạn cơ bản*, từ mặt cắt quá độ trở đi, trong phạm vi hai đường phân chia, đoạn cơ bản chỉ bao gồm tầng biên giới; tốc độ tại trục dòng tia giảm dần.

Giao điểm của hai đường phân chia gọi là *điểm cực* của dòng tia.

Về tính chất định lượng của dòng tia, có thể nêu lên một số kết quả nghiên cứu chủ yếu như sau:

a) Về sự biến thiên của tốc độ trên trục dòng tia. Trong đoạn đầu, tốc độ giữ không đổi và bằng tốc độ u_0 tại mặt cắt đầu; trong đoạn cơ bản, thí nghiệm chứng tỏ rằng tốc độ u_1 trên trục dòng tia ở cách mặt cắt đầu l , biến thiên theo quy luật hypécbôn:

$$u_1 = \frac{\text{const}}{l} = \varphi \frac{u_0 d_0}{l},$$

trong đó: d_0 - đường kính của dòng tia ở mặt cắt đầu;

φ - hệ số thí nghiệm.

Trong những dòng tia không khí phun vào không gian đầy không khí:

- Theo những thí nghiệm của Milôvít: $\varphi = 6$,
- Theo những thí nghiệm của Aboramôvít:

$$\varphi = \frac{0,48}{(0,07 \div 0,08) + 0,145 \frac{d_0}{l}} \quad (5-42)$$

Trong những dòng tia phun nước vào không gian đầy nước:

- Theo những thí nghiệm của Cônôvalốp:

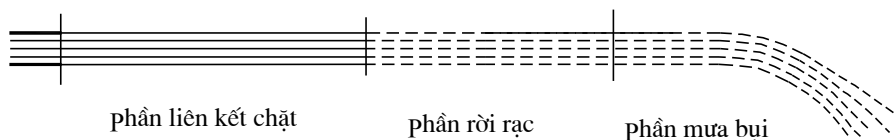
$$\varphi = \frac{0,145}{0,05 + 0,145 \frac{d_0}{l}} \quad (5-43)$$

b) Trong trường hợp phân bố đều tốc độ ở mặt cắt đầu, áp lực trong dòng tia bằng áp lực của môi trường xung quanh. Đó là một kết luận quan trọng làm cơ sở nghiên cứu cho nhiều vấn đề về dòng tia chảy ngập.

3. Dòng tia không ngập: Xét một dòng tia nước, không ngập, từ ống hình tròn ra, phun vào không khí, ta có thể chia dòng làm 3 phần (hình 5-16):

- *Phần liên kết chặt:* Trong phần này, dòng tia còn giữ nguyên hình trụ: các hạt chất lỏng vẫn liên kết chặt nên chất lỏng vẫn liên tục, không có những khu bị không khí lẫn vào;

- *Phần rời rạc:* Trong phần này, sự liên tục của chất lỏng bị phá hoại, dòng tia mở rộng, bắt đầu có những hạt nước lớn;



Hình 5-16

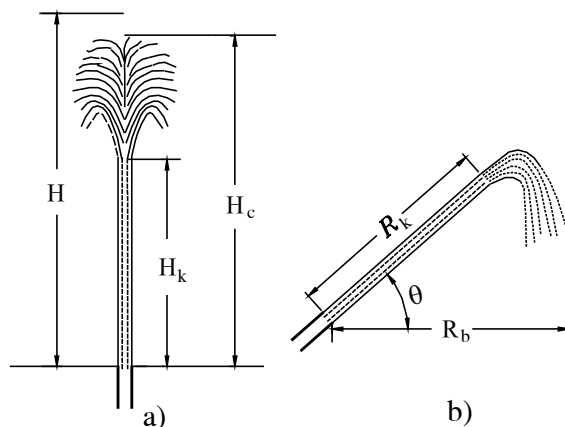
- *Phần mưa bụi:* Trong phần này, dòng tia gồm những hạt nước rất nhỏ, riêng biệt.

