ỦY BAN NHÂN DÂN TỈNH KON TUM
TRƯỜNG CAO ĐẲNG CỘNG ĐỒNG

***

BÀI GIẢNG
CÁC TẬP HỢP SỐ

(Dùng cho sinh viên năm I, ngành Cao đẳng Giáo dục Tiểu học)

Tác giả: **Nguyễn Hồng Phong**
Đơn vị: **Phòng NCKH & HTQT**

Kon Tum, năm 2019

Năng lực sẽ tùy thuộc vào hành động hôm nay của bạn mà đợi cơ hội nở hoa.

Cửa tiệm của những lá thư - Yasushi Kitagawa

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Bài giảng **Các tập hợp số** được xây dựng trên cơ sở căn cứ đề cương chi tiết, tham khảo các tài liệu và sự sắp xếp một cách có hệ thống các khối kiến thức học phần, nhằm giúp người học có thể dễ dàng tự học và nghiên cứu. Học phần **Các tập hợp số** trang bị cho người học những kiến thức toán đại số, số học nền tảng, sơ khai nhất để có thể tiếp cận, nhận thức đúng đắn về những nội dung toán học mà người học đã được làm quen thời phổ thông, do đó học phần này là bắt buộc trong chương trình đào tạo giáo viên tiểu học trình độ cao đẳng.

Một trong những yêu cầu của hình thức đào tạo theo hệ thống tín chỉ là phát huy tính chủ động của sinh viên trong hoạt động tự học và tự nghiên cứu, đồng thời nội dung kiến thức các học phần phải mang tính thời sự, phù hợp với thực tiễn phát triển xã hội, nhất là không khí thời đại công nghệ 4.0 như hiện nay. Điều này, đòi hỏi các giáo trình, bài giảng phải có tính mới, được xây dựng có hệ thống hơn, phù hợp với đặc điểm của lịch sử sự phát triển kiến thức môn học. Tuy vậy, cho đến nay, riêng đối với học phần **Các tập hợp số**, thì các giáo trình, bài giảng còn mang nặng tính hàn lâm, chủ yếu nhắm vào mục đích chuyển tải đầy đủ khối kiến thức môn học mà chưa chú ý đến đặc điểm của đối tượng tiếp nhận, sử dụng kiến thức. Đây là một sự trở ngại lớn, có thể làm giảm hiệu quả dạy học, do vậy ở đây, việc biên soạn lại bài giảng **Các tập hợp số** phục vụ cho công tác giảng dạy các lớp Cao đẳng Giáo dục Tiểu học tại Trường Cao đẳng Cộng đồng Kon Tum là hết sức cần thiết, phù hợp với điều kiện thực tiễn, góp phần vào việc nâng cao chất lượng giáo dục theo chủ trương, định hướng chung của Nhà trường.

Với tinh thần như trên, tác giả cố gắng biên soạn, xây dựng bài giảng **Các tập hợp số** với cấu trúc gồm 04 chương, trong đó tập trung trình bày các nội dung liên quan đến những kiến thức cơ bản về cấu trúc đại số, quy trình xây dựng và hình thành các tập số, và nghiên cứu việc vận dụng kiến thức về các tập hợp số để phân tích nội dung và cơ sở khoa học của việc dạy học các vấn đề về số tự nhiên, phân số và số thập phân ở tiểu học. Cấu trúc các chương như sau:

Chương 1. *Cấu trúc đại số*

Chương 2. *Số tự nhiên*

Chương 3. *Tập hợp các số hữu tỉ*

Chương 4. *Tập số thực*

Mục tiêu về kiến thức, kỹ năng và thái độ của học phần:

Về kiến thức:

(a) Người học nắm vững được những cấu trúc đại số cơ bản đó là: cấu trúc nửa nhóm, nhóm, vành và trường

(b) Trang bị cho người học những kiến thức về: Tập hợp tương đương và bản số của tập hợp; Xây dựng tập các số tự nhiên, các phép toán cộng và nhân trên tập hợp số tự nhiên, quan hệ thứ tự trên tập hợp các số tự nhiên; Nguyên lí quy nạp và phương pháp chứng minh quy nạp; Biểu diễn số tự nhiên và các dấu hiệu chia hết.

(c) Cung cấp cho người học những kiến thức về : Xây dựng tập số hữu tỉ không âm và các phép toán trong tập hợp số hữu tỉ không âm; tập số thập phân và các phép toán trong tập số thập phân; cơ sở toán học của nội dung dạy học phân số và số thập phân ở Tiểu học; xây dựng tập số hữu tỉ và tập số thực.

Về kỹ năng:

(a) Giải được một số dạng bài tập về phép toán hai ngôi, các cấu trúc nửa nhóm, nhóm, vành và trường, đồng cấu và đẳng cấu.

(b) Thành thạo giải toán, tính toán trong tập hợp số tự nhiên, trong tập hợp số hữu tỉ không âm và số thập phân không âm và vận dụng vào trong việc giảng dạy toán ở các lớp bậc Tiểu học.

Về thái độ:

Tích cực, chủ động trong việc tự học, tự nghiên cứu và kết nối các nội dung được học với chương trình môn toán bậc Tiểu học.

Tài liệu được biên soạn theo hướng đổi mới về chương trình và phương pháp, chắc chắn sẽ không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Mọi trao đổi, góp ý của bạn đọc xin gửi về địa chỉ email: nghgphong@gmail.com, chúng tôi sẽ điều chỉnh, nâng cấp tài liệu và sẽ đăng tải bản cập nhật mới nhất ở website: http://thuvienso.cdcdkontum.edu.vn/.

Tác giả

Chương 1

Cấu trúc đại số

MỤC TIÊU

a. Về kiến thức

- Giúp sinh viên nắm vững cấu trúc của các đối tượng cơ bản của đại số: nửa nhóm, nhóm, vành và trường.

- Hình thành cho sinh viên những công cụ, ý tưởng để tiếp cận toán học hiện đại, cũng như giúp sinh viên nhận thức sâu sắc về cấu trúc đại số của các tập hợp số ở bậc Tiểu học.

b. Về kỹ năng

- Giải được một số dạng bài tập về phép toán hai ngôi, các cấu trúc nửa nhóm, nhóm, vành và trường, đồng cấu và đẳng cấu.

c. Về thái độ

- Tích cực, chủ động trong việc tự học, tự nghiên cứu và kết nối các nội dung về cấu trúc đại số được học với chương trình môn toán bậc Tiểu học.

1.1 Phép toán đại số

1.1.1 Sơ lược về lịch sử cấu trúc đại số

Trước thế kỷ XIX, nói đến đại số tức là chúng ta chỉ nói đến sự nghiên cứu, tìm tòi những vấn đề về giải phương trình, nói đúng hơn thì trước đây đại số cũng nghiên cứu những phép toán nhưng là những phép toán liên quan đến đại lượng. Tuy nhiên, từ thế kỉ XIX đã này sinh những yếu tố mới của đại số, có khả năng dẫn đến những sự thay đổi cơ bản, chuẩn bị cho những nguyên lí của đại số hiện đại, tách khỏi lí thuyết số trước đây và tách khỏi giải tích.

Để xác định một cấu trúc, người ta đưa một hay một số quan hệ và phát biểu dưới dạng tiên đề những điều kiện ràng buộc của các quan hệ. Và dĩ nhiên, người ta có thể dễ dàng dựa vào các hệ quả lôgíc từ các tiên đề của cấu trúc có sẵn để xây dựng một lí thuyết tiên đề của một cấu trúc mới.

Và do nhu cầu của đại số, lí thuyết nhóm đã xuất hiện, [1]Joseph Louis Lagrange đã lần đầu tiên khảo sát nhóm các phép thế liên quan đến việc giải các phương trình bậc cao.

Phải nói rằng, những quan hệ là điểm xuất phát trong định nghĩa của một cấu trúc. Quan hệ trong cấu trúc nhóm là quan hệ giữa 3 phần tử và quan hệ ấy xác định một cách đơn trị phần tử thứ ba như là một hàm của 2 phần tử đầu, sau này ta thường gọi quan hệ đó với cái tên rất "kinh điển" là quy luật hợp thành.

Sau này, chúng ta sẽ thấy rằng, khi quan hệ là quy luật hợp thành thì cấu trúc tương ứng được gọi là cấu trúc đại số. Các cấu trúc đại số bao gồm: nhóm, vành, trường...vv.

Trong quá trình phát triển của toán học hiện đại, vai trò cấu trúc đại số có ý nghĩa rất to lớn, giúp phân định giữa đại số hiện đại và đại số cổ điển. Đại số cổ điển phát triển trên cơ sở các phép toán số học và về cơ bản biểu thị những quy luật tính toán, còn đại số hiện đại tách rời khỏi con đường đó, thay thế tính toán bằng một hệ tiên đề, các phép toán được áp dụng với các tập hợp trừu tượng (các lớp, các hệ thống yếu tố,...). Những điều này cho phép mở rộng phạm vi ứng dụng của các phương pháp đại số, từ đó đưa đến sự phát triển mạnh mẽ của các lĩnh vực, ngành toán liên quan đại số hiện đại như hiện nay.

1.1.2 Định nghĩa

Định nghĩa 1.1.2.1. Cho X là một tập khác rỗng. Một phép toán đại số trong tập X(còn gọi là phép toán hai ngôi) được định nghĩa là một ánh xạ T đi từ $X \times X$ đến X:

$$T \quad : \quad X \times X \quad \longrightarrow \quad X$$

Nói cách khác, thực hiện một phép toán hai ngôi đối với hai phần tử $x \in X, y \in X$ là đặt mỗi cặp (x, y) tương ứng với một phần tử duy nhất cũng của tập X. Một phép toán hai ngôi trong tập X được gọi tắt là phép toán trong X.

Ảnh của (x, y) qua ánh xạ T(tức là qua phép toán T) gọi là cái hợp thành của x và y. Cái hợp thành của x và y thường được kí hiệu là xTy thay cho $T(x, y)$.

Mỗi phép toán đều có kí hiệu xác định, thông thường ta hay dùng các kí hiệu sau:

(1) Kí hiệu +(không nhất thiết là phép cộng thông thường trong các tập hợp số); lúc đó cái hợp thành của x và y, kí hiệu là $x + y$, gọi là tổng của x và y.

(2) Kí hiệu .(không nhất thiết là phép nhân thông thường trong các tập hợp số); lúc đó cái hợp thành của x và y, kí hiệu là $x.y$, đọc là x nhân với y hay có thể đọc là tích của x và y. Để đơn giản cách viết người ta thường viết tích của x và y bằng xy (bỏ dấu .).

[1]Joseph-Louis Lagrange (2511736 – 1041813) là một nhà toán học và nhà thiên văn người Ý - Pháp. Ông đã có những đóng góp quan trọng trong nhiều lĩnh vực của giải tích toán học, lý thuyết số, cơ học cổ điển và cơ học thiên thể.

Người ta còn dùng một số kí hiệu khác như $x \circ y, x * y, x \perp y, x \cup y, x \cap y$... để chỉ cái hợp thành của x và y.

Ví dụ 1.1.2.2. Để hiểu rõ hơn định nghĩa chúng ta cùng xem xét một số ví dụ dưới đây.

1/ Trong tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, phép cộng và phép nhân (thông thường) hai số tự nhiên là những phép toán hai ngôi; cái hợp thành của $x, y \in \mathbb{N}$ bởi các phép toán đó kí hiệu theo thứ tự bằng $x + y, xy$.

2/ Phép mũ hoá x^y không phải là phép toán hai ngôi trong $\mathbb{N}$ vì 0^0 là không xác định, nhưng nếu ta lấy $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ thì phép mũ hoá là một phép toán hai ngôi trong $\mathbb{N}^*$.

3/ Phép trừ không phải là phép toán trong $\mathbb{N}$, vì tương ứng $(a; b) \mapsto a - b$ không xác định một ánh xạ từ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$, chẳng hạn $(1, 2)$ tương ứng với $-1 \notin \mathbb{N}$. Tuy nhiên phép trừ lại là phép toán trong $\mathbb{Z}$.

Củng như vậy, phép chia cho một số khác không không phải là một phép toán trong $\mathbb{N}$, trong $\mathbb{Z}$, nhưng lại là phép toán trong $\mathbb{R}$.

4/ Trong tập hợp $\mathbb{R}_+$ các số thực không âm, tương ứng $\forall a, b \in \mathbb{R}_+ : (a, b) \mapsto \sqrt{ab}$ xác định một phép toán. Để dễ dàng chỉ ra điều này, ta gọi tương ứng trên là f và ta cần đi chứng tỏ rằng f là một ánh xạ đi từ $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ đến $\mathbb{R}_+$.

Với $(a; b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $(a'; b') \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, giả sử $(a, b) = (a', b')$. Khi đó $a = a', b = b'$ nên $f\big((a, b)\big) = \sqrt{ab} = \sqrt{a'b'} = f\big((a', b')\big)$, do vậy f là một ánh xạ đi từ $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ đến $\mathbb{R}_+$. Vậy tương ứng f xác định một phép toán trong $\mathbb{R}_+$.

5/ Cho tập $X \neq \emptyset$, gọi $\mathrm{Hom}(X, X)$ là tập các ánh xạ từ X lên chính nó. Khi đó phép lấy tích hai ánh xạ là một phép toán trong $\mathrm{Hom}(X, X)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(X,X) \times \mathrm{Hom}(X,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(X,X) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

1.1.3 Những tính chất thường gặp của một phép toán

Cho X là một tập hợp trong đó xác định phép toán T. Phép toán T có thể thoả mãn các tính chất kết hợp, tính chất giao hoán hoặc tính chất phân phối của một phép toán đối với một phép toán khác.

Định nghĩa 1.1.3.1 (Tính chất kết hợp)**.** Phép toán T gọi là có tính chất kết hợp nếu và chỉ nếu

$$(xTy)Tz = xT(yTz)$$

với mọi $x, y, z \in X$.

Ví dụ 1.1.3.2. Ta vẫn xét **Ví dụ 1.1.2.2.** thì các phép toán nêu trong mục 1, 5 có tính chất kết hợp, phép mũ hoá nêu ở mục 2 không có tính chất kết hợp. Chẳng hạn, đối với

3 phần tử $2, 3, 4$ ta có

$$(2T3)T4 = (2^3)^4 = 2^{12} \quad \text{và} \quad 2T(3T4) = 2^{3^4} = 2^{81}$$

do đó phép toán mũ hoá không có tính chất kết hợp.

Các phép toán nêu ở mục 3 và mục 4 cũng không có tính chất kết hợp.

Định nghĩa 1.1.3.3 (Tính chất giao hoán)**.** Phép toán T gọi là có tính chất giao hoán nếu và chỉ nếu $xTy = yTx$ với mọi $x, y \in X$.

Ví dụ 1.1.3.4. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Các phép toán cộng, nhân (thông thường) trên các tập hợp số mà nó xác định có tính chất giao hoán, nhưng phép trừ, phép chia không có tính chất giao hoán.

2/ Cho $\mathcal{P}(X)$ là tập hợp các tập con của một tập hợp X. Phép lấy hợp và giao hai tập hợp trong tập $\mathcal{P}(X)$ có tính chất giao hoán.

3/ Trong $\mathbb{N}^*$, phép lấy UCLN và BCNN là các phép toán có tính chất giao hoán, nhưng phép toán $(a, b) \mapsto a^b$ không có tính chất giao hoán vì $a^b \neq b^a$.

4/ Phép lấy tích ánh xạ trong $\mathrm{Hom}(X, X)$ không có tính chất giao hoán vì nói chung với $f, g \in \mathrm{Hom}(X, X) : f \circ g \neq g \circ f$.

Định nghĩa 1.1.3.5 (Tính phân phối của một phép toán đối với một phép toán khác)**.** Giả sử trong tập X ngoài phép toán T còn có phép toán $*$ nữa. Lúc đó, phép toán T gọi là phân phối trái đối với phép toán $*$ nếu và chỉ nếu:

$$xT(y * z) = (xTy) * (xTz)$$

với mọi $x, y, z \in X$.

Phép toán T gọi là phân phối phải đối với phép toán $*$ nếu và chỉ nếu:

$$(y * z)Tx = (yTx) * (zTx)$$

với mọi $x, y, z \in X$.

Phép toán T gọi là phân phối đối với phép toán $*$ nếu và chỉ nếu nó vừa phân phối trái, vừa phân phối phải đối với phép toán $*$.

Ví dụ 1.1.3.6. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Trong các tập hợp số phép nhân là phân phối đối với phép cộng vì ta có:

$$a.(b + c) = a.b + a.c$$

$$(b + c).a = b.a + c.a$$

với mọi $a, b, c \in \mathbb{N}$.

2/ Trong $\mathcal{P}(X)$ phép hợp là phân phối đối với phép giao và phép giao là phân phối đối với phép hợp vì:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$$

và

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$$

với mọi tập con A, B, C của X.

3/ Trong $\mathbb{N}^*$ phép nâng lên luỹ thừa là phân phối phải đối với phép nhân. Thật vậy với mọi $p, q, m \in \mathbb{N}$ ta có:

$$(p.q)^m = p^m.q^m$$

Tuy nhiên phép nâng lên luỹ thừa không phân phối trái đối với phép nhân vì chẳng hạn, ta có $2^{1.2} = 2^2 = 4$ trong khi $2^1.2^2 = 8$.

1.1.4 Những phần tử đặc biệt của một phép toán

Cho X là một tập không rỗng, trong đó xác định một phép toán T.

Định nghĩa 1.1.4.1 (Phần tử trung lập)**.** Cho e là một phần tử của X, e được gọi là phần tử trung lập trái đối với phép toán T nếu và chỉ nếu $eTx = x$ với mọi $x \in X$.

e được gọi là phần tử trung lập phải đối với phép toán T nếu và chỉ nếu $xTe = x$ với mọi $x \in X$.

e được gọi là phần tử trung lập đối với phép toán T nếu và chỉ nếu e vừa là phần tử trung lập trái vừa là phần tử trung lập phải đối với phép toán T nghĩa là nếu và chỉ nếu $xTe = eTx = x$ với mọi $x \in X$.

Ví dụ 1.1.4.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Dễ thấy rằng trong tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$, số 0 là phần tử trung lập đối với phép cộng, số 1 là phần tử trung lập đối với phép nhân.

2/ Trong tập hợp $\mathcal{P}(X)$, $\emptyset$ là phần tử trung lập đối với phép hợp, X là phần tử trung lập đối với phép giao.

3/ Trong tập hợp $\mathrm{Hom}(X, X)$, ánh xạ đồng nhất 1_X là phần tử trung lập đối với phép lấy tích hai ánh xạ.

4/ Trong $\mathbb{N}^*$, 1 là phần tử trung lập phải của phép nâng lên luỹ thừa vì ta có: $mT1 = m^1 = m$ với mọi $m \in \mathbb{N}$. Tuy nhiên 1 không phải là phần tử trung lập trái, vì $1Tm = 1^m = 1 \neq m$ với mọi $m \neq 1$.

Thông thường đối với phép toán có kí hiệu theo lối cộng thì phần tử trung lập được gọi là phần tử không, còn đối với phép toán có kí hiệu theo lối nhân thì phần tử trung lập được gọi là phần tử đơn vị.

Định lý 1.1.4.3. *Nếu phép toán T trong tập hợp X có một phần tử trung lập trái e và một phần tử trung lập phải e' thì $e = e'$.*

Chứng minh. e là phần tử trung lập trái nên $eTe' = e'$, e' là phần tử trung lập phải nên $eTe' = e$. Từ đó suy ra $e = e'$. □

Nhận xét:

Phần tử trung lập của một phép toán (nếu có) là duy nhất.

Định nghĩa 1.1.4.4 (Phần tử đối xứng)**.** Giả sử e là phần tử trung lập đối với phép toán T trong X và $x \in X$. Khi đó Phần tử x' được gọi là đối xứng trái của x nếu và chỉ nếu $x'Tx = e$.

Phần tử x' được gọi là đối xứng phải của x nếu và chỉ nếu $xTx' = e$.

Phần tử x' được gọi là đối xứng của x nếu và chỉ nếu nó vừa là đối xứng trái, vừa là đối xứng phải của x nghĩa là nếu và chỉ nếu $xTx' = x'Tx = e$.

Nhận xét:

Nếu x' là phần tử đối xứng của x thì x củng là phần tử đối xứng của x'.

Ví dụ 1.1.4.5. Ta xem xét các ví dụ dưới đây. 1/ Trong $\mathbb{R}$, số 0 là phần tử trung lập đối với phép cộng, phần tử đối xứng của phần tử $x \in \mathbb{R}$ là $-x$.

Trong $\mathbb{R}^*$, số 1 là phần tử trung lập đối với phép nhân, phần tử đối xứng của $x \in \mathbb{R}^*$ là $\dfrac{1}{x}$.

2/ Đối với phép lấy tích các ánh xạ trong $\mathrm{Hom}(X, X)$, ánh xạ đồng nhất 1_X là phần tử trung lập, nếu f là một song ánh thì phần tử đối xứng của nó chính là ánh xạ ngược f^{-1} vì

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_X.$$

Định nghĩa 1.1.4.6 (Phần tử khả nghịch)**.** Cho $x \in X$, nếu x có phần tử đối xứng thì ta gọi x là phần tử khả nghịch.

Định lý 1.1.4.7. *Giả sử phép toán T trong tập X có tính kết hợp và có phần tử trung lập là e. Khi đó:*

(1) *Nếu $x \in \mathbb{R}$ có phần tử đối xứng trái là x' và có phần tử đối xứng phải là x'' thì $x' = x''$.*

(2) *Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ thì có không quá một phần tử đối xứng.*

(3) *Nếu x, y khả nghịch và x', y' lần lượt là phần tử đối xứng của x, y thì xTy củng khả nghịch và phần tử đối xứng của xTy là $y'Tx'$.*

Chứng minh.

(1) Ta có: $x' = x'Te = x'T(xTx'') = (x'Tx)Tx'' = eTx'' = x''$, do đó $x' = x''$.

(2) Hiển nhiên theo định nghĩa.

(3) Vì T có tính chất kết hợp nên ta có:

$$\begin{aligned}(xTy)T(y'Tx') &= xT\big(yT(y'Tx')\big) = xT\big((yTy')Tx'\big)\\ &= xT(eTx') = xTx' = e\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}(y'Tx')T(xTy) &= y'T\big(x'T(xTy)\big) = y'T\big(x'Tx)Ty\big)\\ &= y'T(eTy) = y'Ty = e\end{aligned}$$

từ đó suy ra: xTy khả nghịch và phần tử đối xứng của xTy là y'Tx'. □

Định nghĩa 1.1.4.8 (Phần tử chính quy (hay giản ước được)). Phần tử $x \in X$ gọi là chính quy bên trái nếu và chỉ nếu từ đẳng thức $xTy = xTz$ suy ra được $y = z$ với mọi $y, z \in X$

Phần tử $x \in X$ gọi là chính quy bên phải nếu và chỉ nếu từ đẳng thức $yTx = zTx$ suy ra được $y = z$ với mọi $y, z \in X$

Phần tử $x \in X$ gọi là chính quy nếu và chỉ nếu x là chính quy trái và chính quy phải.

