

TS VŨ QUÝ ĐẠC

CƠ ỨNG DỤNG

PHẦN TÓM TẮT LÝ THUYẾT BÀI TẬP MINH HOẠ VÀ BÀI TẬP CHO ĐÁP SỐ

(In lần thứ nhất)

*Sách dùng cho sinh viên các trường Đại học Kỹ thuật không chuyên
cơ khí và các trường đại học Sư phạm Kỹ thuật.*

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

HÀ NỘI - 2007

LỜI GIỚI THIỆU

Giáo trình Cơ học ứng dụng là đầu sách được viết nằm trong bộ giáo trình giảng dạy môn Cơ học ứng dụng. Trên cơ sở nội dung của giáo trình Cơ học ứng dụng tập một và tập hai của nhóm tác giả GS Nguyễn Xuân Lạc và PGS Đỗ Như Lân- cán bộ giảng dạy Đại học Bách khoa Hà Nội, phát triển tiếp nội dung theo hướng khái quát những vấn đề lý thuyết cần chú ý của từng chương, minh họa bằng những bài giải sẵn và cho bài tập có đáp số để người học tự kiểm tra kiến thức, phù hợp với phương thức đào tạo theo học chế tín chỉ.

Ngoài mục đích làm giáo trình giảng dạy trong các trường đại học đại học cho các ngành không chuyên cơ khí, sách này cũng có thể là tài liệu tham khảo cho các khoa sư phạm kỹ thuật của các trường đại học sư phạm, đại học kỹ thuật.

Sách được viết dựa trên các giáo trình cơ học ứng dụng của các tác giả là giảng viên của Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, với cách tiếp cận trực tiếp và kinh nghiệm sau nhiều năm giảng dạy của tác giả. Trong khi biên soạn tác giả luôn nhận được ý kiến góp ý của Bộ môn Cơ sở thiết kế máy, đặc biệt được Nhà giáo Nhân dân GS, TS Nguyễn Xuân Lạc, Đại học Bách khoa Hà Nội và PGS, TS Phan Quang Thế - Trưởng Bộ môn Cơ sở thiết kế máy Trường Đại học kỹ thuật Công nghiệp - Đại học Thái Nguyên rất quan tâm góp ý và hiệu đính cho cuốn sách.

Trong lần xuất bản thứ nhất, chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót về nội dung và hình thức trình bày. Tác giả chân thành mong nhận được sự phê bình góp ý của các bạn đồng nghiệp và các quý vị độc giả.

Ý kiến góp ý xin gửi về :

Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật - 70 Trần Hưng Đạo Hà Nội.

TÁC GIẢ

Học phần I: CƠ HỌC VẬT RẮN TUYỆT ĐỐI

Chương 1

CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC PHẪNG

Trong chương này lần lượt giải bài toán cân bằng trong các trường hợp:

- Bài toán một vật không có ma sát;
- Bài toán hệ vật không có ma sát;
- Bài toán có ma sát.

1.1. BÀI TOÁN MỘT VẬT KHÔNG CÓ MA SÁT

Vấn đề cần lưu ý:

I. Lực hoạt động và phản lực liên kết

- Lực hoạt động có quy luật xác định, hoặc tập trung hoặc phân bố. Hệ lực phân bố thường được thay bằng lực tập trung Q đi qua trọng tâm của biểu đồ phân bố. Hệ lực phân bố hình chữ nhật (hình 1.1a)

$$Q = ql$$

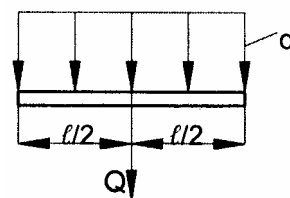
q - cường độ lực phân bố (N/m)

l độ dài của biểu đồ phân bố (m). Phản lực liên kết do vật gây liên kết đặt vào vật khảo sát.