Trong thực tế, dòng tia không ngập có thể dùng vào những yêu cầu khác nhau như: dùng dòng tia để phá vỡ đất (súng thủy lực), khi đó sử dụng phần liên kết chặt; dùng dòng tia để chữa cháy, khi đó cần một dòng tia có bán kính hoạt động lớn và sức xung kích mạnh; dùng dòng tia làm mưa nhân tạo để tưới, khi đó sử dụng phần mưa bụi của dòng tia. Muốn phát triển phần liên kết chặt của dòng tia, cần phải dùng những loại vòi đặc biệt nhằm làm giảm sự rối của dòng chảy và loại trừ tính chất chuyển động xoắn của dòng chảy ở miệng vòi. Muốn phát triển phần mưa bụi và rút ngắn phần liên kết chặt của dòng tia, cần đặt những bộ phận chia dòng ở vòi.

Sau đây là một vài công thức tính toán về dòng tia không ngập, chủ yếu dựa vào kết quả thí nghiệm:

a) Đối với dòng tia phun ra thẳng đứng (hình 5-17a), độ cao của đoạn liên kết chặt H_k tính từ miệng vòi phun, tính theo:

$$H_k = \beta H_c = \beta \frac{H}{1 + \psi H} \quad (5-44)$$



Hình 5-17

Trong đó: H - cột nước tại miệng vòi, có thể lấy $H = \frac{v^2}{2g}$; v - tốc độ ở miệng vòi;

ψ - hệ số thí nghiệm, phụ thuộc đường kính d của vòi:

$$\psi = \frac{0,00025}{d + 1000d^3};$$

d tính ra mét; H_c - độ cao của dòng tia, tức khoảng cách từ miệng vòi đến nơi mà dòng tia không phun lên cao hơn nữa được:

$$H_c = \frac{H}{1 + \psi H};$$

β - hệ số thí nghiệm, phụ thuộc H_c , tính theo bảng 5-4.

Bảng 5-4

H_c (tính ra m)	7	9,5	12	14,5	17,2	20	22,9	24,5	26,8	30,5
β	0,840	0,840	0,835	0,825	0,815	0,805	0,795	0,785	0,760	0,725

b) Đối với dòng tia phun nghiêng (hình 5-17b), còn ít nghiên cứu; trên cơ sở thí nghiệm người ta kết luận rằng:

- Khi góc nghiêng θ của tia phun đối với mặt nằm ngang biến đổi từ 0° đến 90° :
 1) bề dài của đoạn liên kết chặt R_k không đổi và bằng độ cao của dòng tia khi phun thẳng đứng H_C ; $R_k = H_C$; 2) khoảng cách từ miệng vòi đến hết đoạn mưa bụi R_b càng ngắn lại và có thể tính theo công thức kinh nghiệm $R_b = kH_C$ trong đó k là hệ số thí nghiệm, phụ thuộc góc nghiêng θ , trị số k cho bởi bảng 5-5.

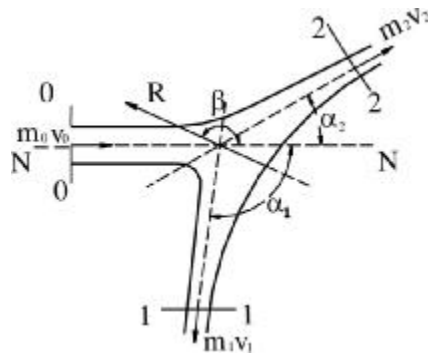
Trong những giáo trình chuyên môn, thí dụ giáo trình về cấp nước, về thủy nông và thi công cơ giới... sẽ có những công thức cho phép tính toán sâu hơn về các dòng tia.

Bảng 5-5

θ	0	15°	30°	45°	60°	75°	90°
k	1,40	1,30	1,20	1,12	1,07	1,03	1,00

§5.9. NHỮNG ĐẶC TÍNH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA DÒNG TIA

Ta nghiên cứu tác dụng tương hỗ giữa dòng tia và vật rắn đặt chắn dòng tia. Dòng phun ra từ miệng vòi hoặc miệng lỗ, xô vào một vật rắn đặt trong đoạn liên kết chặt của dòng tia. Trước hết ta nghiên cứu trường hợp vật rắn đứng cố định; dòng tia xô vào vật rắn liền chia thành hai nhánh đi theo mặt vật rắn (hình 5-18). Dòng tia có hình trụ, trục $N - N$. Tấm chắn bị dòng tia xô vào liền tác dụng lại vào dòng tia một phản lực R .