Ví dụ 1.1.4.9. Trong $\mathbb{N}$, số 2 là giản ước được đối với phép cộng vì

$$2 + m = 2 + n \Longrightarrow m = n$$

$$m + 2 = n + 2 \Longrightarrow m = n$$

với mọi $m, n \in \mathbb{N}$.

Tổng quát hơn, trong $\mathbb{R}$ mọi số đều là giản ước được đối với phép cộng và mọi số thực khác 0 đều là giản ước được đối với phép nhân.

1.1.5 Bộ phận ổn định. Phép toán cảm sinh

Định nghĩa 1.1.5.1. Một tập con A của X được gọi là bộ phận ổn định đối với phép toán T trong X nếu và chỉ nếu với mọi $x, y \in A, xTy \in A$. Giả sử A là một bộ phận ổn định của X đối với phép toán T, ta đi định nghĩa một phép toán mới trên A, kí hiệu là $*$, như sau:

Với mỗi cặp (x, y) các phần tử của A: $x * y := xTy$. Phép toán $*$ này là phép toán thu hẹp của T trên A, hay còn gọi là phép toán cảm sinh trên A bởi T

Người ta thường kí hiệu phép toán cảm sinh bởi T bởi chính T.

Ví dụ 1.1.5.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Đối với phép cộng và phép nhân trong $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ là một bộ phận ổn định của $\mathbb{R}$ vì ta biết rằng tổng tích hai số tự nhiên luôn là một số tự nhiên.

Cũng tương tự, tập các số chẵn là một bộ phận ổn định đối với phép cộng và nhân trong $\mathbb{N}$.

2/ Tập các số tự nhiên lẻ không phải là một bộ phận ổn định của $\mathbb{N}$ đối với phép cộng.

1.2 Nửa nhóm, vị nhóm và nhóm

1.2.1 Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa 1.2.1.1 (Nửa nhóm)**.** Một nửa nhóm là một cặp (X, T) trong đó X là một tập không rỗng và T là một phép toán hai ngôi trên X có tính chất kết hợp.

Như vậy nếu (X, T) là một nửa nhóm thì

$$(xTy)Tz = xT(yTz)$$

với mọi $x, y, z \in X$.

Nếu phép toán T đã rõ ràng và không sợ nhầm lẫn thì người ta cũng nói X là nữa nhóm.

Định nghĩa 1.2.1.2 (Vị nhóm)**.** Một nửa nhóm có phần tử trung lập thì ta gọi là một vị nhóm.

Một nửa nhóm (vị nhóm) mà phép toán có tính chất giao hoán thì ta gọi là một nửa nhóm (vị nhóm) giao hoán.

Ví dụ 1.2.1.3. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Tập $\mathbb{N}$ cùng với phép cộng thông thường là một vị nhóm giao hoán, phần tử trung lập là số 0; $\mathbb{N}$ cũng là một vị nhóm giao hoán đối với phép nhân thông thường, phần tử trung lập là số 1.

2/ $\big(\mathcal{P}(X), \cup\big)$ là một vị nhóm, phần tử trung lập là $\emptyset$.$\big(\mathcal{P}(X), \cap\big)$ là một vị nhóm, phần tử trung lập là X.

3/ $\mathbb{N}^*$ là nửa nhóm giao hoán đối với phép lấy ƯCLN và phép lấy BCNN. $\mathbb{N}^*$ cùng với phép lấy BCNN là một vị nhóm. Tuy nhiên $\mathbb{N}^*$ không phải là một vị nhóm đối với phép lấy ƯCLN.

4/ $\big(\mathrm{Hom}(X, X), .\big)$ là một vị nhóm đối với phép lấy tích ánh xạ, phần tử trung lập là ánh xạ đồng nhất 1_X.

Định nghĩa 1.2.1.4 (Nhóm)**.** Một vị nhóm mà mọi phần tử của nó đều có phần tử đối xứng thì ta gọi là một nhóm.

Như vậy, một nhóm là một cặp $(X, \circ)$ trong đó X là một tập không rỗng, và $\circ$ là một phép toán trên X thỏa mãn ba điều kiện sau:

(1) Phép toán $\circ$ có tính chất kết hợp: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

(2) Phép toán $\circ$ có phần tử trung lập e: $\exists e \in X, e \circ x = x \circ e = x$ với mọi $x \in X$.

(3) Mọi phần tử $x \in X$ đều có phần tử đối xứng: $\forall x \in X, \exists x' \in X, x \circ x' = x' \circ x = e$.

Ta gọi nhóm X là nhóm giao hoán nếu phép toán trong X có tính chất giao hoán. Nhóm giao hoán còn được gọi là nhóm Aben.

Sau này nếu X là một nhóm đối với phép cộng thì ta gọi tắt X là nhóm cộng, nếu X là một nhóm đối với phép nhân thì ta gọi tắt X là nhóm nhân.

Ví dụ 1.2.1.5. Ta xem xét một số ví dụ cơ bản dưới đây.

1/ Tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ cùng với phép cộng thông thường là một nhóm Aben. Cũng như vậy, tập $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ là nhóm Aben đối vói phép toán cộng thông thường.

2/ Tập hợp các số hữu tỉ dương $\mathbb{Q}_+^*$ là một nhóm Aben đối với phép nhân vì: phép nhân các số hữu tỉ có tính chất kết hợp, phần tử trung lập là số 1, phần tử đối xứng của $a \in \mathbb{Q}_+^*$ là $\frac{1}{a}$.

3/ Cho $X \neq \emptyset$, gọi S là tập hợp gồm các song ánh từ X đến Y. Khi đó S cùng với phép lấy tích ánh xạ là một nhóm vì:

+ Tích các ánh xạ có tính kết hợp

+ Ánh xạ đồng nhất $1_X \in S$ thỏa mãn $f \circ 1_X = 1_X \circ f = f$ với mọi $f \in S$ + Với mọi $f \in S$, f có ánh xạ ngược f^{-1} và $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_X$.

4/ Tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên không lập thành một nhóm đối với phép cộng.

Nhận xét:

(1) Mỗi phần tử của một nhóm chỉ có một phần tử đối xứng tương ứng duy nhất.

(2) Trong trường hợp phép toán của nhóm kí hiệu theo lối nhân '.' thì phần tử đối xứng của $x \in X$ kí hiệu là x^{-1} và gọi là phần tử nghịch đảo của x, trường hợp phép toán kí hiệu theo lối cộng '+' thì phần tử đối xứng của $x \in X$ kí hiệu là $-x$ và gọi là phần tử đối của x.

(3) Trong một nhóm X giả sử phép toán viết theo lối nhân, khi đó với mọi $a, b, c \in X$ đều tồn tại $x \in X$ để cho $ax = b$ $(xa = b)$. Ta thấy ngay $x = a'b$ (ba') trong đó a' là phần tử đối xứng của a. Người ta cũng nói trong một nhóm X, phương trình $ax = b$ $(xa = b)$ với $a, b \in X$ có nghiệm.

Định lý 1.2.1.1. *Giả sử X là một nhóm (với phép toán viết theo lối nhân). Khi đó với mọi $a, b, c \in X, ac = bc$ kéo theo $a = b$ và $ca = cb$ kéo theo $a = b$.*

Chứng minh. Bạn đọc tự chứng minh. □

Định lý 1.2.1.6. *Giả sử X là một tập không rỗng được trang bị một phép nhân kết hợp,* *sao cho với mọi $a, b \in X$ các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ đều có nghiệm x, y trong X. Khi đó X là một nhóm.*

Chứng minh. Vì $X \neq \emptyset$ nên có $a \in X$. Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $ax = a$. Ta sẽ chứng minh rằng $bx_0 = b$ với mọi $b \in X$ (tức là chứng minh x_0 là một đơn vị phải của X). Thật vậy, giả sử y_0 là một nghiệm của phương trình $ya = b$. Ta có

$$bx_0 = (y_0a)x_0 = y_0(ax_0) = y_0a = b$$

Tương tự, nếu x_1 là một nghiệm của phương trình $xa = a$ thì x_1 là đơn vị trái của X. Ta có

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1x_0 (\text{vì } x_1 \text{ là một đơn vị trái}) \\ &= x_1 (\text{vì } x_0 \text{ là một đơn vị phải}). \end{aligned}$$

cho nên, phần tử x_0 chính là phần tử đơn vị của X.

Với mọi $a \in X$, gọi a', a'' là các phần tử của X sao cho $a'a = x_0, aa'' = x_0$. Các phần tử này tồn tại theo giả thiết của định lý. Ta có

$$a' = a'x_0 = a'(aa") = (a'a)a" = x_0a" = a".$$

Như vậy với mỗi $a \in X$ có $a' \in X$ sao cho $aa' = a'a = x_0$

Tóm lại, X cùng với phép toán trên nó là một nhóm. □

Định lý 1.2.1.7. *Cho X là một nhóm (phép toán viết theo lối nhân), khi đó với mọi $a, b \in X$ ta có*

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Chứng minh. Bạn đọc tự chứng minh □

1.2.2 Nửa nhóm con, vị nhóm con và nhóm con

Định nghĩa 1.2.2.1 (Nửa nhóm con)**.** Cho X là một nửa nhóm và $\circ$ là phép toán trong X. Bộ phận A của X ổn định đối với phép toán $\circ$ sẽ được gọi là một nửa nhóm con của X nếu A cùng với phép toán cảm sinh là một nửa nhóm.

Nhận xét:

(1) Nếu phép toán $\circ$ trong X là kết hợp thì phép toán cảm sinh trong mọi bộ phận ổn định A củng có tính kết hợp. Do đó điều kiện để một bộ phận A của X là nửa nhóm con chỉ là A ổn định (khép kín) đối với phép toán $\circ$.

Như vậy $A \subset X$ là nửa nhóm con của nửa nhóm X khi và chỉ khi $x \circ y \in A$ với mọi $x, y \in A$.

(2) Nếu X là giao hoán thì nữa nhóm con A cũng giao hoán.

Định nghĩa 1.2.2.2 (Vị nhóm con)**.** Cho X là một vị nhóm và $\circ$ là phép toán trong X. Bộ phận A của X ổn định đối với phép toán $\circ$ sẽ được gọi là một vị nhóm con của X nếu A cùng với phép toán cảm sinh là một vị nhóm.

Ví dụ 1.2.2.3. Ta xem xét một số ví dụ dưới đây.

1/ Nếu X là một nửa nhóm thì bản thân X là nửa nhóm con của chính nó. Nữa nhóm con này được gọi là nửa nhóm con tầm thường. Nếu X là một vị nhóm với phần tử trung lập e thì $\{e\}, X$ là các vị nhóm con của X. Các vị nhóm con này được gọi là vị nhóm con tầm thường.

2/ Đặt $m\mathbb{N} = \{mn \big| n \in \mathbb{N}\}$, khi đó $m\mathbb{N}$ là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Để ý rằng $\mathbb{N}$ cũng là một vị nhóm đối với phép nhân , nhưng $m\mathbb{N}, m \neq 1$ không phải là một vị nhóm con của $\mathbb{N}$.

3/ Tập con S các song ánh từ X vào X là một vị nhóm con của vị nhóm $\mathrm{Hom}(X, X)$ với phép lấy tích ánh xạ.

Định nghĩa 1.2.2.4 (Nhóm con)**.** Cho X là một nhóm và T là phép toán trong X. Bộ phận A của X ổn định đối với phép toán T trong X sẽ được gọi là một nhóm con của X nếu A cùng với phép toán cảm sinh là một nhóm.

Ví dụ 1.2.2.5. Ta xem xét một số ví dụ dưới đây.

1/ Nếu X là một nhóm, e là phần tử trung lập của nó thì X và e là hai nhóm con của X, chúng ta gọi là hai nhóm con tầm thường.

2/ Ta thấy $\mathbb{Q}$ là một nhóm đối với phép cộng và $\mathbb{Z}$ là một nhóm con của nó. Bộ phận $\{-1, 1\}$ tuy lập thành một nhóm đối với phép nhân, nhưng không phải là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$.

3/ Bộ phận $m\mathbb{Z} = \big\{mz \big| z \in \mathbb{Z}\big\}$ là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên $\mathbb{Z}$.

4/ Tập hợp các số thực có dạng $a + b\sqrt{3}, a, b \in \mathbb{Z}$ cùng với phép cộng là một nhóm con của nhóm cộng các số thực.

Định lý 1.2.2.6. *Bộ phận ổn định A của một nhóm X là một nhóm con của X nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(1) $xy \in A$ *với mọi* $x, y \in A$.

(2) $e \in A$, *với* e *là phần tử trung lập của* X.

(3) $x^{-1} \in A$ *với mọi* $x \in A$.

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử A là nhóm con của X. Theo định nghĩa nhóm con ta có ngay (1) Gọi e' là phần tử trung lập của nhóm A. Ta có

$$e'x = x \text{ với mọi } x \in A.$$

Mặt khác ta củng có

$$ex = x$$

vì e là phần tử trung lập của X. Do đó

$$e'x = ex$$

hay

$$e' = e$$

vì X có luật giản ước. Vậy ta có (2). Cuối cùng gọi x' là nghịch đảo của x trong nhóm A. Ta có

$$x'x = e = x^{-1}x.$$

Thực hiện luật giản ước, ta được $x' = x^{-1}$, như vậy ta đã chứng minh được (3).

Điều kiện đủ. Hiển nhiên. □

Mệnh đề 1.2.2.7. *Giả sử A là một bộ phận khác rỗng của một nhóm X. Khi đó các điều kiện sau tương đương:*

(1) *A là một nhóm con của X.*

(2) *Với mọi $x, y \in A, xy \in A$ và $x^{-1} \in A$.*

(3) *Với mọi $x, y \in A, xy^{-1} \in A$.*

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. □

1.2.3 Đồng cấu nửa nhóm, vị nhóm và nhóm

Định nghĩa 1.2.3.1. Một đồng cấu nửa nhóm là một ánh xạ f đi từ một nữa nhóm X vào một nửa nhóm Y sao cho:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Cũng tương tự, ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.2.3.2. Một đồng cấu vị nhóm là một ánh xạ f đi từ một vị nhóm X vào một vị nhóm Y sao cho:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Định nghĩa 1.2.3.3. Một đồng cấu nhóm là một ánh xạ f đi từ một nhóm X vào một nhóm Y sao cho:

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

Nếu $X = Y$ thì đồng cấu nhóm f được gọi là tự đồng cấu nhóm của X.

Một đồng cấu nhóm mà là một đơn ánh thì gọi là đơn cấu nhóm, một đồng cấu nhóm mà là toàn ánh gọi là toàn cấu nhóm, một đồng cấu nhóm mà là song ánh thì gọi là một đẳng cấu nhóm, một tự đồng cấu song ánh gọi là tự đẳng cấu.

Nhận xét:

Nếu $f : X \longrightarrow Y$ là một đẳng cấu từ nhóm X đến nhóm Y thì ánh xạ ngược cũng là một đẳng cấu.

Thật vậy với mọi $y, y' \in Y$ ta có:

$$f(f^{-1}(yy')) = yy'$$

$$f(f^{-1}(y)f^{-1}(y')) = f(f^{-1}(y))f(f^{-1}(y')) = yy',$$

do đó

$$f(f^{-1}(yy')) = f(f^{-1}(y)f^{-1}(y'))$$

nhưng f là một đơn cấu nên

$$f^{-1}(yy') = f^{-1}(y)f^{-1}(y'),$$

nghĩa là f^{-1} là một đồng cấu nhóm và do đó nó củng là một đẳng cấu vì f^{-1} là song ánh.

Ví dụ 1.2.3.4. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Giả sử A là một nhóm con của một nhóm X. Khi đó đơn ánh

$$f : A \longrightarrow X$$

$$a \longmapsto a$$

là một đơn cấu gọi là đơn cấu chính tắc.

2/ Ánh xạ đồng nhất của một nhóm X là một đẳng cấu gọi là tự đẳng cấu đồng nhất của X.

3/ Đặt $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$, khi đó $\mathbb{R}_+^*$ cùng với phép nhân các số thực thông thường là một nhóm gọi là nhóm nhân các số thực dương. Ánh xạ

$$\log : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \log x$$

trong đó $\log x$ là logarit cơ số 10 của x là một đồng cấu vì $\log(xy) = \log x + \log y$. Đồng cấu này còn là một song ánh nên là một đẳng cấu.

4/ Ánh xạ

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$

$$x \longmapsto 10^x$$

là ánh xạ ngược của ánh xạ log, nó cũng là một đẳng cấu.

1.2.4 Nửa nhóm, vị nhóm và nhóm sắp thứ tự.

Định nghĩa 1.2.4.1. Nửa nhóm,vị nhóm và nhóm X lần lượt được gọi là nửa nhóm,vị nhóm và nhóm sắp thứ tự nếu X được trang bị một quan hệ thứ tự toàn phần $\geq$ thỏa mãn:

(1) Với mọi $a, b, c \in X$, quan hệ $a \geq b$ kéo theo $a + c \geq b + c$;

(2) Các quan hệ $a \geq 0$ và $b \geq 0$ kéo theo $ab \geq 0$.

Ví dụ 1.2.4.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên cùng với phép cộng thông thường là một vị nhóm sắp thứ tự.

2/ Tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên cùng với phép cộng thông thường là một nhóm, nó là một nhóm sắp thứ tự với quan hệ $\geq$ thông thường.

3/ Tập $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ cùng với phép nhân thông thường cũng là một nhóm, dễ thấy rằng quan hệ '$\leq$' trong $\mathbb{R}^*$ là một quan hệ thứ tự toàn phần có hai tính chất như trên. Do vậy $\mathbb{R}^*$ là một nhóm sắp thứ tự.

1.3 Vành và trường

Trong những phần trước chúng ta đã biết nữa nhóm, vị nhóm, nhóm là những cấu trúc đại số trong đó có một phép toán. Trong phần này, chúng ta sẽ xét các cấu trúc đại số có hai phép toán đó là vành và trường.

1.3.1 Vành

Cho X là một tập hợp khác rỗng trên đó xác định hai phép toán, một kí hiệu theo lối $'+'$ (lối cộng), một kí hiệu theo lối $'.'$ (lối nhân). Ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 1.3.1.1 (Vành)**.** Một bộ $(X, +, .)$ được gọi là một vành nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(1) $(X, +)$ là một nhóm giao hoán.

(2) $(X, .)$ là một nữa nhóm.

(3) Phép nhân phân phối đối với phép cộng.

Như vậy, tập hợp $X \neq \emptyset$ cùng với hai phép toán $+$ và . là một vành khi và chỉ khi các điều kiện sau đây được thỏa mãn với mọi $x, y, z \in X$:

(1) Phép cộng có tính chất kết hợp: $(x + y) + z = x + (y + z)$.

(2) Phép cộng có phần tử trung lập, kí hiệu là 0: $x + 0 = 0 + x = x$.

(3) Mọi phần tử thuộc X đều có phần tử đối xứng đối với phép cộng; phần tử đối xứng của x kí hiệu là $-x$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

(4) Phép cộng có tính chất giao hoán: $x + y = y + x$.

(5) Phép nhân có tính chất kết hợp: $(xy)z = x(yz)$.

(6) Phép nhân phân phối đối với phép cộng:

$$(x + y)z = xy + yz$$

$$z(x + y) = zx + zy.$$

Khi hai phép toán đã rõ ràng, ta nói đơn giản: X là một vành.

Định nghĩa 1.3.1.2 (Vành giao hoán)**.** Vành X được gọi là vành giao hoán nếu phép nhân của nó có tính chất giao hoán. Vành X được gọi là có đơn vị nếu phép nhân của nó có đơn vị, tức là có phần tử $e \in X$ sao cho: $ex = xe = x, \forall x \in X$, phần tử đơn vị này thường kí hiệu là 1(nếu không có sự nhầm lẫn với số tự nhiên 1).

Đương nhiên, phần tử đơn vị của một vành nếu tồn tại thì duy nhất.

Ví dụ 1.3.1.3. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên cùng với phép cộng và phép nhân thông thường là một vành giao hoán có đơn vị và được gọi là vành các số nguyên. Ta cũng có vành các số hữu tỉ, vành các số thực.

2/ Tập hợp $\mathbb{N}$ với phép cộng và phép nhân thông thường không phải là một vành vì $(\mathbb{N}, +)$ không phải là một nhóm.

3/ Tập hợp M các ma trận vuông cấp hai

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ cùng với phép cộng và phép nhân được xác định như sau:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

là một vành có đơn vị. Phần tử không của vành này là

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

phần tử đơn vị là

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Miền nguyên

Trong vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ nếu ta có đẳng thức $ab = 0$ với $a \neq 0$ thì luôn luôn ta có: $b = 0$. Tuy nhiên trong vành M các ma trận vuông cấp hai với các phần tử là số thực, thì điều này không còn đúng nữa. Thật vậy, xét hai ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Thực hiện phép nhân ta được:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta thấy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

là các phần tử khác không mà tích lại bằng không. Các phần tử này lần lượt được gọi là ước trái và ước phải của không.

Định nghĩa 1.3.2.1. Nếu $a \neq 0, b \neq 0$ là các phần tử của một vành X với tích $ab = 0$ thì a được gọi là một ước trái của 0 và b được gọi là một ước phải của 0. Nếu X giao hoán, thì a, b được gọi là các ước của 0.

Định nghĩa 1.3.2.2 (Miền nguyên)**.** Một vành giao hoán X có đơn vị $1 \neq 0$ và không có ước của không được gọi là một miền nguyên.

Ví dụ 1.3.2.3. Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ là một vành nguyên.

1.3.3 Trường

Định nghĩa 1.3.3.1 (Trường)**.** Một vành giao hoán có đơn vị là $1 \neq 0$, trong đó mọi phần tử khác không của nó đều có một nghịch đảo thì được gọi là một trường. Như vậy tập hợp X cùng với hai phép toán cộng $(+)$ và nhân $(\cdot)$ được gọi là một trường nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(1) $(X, +)$ là một nhóm giao hoán, cụ thể là:

- Phép cộng có tính chất kết hợp: $(x + y) + z = x + (y + z)$ với mọi $x, y, z \in X$.
- Phép cộng có phần tử trung lập, tức là có phần tử $0 \in X$ sao cho:

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ với mọi } x \in X.$$

- Mọi phần tử $x \in X$ đều có phần tử đối $-x$, tức là: $\forall x \in X, \exists -x \in X : x+(-x) = 0$.
- Phép cộng có tính chất giao hoán: $x + y = y + x$ với mọi $x, y \in X$.