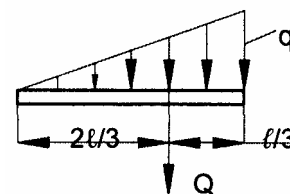
Phản lực liên kết phụ thuộc vào dạng của liên kết.

a. Liên kết tựa

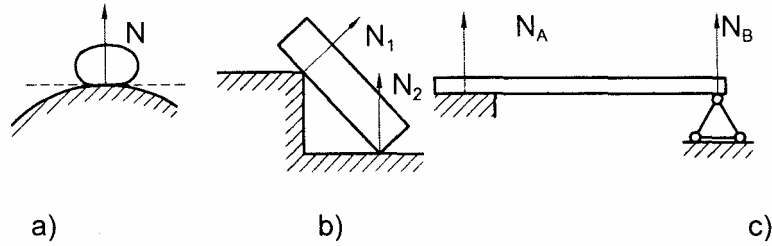
Vật khảo sát tựa vào vật gây liên kết tại một mặt, một điểm hay con lăn (hình 1.2)



a)



b) Hình 1.1



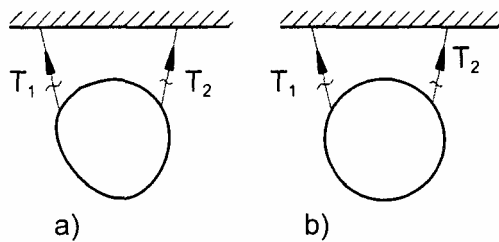
Hình 1.2

Phản lực pháp tuyến \vec{N} hướng từ vật gây liên kết vào vật khảo

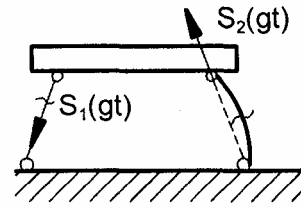
b. Liên kết dây

Vật khảo sát nối với vật gây liên kết bởi dây, đai, xích (hình 1.3).

Ta tưởng tượng khi cắt dây, sức căng \vec{T} nằm dọc dây và làm căng đoạn dây nối với vật khảo sát.



Hình 1.3



Hình 1.4

c. Liên kết thanh

Vật khảo sát nối với vật gây liên kết bởi những thanh (thẳng hay cong) thỏa mãn điều kiện:

- Trọng lượng thanh không đáng kể.
- Không có lực tác dụng trên thanh.
- Thanh chịu liên kết hai đầu. Với ba điều kiện đó thanh chỉ chịu kéo hoặc nén (hình 1.4)

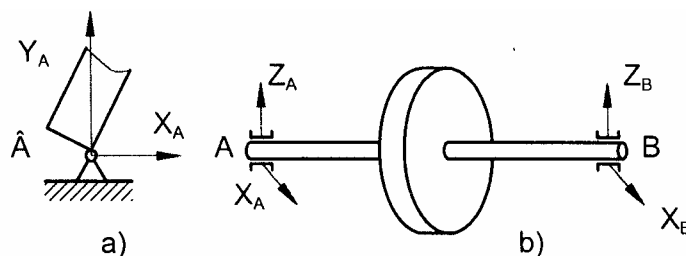
Tưởng tượng cắt thanh, lực kéo (nén) \vec{S} nằm dọc theo đường thẳng

nổi hai đầu thanh, chiều của \vec{S} được giả thiết nếu tính ra $S > 0$ thì chiều giả thiết là đúng, $S < 0$ thì chiều giả thiết sai.

d. Liên kết bản lề, ổ trục

Vật khảo sát nối với vật gây liên kết bởi bản lề hoặc ổ trục.

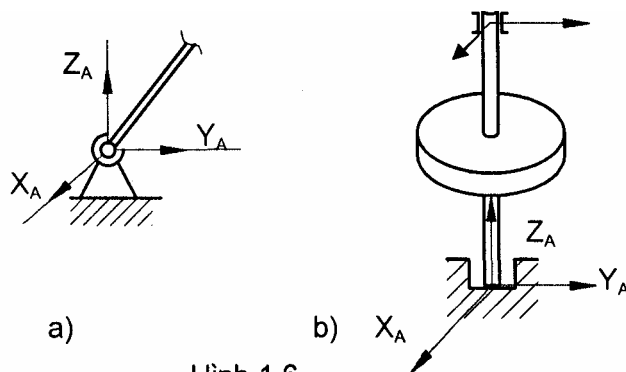
Phản lực liên kết gồm hai lực vuông góc trong mặt phẳng vuông góc với trục, chiều của hai lực được giả thiết. Nếu tính được thành phần lực nào đó là dương thì thành phần đó đã được giả thiết đúng. Thí dụ, tính được $X_A > 0$; $Y_A < 0$ thì \vec{X}_A giả thiết đúng, \vec{Y}_A giả thiết sai (hình 1.5).