Hình 5-18

Ta viết phương trình động lượng cho đoạn dòng tia giới hạn bởi mặt cắt vào $O-O$ và những mặt cắt ra $1-1$ và $2-2$, động lượng trong một giây tại những mặt cắt đó là m_0v_0 , m_1v_1 , m_2v_2 ; hình chiếu của những vectơ động lượng đó lên trục $N-N$ là m_0v_0 , $m_1v_1\cos\alpha_1$, $m_2v_2\cos\alpha_2$, trong đó α_1 và α_2 là những góc lập bởi những vectơ động lượng tại $1-1$ và $2-2$ với trục $N-N$ và ta có $m_0 = m_1 + m_2$.

Xung lực tác dụng vào đoạn dòng tia đó là R , hình chiếu của nó lên trục N-N là $R\cos\beta$, trong đó β là góc lập bởi vectơ phản lực R và trục N-N. Vậy, theo định luật động lượng, ta có:

$$m_1 v_1 \cos\alpha_1 + m_2 v_2 \cos\alpha_2 - m_0 v_0 = R \cos\beta. \quad (5-45)$$

Ta dùng phương trình này để nghiên cứu một số trường hợp riêng.

1. Trường hợp vật chắn là một tấm phẳng đặt thẳng góc với trục N-N (hình 5-19). Khi đó $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi$; từ phương trình trên, ta viết lại:

$$- m_0 v_0 = - R \quad (5-46)$$

Vậy $R = m_0 v_0$, tức là phản lực của tấm chắn phẳng đặt thẳng góc với trục dòng tia bằng bằng động lượng trong một giây của khối lượng chất lỏng xô vào vật chắn.

2. Trường hợp vật chắn là một mặt cong, những vectơ động lượng lập với trục N-N những góc $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (hình 5-20) và phản lực R của vật chắn lập với N-N góc $\beta = \pi$.

Áp dụng (5-45), ta có:

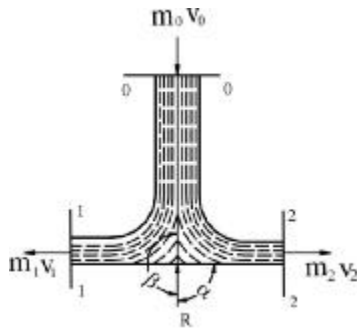
$$m_1 v_1 \cos\alpha_1 + m_2 v_2 \cos\alpha_2 - m_0 v_0 = - R. \quad (5-47)$$

Nếu mặt cong của vật chắn có hình đối xứng, tức $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta = \pi$, thì công thức (5-47) viết thành:

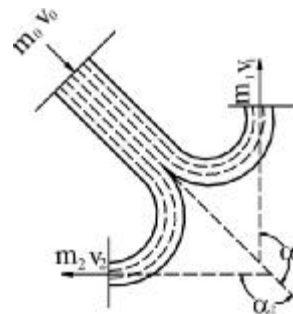
$$R = m_0 v_0 - 2m_1 v_1 \cos\alpha, \quad (5-48)$$

hoặc (vì $m_1 v_1 = \frac{1}{2} m_0 v_0$):

$$R = m_0 v_0 (1 - \cos\alpha). \quad (5-49)$$



Hình 5-19



Hình 5-20

Nếu vật chắn có hình hai bán cầu hoặc hai nửa hình trụ tròn đối xứng, thì $\alpha = \pi$ (hình 5-21) và ta có:

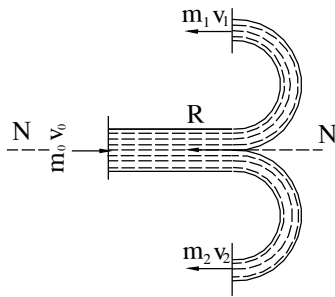
$$R = 2 m_0 v_0. \quad (5-50)$$

Trên hình 5-19, ta có hình dạng thường thấy ở tấm lá chắn của bánh xe công tác của tuabin phun tia tự do (tuabin xung kích).