(2) $(X^*, \cdot)$ là một nhóm nhân giao hoán ($X^* = X - \{0\}$). Cụ thể là:

- Phép nhân có tính chất kết hợp: $(xy)z = x(yz)$ với mọi $x, y, z \in X^*$.

- Phép nhân có phần tử trung lập (thường được gọi là phần tử đơn vị), tức là có $1 \in X^*$ sao cho

$$1.x = x.1 = x \text{ với mọi } x \in X^*.$$

- Mọi $x \in X^*$ đều có phần tử nghịch đảo x^{-1}, tức là: $\forall x \in X^*, \exists x^{-1} : x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$.

- Phép nhân có tính chất giao hoán: $xy = yx, \forall x, y \in X^*$.

(3) Phép nhân phân phối đối với phép cộng, cụ thể là: mọi $x, y, z \in X^*$ ta có

$$(x + y)z = xz + yz, \quad z(x + y) = zx + zy.$$

Nhận xét:

Mỗi trường đều là một miền nguyên.

Ví dụ 1.3.3.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$, tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ là một trường đối với phép cộng và phép nhân thông thường.

2/ Vành các số nguyên không phải là một trường, vì ngoài 1 và -1, các số nguyên khác 0 không có nghịch đảo trong $\mathbb{Z}$.

1.3.4 Vành và trường con

Định nghĩa 1.3.4.1 (Vành con). Bộ phận A của một vành X, ổn định đối với phép cộng và phép nhân trong X được gọi là một vành con của X nếu bản thân A cùng với hai phép toán cảm sinh trên A là một vành.

Ví dụ 1.3.4.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Cho X là một vành, khi đó $\{0\}$ và X là những vành con tầm thường của X.

2/ $m\mathbb{Z} = \{mn | n \in \mathbb{Z}\}$ là vành con của vành số nguyên $\mathbb{Z}$.

Định nghĩa 1.3.4.3 (Trường con). Bộ phận A của một trường X, ổn định đối với phép cộng và phép nhân trong X được gọi là một trường con của X nếu bản thân A cùng với hai phép toán cảm sinh trên A là một trường.

Ví dụ 1.3.4.4. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Cho X là một trường khi đó X chính là một trường con của X. Tuy nhiên bộ phận $\{0\}$ không phải là một trường con của X, vì theo định nghĩa một trường phải có ít nhất hai phần tử.

2/ Tập hợp các số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ là một trường con của trường số thực $\mathbb{R}$.

1.3.5 Đồng cấu vành và trường

Định nghĩa 1.3.5.1 (Đồng cấu vành)**.** Một đồng cấu vành là một ánh xạ f từ một vành X đến một vành Y sao cho:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

với mọi $a, b \in X$. Nếu $X = Y$ thì đồng cấu f gọi là một tự đồng cấu của X.

Một đồng cấu vành mà là một đơn ánh thì ta gọi là một đơn cấu, một đồng cấu toàn ánh gọi là một toàn cấu, một đồng cấu song ánh gọi là một đẳng cấu, một tự đồng cấu song ánh gọi là một tự đẳng cấu.

Ví dụ 1.3.5.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Cho X là một vành, khi đó ánh xạ đồng nhất của X là một đồng cấu vành

$$id : X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto x$$

Ta dễ dàng chứng minh được rằng id là một tự đẳng cấu, tự đẳng cấu này được gọi là tự đẳng cấu đồng nhất của X.

2/ Giả sử A là một vành con của một vành X. Khi đó ánh xạ

$$f : X \longrightarrow X$$

$$a \longmapsto a$$

là một đơn cấu vành. Đơn cấu này được gọi là đơn cấu chính tắc.

3/ Giả sử X và Y là hai vành, ánh xạ

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto 0$$

với 0 là phần tử không của vành Y, là một đồng cấu gọi đồng cấu không.

Định nghĩa 1.3.5.3 (Đồng cấu trường)**.** Một đồng cấu trường là một ánh xạ f từ một trường X đến một trường Y sao cho:

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

với mọi $a, b \in X$.

Định nghĩa tự đồng cấu, đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu trường tương tự như đối với vành.

Ví dụ 1.3.5.4. Ta xem xét lại **Ví dụ 1.3.5.2**, ta thấy rằng nếu cho X, Y là các trường, A là trường con của X thì các đồng cấu vành sẽ trở thành các đồng cấu trường.

Định lý 1.3.5.5. *Giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là một đồng cấu trường khác đồng cấu không, khi đó:*

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-x) = -f(x) \text{ với mọi } x \in X \end{cases}$$

và

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(x^{-1}) = (f(x))^{-1} \text{ với mọi } x \neq 0, x \in X \end{cases}$$

Chứng minh. a/ Ta có:

$$0 + f(x) = f(x) = f(x + 0) = f(0) + f(x)$$

Vì Y là một nhóm đối với phép cộng, nên thực hiện luật giản ước ta được $f(0) = 0$.

Ta có

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$$

do đó $f(-x)$ là phần tử đối của $f(x)$, $f(-x) = -f(x)$.

b/ Vì f khác đồng cấu không nên có $a \in X$ để $f(a) \neq 0$. Ta có

$$1.f(a) = f(a) = f(1.a) = f(1).f(a)$$

Vì $f(a) \neq 0$ nên $f(a) \in Y^*, (Y^* = Y - \{0\})$, mặt khác Y^* là một nhóm nhân, do đó thực hiện luật giản ước trong nhóm nhân Y^* ta được $f(1) = 1$.

Ta có

$$1 = f(1) = f(x.x^{-1}) = f(x)f(x^{-1})$$

do đó $f(x^{-1}$ là phần tử nghịch đảo của $f(x)$, $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$.

□

1.3.6 Vành và trường sắp thứ tự

Định nghĩa 1.3.6.1. Một vành (trường) X được gọi là vành (trường) sắp thứ tự nếu vành (trường) X được trang bị một quan hệ thứ tự toàn phần thỏa mãn:

(1) Với mọi $a, b, c \in X$, quan hệ $a \geq b$ kéo theo $a + c \geq b + c$;

(2) Các quan hệ $a \geq 0$ và $b \geq 0$ kéo theo $ab \geq 0$.

Ví dụ 1.3.6.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Ta các số nguyên $\mathbb{Z}$ với hai phép toán cộng và nhân thông thường là một vành. Trong vành $\mathbb{Z}$ quan hệ '$\leq$' là một quan hệ thứ tự toàn phần thỏa mãn hai tính chất trên, do đó $\mathbb{Z}$ là một vành sắp thứ tự.

2/ $\mathbb{R}$ là một trường với hai phép toán là cộng và nhân thông thường. Trong $\mathbb{R}$ quan hệ '$\leq$' cũng là một quan hệ thứ thự toàn phần thỏa mãn hai tính chất trên, do đó $\mathbb{R}$ là một trường sắp thứ tự.

Bài tập

Bài tập 1.1. Giả sử X là một tập có hơn một phần tử. Xét tương ứng:

$$(x, y) \longmapsto y \text{ với mọi } x, y \in X$$

a/ Chứng minh rằng phép tương ứng trên là một phép toán trong X.

b/ Giả sử phép toán ở trên được kí hiệu theo lối '$\circ$'. Chứng minh rằng $\circ$ có tính chất kết hợp.

c/ Phép toán $\circ$ có tính chất giao hoán không? Có phần tử trung lập không? d/ Tương tự, ta định nghĩa một phép toán T trong X như sau:

$$xTy = x \text{ với mọi } x, y \in X.$$

Chứng minh rằng phép toán $\circ$ là phân phối với phép toán T.

Bài tập 1.2. Trong $\mathbb{N}$, ta xác định một tương ứng T như sau:

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x + y + \mid x - y \mid}{2} \end{array}$$

a/ Chứng minh T là một phép toán trong $\mathbb{N}$.

b/ Chứng minh rằng T có tính chất giao hoán và kết hợp.

c/ Phép toán T có phần tử trung lập không ? Tìm $n \in \mathbb{N}$ sao cho n có phần tử đối xứng.

Bài tập 1.3. Trong $\mathbb{N}$, ta xác định một tương ứng T như sau:

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x + y - \mid x - y \mid}{2} \end{array}$$

a/ Chứng minh T là một phép toán trong $\mathbb{N}$.

b/ Chứng minh rằng T có tính chất giao hoán và kết hợp.

Bài tập 1.4. Giả sử p, q, r là các số thực, trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ xét phép toán T xác định bởi:

$$aTb = pa + qb + r; \forall a, b \in \mathbb{R}$$

a/ Với điều kiện nào của p, q, r thì T có:

- tính chất giao hoán ?

- tính chất kết hợp ?

- tính chất giao hoán và kết hợp ?

b/ Với điều kiện nào của p, q, r thì một phần tử $x \in \mathbb{R}$ có đối xứng trái, đối xứng phải, là chính quy trái, chính quy phải ?

Bài tập 1.5. Trong tập hợp số thực không âm $\mathbb{R}_+$, xét phép toán T:

$$(a, b) \mapsto \sqrt{ab}; \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

a/ Phép toán T có tính chất gì ? (giao hoán, kết hợp).

b/ Phép toán T có phần tử trung lập không ? Các phần tử có là chính quy không ?

Bài tập 1.6. Ta gọi một bảng

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ là một ma trận vuông cấp hai trên $\mathbb{R}$. Trong tập hợp M các ma trận vuông cấp hai trên $\mathbb{R}$, ta định nghĩa phép nhân hai ma trận như sau:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

a/ Phép nhân ma trận có tính chất giao hoán, kết hợp không?

b/ Chứng minh rằng ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

là phần tử đơn vị đối với phép nhân ma trận.

c/ Tìm điều kiện của a, b, c, d để ma trận

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

có phần tử đối xứng.

Bài tập 1.7. Cho X là một vị nhóm cộng giao hoán. Chứng minh rằng tập hợp $X^2 = X \times X$ cùng với phép toán được xác định như sau:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

củng là một vị nhóm giao hoán.

Bài tập 1.8. Các tập hợp dưới đây cùng với phép toán xác định trên các tập hợp ấy có lập thành nhóm hay không?

a/ Tập hợp các số nguyên với phép cộng.

b/ Tập hợp số hữu tỉ với phép nhân.

c/ Tập hợp $M = \{-1; 1\}$ với phép nhân.

d/ Tập hợp số hữu tỉ khác không đối với phép chia thông thường.

e/ Tập hợp số nguyên với phép trừ.

f/ Tập hợp các số hữu tỉ có dạng $2^n, n \in \mathbb{Z}$ với phép nhân.

g/ Tập hợp các số thực với phép cộng.

Bài tập 1.9. Chứng minh rằng các tập hợp sau đây với phép toán được chỉ ra lập thành một nhóm.

a/ Tập hợp các số thực có dạng $a + b\sqrt{5}, a, b \in \mathbb{Z}$ với phép cộng.

b/ Tập hợp các số thực có dạng $a + b\sqrt{5}, a, b \in \mathbb{Q}, a^2 + b^2 \neq 0$ với phép nhân.

Bài tập 1.10. a/ Cho m là một số tự nhiên khác không. Chứng tỏ rằng $m\mathbb{N} = \{mn \big| n \in \mathbb{N}\}$ là vị nhóm con của vị nhóm cộng $\mathbb{N}$.

b/ Cho m là một số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng tỏ rằng $M = \{m^k \big| k \in \mathbb{N}\}$ là vị nhóm con của vị nhóm nhân $\mathbb{N}$.

Bài tập 1.11. Cho X là một nữa nhóm. Với mỗi $a \in X$ kí hiệu:

$$aX = \{ax \big| x \in X\}$$

$$Xa = \{xa \big| x \in X\}$$

Chứng ming rằng X là một nhóm khi và chỉ khi với mọi $a \in X$, ta có $aX = Xa = X$.

Bài tập 1.12. Cho X là một nhóm với đơn vị e. Chứng minh rằng nếu $\forall a \in X, a^2 = e$ thì X là nhóm Aben.

Bài tập 1.13. Giả sử $\varphi : G \longrightarrow G'$ là một đồng cấu nhóm. Chứng minh rằng:

a/ φ chuyển phần tử trung lập của G thành phần tử trung lập của G' tức là: $\varphi(e) = e'$.

b/ φ chuyển nghịch đảo của phần tử $x \in G$ thành phần tử nghịch đảo của $\varphi(x) \in G'$ tức là: $\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$.

Bài tập 1.14. Giả sử $\varphi : G \longrightarrow G'$ là một đồng cấu nhóm. Ta định nghĩa:

$$Ker\varphi := \{x \in G \big| \varphi(x) = e'\}$$

$$Im\varphi := \{\varphi(x) \big| x \in G\} = \varphi(G)$$

trong đó e' là phần tử trung lập của G'. Chứng minh:

a/ Đồng cấu $\varphi : G \longrightarrow G'$ là một toàn cấu nếu và chỉ nếu $Im\varphi = G'$.

b/ Đồng cấu φ là một đơn cấu nếu và chỉ nếu $Ker\varphi = e$, trong đó e là phần tử trung lập của G.

Bài tập 1.15. Cho X là một nhóm giao hoán. Chứng minh rằng ánh xạ

$$\begin{aligned} \varphi :& X \longrightarrow X \\ & a \longmapsto a^k = \underbrace{a.a...a}_{k \text{ lần}} \end{aligned}$$

với k là một số nguyên cho trước, là một đồng cấu. Xác định $Ker\varphi$.

Bài tập 1.16. Cho X là một nhóm và cho ánh xạ:

$$\begin{aligned} \varphi : & X \longrightarrow X \\ & a \longmapsto a^{-1}. \end{aligned}$$

Chứng minh rằng φ là một tự đẳng cấu của nhóm X khi và chỉ khi X là một nhóm Aben.

Bài tập 1.17. Giả sử X, G_1, G_2 là những nhóm, và $f : X \longrightarrow G_1, g : X \longrightarrow G_2$ là những ánh xạ. Xét ánh xạ:

$$\begin{aligned} h : & X \longrightarrow G_1 \times G_2 \\ & x \longmapsto h(x) = (f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Chứng minh rằng h là một đồng cấu khi và chỉ khi f và g là những đồng cấu.

Bài tập 1.18. Xét xem các tập hợp sau đây với các phép toán xác định trên chúng có phải là một vành? một trường?

a/ Tập các số nguyên với hai phép cộng và nhân thông thường.

b/ Tập hợp các số chẵn với hai phép cộng và nhân thông thường.

c/ Tập hợp các đa thức một ẩn x với hệ số nguyên đối với phép cộng và nhân đa thức.

d/ Tập hợp các đa thức một ẩn x với hệ số thực đối với phép cộng và nhân đa thức.

Bài tập 1.19. a/ Chứng minh rằng tập hợp các số thực dạng $a + b\sqrt{2}(a, b \in \mathbb{Z})$ với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán có đơn vị.

b/ Chứng minh rằng tập hợp các số thực dạng $a + b\sqrt{2}(a, b \in \mathbb{Q})$ với phép cộng và nhân thông thường là một trường.

Bài tập 1.20. Chứng minh tập hợp $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ cùng với hai phép toán

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$$

là một vành giao hoán có đơn vị. Hãy tìm tất cả các ước của không của vành này.

Bài tập 1.21. Cho X là một vành. Chứng minh rằng với mọi $x, y, z \in X$ ta có

a/ $x(y - z) = xy - xz, (y - z)x = yx - zx.$

b/ $0x = x0 = 0.$

c/ x(-y)=(-x)y=-xy,(-x)(-y)=xy.

Bài tập 1.22. Giả sử A là một bộ phận khác rỗng của một vành X. Chứng minh rằng các điều kiện sau tương đương

a/ A là một vành con của X

b/ Với mọi $x, y \in A, x + y \in A, xy \in A, -x \in A$

c/ Với mọi $x, y \in A, x - y \in A, xy \in A$

Bài tập 1.23. Giả sử A là một bộ phận có nhiều hơn một phần tử của một trường X. Chứng minh rằng các điều kiện sau đây tương đương

a/ A là một trường con của X

b/ Với mọi $x, y \in A, x + y \in A, xy \in A, -x \in A, x^{-1} \in A$ nếu $x \neq 0$

c/ Với mọi $x, y \in A, x - y \in A, xy^{-1} \in A$ nếu $y \neq 0$

Bài tập 1.24. Giả sử trong tập X có hai phép toán cộng và nhân thỏa mãn:

a/ X cùng với phép cộng là một nhóm

b/ X cùng với phép nhân là một vị nhóm

c/ Phép nhân phân phối đối với phép cộng

Chứng minh rằng X là một vành.

Bài tập 1.25. Chứng minh rằng bộ phận

$$A = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \middle| \quad a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}$$

là một trường con của trường số thực $\mathbb{R}$.

Bài tập 1.26. Giả sử X là một vành có tính chất $x^2 = x$ với mọi $x \in X$. Chứng minh rằng

a/ $x = -x$ với mọi $x \in X$

b/ X là vành giao hoán

c/ Nếu X là vành không có ước của không, có nhiều hơn một phần tử thì X là một miền nguyên.

Bài tập 1.27. Chứng minh rằng mọi đồng cấu trường $f : X \longrightarrow Y$ khác đồng cấu không đều là đơn cấu.

Bài tập 1.28. Xét ánh xạ

$$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$
$$a \longmapsto f(a) = (a, 0)$$

với $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ là vành xét ở **Bài tập 1.20.**

a/ Chứng minh f là một đồng cấu vành.

b/ Chứng minh f là một đơn cấu, f có phải là toàn cấu không?

Bài tập 1.29. Giả sử $f : X \longrightarrow X$ là một tự đồng cấu của vành X. Chứng minh rằng tập hợp $A = \{x \in X \,|\, f(x) = x\}$ là một vành con của X.

Bài tập 1.30. Giả sử A là một vành, B là một tập hợp với hai phép toán cộng và nhân, $f : A \longrightarrow B$ là một song ánh thỏa mãn

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(ab) = f(a)f(b)$$

với mọi $a, b \in A$. Chứng minh:

a/ B là một vành.

b/ Nếu A là một vành giao hoán thì B cũng là vành giao hoán.

c/ Nếu A là vành có đơn vị thì B cũng là vành có đơn vị.

d/ Nếu A là miền nguyên thì B cũng là miền nguyên.

Bài tập 1.31. Giả sử $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ là một tự đồng cấu của trường số hữu tỉ. Chứng minh rằng f là đồng cấu không hoặc đồng cấu đồng nhất.

Bài tập 1.32. Cho $d = 7$ hoặc $= 11$. Chứng minh rằng:

a/ Bộ phận

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \left\{a + b\sqrt{d} \middle| \quad a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

là một trường con của trường số thực $\mathbb{R}$.

b/ Các trường $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ và $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$ không đẳng cấu với nhau.

Chương 2

Số tự nhiên

2.1 Giới thiệu về lịch sử số tự nhiên

2.1.1 Sự hình thành khái niệm số ở người nguyên thủy

Hoạt động lịch sử chứng tỏ rằng trong sự phát triển của xã hội đã có thời kì con người chưa có một khái niệm gì về con số, và cũng chưa có khái niệm về các phép toán so sánh tập hợp, đếm các phần tử của tập hợp.

Trước khi ra đời một thứ ngôn ngữ để giao lưu, người nguyên thuỷ có thể phân biệt giữa một cây và một rừng cây, giữa một con chó và một bầy chó,. .. nghĩa là phân biệt giữa ít và nhiều. Điều này đã hình thành rấtt sớm, cũng như khái niệm về cặp, ví dụ một cặp chim, một cặp cánh, một đôi mắt, hai bàn tay,...

Xã hội loài người phát triển, người ta sống thành bộ lạc ngày càng đông hơn và việc săn bắn ngày càng có tổ chức. Khi đi săn, muốn kiểm tra đồ dùng có đủ hay không, người ta phân phát đá ném, cung tên cho từng người. Săn bắn xong, người ta lại phân phát thú vật, chim muông cho nhau. Như vậy con người đã biết thực hiện một phép tính đơn giản nhất là thiết lập sự tương ứng một đổi một giữa các phần tử của hai tập hợp. Mặc dầu ngày nay để biểu thị những sự kiện này ta sử dụng số, nhưng về nguyên tắc, có thể so sánh các tập hợp mà không cần dùng đến số. Nanxen, một nhà bác học người Na Uy sống nhiều năm với người Êkimô, phát hiện rằng họ không có những con số quá 5, nhưng họ có thể so sánh được các tập hợp đối tượng mà số lượng vượt quá 5.

Phép tương ứng một đối một được lặp đi lặp lại nhiểu lần, đó là giai đoạn đầu của phép đếm. Lâu dần con người nhận ra có một cái gì chung cho những tập hợp như vậy, và tất nhiên đưa đến chỗ phải đặt tên cho cái gì chung ấy. Thế là con người đã bắt đầu biết đếm.

Ban đầu con người chỉ đếm được những tập hợp ít phấn tử. Nhiều bộ lạc chỉ đếm được "một" và "hai", còn ba trở lên thì gọi là "nhiều". Điều này còn để lại dấu vết trong ngôn ngữ ngày nay, chẳng hạn, trong tiếng Pháp, chữ "très" (là rất, là nhiều) âm thanh rất gầu chữ "trois" (là ba), trong tiếng Anh, chữ "thrice" có nghĩa là ba lần hay nhiều lần, là biến đổi của chữ "three" là ba. Trong tiếng Nga có nhiều thành ngữ mà chữ "bảy" có nghĩa là nhiều, ví dụ câu tục ngữ Nga "không đợi ai quá bảy lần". Trong tiếng Việt cũng có những thành ngữ mà chữ "ba", "năm", "bảy" có nghĩa là "nhiều", ví dụ: quá rồi ba bận, năm lần bảy lượt.

Để đếm, người ta thường chọn một tập hợp đối tượng xác định nào đó để biểu thị con số. Người ta thường chọn sỏi, đá, que, thắt nút dây (kết thằng), ngón tay, ngón chân, .. Điều này còn để lạ dấu vết trong danh từ chỉ sự tính toán. Ví dụ tiếng La tinh gọi tính toán là "calculus" nghĩa là đếm bằng đá. Do chọn các bộ phân thân thể để biểu thị con số nên các hệ thống đếm tự nhiên và phổ biến của nhiều dân tộc là phép đếm ứng với các ngón tay của một bàn tay (nhóm 5 phần tử lại với nhau) hoặc ứng với các ngón tay của hai bàn tay (nhóm 10 phần tử lại với nhau) hoặc ứng với các ngón tay và các ngón chân (nhóm 20 phần tử lại với nhau).