Hình 1.5

e. Liên kết bản lề cầu, ổ chặn (cối)

Vật khảo sát liên kết với vật gây liên kết bởi bản lề cầu A như ở (hình 1.6a) hoặc ổ chặn (cối) A (hình 1.6b)



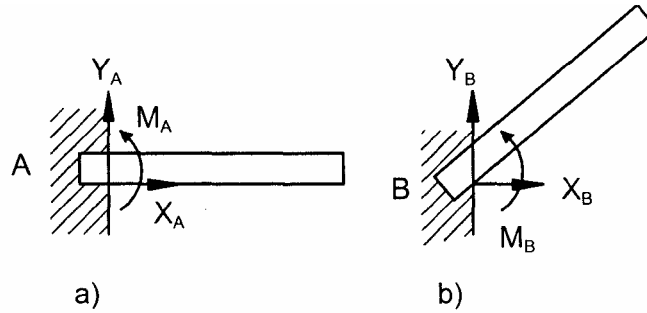
Hình 1.6

Phản lực liên kết gồm ba phần lực tương ứng vuông góc, chiều giả thiết \vec{X}_A ; \vec{Y}_A ; \vec{Z}_A

Chú ý: Nếu các lực hoạt động nằm trong một mặt phẳng thì các phản

lực liên kết cũng chỉ có các thành phần nằm trong mặt phẳng đó.

f. *Liên kết ngàm*: Vật khảo sát liên kết với cột gậy liên kết bó cứng (gắn cứng) (hình 1.7)

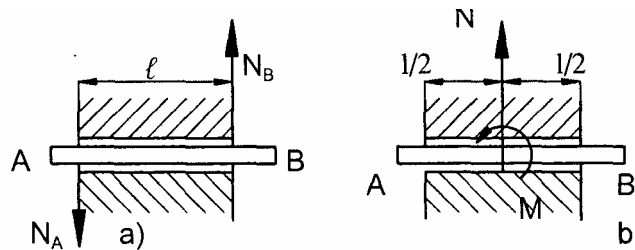


Hình 1.7

Phản lực liên kết gồm hai thành phần lực vuông góc, chiều được giả thiết và một ngẫu lực có momen M , chiều được giả thiết.

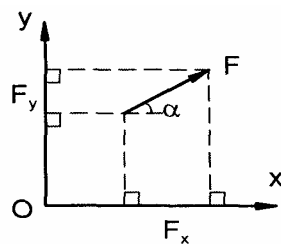
g. *Liên kết rãnh trượt*.

Khi rãnh trượt có độ dài l , ta có thể coi là liên kết tựa tại hai điểm hoặc liên kết nhàm có một lực \vec{N} và một ngẫu lực M (hình 1.8)

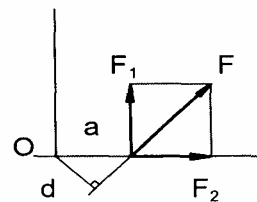


Hình 1.8

II. Chiều lực lên hai trục. Mômen của lực đối với một điểm



Hình 1.9



Hình 1.10

Công thức chiếu lực lên hai trục vuông góc (hình 1.9)

$$F_x = \pm F \cos \alpha$$

$$F_y = \pm F \sin \alpha$$

Nếu $\vec{F} \perp Ox$, hình chiếu $F_x = 0$

Nếu $\vec{F} // OX$, hình chiếu $F_x = \pm F$

(lấy dấu (+) hoặc (-) tùy thuộc vào \vec{F} thuận hoặc ngược chiều trục)

Lấy momen của lực \vec{F} đối với điểm O có hai cách (hình 1.10) áp dụng

định nghĩa: $\overline{m}_0 (\vec{F}) = \pm dF$

Lấy dấu + (-) khi lực quay ngược (thuận) chiều kim đồng hồ quanh O Phân tích lực ra các thành phần thích hợp (hình 1.10)

thí dụ: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\overline{m}_o(\vec{F}) = \overline{m}_o(\vec{F}_1) + \overline{m}_o(\vec{F}_2) = \overline{m}_o(\vec{F}_1) = aF_1$$

III. Các dạng phương trình cân bằng (PTCB)

Đối với hệ lực phẳng tổng quát, ta có thể dùng một trong ba dạng PTCB sau:

Dạng 1:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad (1); \quad \sum F_{ky} = 0 \quad (2); \quad \sum m_o(\vec{F}_k) = 0 \quad (3)$$

Trong đó (1) và (2): Tổng hình chiếu các lực lên hai trục vuông góc;

(3): tổng mômen các lực đối với điểm O tùy ý.