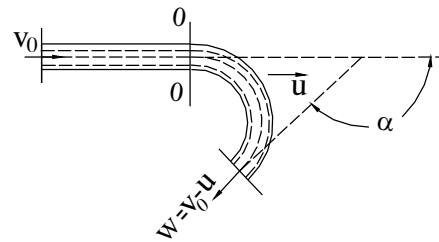
Để lợi dụng động năng của dòng tia, ta có thể cho dòng tia tác dụng vào vật rắn di động. Giả sử dòng tia có vận tốc v_0 , vật rắn dưới tác dụng của dòng tia có tốc độ u cùng chiều với v_0 , thì vận tốc tương đối của dòng tia với vật rắn bằng (hình 5-22):

$$w = v_0 - u. \quad (5-51)$$

Nếu vật rắn di động là một tấm phẳng, khối lượng chất lỏng xô vào vật rắn bằng $\rho\omega v_0$, di chuyển với tốc độ tương đối w , nên động lượng bằng $\rho\omega v_0 w$ tức $\rho\omega v_0(v_0 - u)$.



Hình 5-21



Hình 5-22

Xung lực P tác dụng vào tấm phẳng đó bằng:

$$P = \rho\omega v_0(v_0 - u), \quad (5-52)$$

và sinh ra một công suất là:

$$M = Pu = \frac{\gamma}{g} \omega v_0(v_0 - u)u. \quad (5-53)$$

Ta có công suất cực đại khi:

$$\frac{dM}{du} = v_0 - 2u = 0,$$

tức là khi:

$$u = \frac{v_0}{2} \quad (5-54)$$

Lúc đó trị số công suất cực đại là:

$$M_{\max} = \rho\omega v_0 \left(v_0 - \frac{v_0}{2} \right) \frac{v_0}{2} = \frac{\rho\omega v_0^3}{4};$$

Biết rằng động năng trong một giây của dòng tia bằng:

$$E_{dn} = \rho \omega v_0 \frac{v_0^2}{2} = \frac{\rho \omega v_0^3}{2}$$

ta thấy:

$$M_{max} = \frac{1}{2} E_{dn}.$$

Như vậy đối với tấm chắn phẳng, ta chỉ có thể nhiều nhất là lợi dụng một nửa động năng của dòng xô vào tấm chắn di động.

Nếu tấm chắn di động có hình cong mà tốc độ ra của các nhánh dòng tia lập với phương của trục dòng tia những góc α (hình 5-20) và nếu $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, thì với tốc độ của tấm chắn bằng u , áp dụng công thức (5-49) trong đó ta thay v_0 bằng vận tốc tương đối w , ta tính được lực P tác dụng vào tấm chắn:

$$P = \rho \omega v_0 (v_0 - u)(1 - \cos \alpha), \quad (5-56)$$

và tính ra công suất M :

$$M = Pu = \rho \omega v_0 (v_0 - u)(1 - \cos \alpha)u. \quad (5-57)$$

Như đã thấy ở trên, ta có thể đạt công suất cực đại M_{max} với $u = \frac{v_0}{2}$:

$$M_{max} = \frac{\rho \omega v_0^3}{4} (1 - \cos \alpha) = E_{dn} \frac{1 - \cos \alpha}{2}. \quad (5-58)$$

Nếu $\alpha = 180^\circ$, thì:

$$M_{max} = E_{dn}. \quad (5-59)$$

Vậy nếu tấm chắn hình cong có $\alpha = 180^\circ$, thì công suất đạt được sẽ gấp 2 lần công suất ở tấm chắn phẳng. Chính vì vậy những tuabin xung kích hiện đại thường có những tấm chắn hình cong loại này.