2.1.2 Các giai đoạn hình thành số tự nhiên

Nhờ kết quả của một quá trình phát triển lâu dài của lịch sử, khái niệm số đã đi từ những vật cụ thể chuyển qua con số. Dãy số tự nhiên đã biết và dần dần được kéo dài ra. Khái niệm trừu tượng về số, xem như là tính chất chung của mọi tập hợp đối tượng hữu hạn tương đương được củng cố dần qua ngôn ngữ, trước hết bằng lời, sau bằng những dấu hiệu, tức là chữ số. Nhận thức được rằng dãy số tự nhiên kéo dài vô hạn là dấu hiệu của một bước tiến khá dài về văn hóa và kiến thức toán học.

Lịch sử hình thành khái niệm số tự nhiên có thể chia thành bốn giai đoạn lớn, tương ứng với bốn giai đoạn liên tiếp của sự phát triển kĩ thuật đếm.

Giai đoạn đầu là việc thiết lập sự tương đương của các tập hợp vật thể khác nhau. Trong giai đoạn này tính chất chung của các tập hợp tương đương được phản ánh đẩy dủ bằng chính bản chất cụ thể của các đối tượng đem so sánh. Con số có tính chất vật lí, con người nhận thức được một cách trực giác.

Giai đoạn thứ hai, tính đếm được của một tập hợp xác định nào đó được biểu thị qua các yếu tố tương đương của một tập hợp khác. Trong giai đoạn này, những tính chất chung của các tập hợp tương đương đã bắt đầu được quan niệm là một cái gì khác với bản chất cụ thể của từng tập hợp. Người ta thường gọi tên con số qua tện vật cụ thể khắc. Ví dụ "một" gọi là "mặt trời", "hai" gọi là "cánh chim", "bốn" gọi là "chân chó", "năm" gọi là "bàn tay"...

Giai đoạn thứ ba khi người ta đã chọn được một tập hợp xác định làm tập hợp mẫu mực về số lượng (Sỏi, đá, que, các bộ phận thân thể,...) thì tính chất chung của các tập hợp tương đương được phân biệt rõ rệt với tập hợp cần đếm.

Giai đoạn thứ tư, tính chất chung của mọi tập hợp tương đương được tách khỏi mọi tập hợp đối tượng cụ thể và xuất hiện dưới dạng thuần tuý toán học, đó là khái niệm trừu tượng về số tự nhiên.

Trong việc hình thành khái niệm số tự nhiên, số 1 và 2 được biết khá sớm, trước các số khác, cần phải được tách ra trong quá trình phân tích các số tự nhiên.

Ngày nay, khi đếm, ta lập sự tương ứng của mỗi đối tượng với một số của dãy số tự nhiên, lấy số tự nhiên làm chuẩn, khái niệm số tự nhiên được định nghĩa một cách chặt chẽ và lôgíc. Định nghĩa này do [1] F. L. G. Frege nêu ra và sau được [2]B. A. W. Russell người Anh phát hiện lại. Về cơ bản thì định nghĩa số tự nhiên do Frege và Russel nêu ra dựa trên khái niệm tương ứng một một của các tập hợp, xem số tự nhiên là bất biến của các tập hợp hữu hạn tương đương. Có thể nhận xét rằng, định nghĩa lôgíc ngày nay về khái niệm số tự nhiên, về bản chất là việc giản ước quá trình lịch sử lâu dài của sự phát triển khái niệm số để hoàn thiện kĩ thuật đếm.

Và xét quá trình lịch sử, [3]F. Engels đã nói "muốn đếm, con người phải biết trừu xuất tất cả các đối tượng để chỉ giữ lại "con số" thôi". Khi con người đã cần dùng đến các số ngày càng lớn thì cac kí hiệu ghi số xuất hiện và phát triển, còn chính các số thì lập thành những hệ thống.

2.2 Xây dựng tập hợp số tự nhiên

2.2.1 Tập hợp tương đương và bản số của tập hợp

Định nghĩa 2.2.1.1. Cho X và Y là hai tập hợp. Ta nói tập hợp X tương đương với tập hợp Y, viết là $X \sim Y$ nếu có một song ánh f từ X lên Y.

Hai tập hợp tương đương còn gọi là hai tập hợp có cùng lực lượng. Như vậy

$$X \sim Y \Leftrightarrow \text{ tồn tại song ánh } f : X \longrightarrow Y$$

Ví dụ 2.2.1.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Cho $X = \{1, 2, 3, 4\}$ và $Y = \{a, b, c, d\}$, $U = \{m, n, p\}$. Ta thấy X và Y có cùng

[1]Friedrich Ludwig Gottlob Frege (8/11/1848 - 26/6/1925) là một nhà triết học, logic học, toán học người Đức. Ông được xem là một trong những nhà sáng lập của ngành logic hiện đại và có những đóng góp quan trọng cho nền tảng của toán học. Ông thường được coi là cha đẻ của triết học phân tích, do những bài về triết học ngôn ngữ và toán học

[2]Bertrand Arthur William Russell (18/5/1872-2/2/1970), là một triết gia, nhà lôgic học, nhà toán học người Anh của thế kỷ 20. Là một tác giả có nhiều tác phẩm, ông còn là người mang triết học đến với đại chúng và là một nhà bình luận đối với nhiều chủ đề đa dạng, từ các vấn đề rất nghiêm túc cho đến những điều trần tục. Năm 1950, Russel được tặng Giải Nobel Văn học, "để ghi nhận các tác phẩm đầy ý nghĩa mà trong đó ông đã đề cao các tư tưởng nhân đạo và tự do về tư tưởng".

[3]Friedrich Engels (28/11/1820 - 5/8/1895) nhà lý luận chính trị, là một triết gia và nhà khoa học người Đức thế kỷ 19,

lực lượng vì có thể thiết lập được một song ánh từ X lên Y, chẳng hạn song ánh f như sau:

$$\begin{aligned} f: \quad X &\longrightarrow Y \\ 1 &\longmapsto a \\ 2 &\longmapsto b \\ 3 &\longmapsto c \\ 4 &\longmapsto d \end{aligned}$$

Tuy vậy U và X không cùng lực lượng vì không có song ánh từ U lên X được. U có cùng lực lượng với tập con $\{1, 2, 3\}$ của X vì chẳng hạn ta có ánh xạ

$$\begin{aligned} g: \quad X &\longrightarrow Y \\ 1 &\longmapsto m \\ 2 &\longmapsto n \\ 3 &\longmapsto p \end{aligned}$$

2/ Giả sử AB và BC là hai đoạn thẳng có độ dài tuỳ ý có chung đầu mút B (A, B, C không thẳng hàng) (hình bên). Kí hiệu [AB], [CB] tương ứng là tập hợp các điểm của hai đoạn thẳng này. Ta chứng minh

$$[AB] \sim [CB]$$

Thật vậy, qua mỗi điểm X nằm trên AB, $X \not\equiv A, B$ ta kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt CB tại X'. Khi đó tương ứng

$$\begin{aligned} f: \quad [AB] &\longrightarrow [CB] \\ A &\longmapsto C \\ B &\longmapsto B \\ X &\longmapsto X' \text{ khi } X \not\equiv A \end{aligned}$$

là một song ánh(bạn đọc tự chứng minh). Cho nên tập điểm trên đoạn AB có cùng lực lượng với tập điểm trên đoạn BC.

Bây giờ nếu ta cho D là một điểm trên BC, thì theo chứng minh trên ta có tập điểm trên đoạn BD có cùng lực lượng với tập điểm trên đoạn BC.

Quan hệ cùng lực lượng giữa các tập hợp có các tính chất sau:

Tính chất 2.2.1.3 (Tính chất phản xạ)**.** *Với mọi tập hợp A ta luôn có $A \sim A$.*

Chứng minh. Thật vậy, với mọi tập A luôn có một song ánh từ A lên A chẳng hạn đó là ánh xạ đồng nhất. □

Tính chất 2.2.1.4 (Tính chất đối xứng)**.** *Với mọi tập hợp A và B, nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu $A \sim B$ thì tồn tại một song ánh $f : A \longrightarrow B$ khi đó ánh xạ ngược $f^{-1} : A \longrightarrow B$ cũng là một song ánh, vậy $B \sim A$. □

Tính chất 2.2.1.5 (Tính chất bắc cầu)**.** *Với mọi tập hợp A, B, C nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì $A \sim C$.*

Chứng minh. Thật vậy, nếu $A \sim B$ và $B \sim C$ thì tồn tại các song ánh $f : A \longrightarrow B$ và $g : B \longrightarrow C$, khi đó ánh xạ tích $g \circ f : A \longrightarrow C$ là một song ánh. Vậy $A \sim C$. □

Như vậy quan hệ cùng lực lượng là một quan hệ tương đương, do đó ta có thể phân lớp các tập hợp: Các tập hợp có cùng lực lượng thuộc cùng một lớp.

Vì thế ta có thể dùng mỗi lớp để xác định thuộc tính đặc trưng về lực lượng của một tập hợp.

Định nghĩa 2.2.1.6. Thuộc tính đặc trưng xác định mỗi lớp gọi là bản số của tập hợp.

Các tập hợp có cùng bản số khi và chỉ khi chúng cùng lực lượng (bản số còn được gọi là lực lượng). Bản số của tập hợp A kí hiệu là Card(A). Ta có thể viết

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B) \Longleftrightarrow A \sim B$$

Như vậy ta có thể hiểu bản số như là một tính chất đặc trưng phản ánh mặt "số lượng" của tập hợp (đối với các tập hợp hữu hạn, khái niệm bản số chính là khái niệm số lượng thông thường), hai tập hợp tương đương thì có cùng bản số và hai tập hợp có cùng bản số thì tương đương.

2.2.2 Tập hợp hữu hạn và tập hợp vô hạn

Trong các phần trên chúng ta đã biết rằng có những tập hợp tương đương với một tập con thực sự của nó. Đó là trường hợp của tập các điểm trên một đoạn thẳng, tập hợp số tự nhiên ... Các tập như thế ta gọi là tập vô hạn.

Định nghĩa 2.2.2.1. Một tập được gọi là vô hạn nếu nó tương đương (có cùng lực lượng) với một bộ phận thực sự của nó.

Tập hợp không phải là vô hạn thì gọi là tập hữu hạn. Nói cách khác, tập hợp hữu hạn là tập hợp không tương đương với bất kì một bộ phận thực sự nào của nó.

Ví dụ 2.2.2.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Tập $\emptyset$ là một tập hữu hạn, vì tập $\emptyset$ không có một bộ phận thực sự nào.

2/ Tập đơn tử $\{x\}$ là một tập hữu hạn vì nó chỉ có một bộ phận thực sự duy nhất là $\emptyset$, nhưng dễ thấy tập hợp $\{x\}$ không tương đương với tập $\emptyset$.

3/ Tập các điểm trên một đoạn thẳng là tập vô hạn.

Để thuận lợi cho việc xây dựng các số tự nhiên sau này ta chấp nhận mà không chứng minh một số tính chất như dưới đây.

Tính chất 2.2.2.3.

(1) *Tập hợp tương đương với một tập hữu hạn là hữu hạn.*

(2) *Tập hợp con của một tập hữu hạn là hữu hạn.*

(3) *Hợp của hai tập hữu hạn là hữu hạn.*

(4) *Tích Đề các của hai tập hữu hạn là một tập hữu hạn.*

2.2.3 Định nghĩa số tự nhiên

Định nghĩa 2.2.3.1 (Số tự nhiên)**.** Bản số của một tập hợp hữu hạn được gọi là một số tự nhiên.

Các số tự nhiên cũng lập thành một tập hợp. Tập hợp các số tự nhiên được kí hiệu là $\mathbb{N}$.

Nhận xét:

Nếu a là số tự nhiên ($a \in \mathbb{N}$) thì tồn tại một tập hợp hữu hạn A sao cho $a = \mathrm{Card}(A)$.

Ví dụ 2.2.3.2. Ta xem xét các ví dụ dưới đây.

1/ Ta biết $\emptyset$ là một tập hữu hạn, do đó $\mathrm{Card}(\emptyset)$ là một số tự nhiên. Ta kí hiệu $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$ và gọi nó là số không.

2/ Tập đơn tử $\{x\}$ là một tập hữu hạn nên $\mathrm{Card}(\{x\})$ là một số tự nhiên. Ta kí hiệu $\mathrm{Card}(\{x\}) = 1$ và gọi nó là số một.

Rõ ràng $1 \neq 0$ vì tập $\emptyset$ không tương đương với tập $\{x\}$.

2.3 Quan hệ thứ tự trên tập hợp các số tự nhiên

2.3.1 Định nghĩa và tính chất

Trong mục 1, **Ví dụ 2.2.1.2**, ta thấy $U = \{m, n, p\}$ tương đương với một bộ phận thực sự của $X = \{1, 2, 3, 4\}$ là $\{1, 2, 3\}$. Từ những ví dụ cụ thể này ta dễ dàng nhận ra một điều là tập A tương đương với một bộ phận của tập B khi và chỉ khi có một đơn ánh từ A vào B.

Nếu f là đơn ánh từ A vào B thì $A \sim f(A) \subset B$.

Trong khi nghiên cứu về tập hợp nhà toán học Cantor đã phát biểu được định lý dưới đây, ta nêu lên không chứng minh.

Định lý 2.3.1.1 (Định lý Cantor). *Nếu X và Y là hai tập hợp bất kỳ thì:*

(1) *Hoặc X tương đương với một bộ phận của Y hoặc Y tương đương với một bộ phận của X.*

(2) *Nếu X tương đương với một bộ phận của Y và Y tương đương với một bộ phận của X thì X tương đương với Y*

Nhận xét:

Sử dụng ngôn ngữ ánh xạ thì định lý trên còn được phát biểu dưới dạng tương đương sau đây:

Nếu X và Y là hai tập hợp bất kì thì:

(1) Trong các ánh xạ từ X đến Y và từ Y đến X bao giờ cũng có một đơn ánh.

(2) Nếu có một đơn ánh từ X đến Y và một đơn ánh từ Y đến X thì sẽ có một song ánh từ X đến Y.

Dựa trên định lý Cantor, ta sẽ xây dựng quan hệ trên tập số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Định nghĩa 2.3.1.2. Giả sử x và y là hai số tự nhiên và X; Y là hai tập hợp hữu hạn sao cho $x = \text{Card}(X), y = \text{Card}(Y)$.

Ta nói x nhỏ hơn hay bằng y, kí hiệu $x \leq y$, khi và chỉ khi X tương đương với một bộ phận của Y

Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ thì ta viết $x < y$ và đọc là x thực sự nhỏ hơn y (hay x nhỏ hơn y.

Khi $x \leq y$ ta còn viết $y \geq x$ và đọc là y lớn hơn hoặc bằng x. Khi $x < y$ ta còn viết $y > x$ và đọc là y lớn hơn x

Ví dụ: $0 < 1$ và hơn thế nữa $0 \leq x$ với mọi $x \in \mathbb{N}$ vì $\emptyset$ là tập con của mọi bộ phận của $\mathbb{N}$.

Nhận xét:

(1) Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc lựa chọn X, Y nghĩa là: Nếu X_1, Y_1 là những tập hợp mà $x = \text{Card}(X_1), y = \text{Card}(Y_1)$ thì từ chỗ X tương đương với một bộ phận của Y ta cũng có X_1 tương đương với một bộ phận của Y_1.

Thật vậy, ta có:

$X \sim X_1$ nên có song ánh $g : X_1 \longrightarrow X$, $Y \sim Y_1$ nên có song ánh $h : Y \longrightarrow Y_1$ và X tương đương với một bộ phận của Y nên có đơn ánh $f : X \longrightarrow Y$. Ta thấy rằng ánh xạ $hfg : X_1 \longrightarrow Y_1$ là một đơn ánh; đơn ánh này chứng tỏ X_1 tương đương với một bộ phận của Y_1.

(2) Khi X tương đương với một bộ phận Y' của Y ta củng có $\text{Card}(Y') = x$, do đó

theo nhận xét 1/ ta có thể coi $x \leq y$ khi và chỉ khi $X \subset Y$. Vì vậy định nghĩa trên có thể phát biểu như sau:

Cho $x, y \in \mathbb{N}; Y$ là một tập hợp mà $\text{Card}(Y) = y$. Ta nói $x \leq y$ khi và chỉ khi có $X \subset Y$ sao cho $\text{Card}(X) = x$.

Ta sẽ chứng minh rằng quan hệ $\leq$ vừa xây dựng trong $\mathbb{N}$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trong $\mathbb{N}$. Đó là nội dung của định lý sau:

Định lý 2.3.1.3. *Quan hệ $\leq$ vừa định nghĩa là một quan hệ thứ tự toàn phần trong* $\mathbb{N}$.

Chứng minh. Trước hết ta phải chứng minh, quan hệ "$\leq$" là một quan hệ thứ tự trong $\mathbb{N}$; nghĩa là ta phải chứng minh quan hệ này thỏa mãn 3 tính chất: phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Thật vậy:

(1) Tính phản xạ: Giả sử $x = \text{Card}(X)$, vì với mọi tập X ta luôn có $X \subset X$ nên $x \leq x$.

(2) Tính phản xứng: Giả sử $x = \text{Card}(X)$ và $y = \text{Card}(Y)$. Nếu ta có đồng thời $x \leq y$ và $y \leq x$ thì điều này có nghĩa X tương đương với một bộ phận của Y và Y tương đương với một bộ phận của X. Theo định lý Cantor thì $X \sim Y$ và do đó $x = y$.

(3) Tính bắc cầu: Giả sử $x = \text{Card}(X)$, $y = \text{Card}(Y)$, $z = \text{Card}(Z)$ mà $x \leq y, y \leq z$.

Ta có $x \leq y$ tức là X tương đương với một bộ phận của Y hay có một đơn ánh $f : X \longrightarrow Y$; $y \leq z$ tức là có một đơn ánh $g : Y \longrightarrow Z$.

Ánh xạ tích $gf : Y \longrightarrow Z$ cũng là một đơn ánh, đơn ánh này chứng tỏ X tương đương với một bộ phận của Z hay $x \leq z$.

Vậy quan hệ "$\leq$" là một quan hệ thứ tự trong $\mathbb{N}$. Bây giờ ta chứng minh quan hệ thứ tự đó là quan hệ quan hệ thứ tự toàn phần trong $\mathbb{N}$.

Giả sử $x, y \in \mathbb{N}$ và $x = \text{Card}(X)$, $y = \text{Card}(Y)$, Theo định lý Cantor thì hoặc X tương đương với một bộ phận của Y hoặc ngược lại Y tương đương với một bộ phận của X tức là ta có hoặc $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Như vậy mọi cặp số tự nhiên đều so sánh được theo quan hệ thứ tự $\leq$ nói cách khác quan hệ này là một quan hệ thứ tự toàn phần trong $\mathbb{N}$. Định lý đã được chứng minh xong. □

2.3.2 Số liền trước, số liền sau và tính rời rạc của $\mathbb{N}$

Định nghĩa 2.3.2.1. Cho x và y là hai số tự nhiên với $\leq$. Gọi Y là tập hữu hạn mà $\text{Card}(Y) = y$. Như đã nhận xét ở trên, vì $\leq$ nên có tập $X \subset Y$ sao cho $\text{Card}(X) = x$.

Ta gọi y là số liền sau của số x nếu và chỉ nếu $\text{Card}(Y - X) = 1$ hay nói cách khác nếu và chỉ nếu tập $Y - X$ là tập đơn tử.

Nếu y là số liền sau của x thì ta củng nói x là số liền trước của y. Số liền sau của x được kí hiệu là x'.

Khi x là số liền sau của y hoặc y là số liền sau của x thì ta nói x, y là hai số liền nhau.

Nhận xét:

(1) $x < x', \forall x \in \mathbb{N}$.

(2) Số một là số liền sau số không.

Tính chất 2.3.2.2. *Mọi số tự nhiên x đều có một số liền sau.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $x = \text{Card}(X)$, khi đó tập $\{X\}$ là tập đơn tử và rõ ràng $\{X\}$ không phải là phần tử của X. Đặt $Y = X \cup \{X\}$, khi đó Y là tập hữu hạn và ta có: $\text{Card}(Y - X) = \text{Card}\{X\} = 1$. Vậy số tự nhiên $y = \text{Card}(Y)$ là số liền sau của x. □

Nhận xét:

Người ta còn chứng minh được tính duy nhất của số liền sau: Mỗi số tự nhiên x đều có một số liền sau duy nhất.

Tính chất 2.3.2.3. *Số 0 không phải là số liền sau của bất kỳ số tự nhiên nào.*

Chứng minh. Ta thấy vì $0 = \text{Card}\ \emptyset$ và $\emptyset$ không có một bộ phận thực sự nào, do đó số 0 không có số liền trước. □

Tính chất 2.3.2.4. *Mọi số tự nhiên $x \neq 0$ đều là số liền sau của một số tự nhiên.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử x là số tự nhiên khác không và $\text{Card}\{X\} = x$. Thế thì $X \neq \emptyset$ và do đó tồn tại $a \in X$. Khi đó $Y = X - \{a\} \subset X$ và $\text{Card}(X - Y) = \text{Card}\{a\} = 1$. Vậy x là số tự nhiên liền sau của $y = \text{Card}(Y)$.

Người ta còn chứng minh được tính duy nhất của số liền trước: Mỗi số tự nhiên $x \neq 0$ đều là số liền sau của một số tự nhiên duy nhất. □

Tính chất 2.3.2.5. *Giữa hai số tự nhiên liền nhau x và x' không có số tự nhiên nào khác.*

Chứng minh. Thật vậy, giả sử có số tự nhiên y sao cho $x < y < x'$, khi đó tồn tại các tập hữu hạn X, Y, X' sao cho $x = \text{Card}(X)$, $y = \text{Card}(Y)$, $x' = \text{Card}(X')$ trong đó $X \subset Y \subset X'$.

Theo định nghĩa số liền nhau thì ta có $\text{Card}(X' - X) = 1$ hay X'-X là tập đơn tử, nhưng do $Y - X \subset X' - X$ nên ta phải có hoặc $Y - X = \emptyset$ hoặc $Y - X = X' - X$, điều này chứng tỏ hoặc $Y = X$ hoặc $Y = X'$.

Điều này mâu thuẫn với điều giả sử. Vậy không thể có số tự nhiên y ở giữa hai số tự nhiên liền nhau x và x'.