Dạng 2:

$$\sum F_{kx} = 0 \quad (1); \quad \sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \quad (2) \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0 \quad (3)$$

Trong đó: đoạn AB không vuông góc với trục x.

Dạng 3:

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0 \quad (1); \quad \sum m_B(\vec{F}_k) = 0 \quad (2); \quad \sum m_C(\vec{F}_k) = 0, \quad (3)$$

trong đó: A, B, C không thẳng hàng.

Đối với hệ lực phẳng đồng quy hoặc song song, ta chỉ lập được hai PTCB.

Bài tập giải sẵn:

Thí dụ 1-1:

Thanh OA trọng lượng không đáng kể, có liên kết và chịu lực như (hình 1.11) biết $OB = 2BA$, góc $\alpha = 30^\circ$

Tìm phản lực tại O và sức căng của dây.

Bài giải

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết

Xét OA: tại O - liên kết bản lề, tại B - liên kết dây

Hệ lực cân bằng

$$\vec{P}, \vec{T}, \vec{X}_0, \vec{Y}_0 \equiv 0 \rightarrow$$

Hệ lực phẳng tổng quát

2. Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_0 - T \cos 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_0 + T \sin 30^\circ - P = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_o = P \cdot OA + T \cdot OB \sin 30^\circ = 0 \quad (3)$$

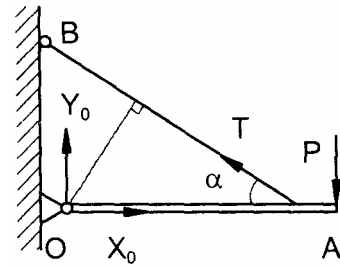
3. Giải hệ phương trình

$$T = 3P; X_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2}; Y_0 = \frac{P}{2}$$

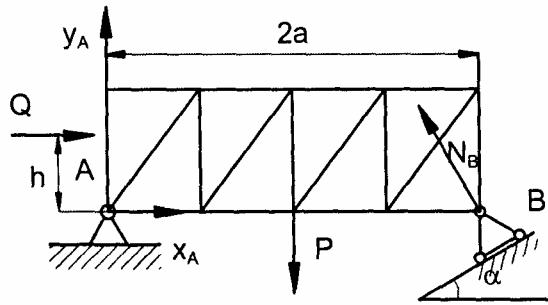
Thí dụ 1-2:

Cầu đồng chất AB trọng lượng \vec{P} chịu lực \vec{Q} và có liên kết như hình

1.12), góc $\alpha = 30^\circ$. Tìm phản lực tại A và B.



Hình 1.11



Hình 1.12

Bài giải

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết:

Xét cầu: tại A - liên kết bản lề, tại B - liên kết con lăn (tựa)

Hệ lực cân bằng:

$$(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}^A, \vec{Y}^A, \vec{N}^B) \equiv 0 \rightarrow \text{Hệ lực phẳng tổng quát}$$

2. Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = Q + X_A - N_B \sin 30^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = -P + Y_A + N_B \cos 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B = aP - hQ - 2aY_A = 0 \quad (3)$$

3. Giải hệ phương trình:

$$X_A = \frac{P\sqrt{3}}{6} + Q\left(\frac{h\sqrt{3}}{6a} - 1\right); Y_A = \frac{P}{2} - \frac{hQ}{2a}; N_B = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(P + \frac{hQ}{a}\right)$$

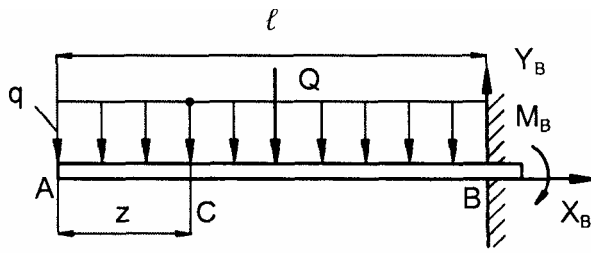
Thí dụ 1-3:

Thanh AB trọng lượng không đáng kể, có liên kết và chịu lực như (hình 1.13). Cường độ lực phân bố là q (N/m)

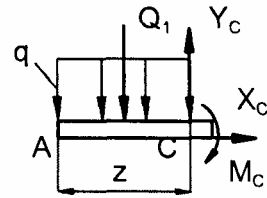
Tìm:

- Phản lực tại B
- Nội lực tại mặt cắt C, cách đầu A một đoạn Z

Bài giải:



Hình 1.13



Hình 1.14

I. Tìm phản lực tại B

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết

Xét AB: tại B - liên kết ngàm

Hệ lực cân bằng: Khi thay hệ lực phân bố bởi lực tập trung \vec{Q} đặt ở giữa thanh và $Q = ql$, ta có:

$$\left(\vec{Q}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{M}_B \right) \equiv 0 \rightarrow \text{Hệ lực phẳng tổng quát}$$

2. Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_B = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = Y_B - Q = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_B = \frac{1}{2} l Q - M_B = 0 \quad (3)$$

3. Giải hệ phương trình:

$$X_B = 0; Y_B = ql; M_B = \frac{ql^2}{2}$$

II. Tìm nội lực tại mặt cắt C (hình 1.14)

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động, và lực liên kết:

Xét AC: Tại C - liên kết ngàm với CB

Hệ lực cân bằng: Khi thay hệ lực phân bố trên đoạn AC bởi lực \vec{Q}_1 đặt ở giữa AC và $Q_1 = qz_1$, ta có:

$$\left(\vec{Q}_1, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{M}_C \right) \equiv 0 \rightarrow \text{Hệ lực phẳng tổng quát}$$

2. Phương trình cân bằng:

$$\Sigma F_{kx} = X_c = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_c - Q_1 = 0 \quad (6)$$

$$\Sigma m_c = \frac{z}{2} Q_1 - M_c \quad (7)$$

3. Giải hệ phương trình:

$$X_c = 0; Y_c = qZ; M_c = \frac{qZ^2}{2} ; \text{ Với } 0 \leq Z \leq 1$$

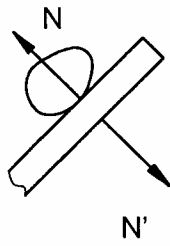
1.2. Bài toán hệ vật không có ma sát

Vấn đề cần chú ý:

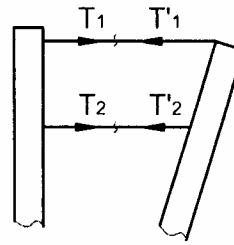
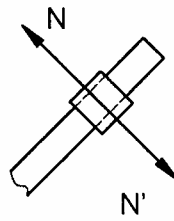
Lực liên kết các vật thuộc hệ

Xét hệ gồm nhiều vật liên kết với nhau. Lực liên kết giữa các vật thuộc hệ, do đó khi tách vật tại liên kết nào đó ta phải đặt tại liên kết đó những cặp lực có cùng một đường tác dụng, cùng trị số, ngược chiều nhưng đặt trên hai vật khác nhau:

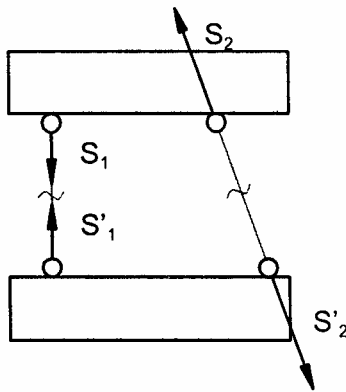
- Tách vật tại liên kết tựa. (hình 1.15)
- Tách vật tại liên kết dây. (hình 1.16)
- Tách vật tại liên kết thanh. (hình 1.17)
- Tách vật tại liên kết bản lề. (hình 1.18)
- Tách vật tại liên kết ngàm. (hình 1.19)