Tính chất này còn có thể phát biểu dưới dạng khác: Với $x, y \in \mathbb{N}$, nếu $x < y$ thì $x' \leq y$. □

Định nghĩa 2.3.2.6. Tập $\mathbb{N}$ với quan hệ thứ tự có tính chất trên được gọi là một tập sắp thứ tự rời rạc.

2.3.3 Tính vô hạn của tập các số tự nhiên

Với khái niệm số liền sau và các tính chất đã trình bày trên, ta có thể hình dung được toàn bộ tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$

Trước hết $x = \text{Card}\ \emptyset$ là một số tự nhiên và số 0 không đứng sau bất kì số tự nhiên nào. Số $1 = \text{Card}\{x\}$ là số liền sau duy nhất của số 0 và giữa số 0 và số 1 không có số tự nhiên nào khác. Kí hiệu $2 = 1', 3 = 2'...$ thì tập $\mathbb{N}$ được viết thành một dãy như sau: $0, 1, 2, 3, ...$

Biểu diễn các số tự nhiên trên nửa đường thẳng có định hướng ta được một tia số

Có bao nhiêu số tự nhiên? Ta thấy cứ mỗi số tự nhiên a lại có một số liền sau nó. Số liền sau này lại có một số liền sau nó nữa, ... và như vậy quá trình "đếm" các số tự nhiên sẽ kéo dài tới vô tận. Đó là sự hình dung trực giác về tính vô hạn của dãy số tự nhiên.

Định lý 2.3.3.1. *Tập hợp các số tự nhiên là một tập vô hạn.*

Chứng minh. Đặt $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, rõ ràng $\mathbb{N}^*$ là một bộ phận thực sự của $\mathbb{N}$. Xét tương ứng

$$f: \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$$

$$n \longmapsto f(n) = n'$$

Dễ thấy f là một ánh xạ vì mỗi số tự nhiên có một số liền sau duy nhất n' và $n' \neq 0$. Mặt khác, mỗi số tự nhiên khác không đều là số liền sau của một số tự nhiên duy nhất, do đó f vừa là một đơn ánh, vừa là một toàn ánh. Vậy f là một song ánh và ta có $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^*$ nghĩa là $\mathbb{N}$ là tập vô hạn. □

Tính chất 2.3.3.2. *(Tiên đề quy nạp) Nếu M là một bộ phận của tập hợp số tự nhiên thỏa mãn hai điều kiện:*

(1) $0 \in M$

(2) *Nếu $x \in M$ thì $x' \in M$*

thì $M \equiv \mathbb{N}$.

Tính chất 2.3.3.3. *Mọi bộ phận khác rỗng các số tự nhiên đều có số nhỏ nhất.*

Chứng minh. Giả sử $M \subset N, M \neq \emptyset$. Ta đi chứng minh rằng M có số nhỏ nhất, nghĩa là có $m \in M$ mà $m \leq x$ với mọi $x \in M$.

Ta xét $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq x, \forall x \in M\}$

Rõ ràng $0 \in A$ và $A \neq \mathbb{N}$ vì dễ thấy nếu $x \in M$ thì $x' \notin A$. Do $A \neq \mathbb{N}$ nên có số $m \in A$ mà $m' \notin A$. Ta sẽ chứng minh m cũng thuộc M, thật vậy nếu $m \notin M$ thì do $m \leq x, \forall x \in M$ nên $m < x, \forall x \in M$, điều này dẫn đến $m' \leq x, \forall x \in M$. Do đó $m' \in A$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy $m \in M$, nghĩa là m là số nhỏ nhất của tập M. □

2.4 Các cách tiếp cận khái niệm số tự nhiên

Một trong những khái niệm toán học mà học sinh tiểu học được tiếp cận đầu tiên là khái niệm số tự nhiên. Số tự nhiên có vị trí, vai trò quan trọng trong các mạch kiến thức toán ở tiểu học, đồng thời nó là cơ sở để mở rộng các loại số khác như phân số, số thập phân, số nguyên.

2.4.1 Cách tiếp cận dựa trên đo lường

Như đã đề cập ở **Mục 2.1**, số tự nhiên ra đời là do nhu cầu nhận biết về số lượng của sự vật. Chẳng hạn: người ta cần biết được số lượng của đàn thú để tổ chức cuộc đi săn, cần biết được số lượng của bên địch để tổ chức chiến đấu. Tình huống xuất hiện của số tự nhiên là nhu cầu cần đếm các đồ vật, đã có ngay từ các thời kì tiền sử. Điều này không có nghĩa là người nguyên thủy không đếm được số lượng đồ vật của một tập hợp cụ thể, thí dụ số lượng người tham gia một buổi săn bắt, số lượng ao hồ có thể bắt cá. Trong cách tiếp cận dựa trên đo lường, số tự nhiên có liên quan rất nhiều đến số lượng các vật thể của một toàn thể và số các đơn vị đo lường. Người Hy Lạp xem số như là đo lường mọi thứ. Họ đồng nhất đo lường với đếm.

2.4.2 Cách tiếp cận quan hệ thứ tự

Cách tiếp cận thứ tự đã có từ thời Hy Lạp, nó tồn tại ngầm ẩn trong các tác phẩm của các nhà toán học. Một phần tác phẩm Elements của Euclid (được viết trong suốt thế kỷ thứ III TCN) giả định trước một quan điểm quan hệ về số. Cũng giống như vậy, các nhà triết học nguyên tử Hy Lạp, [4] Leucippus và Democritus đã nghĩ về số theo cách này. Tuy nhiên, định nghĩa về số theo quan hệ thứ tự lại thuộc về hai nhà toán học: Dedekind và Peano.

Cách tiếp cận "thứ tự" của [5]Dedekind

Chúng ta cũng cần quan tâm đến Dedekind bởi vì ông là nhà toán học đầu tiên đề nghị một lý thuyết quan hệ hoàn chỉnh về số. Lý thuyết được trình bày trong "Was sind und was sollen die zahlen" (Bản chất và ý nghĩa của số).

[4]Leucippus (500 TCN-440 TCN) là nhà triết học người Hy Lạp. Cuộc đời và sự nghiệp của Leucippus không được biết đến đầy đủ vì các dị bản của ông hầu hết đều không được lưu giữ. Tất cả những gì chúng ta biết đều thông qua Democritus, người học trò xuất sắc của Leucippus, và những học giả đương thời. Democritus (460 - 370 BC) là học trò của Leucippus đã kế thừa và phát triển thuyết nguyên tử luận trên một phương diện mới. Theo ông vũ trụ được cấu thành bởi hai thực thể đầu tiên là nguyên tử và chân không. Hai thực thể này là căn nguyên của các sự vật hiện tượng.

[5]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) là nhà toán học người Đức. Ông đã công sáng tạo lý thuyết các iđêan trong đại số học và tiên đề hóa các công trình số học của mình. Ông cũng có những nghiên cứu về xác suất, đặc biệt nhất là công trình toán học nổi tiếng lát cắt Dedekind.

Bởi vì, số thứ tự là các số hạng chung của các cấp số, cho nên Dedekind (1887) đã đồng nhất số tự nhiên với số thứ tự. "Những phần tử này được gọi là số tự nhiên hay số thứ tự hay đơn giản là số". Nguyên nhân số chỉ phụ thuộc duy nhất vào các tính chất thứ tự của số tự nhiên dẫn ông đến kết luận rằng số thứ tự cơ bản hơn bản số. Đây là một điều quan trọng về lý thuyết của Dedekind. Ông đề nghị rằng các số tự nhiên là gì đi nữa, trước tiên chúng phải là một cấp số.

Điểm mấu chốt trong lý thuyết của Dedekind là: đồng nhất số tự nhiên với số thứ tự. Khái niệm số tự nhiên xuất hiện gắn liền với số thứ tự và cấp số. Do đó, ông chỉ tiếp cận số tự nhiên trên đặc trưng tự số (tính sắp thứ tự tốt của dãy các số tự nhiên) của nó mà bỏ qua hẳn đặc trưng bản số.

Cách tiếp cận "tiên đề " của [6]*Peano*

Mặc dù, nói chung các lý thuyết của Dedekind và Peano là không khác nhau, nhưng cần chỉ ra rằng lý thuyết của Peano được xem xét rộng rãi hơn. Lý thuyết của Peano xuất hiện đầu tiên vào năm 1899 trong quyển "Formulaire de mathématiques". Lý thuyết của Peano có 3 khái niệm cơ bản, trong đó các khái niệm không định nghĩa của Peano là "1", "số tự nhiên", "số liền sau". Các tiên đề của Peano có thể phát biểu như sau:

(1) 1 là số tự nhiên.

(2) Nếu x là số tự nhiên thì số liền sau của x cũng là số tự nhiên.

(3) Các số tự nhiên khác nhau có các số liền sau khác nhau.

(4) 1 không là số liền sau của bất kỳ số tự nhiên nào.

(5) Nếu 1 và số liền sau của mỗi số tự nhiên có tính chất P, mọi số tự nhiên đều có tính chất P.

Cách tiếp cận số tự nhiên của Peano theo phương pháp tiên đề. Ông đánh dấu bước ngoặt thứ hai sau Dedekind về cách tiếp cận số tự nhiên theo quan điểm thứ tự. Theo phương pháp tiên đề như trên, các số tự nhiên có thể được định nghĩa dựa vào số liền trước nó. Ở đây, số 1 đóng vai trò khái niệm cơ bản nên không được định nghĩa. Số 0 không được Peano chọn làm khái niệm cơ bản trong các tiên đề ông đưa ra. Do đó, các số tự nhiên (ngoại trừ số 0) có thể được tiếp cận theo tiến trình sau:

$$\boxed{\text{Số tự nhiên liền trước}} \xrightarrow{\text{Thêm 1 đơn vị vào số liền trước}} \boxed{\text{Số tự nhiên liền sau}}$$

[6]Giuseppe Peano (27/8/1858 - 20/4/1932) là nhà toán học và logic học người ý. Trong số học ông được biết đến là người đưa ra hệ tiên đề cho dãy số tự nhiên, ngày nay mang tên hệ tiên đề Peano được đề xuất từ năm 1891. Peano cũng là người đi tiên phong trong việc truyền bá logic ký hiệu.

2.5 Các phép toán trên $\mathbb{N}$

2.5.1 Phép cộng và phép nhân

Định nghĩa 2.5.1.1. Cho a, b là hai số tự nhiên; A, B là hai tập hữu hạn sao cho $a =$Card(A), $b =$ Card(B), $A \cap B = \emptyset$. Ta định nghĩa:

$$a + b := \text{Card}(A \cup B)$$

$$a.b := \text{Card}(A \times B)$$

Như vậy $a + b, a.b$ là các số tự nhiên, chúng lần lượt được gọi là tổng, tích của hai số tự nhiên a và b.

Lưu ý:

1/ Trong các định nghĩa trên ta đã sử dụng mà không chứng minh tính chất sau đây của tập hữu hạn: hợp và tích Đề các của hai tập hữu hạn là một tập hữu hạn.

2/ Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn các tập hợp A, B. Tức là nếu A, B, A', B' là những tập hợp hữu hạn sao cho $a =$ Card$(A) =$ Card(A'), $b =$ Card$(B) =$ Card(B'), $A \cap B = \emptyset$ thì

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A' \cup B')$$

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A' \times B')$$

Tính chất 2.5.1.2 (Tính chất giao hoán)**.** *Với mọi số tự nhiên a, b ta có:*

$$a + b = b + a;$$

$$a.b = b.a$$

Thật vậy, vì $A \cup B = B \cup A$ nên ta có ngay $a + b = b + a$. Mặt khác dễ thấy ánh xạ

$$g : A \times B \longrightarrow B \times A$$

$$(x, y) \longmapsto (y, x)$$

là một song ánh. Vậy $A \times B \sim B \times A$, do đó

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(B \times A)$$

Suy ra $a.b = b.a$.

Tính chất 2.5.1.3 (Tính chất kết hợp)**.** *Với mọi số tự nhiên a, b, c ta có:*

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$

$$a.(b.c) = (a.b).c.$$

Bạn đọc tự chứng minh tính chất này. Dựa vào tính chất này người ta định nghĩa tổng và tích của ba số tự nhiên a, b, c như sau: $a + b + c = (a + b) + c, a.b.c = (a.b).c$.

Tổng quát ta cũng có khái niệm và kết quả tương tự về tổng và tích nhiều số tự nhiên: $a_1 + a_2 + ... + a_n; a_1.a_2...a_n$. Trong trường đặc biệt $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$ ta có tích $a.a....a$ (n lần), tích này gọi là luỹ thừa bậc n của a và kí hiệu là a^n.

Tính chất 2.5.1.4 (Phần tử trung lập). *Với mọi số tự nhiên a ta có:*

$$a + 0 = 0 + a = a;$$

$$a.1 = 1.a = a.$$

Như vậy số 0 là phần tử trung lập của phép cộng, số 1 là phần tử trung lập của phép nhân.

Tính chất 2.5.1.5 (Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng). *Với mọi số tự nhiên a, b, c ta có:*

$$a(b + c) = a.b + a.c;$$

$$(b + c).a = b.a + c.a$$

Thật vậy, trong lý thuyết tập hợp chúng ta có các kết quả:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$$

Từ đó suy ra tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng.

Tính chất 2.5.1.6 (Luật giản ước). *Với mọi số tự nhiên a, b, c từ đẳng thức $a + c = b + c$ suy ra $a = b$. Với mọi số tự nhiên a, b, c từ đẳng thức $a.c = b.c$ suy ra $a = b$.*

Bạn đọc tự chứng minh tính chất trên.

Tính chất 2.5.1.7. *Với mọi số tự nhiên a, b, c ta luôn có*

$$a + 1 = a', a.0 = 0$$

Tính chất 2.5.1.8. *Phép cộng và phép nhân với quan hệ thứ tự $\leq$: Với mọi số tự nhiên a, b, c ta có*

i/ $a \leq a + b$.

ii/ Nếu $a \leq b$ thì $a + c \leq b + c$ và ngược lại.

iii/ Nếu $b \neq 0$ thì $a \leq a.b$.

iv/ Nếu $c \neq 0$ thì $a \leq b$ kéo theo $ac \leq bc$ và ngược lại.

Bạn đọc tự chứng minh.

2.5.2 Phép trừ

Định lý 2.5.2.1. *Với mọi số tự nhiên a, b nếu $a \leq b$ thì tồn tại duy nhất số tự nhiên c sao cho $a + c = b$.*

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc. □

Định nghĩa 2.5.2.2. Cho hai số tự nhiên a, b tuỳ ý. Nếu có số tự nhiên x sao cho $b+x = a$ thì ta nói rằng có phép trừ a cho b và x gọi là hiệu của a và b, kí hiệu $x = a - b$ (đọc là a trừ b).

Ta thấy ngay rằng trong tập hợp số tự nhiên không phải lúc nào cũng thực hiện được phép trừ. Chẳng hạn lấy $a = 2$, $b = 3$ thì không thể thực hiện được phép trừ 2 cho 3.

Định lý trên cho ta thấy phép trừ $a - b$ thực hiện được khi và chỉ khi $a \geq b$, việc chứng minh điều này xin dành cho độc giả.

Tính chất 2.5.2.3 (Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép trừ)**.** *Với mọi số tự nhiên a, b, c mà $c \leq b$ ta có:*

i/ $a(b - c) = a.b - a.c$;

ii/ $(b - c).a = b.a - c.a$

Việc chứng minh hai tính chất trên xin dành cho độc giả.

2.5.3 Phép chia

Định nghĩa 2.5.3.1. Cho hai số tự nhiên $a, b, b \neq 0$. Nếu có số tự nhiên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b, kí hiệu $a \div b$. Trong trường hợp này ta cũng nói b chia hết a, kí hiệu $b \mid a$

Nếu $a \div b$ thì ta nói a là bội của b hay b là ước của a. Theo luật giản ước của phép nhân, số q (nếu có), được xác định duy nhất và được gọi là thương của a và b. Ta kí hiệu

$$q = a : b \text{ hay } q = \frac{a}{b}$$

Quy tắc tìm thương của hai số gọi là phép chia.

Tính chất 2.5.3.2.

i/ Số 0 chia hết cho mọi số tự nhiên khác 0.

ii/ Mọi số tự nhiên đều chia hết cho 1.

iii/ Quan hệ chia hết là quan hệ thứ tự trong $\mathbb{N}^*$

iv/ Nếu $a_1, a_2, ...a_n$ là những số tự nhiên chia hết cho b và $x_1, x_2, ..x_n$ là những số tự nhiên tuỳ ý, thì $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ cũng chia hết cho b.

2.6 Lý thuyết chia hết trên tập các số tự nhiên

2.6.1 Quan hệ chia hết

Định nghĩa 2.6.1.1. Cho hai số tự nhiên $a, b, b \neq 0$. Nếu có số tự nhiên q sao cho $a = bq$ thì ta nói a chia hết cho b, kí hiệu $a \div b$. Trong trường hợp này ta cũng nói b chia hết a, kí hiệu $b \mid a$. Lúc đó ta nói b là một ước của a và a là bội của b. Ta kí hiệu

$$q = a : b \text{ hay } q = \frac{a}{b}$$

Tính chất 2.6.1.2.

Tính chất 1: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*, ab \mid c \Rightarrow a \mid c$ *và* $b \mid c$

Tính chất 2: $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}^*, a \mid b$ *và* $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$.

Tính chất 3: $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*, a \mid b \Rightarrow a \mid bc$.

Tính chất 4: Cho $a_1, a_2, ... a_n \in \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn* $a \mid a_1, a \mid a_2, ..., a \mid a_n$ *khi đó* $a \mid a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Tính chất 5: Cho $a_1, a_2, ... a_n \in \mathbb{N}^*$ *thỏa mãn* $a \mid a_1 + a_2 + ... + a_n$ *và* $a \mid a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}$ *khi đó* $a \mid a_n$.

Việc chứng minh các tính chất trên xin dành cho độc giả.

2.6.2 Phép chia có dư

Quan hệ chia hết trong tập $\mathbb{N}^*$ không phải là quan hệ thứ tự toàn phần trong $\mathbb{N}^*$, tức là với hai số tự nhiên bất kì a, b nói chung không nhất thiết có a chia hết cho b hoặc b chia hết cho a. Tuy nhiên ta có định lý sau

Định lý 2.6.2.1. *Với mọi cặp số tự nhiên* $a, b, b \neq 0$ *bao giờ cũng tồn tại duy nhất cặp số tự nhiên* q *và* r *sao cho*

$$a = bq + r, 0 \leq r < b$$

Chứng minh. Độc giả xem chứng minh ở S[1] □

Định nghĩa 2.6.2.2. Số q và r thỏa mãn đẳng thức $a = bq + r, 0 \leq r < b$ được gọi tương ứng là thương hụt (thương gần đúng) và dư trong phép chia có dư của a cho b.

Việc tìm q và r gọi là thực hiện phép chia có dư của a cho b.

Chú ý: Khi $r = 0$ thì phép chia có dư trở thành phép chia hết. Như vậy phép chia hết là trường hợp đặc biệt của phép chia có dư.

2.6.3 Số nguyên tố

Định nghĩa 2.6.3.1. Số tự nhiên lớn hơn 1 không có ước số tự nhiên nào khác ngoài 1 và chính nó gọi là số nguyên tố.

Số tự nhiên lớn hơn 1 không phải là số nguyên tố gọi là hợp số.

Ví dụ: 2, 3, 5 là những số nguyên tố; 6, 9, 15 là những hợp số.

***Nhận xét* 2.6.3.2.**

a/ Với khái niệm số nguyên tố và hợp số vừa đưa ra, tập hợp các số tự nhiên gồm ba bộ phận:

- Số 0 và số 1
- Các số nguyên tố
- Các hợp số.

b/ Từ định nghĩa suy ra số tự nhiên $n > 1$ là hợp số nếu n có thể viết thành tích của hai số tự nhiên lớn hơn 1:

$$n = p.q \quad p > 1, q > 1$$

Định lý 2.6.3.3. *Ước số nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên lớn hơn 1 là một số nguyên tố.*

Chứng minh. Độc giả xem chứng minh ở S[1], trang 246. □

***Nhận xét* 2.6.3.4.** Định lý trên chứng tỏ rằng mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có ít nhất một ước nguyên tố.

Định lý 2.6.3.5. *Có vô số số nguyên tố.*

Chứng minh. Độc giả xem chứng minh ở S[1], trang 246. □

2.4.3.6 Sàng Ơratosten. Xem S[1].

2.6.4 Ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất trên $\mathbb{N}$

Định nghĩa 2.6.4.1.

1/ *Ước chung:* Cho a, b là hai số tự nhiên, khi đó số tự nhiên d vừa là ước của a, vừa là ước của b được gọi là một ước chung của a và b.

Ví dụ: Các số 1, 2, 3 là các ước chung của 4 và 6.

2/ *Tập hợp các ước chung:*

- Ta kí hiệu Ư(a), là tập các ước chung của a, khi đó với mỗi số tự nhiên a thì Ư$(a) \neq \emptyset$ vì ta luôn có $1 \in$ Ư(a).

- Nếu a là số tự nhiên khác 0 thì tập hợp Ư(a) bị chặn trên, vì hiển nhiên nếu $b \mid a$ thì $b \leq a$.

- Tập hợp các ước chung của a và b chính là Ư$(a) \cap$ Ư(b). Nếu a và b là hai số tự nhiên không đồng thời bằng 0 thì tập các ước chung Ư$(a) \cap$ Ư(b) của chúng là một bộ phận khác rỗng và bị chặn trên, nên Ư$(a) \cap$ Ư(b) có số lớn nhất.

3/ *Định nghĩa:* Số lớn nhất trong tập hợp các ước chung của a và b được gọi là ước chung lớn nhất của chúng và kí hiệu là ƯCLN(a, b).

Ví dụ: ƯCLN$(4, 10) = 2$.

Chú ý: Với mọi cặp số tự nhiên a, b không đồng thời bằng 0 luôn tồn tại ƯCLN(a, b).

4/ *Thuật toán Ơclit:* Chúng ta đã đưa ra khái niệm ước chung lớn nhất (ƯCLN) và chứng tỏ sự tồn tại ƯCLN của hai số tự nhiên khác 0. Trong phần này ta trình bày một thuật toán để tìm ƯCLN của hai số. Trước hết ta có hai bổ đề sau:

i/ *Bổ đề 1: Nếu $b \mid a$ thì ƯCLN$(a, b) = b$*

ii/ *Bổ đề 2: Nếu ta có $a = bq + c$ thì $b \mid a$ thì ƯCLN$(a, b) =$ƯCLN(b, c)*

Độc giả xem chứng minh hai bổ đề này ở S[1].

Theo hai bổ đề trên, ta có thể tiến hành việc tìm ƯCLN của hai số a và b bằng cách như sau:

Giả sử $a > b$, ta thực hiện phép chia có dư của a cho b. Khi đó có hai trường hợp xảy ra:

- Nếu a chia hết cho b thì ƯCLN$(a, b) = b$ theo bổ đề 1.

- Nếu a không chia hết cho b, ta có:

$$a = bq_0 + r_1 \quad 0 < r_1 < b$$

Khi đó theo bổ đề 2 ta có ƯCLN$(a, b) =$ƯCLN(b, r_1). Như vậy việc tìm ƯCLN(a, b) đưa về việc tìm ƯCLN(b, r_1). Thực hiện phép chia có dư của b cho r_1 và lại có hai trường hợp là

- Nếu b chia hết cho r_1 thì:

$$\text{ƯCLN}(a, b) = \text{ƯCLN}(b, r_1) = r_1$$

và quá trình tìm ƯCLN(a, b) hoàn thành.

- Nếu b không chia hết cho r_1, ta có:

$$b = r_1q_1 + r_2 \quad 0 < r_2 < r_1$$

Khi đó ƯCLN$(b, r_1) =$ƯCLN$(r_1, r_2$ và quá trình lại tiếp tục như trên đối với r_1 và r_2...

Ta thấy quá trình trên sẽ dừng lại nếu ta gặp một phép chia hết. Vì $b > r_1 > r_2 > ...$ nên quá trình trên sẽ dừng lại sau không quá b bước, giả sử toàn bộ quá trình đó là:

$$\begin{aligned}
&a = bq_0 + r_1 \quad 0 < r_1 < b \\
&b = r_1q_1 + r_2 \quad 0 < r_2 < r_1 \\
&r_1 = r_2q_2 + r_3 \quad 0 < r_3 < r_2 \\
&\qquad\dots\dots\dots\dots\dots \\
&r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
&r_{n-1} = r_nq_n
\end{aligned}$$

Do đó ƯCLN(a,b) =ƯCLN(b,r_1) =ƯCLN$(r_1,r_2) = ...$ =ƯCLN$(r_{n-1},r_n) = r_n$.

Quá trình tìm trên ƯCLN như trên gọi là thuật toán Ơclit giữă hai số a và b.

Ví dụ: Tìm ƯCLN$(73,17)$. Ta thực hiện như sau:

Ta có:

$$73 = 17.4 + 5; 17 = 5.3 + 2$$
$$5 = 2.2 + 1; 2 = 1.2.$$

Vậy ƯCLN$(73,17) = 1$.

Tính chất 2.6.4.2.

1/ ƯCLN(a,b) =ƯCLN(b,a).

2/ Mọi ước chung của a và b đều là ước của ƯCLN(a,b).

3/ ƯCLN$(ma,mb) = m\times$ƯCLN(a,b) với mọi số tự nhiên $m \neq 0$.

4/ ƯCLN$(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) = \frac{1}{d}\times$ƯCLN$(a,b)$ với mọi ước chung d của a và b.

Độc giả xem chứng minh ở S[1], trang 238.

Định nghĩa 2.6.4.3.

1/ *Bội:* Nếu a là một số tự nhiên khác 0, thì các bội số của a là tất cả các số tự nhiên dạng $m.a, m \in \mathbb{N}$. Kí hiệu tập hợp các bội của a là B(a) thì B(a) là một tập vô hạn và

$$\mathrm{B}(a) = \{ma \mid m \in \mathbb{N}\}$$

2/ *Bội chung:* Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là những số tự nhiên khác 0. Số tự nhiên b được gọi là bội chung của $a_1, a_2, ..., a_n$ nếu b là bội đồng thời của các số đó. Tập hợp các bội chung của $a_1, a_2, ..., a_n$ là giao của tất cả các tập hợp B(a_1), B(a_2),..., B(a_n). Tập hợp này cũng là một tập vô hạn, tập hợp này bị chặn dưới bởi 0 nên có số nhỏ nhất.

3/ *Định nghĩa:* Bội chung dương nhỏ nhất của các số tự nhiên khác 0: $a_1, a_2, ..., a_n$ gọi là bội chung nhỏ nhất của các số này và kí hiệu là BCNN$(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Ví dụ: BCNN$(2,5,7) = 70$; BCNN$(3,15) = 15$.

Tính chất 2.6.4.4.

1/ Với mọi cặp số tự nhiên a, b khác 0, ta có: BCNN$(a,b) = \dfrac{\mid ab \mid}{ƯCLN(a,b)}$.

2/ Tập hợp các bội chung của a và b trùng với các bội của bội chung nhỏ nhất của chúng.

3/ BCNN(a,b) =BCNN(b,a).

4/ BCNN$(ma,mb) = m\times$BCNN(a,b) với mọi số tự nhiên $m \neq 0$.

5/ BCNN$(\frac{a}{d},\frac{b}{d}) = \frac{1}{d}\times$BCNN$(a,b)$ với mọi ước chung d của a và b.

Độc giả xem chứng minh ở S[1], trang 242.

2.6.5 Các dấu hiệu chia hết

2.4.5.1 Biểu diễn số tự nhiên trong hệ thập phân.

Với mọi số tự nhiên $a > 0$, ta viết được dưới dạng

$$a = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

trong đó $0 \leq a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 < 9, a_n > 0$. Khi đó ta viết $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ và nói là ghi a trong hệ thập phân.

Tính chất 2.6.5.1 (Dấu hiệu chia hết cho 2 và 5)**.**

Một số chia hết cho 2 (hoặc 5) khi và chỉ khi chữ số hàng đơn vị của nó chia hết cho 2 (hoặc 5). Cụ thể là:

i/ Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi nó có chữ số hàng đơn vị là 0, 2, 4, 6 hoặc 8.

ii/ Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số hàng đơn vị của nó là 0 hoặc 5.

Tính chất 2.6.5.2 (Dấu hiệu chia hết cho 4 và 25)**.**

Một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi số tạo bởi hai chữ số tận cùng của nó chia hết cho 4 (hoặc 25). Nghĩa là số tự nhiên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi $a = \overline{a_1 a_0}$ chia hết cho 4 (hoặc 25).

Tính chất 2.6.5.3 (Dấu hiệu chia hết cho 3 và 9)**.**

Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho 3 (hoặc 9). Nghĩa là số tự nhiên $a = \overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}$ chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ chia hết cho 3 (hoặc 9).

Tính chất 2.6.5.4 (Dấu hiệu chia hết cho 11)**.**

Một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi tổng các chữ số hàng chẵn trừ đi tổng các chữ số hàng lẻ là một bội của 11.

Độc giả xem chứng minh các tính chất trên ở S[1], trang 206.

2.7 Hệ ghi cơ số g

2.7.1 Định nghĩa hệ ghi cơ số g

Ta chấp nhận định lý sau đây để làm cơ sở cho hệ ghi số g - phân (Bạn đọc có thể tham khảo phép chứng minh định lý ở S[1], trang 195).

Định lý 2.7.1.1. *Giả sử g là một số tự nhiên lớn hơn 1. Khi đó, mỗi số tự nhiên* $a > 0$ *đều biểu diễn một cách duy nhất được dưới dạng:*

$$a = C_n g^n + C_{n-1} g^{n-1} + ... + C_2 g^2 + C_1 g^1 + C_0$$

trong đó $n \geq 0, 0 \leq C_n, C_{n-1}, ..., C_2, C_1, C_0 < g, C_n > 0.$

Định nghĩa 2.7.1.2. Giả sử a là số tự nhiên khác 0, g là một số tự nhiên lớn hơn 1. Nếu

$$a = C_n g^n + C_{n-1} g^{n-1} + ... + C_2 g^2 + C_1 g^1 + C_0$$

với $n \geq 0, 0 \leq C_n, C_{n-1}, ..., C_2, C_1, C_0 < g, C_n > 0$. Thì ta viết $\overline{a = C_n C_{n-1} ... C_2 C_1 C_0 g}$ và nói đó là sự biểu diễn số tự nhiên a trong hệ g - phân.

2.5.1.3 Biểu diễn một số trong hệ g - phân.

Phép chứng minh định lý trên cũng đồng thời chỉ ra cách biểu diễn một số trong hệ g - phân. Bạn đọc có thể xem cách biểu diễn đó thông qua một ví dụ ở S[1], trang 198.

2.5.1.4 Đổi cơ số.

Bạn đọc xem ở S[1], trang 198.

2.7.2 So sánh các số trong hệ g - phân

Bạn đọc xem ở S[1], trang 199.

2.7.3 Thực hành 4 phép tính trong hệ g - phân

Bạn đọc xem ở S[1], trang 201.

2.8 Nội dung và cơ sở toán học của việc dạy học một số vấn đề số tự nhiên ở tiểu học

2.8.1 Nội dung dạy học số tự nhiên ở tiểu học

Số tự nhiên được trình bày ở bậc tiểu học với các nội dung:

- Hình thành khái niệm ban đầu về số tự nhiên, các số tự nhiên đến 10
- Hệ ghi số thập phân, cách viết và cách đọc các số tự nhiên
- Hai phép tính cộng và trừ các số tự nhiên
- So sánh, xếp thứ tự các số tự nhiên
- Hai phép tính nhân và chia các số tự nhiên
- Kỹ thuật thực hiện phép nhân.

Bạn đọc xem ở S[2], trang 86 (Phương pháp dạy học Toán - NXB Giáo Dục 1996).

2.8.2 Cơ sở toán học của việc dạy hình thành khái niệm số tự nhiên, các phép toán, các tính chất phép toán, quy tắc thực hành 4 phép toán.

Bạn đọc xem ở S[2] (Phương pháp dạy học Toán - NXB Giáo Dục 1996).

Bài tập

Bài tập 2.1. Cho A, B, A_1, B_1 là các tập hợp mà $A \sim A_1, B \sim B_1$. a/ Bằng cách chỉ ra các song ánh thích hợp hãy chứng minh rằng:

- $A \times B \sim B \times A$

- $A_1 \times B_1 \sim A \times B$.

b/ Đưa ra ví dụ chứng tỏ rằng nói chung $A \cup B$ không tương đương với $A_1 \cup B_1$. Muốn có $A \cup B \cup A_1 \cup B_1$ thì phải có thêm điều kiện gì?

Bài tập 2.2. Cho tập $X = \{x, y, z\}$.

a/ Hãy liệt kê các tập con của X.

b/ Chứng tỏ rằng X là hữu hạn.

Bài tập 2.3. a/Chứng tỏ tập $A = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ là tập vô hạn.

b/ Chứng minh rằng tập các điểm trên nửa đường tròn đường kính AB tương đương với tập các điểm trên đoạn thẳng AB.

c/ Chứng minh rằng tập các điểm trên đoạn thẳng AB tương đương với tập các điểm trên nửa đường thẳng Ox.

4/ a/ Một tập tương đương với một tập hữu hạn có hữu hạn không?

b/ Tập con của một tập hữu hạn có thể là hữu hạn được không?

c/ Một tập hợp có một tập con vô hạn có thể là một tập hữu hạn được không?

5/ Cho M là một bộ phận của tập số tự nhiên. Ta nói M bị chặn nếu có số tự nhiên a sao cho $x \leq a$ với mọi $x \in M$.

Chứng minh rằng mọi bộ phận khác rỗng và bị chặn của tập hợp số tự nhiên N đều có số lớn nhất (nghĩa là tồn tại $m \in M$ sao cho $m \geq x$ với mọi $x \in M$).

6/ Cho $a, b \in \mathbb{N}, a < b$. Hãy so sánh $a', b'(a', b'$ là số liền sau của $a, b)$.

7/ Cho n là một số tự nhiên. Ta kí hiệu S_n là tập các số tự nhiên khác không nhỏ hơn n:

$$S_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0, x \leq n\}$$

a/ Hãy viết các phần tử của S_0, S_1, S_2, S_3.

b/ Chứng minh rằng với mọi n ta có $\text{Card}(S_n) = n$ (tức là S_n có n số).

Bài tập

1/ Khi chia 130 cho một số tự nhiên ta được số dư bằng 7. Tìm số chia và thương hụt (thương gần đúng) trong phép chia đó.

2/ Cho số tự nhiên a, biết a chia cho 3 dư 2 và chia 2 dư 1. Tìm số dư trong phép chia a cho 6.

3/ Tìm tất cả các số $n \in \mathbb{N}, 980 \leq n \leq 1000$ mà đối với số n ấy thì một và chỉ một trong các mệnh đề sau là đúng.

a/ n chia hết cho2

b/ n chia hết cho 3

c/ n chia hết cho 6

d/ n chia hết cho 2, nhưng không chia hết cho 3

e/ n chia hết cho 3, nhưng không chia hết cho 2

f/ n chia hết cho 2 và chia hết cho 3

h/ n chia hết cho 5.

4/ Biết số tự nhiên a khi chia cho 12 thì dư 5, tìm ƯCLN$(a, 12)$.

5/ Tìm ƯCLN của các cặp số tự nhiên dưới đây bằng thuật toán Ơclit.

a/ 3486 và 39

b/ 1508 và 76

c/ 5798 và 102

d/ 40097 và 135

6/ Tìm các số tự nhiên a để biểu thức sau đây có giá trị là số tự nhiên

$$\frac{12}{2a+1}$$

7/ Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng nếu $ad + bc$ chia hết cho $a + b$ thì $ac + bd$ cũng chia hết cho $a + b$.

8/ Chứng minh rằng trong $n + 1$ số tự nhiên tuỳ ý luôn tồn tại hai số mà mà hiệu của chúng chia hết cho n.

9/ Có hay không số tự nhiên k sao cho $2007^k - 1$ chia hết cho 20^{11}.

10/ Cho $a = \overline{x195y}$ có các chữ số khác nhau. Tìm tất cả những chữ số x, y để thay vào ta được a đồng thời chia hết cho 3 và 4.

11/ Cho $a = \overline{x945y}$. Bạn hãy thay x, y bởi những chữ số thích hợp để khi chia a cho 2, 5 và 9 đều dư 1.

12/ Số học sinh của một trường tiểu học là một số tự nhiên có tính chất khi chia cho 3, cho 4 hoặc cho 5 đều dư 1 và số học sinh vào khoảng 450 đến 500. Bạn hãy tính số học sinh của trường đó.

13/ Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ chia hết cho 3.

14/ Cho $x = \overline{abcd}$, chứng minh x chia hết cho 4 khi và chỉ khi $2c + d$ chia hết cho 4.

15/ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = | 36^m - 5^n |$, trong đó m, n là các số tự nhiên khác 0.

16/ Chứng minh $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$.

17/ Chứng minh $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chia hết cho 9 với mỗi n thuộc $\mathbb{N}$.

18/ Tìm BCNN của các cặp số tự nhiên dưới đây:

a/ 23 và 124

b/ 45 và 12

c/ 27 và 186

d/ 201 và 171

19/ Bạn Hải Dương đã viết một số có hai chữ số mà tổng các chữ số của nó bằng 14. Dương đem chia số đó cho 8 thì được số dư là 4 nhưng khi chia cho 12 thì được số dư là 3.

a/ Chứng minh rằng Dương đã làm sai ít nhất một phép chia.

b/ Nếu phép chia cho 8 là đúng, thì phép chia cho 12 phải được số dư là bao nhiêu?

Bài tập

1/ Viết số 57686 trong hệ ngũ phân và bát phân (8 - phân).

2/ Viết các số sau đây trong hệ thập phân:

a/ $\overline{43314}_5$ b/ $\overline{145455}_6$

c/ $\overline{110101}_2$

3/ Viết các số sau trong hệ bát phân

a/ $\overline{14314}_6$ b/ $\overline{145455}_7$

c/ $\overline{110100}_2$

4/ a/ Lập bảng cộng và bảng nhân trong hệ bát phân

b/ Thực hiện các phép tính:

+) $\overline{67334}_7 + \overline{15255}_7$

+) $\overline{43314}_8 \times \overline{75}_8$

5/ Lập tất cả các số có 3 chữ số chia hết cho 5 từ 3 chữ số sau: 1; 3; 5.

6/ Tìm dấu hiệu chia hết cho 8 và 125 trong hệ thập phân

7/ Tìm dấu hiệu chia hết cho 2, 3 và cho 6 của các số ghi trong hệ 7 - phân

8/ Cho n là số tự nhiên lớn hơn 1. Chứng tỏ rằng các số sau là hợp số:

a/ $n^4 + 4$

b/ $n^4 + n^2 + 1$

c/ $n^4 + 4^n$

9/ Chứng minh rằng:

a/ Dư của phép chia số nguyên tố $p > 3$ cho 6 bằng 1 hoặc 5.

b/ Dư của phép chia số nguyên tố p bất kỳ cho 30 bằng 1 hoặc là một số nguyên tố.

10/ Cho p và q là những số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng tỏ rằng :

a/ $p^2 - 1$ chia hết cho 24

b/ $p^2 - q^2$ chia hết cho 24

11/ Tìm BCNN$(a, a+1)$ với $a, a+2$ là số tự nhiên khác không.

12/ Chứng tỏ rằng nếu a và b nguyên tố cùng nhau thì $a+b$ và ab cũng nguyên tố cùng nhau.

13/ Chứng tỏ rằng số $7^n - 1$ khi viết trong hệ 7 - phân là một số gồm n chữ số 6.

14/ Nếu viết tất cả các số tự nhiên từ 0 đến 1 tỉ (trong hệ thập phân) vào một dòng, thì dòng đó phải dài bao nhiêu km? (Giả sử mỗi chữ chiếm 2mm và các chữ số viết liền nhau).

15/ Cho a, b, c là những số tự nhiên sao cho $a^6 + 2b^6 = 4c^6$. Chứng minh rằng $a = b = c = 0$

16/ Chứng minh rằng nếu k là một số lẻ, thì $k^{2^n} - 1$ chia hết cho 2^{n+2} với mọi số tự nhiên n.

Chương 3

Tập hợp các số hữu tỉ

Khái niệm số tự nhiên là một công cụ quan trọng có khả năng đáp ứng các nhu cầu về mặt thực hành và về mặt lí thuyết trong việc nhận thức thực tiễn của con người. Tuy nhiên trong phạm vi tập các số tự nhiên thì một số vấn đề mà thực tiễn đặt ra không giải quyết được. Từ đó nẩy sinh yêu cầu mở rộng tập hợp số tự nhiên, tức là phải bổ sung vào nó những đối tượng mới để trong tập hợp số mới nhận được này chúng ta sẽ có lời giải cho những bài toán thực tế đặt ra.

Trong chương trình toán phổ thông, chúng ta thường xuyên vận dụng các tính chất của các phép toán trên phân số, số thập phân. Chẳng hạn:

- Tính chất giao hoán

$$a + b = b + a$$

- Tính chất kết hợp

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ab)c = a(bc)$$

- Tính chất phân phân phối

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$a(b - c) = ab - ac$$

- Tính chất của số 0

$$a + 0 = 0 + a$$

- Tính chất của số 1

$$a.1 = 1.a$$

...vv

Những tính chất, quy tắc thực hành tính toán trên học sinh thường tiếp nhận bằng hình thức thừa nhận, áp đặt mà không chứng minh một cách chặt chẽ. Giáo viên thường minh họa tính đúng đắn của chúng thông qua một số ví dụ cụ thể rồi sau đó rút ra cho học sinh quy tắc. Bằng cách này, học sinh phải tiếp thu một cách thụ động, không nắm được cơ sở lí luận của những quy tắc đó.

Còn đối với giáo sinh, những người sẽ dạy ở phổ thông sau này, việc nắm được cơ sở lí luận của những vấn đề nêu trên là điều rất cần thiết. Chúng ta cần phải biết rõ cơ sở lí luận để sau này khi về trường phổ thông chúng ta dễ dàng hơn trong việc giảng dạy các vấn đề liên quan đến các tập hợp số.

3.1 Tập các số hữu tỉ không âm

3.1.1 Xây dựng tập $\mathbb{Q}_+$

Ở phổ thông chúng ta đã biết:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = ...$$

Như vậy, các phân số bằng phân số $\frac{1}{2}$ tạo thành một lớp $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; ...$

Tương tự ta cũng có:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} = ...$$

Như vậy, các phân số bằng phân số $\frac{1}{2}$ tạo thành một lớp $\frac{3}{4}; \frac{6}{8}; \frac{9}{12}; \frac{12}{16}; ...$ Bằng cách này ta phân chia tập các phân số thành các lớp mà mỗi lớp gồm những phân số bằng nhau.

Ý tưởng trên đây được thể hiện bằng ngôn ngữ của toán học hiện đại như sau: *Mỗi cặp sắp thứ tự (a, b), trong đó $a \in \mathbb{N}$ và $b \in \mathbb{N}^*$ ta gọi là một phân số không âm (hay để cho gọn ta sẽ gọi là phân số).*

Tập tất cả các phân số kí hiệu là P. Như vậy: $P = \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Để cho tiện ta sẽ sử dụng kí hiệu $\frac{a}{b}$ để chỉ phân số (a, b), trong đó a là tử số, b là mẫu số của phân số đó. Như vậy: $P = \left\{\frac{a}{b} \text{ với } a \in \mathbb{N} \text{ và } b \in \mathbb{N}^*\right\}$

Trên tập P, ta định nghĩa một quan hệ hai ngôi, kí hiệu là $=$, như sau: Với $\frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in P$, ta nói phân số $\frac{a}{b}$ bằng phân số $\frac{c}{d}$, kí hiệu là $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, khi và chỉ khi $ad = bc$.

Ví dụ:

a/ $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ vì $1 \times 6 = 3 \times 2 (= 6)$

b/ $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ vì $3 \times 12 = 9 \times 4 (= 36)$

a/ $\frac{1}{2}$ không bằng $\frac{2}{3}$ vì $1 \times 3 \neq 2 \times 2$, khi đó ta kí hiệu $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3}$

Từ định nghĩa ta dễ thấy rằng quan hệ $=$ như trên là một quan hệ tương đương trên tập các phân số P. Như vậy ta có thể phân chia tập P theo quan hệ tương đương '=' và nhận được tập thương $P/=$. Ta sẽ gọi tập thương $P/=$ là tập các số hữu tỉ không âm và kí hiệu là $\mathbb{Q}_+$. Mỗi phần tử của tập $\mathbb{Q}_+$ ta gọi là một số hữu tỉ không âm (để cho gọn, ta sẽ gọi là số hữu tỉ).