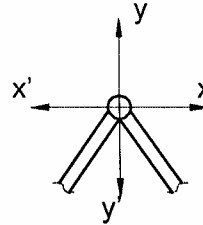
Hình 1.15



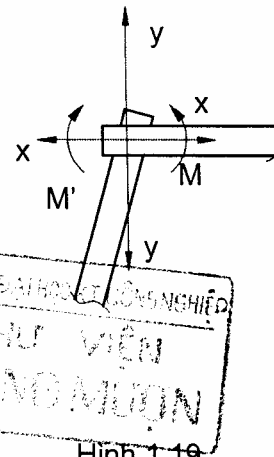
Hình 1.16



Hình 1.17



Hình 1.18



Hình 1.19

Bài tập giải sẵn :

Thí dụ 1- 4: (Phương pháp tách vật)

Thanh đồng chất $OA = 6a$, trọng lượng P .

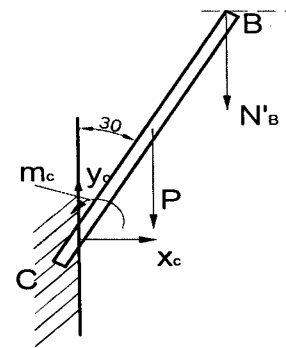
Thanh đồng chất $BC = 4a$, trọng lượng P

Lực Q thẳng đứng, đặt ở đầu A

Tìm phản lực liên kết tại O , B , và C (hình 1.20).

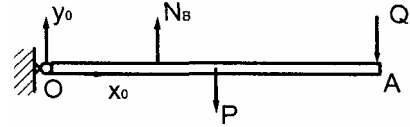
Bài giải :

1. Tách vật tại liên kết, đặt lực hoạt động và lực liên kết lên từng vật



a)

- Xét OA :
 Tại O - liên kết bản lề, tại B - liên kết
 tựa.



Hệ lực $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{N}_B) \equiv 0$

-Xét CB : Tại C - liên kết ngàm,
 Tại B - liên kết tựa :

Hệ lực $(\vec{P}, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{N}'_B) \equiv 0$

2 Phương trình cân bằng (PTCB) :

- PTCB của OA :

$$\Sigma F_{kx} = X_0 = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_0 + N_B - P - Q = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma m_0 = 2aN_B - 3aP - 6aQ = 0 \quad (3)$$

- PTCB của CB :

$$\Sigma F_{kx} = X_C = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_C - p - N'_B = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma m_C = M_C - ap - 2aN'_B = 0 \quad (6)$$

3. Giải hệ phương trình : chú ý $N_B = N'_B$:

$$X_0 = 0; Y_0 = -\frac{P}{2} - 2Q \quad ; \quad N_B = \frac{3}{2}P + 3Q$$

$$X_C = 0; Y_C = p + \frac{3}{2}P + 3Q; M_C = a.(3P + 6Q - p)$$

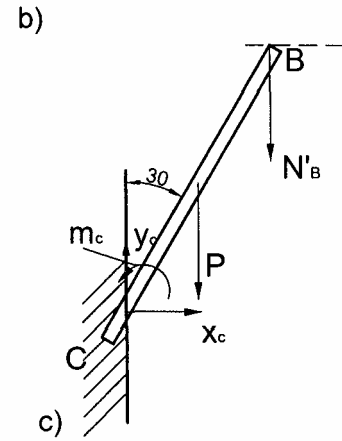
Nhận xét : Nếu xét cả hệ như một vật rắn thì :

$$(\vec{p}; \vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{X}_C, \vec{Y}_C, \vec{M}_C) \equiv 0$$

khi đó mỗi PTCB đều chứa hai ẩn, do đó phương pháp xét cả hệ không thuận lợi.

Thí dụ 1-5 : (Phương pháp xét cả hệ rồi tách vật)

Cầu ABC gồm 2 phần giống nhau trọng lượng mỗi phần là P, phần



Hình 1.20

cầu AB chịu lực \vec{Q} , các kích thước được cho ở (hình 1.21).

Tìm các phản lực liên kết tại A, B, C

Bài giải :

1) Tách vật tại liên kết, đặt lực hoạt động và lực liên kết tên từng vật :

-Xét cả hệ :

Tại A và C là liên kết bản lề :
Hệ lực

$$(\vec{P}; \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \equiv 0$$

- Xét phần BC :

Tại B và C là liên kết bản lề hệ lực

$$(\vec{P}, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{X}_C, \vec{Y}_C) \equiv 0$$

Phương trình cân bằng : PTCB

của cả hệ :

$$\Sigma m_A = -aP - 2aQ - 5aP + 6aY_C$$

$$\Sigma m_C = aP + 4aQ + 5aP - 6aY_A$$

$$\Sigma F_{kx} = X_A + X_B = 0$$

PTCB của BC :

$$\Sigma F_{kx} = X_B + X_C = 0$$

$$\Sigma F_{ky} = Y_B + Y_C - P = 0$$

$$\Sigma m_B = -2aP + 3aY_C + 3aX_C = 0$$

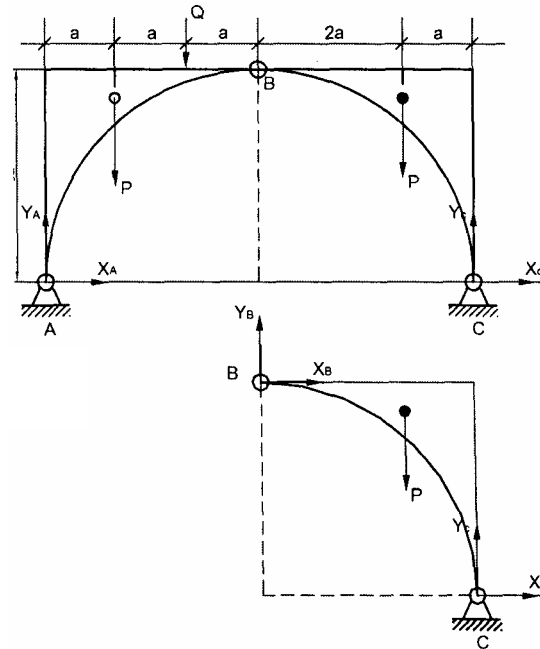
Giải hệ phương trình :

$$X_A = -X_C = \frac{1}{3}(P + Q); Y_A = P + \frac{2}{3}Q$$

$$X_B = -X_C = \frac{1}{3}(P + Q); Y_B = -\frac{1}{3}Q$$

$$Y_C = P + \frac{1}{3}Q$$

Nhận xét : Nếu dùng phương pháp tách vật thì phải xét phần Ab và phần BC.



Hình 1.21

Hệ lực đặt vào AB là : $(\vec{P}, \vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{X}'_B, \vec{Y}'_B,) \equiv 0$ với

$$\vec{X}_B = \vec{X}'_B, \vec{Y}_B = -\vec{Y}'_B, \text{ giá trị } \vec{X}_B = \vec{X}'_B, \vec{Y}_B = -\vec{Y}'_B,$$

Khi đó mỗi PTCB của từng vật đều chứa 2 ân do đó phương pháp tách vật không thuận lợi.

1.3. BÀI TOÁN CÓ MA SÁT

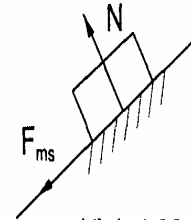
Xét vật A tựa lên vật B. Nếu vật A có xu hướng trượt và lăn tương đối trên B, ngoài phản lực pháp tuyến N, vật A còn chịu lực ma sát trượt

\vec{F}_{ms} và ngẫu lực ma sát lăn \vec{M}_{ms} .

Nếu chỉ có xu hướng trượt thì lực ma sát ngược với xu hướng trượt và có trị số bị chặn (hình 1.22):

$$F_{ms} = f.N$$

f: hệ số ma sát trượt. Nếu đặt $f = \operatorname{tg} \varphi$ thì φ gọi là góc ma sát.

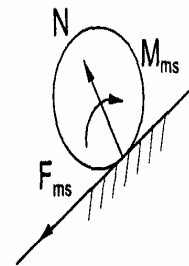


Hình 1.22

Nếu vật chỉ có xu hướng lăn thì ngoài \vec{N} và \vec{F}_{ms} vật còn chịu ngẫu lực ma sát lăn ngược với xu hướng lăn và có trị số bị chặn (hình 1.23)

$$M_{ms} \leq k.N$$

k: hệ Số ma sát lăn đơn vị là mét (m).