Như vậy mỗi số hữu tỉ là một tập hợp hợp gồm các phân số bằng nhau. Giả sử $r \in \mathbb{Q}_+$, khi đó r xác định bởi một lớp các phân số bằng một phân số $\frac{a}{b}$ nào đó. Tức là $r = C(\frac{a}{b}) = \{\frac{m}{n} \in P | \frac{m}{n} = \frac{a}{b}\}$

Sau này ta sẽ dùng kí hiệu $\frac{a}{b}$ để chỉ số hữu tỉ $r = C(\frac{a}{b})$. Chẳng hạn, ta kí hiệu $\frac{2}{3}$ để chỉ số hữu tỉ $C(\frac{2}{3})$

Ta dễ dàng chứng minh được mỗi số hữu tỉ không âm có duy nhất một phân số đại diện là phân số tối giản. Khi nói đến phân số đại diện của một số hữu tỉ, ta thường hiểu là phân số tối giản nói trên.

Mỗi số tự nhiên a có thể biểu diễn dưới dạng một phân số $\frac{a}{1}$, vì vậy mỗi số tự nhiên a xác định duy nhất một số hữu tỉ r có phân số đại diện là $\frac{a}{1}$. Thành thử tập số tự nhiên có thể coi là bộ phận của tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}_+$. Ta quy ước: số hữu tỉ xác định bởi $\frac{0}{1}$ là 0, và xác định bởi $\frac{1}{1}$ là 1.

3.1.2 Các phép toán trong $\mathbb{Q}_+$

Định nghĩa 3.1.2.1. Cho hai số hữu tỉ r và s có phân số đại diện là $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ tương ứng. Ta định nghĩa:

1/ Tổng của hai số hữu tỉ r và s là một số hữu tỉ t, kí hiệu là $t = r + s$, trong đó, số hữu tỉ t có phân số đại diện là $\frac{ad+bc}{bd}$ hay $C(\frac{a}{b}) + C(\frac{c}{d}) = C(\frac{ad+bc}{bd})$

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ r và s với một số hữu tỉ t nói trên ta gọi là phép cộng các số hữu tỉ không âm, trong đó r và s gọi là các số hạng, t gọi là tổng.

2/ Tích của hai số hữu tỉ r và s là một số hữu tỉ p, kí hiệu là $t = r \times s$, trong đó, số hữu tỉ p có phân số đại diện là $\frac{ac}{bd}$ hay $C(\frac{a}{b}) \times C(\frac{c}{d}) = C(\frac{ac}{bd})$

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ r và s với một số hữu tỉ p nói trên ta gọi là phép nhân các số hữu tỉ không âm, trong đó r và s gọi là các thừa số, p gọi là tích.

Ta có các tính chất sau:

Tính chất 3.1.2.2. *Tổng của hai số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc lựa chọn phân số đại diện của chúng.*

Tính chất 3.1.2.3. *Tích của hai số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc lựa chọn phân số đại diện của chúng.*

Ví dụ: Cho hai số hữu tỉ $r = \frac{1}{2}$ và $s = \frac{5}{3}$. Ta có:

$$r + s = \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{3 + 5 \times 2}{2 \times 3} = \frac{13}{6}$$

$$r \times s = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{1 \times 5}{2 \times 3} = \frac{5}{6}$$

Định lý 3.1.2.4. *Phép cộng và phép nhân các số hữu tỉ không âm thỏa mãn các tính chất sau:*

a/ Tính chất giao hoán

$$r + s = s + r \text{ và } r \times s = s \times r \text{ với mọi } r, s \in \mathbb{Q}_+$$

b/ Tính chất kết hợp

$$(r + s) + t = r + (s + t) \text{ và } (r \times s) \times t = r \times (s \times t) \text{ với mọi } r, s, t \in \mathbb{Q}_+$$

c/ Phần tử trung lập

Số hữu tỉ 0 và số hữu tỉ 1 thoả mãn $r + 0 = 0 + r$ *và* $r \times 1 = 1 \times r$ *với mọi* $r \in \mathbb{Q}_+$

d/ Luật giản ước

Nếu $r + t = s + t$ *thì* $r = s$ *với mọi* $t \in \mathbb{Q}_+$ *và nếu* $r \times t = s \times t$ *thì* $r = s$ *với mọi* $t \in \mathbb{Q}_+, t \neq 0$

e/ Tính chất phân phối

$$r(s + t) = rs + rt \text{ với mọi } r, s, t \in \mathbb{Q}_+$$

f/ Phần tử nghịch đảo

Với mọi số hữu tỉ $r \neq 0$ *tồn tại duy nhất một số hữu tỉ* r^{-1} *sao cho* $rr^{-1} = 1$

g/ Tích của hai số hữu tỉ bằng 0 khi và chỉ khi ít nhất một trong hai số đó bằng 0.

Định nghĩa 3.1.2.5. Cho hai số hữu tỉ r và s có phân số đại diện là $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ tương ứng. Ta định nghĩa:

Nếu $ad - bc$ là một số tự nhiên, ta gọi hiệu của hai số hữu tỉ r và s là một số hữu tỉ t, kí hiệu là $t = r - s$, trong đó, số hữu tỉ t có phân số đại diện là $\frac{ad - bc}{bd}$ hay $C(\frac{a}{b}) - C(\frac{c}{d}) = C(\frac{ad - bc}{bd})$.

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ r và s với một số hữu tỉ t nói trên ta gọi là phép trừ các số hữu tỉ không âm, trong đó r gọi là số bị trừ và s gọi là các số trừ, t gọi là hiệu số. Ta nói r trừ đi s bằng t.

Ví dụ: Cho hai số hữu tỉ $r = \frac{9}{11}$ và $s = \frac{2}{7}$. Ta có:

$r - s = \frac{9 \times 7 - 2 \times 11}{11 \times 7} = \frac{41}{77}$, trong đó $s - r$ không thực hiện được vì $2 \times 11 - 9 \times 7$ không phải là số tự nhiên.

Định lý 3.1.2.6. *Phép trừ các số hữu tỉ không âm thỏa mãn các tính chất sau:*

a/ $r - s = t$ *khi và chỉ khi* $r = t + s$

b/ $r(s - t) = rs - rt$ *nếu một trong hai vế có nghĩa*

Việc chứng minh định lý trên xin dành cho độc giả.

Định nghĩa 3.1.2.7. Cho r và s là hai số hữu tỉ không âm, trong đó $s \neq 0$. Nếu tồn tại số hữu tỉ q sao cho $r = q \times s$ thì ta nói r chia s bằng q, kí hiệu $r : s = q$.

Quy tắc cho tương ứng mỗi cặp số hữu tỉ r và s với mỗi số hữu tỉ q như trên ta gọi là phép chia các số hữu tỉ không âm, r được gọi là số bị chia, s được gọi là số chia và q được gọi là thương số.

***Nhận xét* 3.1.2.8.** Giả sử $r, s \in \mathbb{Q}_+, s \neq 0$. Theo các định lý trên, tồn tại duy nhất số nghịch đảo s^{-1} của s. Đặt $q = r \times s^{-1}$, ta có $qs = (r \times s^{-1})s = r(s^{-1} \times s) = r.1 = r$. Như vậy, phép chia cho một số hữu tỉ khác 0 luôn thực hiện được, áp dụng luật giản ước của phép nhân ta suy ra thương đó là duy nhất.

Ví dụ: Tìm thương của $r : s$ biết $r = \dfrac{20}{9}$ và $s = \dfrac{4}{15}$. Ta có s^{-1} có phân số đại diện là $\dfrac{15}{4}$ vậy $r : s = \dfrac{20}{9} \times \dfrac{15}{4} = \dfrac{25}{3}$

3.1.3 Quan hệ thứ tự trong $\mathbb{Q}_+$

Định nghĩa 3.1.3.1. Cho hai số hữu tỉ không âm r và s có phân số đại diện là $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{c}{d}$ tương ứng. Ta nói rằng r nhỏ hơn hoặc bằng s, kí hiệu là $r \leq s$ nếu $ad \leq bc$.

Khi $r \leq s$ và $r \neq s$ thì ta nói r nhỏ hơn s, kí hiệu là $r < s$. Khi $r \leq s$ thì ta cũng nói s lớn hơn hoặc bằng r, kí hiệu là $s \geq r$. Tương tự khi $r < s$ thì ta cũng nói s lớn hơn r, kí hiệu là $s > r$. Các hệ thức $r \geq s$ hoặc $s \leq r$ ta gọi là một bất đẳng thức, hệ thức $r > s$ hoặc $s < r$ ta gọi là một bất đẳng thức nghiêm ngặt.

Ví dụ: $C(\dfrac{5}{11}) > C(\dfrac{7}{11})$ vì $5 \times 11 < 7 \times 11$; $C(\dfrac{3}{5}) < C(\dfrac{4}{7})$ vì $3 \times 7 > 5 \times 4$.

***Nhận xét* 3.1.3.2.**

1/ Việc so sánh hai số hữu tỉ không phụ thuộc vào việc lựa chọn các phân số đại diện của chúng.

2/ Tập $\mathbb{Q}_+$ là tập sắp thứ tự toàn phần với quan hệ '$\leq$'.

Định lý 3.1.3.3. *Quan hệ thứ tự trong tập số hữu tỉ không âm thỏa mãn tính chất:*

a/ Tính đơn điệu: Nếu ta cộng hoặc nhân cả hai vế của một bất đẳng thức với một số hữu tỉ không âm thì bất đẳng thức không đổi chiều.

Tức là $r \leq s \Rightarrow r + t \leq s + t$ và $rt \leq st$ với mọi $r, s, t \in \mathbb{Q}_+$. Đặc biệt, nếu $r < s$ và $t \neq 0$ thì $rt < st$.

b/ Tính trù mật: Xen giữa hai số hữu tỉ khác nhau tồn tại vô số các số hữu tỉ khác chúng.

c/ Tiên đề Ácsimét: Mọi số hữu tỉ đều bị chặn trên bởi một số tự nhiên. Nói cách khác với mọi số hữu tỉ r tồn tại số tự nhiên a sao cho $r < a$.

Bạn đọc tự chứng minh.

3.1.4 Nội dung và cơ sở toán học của việc dạy và học một số vấn đề về phân số ở tiểu học

Bạn đọc xem ở S[2], trang 86 (Phương pháp dạy học Toán - NXB Giáo Dục 1996).

Bài tập

1/ Cho $r, s, t \in \mathbb{Q}_+, t \neq 0$. Chứng minh rằng

$$(rs) : t = (r : t)s = r(s : t)$$

2/ Cho $r, s, t \in \mathbb{Q}_+, t \neq 0$. Chứng minh rằng

$$(r + s) : t = r : t + s : t$$

3/ Cho $S = C(\frac{1}{1.2}) + C(\frac{1}{2.3}) + ... + C(\frac{1}{(n-1).n}) + C(\frac{1}{n.(n+1)})$, trong đó với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, $C(\frac{1}{n.(n+1)})$ là số hữu tỉ có phần tử đại diện là $\frac{1}{n.(n+1)}$

a/ Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, $C(\frac{1}{n.(n+1)}) = C(\frac{1}{n}) - C(\frac{1}{(n+1)})$

b/ So sánh S_{2006} với $C(\frac{2007}{2008})$.

4/ Tích của tử số và mẫu số của một phân số lớn hơn 1 bằng 200, nếu chia cả tử và mẫu cho 5 ta được phân số tối giản. Tìm phân số đó.

5/ Khi cộng thêm vào cả tử và mẫu của phân số $\frac{11}{5}$ với cùng một số tự nhiên ta được một phân số bằng $\frac{21}{19}$. Tìm số tự nhiên đó.

6/ Khi nhân cả tử và mẫu của một phân số với 4 ta được một phân số có tổng của tử và mẫu bằng 12. Tìm phân số tối giản đó.

7/ Khi bớt đi ở cả tử lẫn mẫu của phân số $\frac{73}{49}$ với cùng một số tự nhiên ta nhận được một phân số bằng $\frac{7}{4}$. Tìm số tự nhiên đó.

3.2 Tập số thập phân không âm

3.2.1 Định nghĩa và dạng thu gọn của số thập phân

Các phân số $\frac{7}{10}; \frac{123}{100}; \frac{12}{1000}; ....$ đều có mẫu số là luỹ thừa của 10 với số tự nhiên. Các phân số dạng này ta thường gặp trong các phép đo đại lượng. Chẳng hạn:

- Chiều dài của cây thước học sinh là 25 cm hay $\frac{25}{100}$ m.

- Gói hàng nặng 540g hay $\frac{540}{1000}$ kg

Để thuận tiện trong tính toán và sử dụng, người ta đã đưa ra một cách biểu diễn riêng cho các phân số loại này.

Định nghĩa 3.2.1.1 (Phân số thập phân)**.** Phân số $\frac{a}{b}$ được gọi là phân số thập phân, nếu mẫu số b là luỹ thừa của 10 với số mũ tự nhiên ($b = 10^n, n \in \mathbb{N}$).

Ví dụ: Các phân số $\frac{3}{10}$; $\frac{8}{100}$; $\frac{5}{1}$... là phân số thập phân. Từ định nghĩa ta thấy rằng phân số $\frac{7}{2}$ không phải là phân số thập phân, nhưng $\frac{7}{2} = \frac{35}{10}$ nên những phân số dạng này được gọi là phân số biểu diễn được dưới dạng thập phân.

Định nghĩa 3.2.1.2. Phân số $\frac{a}{b}$ được gọi là biểu diễn được dưới dạng thập phân nếu nó bằng một phân số thập phân nào đó.

Ví dụ:

Các phân số $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{5}{8}; ...$ là biểu diễn được dưới dạng thập phân. Các phân số $\frac{1}{3}; \frac{2}{7}; \frac{8}{17}; ...$ không biểu diễn được dưới dạng thập phân.

Định lý 3.2.1.3. *Phân số tối giản $\frac{a}{b}$ biểu diễn được dưới dạng thập phân khi và chỉ khi mẫu số b của nó chỉ có ước nguyên tố là 2 hoặc 5.*

Định nghĩa 3.2.1.4. Số hữu tỉ r gọi là số thập phân không âm, nếu nó có một phần tử đại diện là biểu diễn được dưới dạng thập phân. Tập tất cả các số thập phân không âm ta kí hiệu là $\mathbb{Q}_{+10}$.

Ví dụ:

Các số hữu tỉ $\frac{5}{2}; \frac{9}{5}; \frac{5}{8}; ...$ đều là số thập phân. Các số hữu tỉ $\frac{8}{21}; \frac{8}{75}; \frac{8}{45}; ...$ không phải là số thập phân.

3.2.1.5 Dạng thu gọn của số thập phân

Như chúng ta đã biết: mỗi số thập phân có một cách biểu diễn là dạng phân số. Cách biểu diễn này có nhược điểm là cồng kềnh, không tiện lợi trong thực hành tính toán. Vì vậy ta thường biểu diễn các số thập phân dưới dạng thu gọn.

- $\frac{5}{2} = \frac{25}{10} = 2,5$ (đọc là hai phẩy năm)
- $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0,5$ (đọc là không phẩy năm)
- $\frac{12}{1000} = 0,012$ (đọc là không phẩy không một hai)

Vậy dạng thu gọn của số thập phân là dạng viết không có mẫu số của phân số theo quy tắc:

- Ta đưa số thập phân về dạng phân số thập phân.

- Bỏ mẫu số đồng thời dùng dấu phẩy phân chia các chữ số của tử số thành hai nhóm: nhóm thứ nhất đứng bên phải dấu phẩy, có số chữ số bằng số chữ số 0 ở mẫu số; nhóm thứ hai gồm các chữ số còn lại của tử số, đứng bên trái dấu phẩy.

- Nếu số chữ số của tử số ít hơn hay bằng số chữ số 0 ở mẫu số thì ta viết thêm những chữ số 0 vào trước tử số trước khi dùng dấu phẩy phân chia.

Số đứng bên trái dấu phẩy gọi là phần nguyên, nhóm các chữ số đứng bên phải dấu phẩy gọi là phần thập phân của số thập phân đó.

3.2.2 Các phép toán trên số thập phân

Mỗi số thập phân là một số hữu tỉ. Vì vậy xây dựng các phép toán về số thập phân bằng cách ta đưa về phép toán tương ứng với số hữu tỉ. Chẳng hạn:

Ví dụ: Cho $r = 1,23; s = 1,3$. Tìm tổng của $r + s$.

Ta có $1,23 = \frac{123}{100}$ và $1,3 = \frac{13}{10}$, mà $\frac{123}{100} + \frac{13}{10} = \frac{123 + 130}{100} = \frac{153}{100} = 1,53$ do đó $1,23 + 1,3 = 1,53$

$*$ Quy tắc thực hành phép cộng: Muốn cộng một số thập phân với một số thập phân ta làm như sau:

- Làm cho số chữ số ở phần thập phân của chúng bằng nhau (bằng cách viết thêm chữ số 0 vào hàng còn thiếu)

- Viết số nọ dưới số kia sao cho các dấu phẩy thẳng cột

- Cộng như cộng hai số tự nhiên

- Đặt dấu phẩy ở tổng thẳng cột với dấu phẩy của các số hạng

Ta trở lại ví dụ $1,23 + 1,3$

Bước 1: Ta viết $1,3 = 1,30$

Bước 2: Đặt phép tính

$$\begin{array}{r} 1,23 \\ +\ \\ 1,30 \\ \hline \end{array}$$

Bước 3: Bỏ dấu phẩy ta được phép cộng hai số tự nhiên

Bước 4: Đặt dấu phẩy ở tổng thẳng cột với dấu phẩy của các số hạng ta được kết quả

$*$ Quy tắc thực hiện phép trừ: (Tương tự quy tắc thực hiện phép cộng)

$*$ Quy tắc thực hiện phép nhân: Muốn nhân một số thập phân với một số thập phân ta làm như sau:

- Nhân như hai số tự nhiên

- Ta đếm xem trong phần thập phân của cả hai thừa số có bao nhiêu chữ số rồi dùng dấu phẩy tách ra ở tích ấy bấy nhiêu chữ số kể từ phải sang trái.

Ví dụ: Tính $4,15 \times 3,8$. Ta làm như sau:

Trước hết ta thực hiện phép nhân: $415 \times 38 = 15770$.

Vì cả hai thừa số có tất cả ba chữ số ở phần thập phân nên ta dùng dấu phẩy tách ra ở tích ba chữ số kể từ bên phải.

* Quy tắc thực hành phép chia:

Muốn chia một số thập phân cho một số thập phân ta làm như sau:

1/ Bỏ dấu phẩy ở số chia đồng thời dời dấu phẩy ở số bị chia từ trái qua phải số chữ số bằng số chữ số ở phần thập phân của số chia (trường hợp số chữ số ở phần thập phân của số chia nhiều hơn số bị chia thì ta viết thêm chữ số 0 vào hàng còn thiếu)

2/ Chia như chia hai số tự nhiên, khi chia hết chữ số ở phần nguyên của số bị chia, đặt dấu phẩy ở thương rồi tiếp tục chia

3/ Khi chia hết các chữ số ở phần thập phân của số bị chia, nếu còn dư ta viết thêm chữ số 0 vào bên phải số dư rồi tiếp chia.

3.2.3 So sánh số thập phân

**Quan hệ thứ tự trong tập số thập phân*

Mỗi số thập phân là một số hữu tỉ không âm. Vì vậy xây dựng quan hệ thứ tự trên tập $\mathbb{Q}_{+10}$ ta đưa về so sánh các số hữu tỉ không âm. Chẳng hạn:

Ví dụ: cho $r = 9,63; s = 12,1$. Hãy so sánh r và s.

Ta có $9,63 = \dfrac{963}{100}$ và $12,1 = \dfrac{121}{10}$; vì $\dfrac{963}{100} < \dfrac{121}{1}$ nên $9,63 < 12,1$.

Quy tắc so sánh hai số thập phân

- Làm cho số chữ số ở phần thập phân của chúng bằng nhau (bằng cách viết thêm chữ số 0 vào hàng còn thiếu)

- Bỏ dấu phẩy ta nhận được hai số tự nhiên

- So sánh hai số tự nhiên vừa nhận được, số nào lớn hơn thì số thập phân ứng với nó sẽ lớn hơn. Nếu hai số tự nhiên đó bằng nhau thì hai số thập phân cũng bằng nhau.

Chú ý: Những số thập phân mà chúng ta gặp ở trên được biểu diễn ở hai dạng: dạng phân số và dạng thu gọn. Khi viết những số thập phân này ở dạng thu gọn thì ta thấy rằng phần thập phân chỉ có hữu hạn chữ số cho nên ta gọi chúng là số thập phân hữu hạn.

3.2.4 Số thập phân vô hạn tuần hoàn

Bạn đọc xem ở S[1], trang 281 (Số học và Lôgic Toán - NXB Giáo Dục 1996).

3.2.5 Nội dung và cơ sở toán học của việc dạy học một số vấn đề về số thập phân ở tiểu học ở tiểu học

Bạn đọc xem ở S[2], trang 173 (Phương pháp dạy học Toán - NXB Giáo Dục 1996).

Bài tập

1/ Chứng minh rằng xen giữa hai số thập phân khác nhau tồn tại vô số các số thập phân khác nằm giữa chúng.

2/ Điền chữ số thích hợp thay cho $*$:

$$0,06 < 0,00*9 < 0,071$$

3/ Tìm X biết

$$\text{a/ } 4,25 \times (X + 41,53) - 125 = 53,5 \qquad \text{b/ } 2 \times 1,58 : (X \times 0,4) = 7,9$$

4/ Có một bình đựng 80g dung dịch loại 8% muối. Phải đổ vào bình đó bao nhiêu gam nước để được một dung dịch chứa 5% muối?

5/ Có một bình đựng 150g dung dịch loại 10% muối. Phải đổ vào bình đó bao nhiêu gam muối để được một dung dịch chứa 20% muối?

6/ Khi lùi dấu phẩy của một số thập phân từ phải qua trái một hàng thì số đó giảm đi 11,07 đơn vị. Tìm số thập phân đó.

7/ Thay mỗi chữ số trong phép tính sau bởi chữ số thích hợp:

$$\text{a/ } \overline{8ab}, a - \overline{d41}, c = \overline{c14}, d \qquad \text{c/ } 4,896 - a, bab = 0,0ab$$

$$\text{b/ } a, bcaa - b, dbc = c, baba \qquad \text{d/ } 41, ab = a, b \times 2,6$$

3.3 Tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ

3.3.1 Xây dựng tập hợp $\mathbb{Q}$

Xét tập hợp $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+ = \left\{(r_1, r_2) \middle| r_1, r_2 \in \mathbb{Q}_+\right\}$

3.3.1.1 Quan hệ tương đương trên $\mathbb{Q}$

a/ Định nghĩa

Trên tập $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ ta xác định một quan hệ hai ngôi, kí hiệu là $\sim$ như sau:

$$\forall (a, b); (c, d) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+ : (a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

b/ Ví dụ: $(1, 2) \sim (3, 4)$ vì $1 + 4 = 2 + 3$, $(4, 1) \nsim (3, 2)$ vì $4 + 2 \neq 3 + 1$

c/ Mệnh đề Quan hệ $\sim$ xác định ở trên là một quan hệ tương đương trên tập hợp $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$

Chứng minh. Xin dành cho bạn đọc □

3.3.1.2 Tập hợp $\mathbb{Q}$

1/ Ở trên ta đã chứng minh được $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$. Do đó tập $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ sẽ được chia thành các lớp theo quan hệ $\sim$.

Kí hiệu: $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+ / \sim$ là tập thương của $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ theo quan hệ tương đương $\sim$.

Phần tử của $\mathbb{Q}$ đại diện bởi cặp số $(a,b) \in \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+$ kí hiệu là $\overline{(a,b)}$

Ví dụ: $\overline{(3,2)} \in Q$ là lớp tương đương đại diện bởi cặp $(3,2)$.

$$\overline{(3,2)} = \left\{(a,b) \in \mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+ \middle| (a,b) \sim (3,2)\right\}$$

2/ $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \Leftrightarrow a + d = b + c$.

3/ Mỗi phần tử của $\mathbb{Q}$ được gọi là một số hữu tỉ, tập $\mathbb{Q}$ được gọi là tập các số hữu tỉ.

3.3.2 Các phép toán và quan hệ thứ tự trên $\mathbb{Q}$

3.3.2.1 Định nghĩa

Giả sử $x = \overline{(a,b)}, y = \overline{(c,d)}$ là hai số hữu tỉ tuỳ ý. Ta định nghĩa:

$$x + y := \overline{(a + c, b + d)}$$

$$x.y := \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

Ta có các mệnh đề sau:

a/ Mệnh đề 1:

Phép cộng và phép nhân các số hửu tỉ xác định theo định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn đại diện của chúng.

b/ Mệnh đề 2:

- Tập $\mathbb{Q}$ với phép cộng lập thành một nhóm giao hoán

- Tập $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \backslash \{\overline{0}\}$ cùng với phép nhân lập thành một nhóm giao hoán

- Tập $\mathbb{Q}$ cùng với phép cộng và phép nhân lập thành một trường

c/ Mệnh đề 3:

- Vành các số hữu tỉ không có ước của $\overline{0}$ nghĩa là với $x, y \in \mathbb{Q}, x \neq \overline{0}, y \neq \overline{0}$ thì $xy \neq \overline{0}$

- Một số hữu tỉ bất kỳ hoặc có dạng $\overline{(a,0)}, a \in \mathbb{Q}_+$ hoặc là số đối của một số có dạng như vậy.

Kí hiệu $\mathbb{Q}^+$ là tập các số hữu tỉ có dạng $\overline{(a,0)}$ và $\mathbb{Q}^-$ là tập hợp các số đối của các số thuộc $\mathbb{Q}^+$.

Ta có $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. Dễ thấy

$$f : \mathbb{Q}_+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$$

$$a \longmapsto \overline{(a,0)}$$

là một song ánh và bảo tồn phép toán. Như vậy ta có thể đồng nhất $\mathbb{Q}_+$ với bộ phận $\mathbb{Q}^+$ của $\mathbb{Q}$, thay vì viết $x = \overline{(a,0)}$ thì ta có thể viết lại đơn giản $x = a$

d/ Mệnh đề 4:

Mỗi số hữu tỉ là một số hữu tỉ không âm hoặc là số đối của một số hữu tỉ không âm. Với $a \in \mathbb{Q}^+$ thì số đối của nó kí hiệu là $-a$.

3.3.2.2 Phép trừ trong $\mathbb{Q}$

Mệnh đề 5:

Trong $\mathbb{Q}$ phương trình $b + x = a$, với $a, b \in \mathbb{Q}_+$ luôn luôn có nghiệm.

Nghiệm của phương trình $b + x = a$, với $a, b \in \mathbb{Q}_+$ được gọi là hiệu của a và b, kí hiệu $a - b$, đọc là a trừ b. Ta có $a - b = a + (-b)$

3.3.2.3 Phép chia trong $\mathbb{Q}$

Mệnh đề 6:

Với $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ thì phương trình $ax = b$ luôn luôn có nghiệm.

Nghiệm của phương trình $ax = b$ với $a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ được gọi là thương của phép chia b cho a. Ta viết $b : a = c$ hoặc $\dfrac{b}{a} = c$

3.3.2.4 Quan hệ thứ tự trong $\mathbb{Q}$

a/ Định nghĩa 1: Giả sử $x \in \mathbb{Q}$, nếu $x = \dfrac{a}{b}; a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$ thì ta nói x lớn hơn hoặc bằng 0, viết là $x \geq 0$. Ngược lại nếu x không phải lớn hơn hoặc bằng 0 thì ta nói x nhỏ hơn hoặc bằng x, viết là $x \leq 0$.

b/ Chú ý: Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn phân số đại diện $\dfrac{a}{b}$

c/ Định nghĩa 2: Giả sử x và y là hai số hữu tỉ, ta nói x nhỏ hơn hoặc bằng y, viết là $x \leq y$, nếu $y - x \geq 0$

Khi $x \leq y$ thì ta nói y lớn hơn hoặc bằng x và viết $y \geq x$. Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ ta viết $x < y$ và nói là x nhỏ hơn y.

*Các tính chất:

- Quan hệ $\leq$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{Q}$

- Tính chất của bất đẳng thức (xem Số học và Lôgic Toán - Trang 276)

Ở phần trên ta thấy mỗi số hữu tỉ hoặc có dạng $\dfrac{a}{b}$, hoặc có dạng $-\dfrac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$. Với r, t là hai số hữu tỉ

Nếu $r \geq 0, t \leq 0, r = \dfrac{a}{b}, t = -\dfrac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh được $r - t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$

Nếu $r > t \geq 0, r = \dfrac{a}{b}, t = \dfrac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$, ta chứng minh được $r - t = \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$.

Nếu $r \leq 0, t \geq 0, r = -\dfrac{a}{b}, t = \dfrac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$, ta chứng minh được $r - t = -(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}) = -\dfrac{cb + ad}{bd}$.

Nếu $r < t \leq 0, r = -\dfrac{a}{b}, t = -\dfrac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$, ta chứng minh được $r - t = -(\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}) = -\dfrac{ad - bc}{bd}$.

Nếu $0 \leq r < t, r = \dfrac{a}{b}, t = \dfrac{c}{d}, a, b, c, d \in \mathbb{N}$, ta chứng minh được $r - t = -(\dfrac{c}{d} - \dfrac{a}{b}) = -\dfrac{cb - ad}{bd}$.

3.3.3 Số thập phân trên $\mathbb{Q}$

Ở phần trên ta thấy mỗi số hữu tỉ hoặc có dạng $\frac{a}{b}$, hoặc có dạng $-\frac{a}{b}$ trong đó $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$. Nếu $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}_{+10}$ thì các số $\frac{a}{b}, -\frac{a}{b}$ được gọi là các số thập phân.

Ví dụ: $x = \frac{12}{100}$ là số thập phân vì $\frac{12}{100} \in \mathbb{Q}_{+10}$, cũng như thế $y = -\frac{71}{10}$ là số thập phân vì $y \in \mathbb{Q}_{+10}$

Bạn đọc có thể nghiên cứu sâu hơn ở Số học và Lôgic Toán - Trang 280.

Bài tập

1/ Viết các số thập phân sau dưới dạng phân số

$$\text{a/ } 12,0035 \qquad \text{b/ } -4,1032$$

2/ Tìm một phân số bằng $\frac{5}{3}$, biết rằng phân số đó có tổng của tử và mẫu bằng 184.

3/ Khi cộng thêm vào cả tử lẫn mẫu của phân số $\frac{3}{7}$ với cùng một số tự nhiên ta được một phân số bằng $\frac{101}{103}$. Tìm số tự nhiên đó.

4/ Với mọi $x, y \in \mathbb{Q}$. Chứng tỏ rằng nếu $xy = \overline{0}$ thì suy ra hoặc $x = \overline{0}$ hoặc $y = \overline{0}$

5/ Khi bớt đi ở cả tử và mẫu của phân số $\frac{73}{49}$ với cùng một số tự nhiên ta nhận được một phân số bằng $\frac{7}{4}$. Tìm số tự nhiên đó.

6/ Cho $x, y \in \mathbb{Q}, x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, b > 0, c > 0$. Từ định nghĩa về quan hệ $\leq$ trong $\mathbb{Q}$ chứng minh rằng

$$x \leq y \Longleftrightarrow ad \leq bc$$

3.4 Tập số nguyên $\mathbb{Z}$

3.4.1 Xây dựng tập số nguyên $\mathbb{Z}$ trong $\mathbb{Q}$

Mỗi số hữu tỉ có dạng $\overline{(\frac{a}{b}, 0)}$ hoặc $\overline{(0, \frac{a}{b})}$, ta xét tập $\mathbb{Z} = \left\{\overline{(\frac{a}{b}, 0)}; \overline{(0, \frac{a}{b})} \middle| b = 1\right\}$, ta thấy $\mathbb{Z}$ là một tập con của $\mathbb{Q}$ có tính chất đặc biệt sau:

Có các đơn ánh f từ $\mathbb{N}$ vào $\mathbb{Z}$, và g từ $\mathbb{Z}$ vào $\mathbb{Q}$ đồng thời các đơn ánh đó bảo tồn phép toán.

$$\mathbb{N} \xhookrightarrow{f} \mathbb{Z} \xhookrightarrow{g} \mathbb{Q}$$

Mỗi phần tử thuộc $\mathbb{Z}$ có dạng $\frac{a}{1}$ hoặc $-\frac{a}{1}$, $a \in \mathbb{N}$ như vậy ta có thể xem $\mathbb{N}$ là một tập con của $\mathbb{Z}$, chúng ta hiểu $\frac{a}{1} \equiv a$, còn $-\frac{a}{1}$ là phần tử đối của $\frac{a}{1}$ và được kí hiệu là $-a$. Như vậy mỗi số nguyên hoặc là một số tự nhiên hoặc là số đối của một số tự nhiên.

Với $a, b \in \mathbb{N}$ thì tồn tại x, y sao cho $bx = -a$ và $(-b)x = a$, ta biết rằng $x = \frac{-a}{b}$ và $y = \frac{a}{-b}$, ta sẽ chứng minh được $x = y = -\frac{a}{b}$. Do đó ta có

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Định lý 3.4.1.1. *Tập hợp $\mathbb{Z}$ cùng với phép cộng và phép nhân lập thành một vành giao hoán có đơn vị.*

Định lý 3.4.1.2. *Vành các số nguyên $\mathbb{Z}$ không có ước của 0, nghĩa là với $x, y \in \mathbb{Z}, x \neq 0, y \neq 0$ thì $xy \neq 0$*

3.4.2 Lý thuyết chia hết trên tập số nguyên

Định nghĩa 3.4.2.1. Giả sử a và b là hai số nguyên, $b \neq 0$. Ta nói a chia hết cho b nếu có một số nguyên q sao cho $a = bq$.

Khi a chia hết cho b thì ta kí hiệu $a \backslash b$. Ta nói a là bội của b, còn b là ước của a.

Ví dụ:

i/ 0 là bội của mọi số nguyên $a \neq 0$. Thật vậy ta luôn có $0 = a.0$ với mọi a.

ii/ 1 và -1 là ước của mọi số nguyên a. Thật vậy, ta luôn có $a = 1.a$ và $a = (-1)(-a)$

Tính chất 3.4.2.2. *i/ Với $a, b \in \mathbb{Z}$ nếu $b \backslash a$ thì ta cũng có $b \backslash (-a), -b \backslash (-a), -b \backslash a$.*

ii/ Số 1 chỉ có hai ước là -1 và chính nó.

iii/ Mọi số nguyên a khác 0 đều là ước của chính nó: $\forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \Longrightarrow a \backslash a$.

iv/ Với $a, b \in \mathbb{Z}$, nếu $b \backslash a$ và $a \backslash b$ thì suy ra $a = \pm b$.

v/ Với $a, b, c \in \mathbb{Z}$, nếu $a \backslash b$ và$b \backslash c$ thì suy ra $a \backslash c$.

Định lý 3.4.2.3. *Với mọi cặp số nguyên $a, b, b \neq 0$ tồn tại duy nhất cặp số q và r sao cho $a = bq + r, 0 \leq r <\mid b \mid$*

Định nghĩa 3.4.2.4. Khi ta có đẳng thức $a = bq + r, 0 \leq r <\mid b \mid$ ta nói a chia cho b được q dư r. Số q gọi là thương hụt, số r gọi là số dư. Việc tìm thương hụt q và số dư r gọi là thực hiện phép chia có dư của a cho b.

Chú ý: Trong trường hợp số dư $r = 0$ ta có $a = bq$ nghĩa là a chia hết cho b. Vậy phép chia hết là một trường hợp riêng của phép chia có dư.

Bài tập

1/ Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$, a và b chia hết cho c. Chứng minh rằng khi đó với mọi số nguyên x, y ta cũng có $ax + by$ chia hết cho c.

2/ Cho $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng nếu a chia hết cho c và $a + b$ chia hết cho c thì b

cũng chia hết cho c.

3/ Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng nếu $ab + cd$ chia hết cho $a + c$ thì $ad + bc$ cũng chia hết cho $a + c$.

4/ Thực hiện phép chia có dư của a cho b với

i/ $a = -43, b = 5$

ii/ $a = -59, b = -7$

iii/ $a = 87, b = -13$.

5/ Chứng ming:

a/ Trong 3 số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3.

b/ Với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, trong n số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho n.

c/ Với $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, trong $n + 1$ số nguyên liên tiếp có hai số mà hiệu của chúng chia hết cho n.

6/ Cho biết số nguyên a khi chia cho 3 dư là 2, chia cho 2 dư 1. Tìm số dư trong phép chia a cho 6.

7/ Cho biết số nguyên a khi chia cho 3 dư là 1, chia cho 5 dư 2. Tìm số dư trong phép chia a cho 15.

8/ Biết 135 chia cho b được thương hụt là 9. Tìm b và số dư trong phép chia trên.

Chương 4

Tập số thực

4.1 Xây dựng tập số thực

4.1.1 Dãy số hữu tỉ, dãy hội tụ, dãy cơ bản

Định nghĩa 4.1.1.1. Một dãy số hữu tỉ là một ánh xạ:

$$u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$n \longmapsto u(n)$$

Người ta thường cho một dãy số bằng cách liệt kê các ảnh.

Ví dụ:
i/ Dãy số $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$
ii/ Dãy số $(\frac{1}{2n^2+1})$.

Định nghĩa 4.1.1.2. Giả sử $l \in \mathbb{Q}$, khi đó dãy số $(x_n)_n$ gọi là có giới hạn l và viết là

$$\lim(x_n) = l$$

nếu với mọi $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \quad |l - x_n| < \varepsilon$.

Dãy số $(x_n)_n$ được gọi là dãy cơ bản (dãy Cauchy), nếu mọi $\varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$ tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $m, n \in \mathbb{N}$ mà $m > n_0, n > n_0$ ta có $\quad |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Định lý 4.1.1.3. *Mọi dãy hội tụ trong $\mathbb{Q}$ đều là dãy cơ bản.*

Định lý 4.1.1.4. *Nếu $(x_n)_n$ là dãy cơ bản thì nó bị chặn, nghĩa là tồn tại số hữu tỉ $a > 0$ sao cho*

$$|x_n| < a, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Định lý 4.1.1.5. *Nếu* $(x_n)_n, (y_n)_n$ *là hai dãy cơ bản thì các dãy* $(x_n + y_n)$, $(x_n - y_n)$, $(x_n y_n)$ *cũng là dãy cơ bản.*

Định nghĩa 4.1.1.6. Trên tập P các dãy cơ bản ta xác định hai phép toán cộng và nhân như sau: $\forall (x_n)_n), (y_n)_n$

$$(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$

$$(x_n)_n (y_n)_n = (x_n y_n)_n$$

Định lý 4.1.1.7. *Tập hợp P cùng với hai phép toán cộng và nhân xác định trên lập thành một vành giao hoán có đơn vị.*

4.1.2 Trường số thực

Định nghĩa 4.1.2.1. Trên tập hợp P các dãy cơ bản ta xác định một quan hệ hai ngôi $\sim$ như sau: $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in P$

$(x_n)_n \sim (y_n)_n \Longleftrightarrow \lim(x_n - y_n) = 0$

Định lý 4.1.2.2. *Quan hệ* $\sim$ *xác định ở trên là một quan hệ tương đương trên* P.

Chứng minh. Để kiểm tra được các tính chất phản xạ và đối xứng của quan hệ $\sim$ vì:

Dãy $(x_n - x_n) = (0)_n$ có giới hạn bằng 0 nên $(x_n) \sim (x_n)$.

Nếu $\lim(x_n - y_n) = 0$ thì hiển nhiên $\lim(y_n - x_n) = 0$ do đó từ giả thiết $(y_n) \sim (x_n)$.

Nếu $(x_n) \sim (y_n)$, $(y_n) \sim (z_n)$ nghĩa là $\lim(x_n - y_n) = 0$, $\lim(y_n - z_n) = 0$ khi đó từ bất đẳng thức:

$$|x_n - z_n| \le |x_n - y_n| + |y_n - z_n|$$

ta dễ dàng suy ra được rằng $\lim(x_n - z_n) = 0$ hay $(x_n) \sim (z_n)$. Như vậy ta có điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 4.1.2.3. Quan hệ tương đương $\sim$ chia tập P thành các lớp tương đương. Kí hiệu

$$\mathbb{R} = P/\sim$$

là tập hợp các lớp tương đương. $\mathbb{R}$ được gọi là tập hợp các số thực. Mỗi phần tử của $\mathbb{R}$ gọi là một số thực. Mỗi phần tử của $\mathbb{R}$ đại diện bởi dãy $(x_n)_n$ được kí hiệu $\overline{(x_n)_n}$.

4.2 Các phép toán trên tập số thực

4.2.1 Các phép toán

Trên tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ ta xác định các phép toán cộng và nhân như sau: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = \overline{(x_n)_n}, \beta = \overline{(y_n)_n}$

$$\alpha + \beta = \overline{(x_n)_n} + \overline{(y_n)_n} = \overline{(x_n + y_n)_n}$$

$$\alpha.\beta = \overline{(x_n)_n}.\overline{(y_n)_n} = \overline{(x_n.y_n)_n}.$$

Chú ý rằng định nghĩa phép cộng và nhân các số thực thông qua phép cộng và nhân các dãy cơ bản đại diện cho chúng. Tuy nhiên dễ dàng chứng minh được rằng cách định nghĩa này không phụ thuộc vào việc chọn các đại diện của số thực. Nghĩa là phép cộng và nhân định nghĩa trên thực sự là các phép toán hai ngôi trên $\mathbb{R}$.

Định lý 4.2.1.1. *Tập các số thực $\mathbb{R}$ cùng với các phép toán cộng và nhân xác định trên lập thành một trường.*

4.2.2 Quan hệ thứ tự trên $\mathbb{R}$

Bổ đề 4.2.2.1. *Nếu $(x_n)_n, (y_n)_n$ là hai dãy cơ bản các số hữu tỉ tuỳ ý thì sẽ xãy ra một trong ba khả năng sau:*

1/ $\lim(x_n - y_n) = 0$

2/ $\lim(x_n - y_n) > 0$

3/ $\lim(x_n - y_n) < 0$

Định nghĩa 4.2.2.2. Giả sử $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha = (\overline{x_n}), \beta = (\overline{y_n})$. Ta nói α nhỏ hơn hoặc bằng β, viết là $\alpha \leq \beta$ nếu:

- Hoặc $\lim(x_n - y_n) > 0$

- Hoặc tồn tại $a \in \mathbb{Q}, a > 0$ và số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$y_n - x_n > a, \text{ với mọi } n > n_0$$

Theo bổ đề trên ta thấy quan hệ $\leq$ vừa được xác định là một quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{R}$. Người ta cũng chứng minh được rằng quan hệ thứu tự trong $\mathbb{R}$ tương thích với phép cộng và nhân nghĩa là:

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ nếu $x \leq y$ thì $x + z \leq y + z$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nếu $x \geq 0$ và $y \geq 0$ thì $xy \geq 0$

4.2.3 Quan hệ giữa $\mathbb{Q}$ và $\mathbb{R}$

(Xem Số học và Lôgic Toán - Trang 305)

Bài tập

1/ Chứng minh không có số hữu tỉ x sao cho $x^2 = 3$.

Xét dãy số $u_n = \dfrac{3n-2}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$

2/ a/ Chứng minh rằng dãy (x_n) là một dãy cơ bản.

b/ Chứng minh bằng định nghĩa rằng $\lim(u_n) = \dfrac{3}{2}$

3/ Cho

$$u_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1).n}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) là một dãy cơ bản.

4/ Cho

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) là một dãy cơ bản.

5/ Cho

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

Chứng minh rằng dãy (u_n) không phải là một dãy cơ bản.

6/ Cho (x_n) và (y_n) là hai dãy cơ bản, $(x_n) \sim (y_n)$. Chứng minh rằng nếu dãy (x_n) hội tụ thì dãy (y_n) cũng hội tụ và $\lim(x_n) = \lim(y_n)$

7/ Cho (x_n) là một dãy cơ bản. Chứng minh rằng day số y_n cũng là dãy cơ bản, trong đó

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + x_3 ... + x_{n-1} + x_n}{n}$$

8/ Xét ánh xạ

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ a &\longmapsto (\overline{a})_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

a/ Chứng minh rằng f là một đơn ánh.

b/ Chứng minh rằng

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(a.b) = f(a)f(b)$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn (2006), *Các đề thi Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc*, NXB Giáo Dục.

2. Trần Lưu Cường (1998), *Toán Olympic cho Sinh viên*, NXB Giáo Dục.

3. A. N. Cônmôgôrốp, X. V. Fômin (1971), *Cơ sở Lý thuyết hàm và giải tích hàm,* NXB. Giáo dục Hà Nội.

4. Dương Hữu Tòng, *Cách tiếp cận của khái niệm số tự nhiên trong lịch sử và Sách giáo khoa Toán lớp 1,* Tạp chí ĐHSP TP Hồ Chí Minh, Số 17 năm 2011.

Tiếng Anh

5. W. J. Kaczor, M. T. Nowak (2001), *Problems in Mathematical Analysis I, II*, American Mathematical Society.

Website

+ http://ww.vietmaths.com;
+ http://ww.diendantoanhoc.net;
+ http://www.imo-official.org;
+ http://forum.mathscope.org;