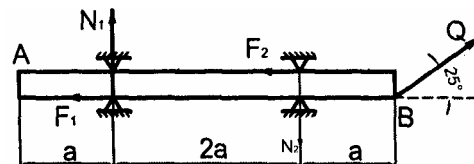
Hình 1.23

Bài tập giải sẵn :

Thí dụ 1-6 : (Một vật có lực ma sát trượt)

Thanh AB = 4a, trọng lượng và bề dày không đáng kể, nằm ngang trên 2 ổ đỡ. Lực kéo \vec{Q} tạo với

phương ngang một góc α . Hệ số ma sát tại 2 ổ đỡ là f (Hình 1.24).



Hình 1.24

Tin góc α để thanh không bị trượt đi dù Q rất lớn (tự hãm).

Bài giải :

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết.

Xét AB : Tại C và D - liên kết tựa có ma sát (căn cứ xu hướng chuyển động để đặt \vec{N}_1, \vec{N}_2 và các lực ma sát \vec{F}_1, \vec{F}_2

$$\text{Hệ lực } (\vec{Q}, \vec{N}_1, \vec{F}_1, \vec{N}_2, \vec{F}_2) \equiv 0$$

2. Phương trình cân bằng :

$$\Sigma F_{kx} = Q \cos \alpha - F_1 - F_2 = 0(1)$$

$$\Sigma F_{ky} = Q \sin \alpha + N_1 - N_2 = 0(2)$$

$$\Sigma m_C = 3aQ \sin \alpha - 2aN_2 = 0(3)$$

Điều kiện cân bằng giới hạn (sắp trượt):

$$F_1 = f \cdot N_1 ; F_2 = f N_2$$

3. Giải hệ phương trình :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2f} \text{ hay } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2f}$$

Muốn thanh cân bằng cần

$$\alpha > \operatorname{arctg} \frac{1}{2f}$$

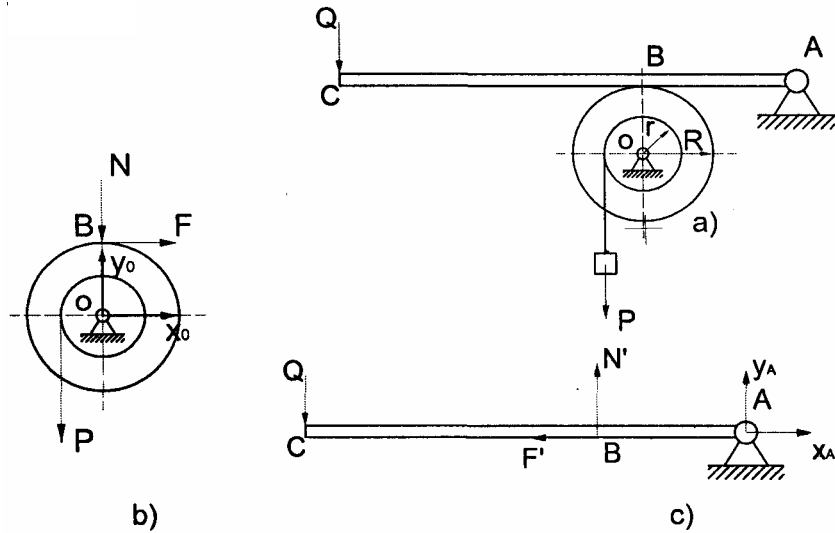
Thí dụ 1-7 : (Hệ vật có lực ma sát trượt)

Trục O có bán kính r và R, hệ số ma sát tại má hãm là f, tỉ số

$$\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Tìm lực Q để hãm được trục. Bỏ qua bề dày má phanh (Hình 1.25).

Bìa giải



Hình 1.25

1. Tách vật tại liên kết, đặt lực hoạt động và lực liên kết lên từng vật

Xét trục O :

Tại O : Liên kết bản lề, tại B - liên kết tựa có ma sát.

$$\text{Hệ lực } (\vec{P}, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{N}, \vec{F}) \equiv 0$$

Xét đòn AC :

Tại A - liên kết bản lề, tại B - liên kết tựa có ma sát

$$\text{Hệ lực } (\vec{Q}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}', \vec{F}') \equiv 0$$

2. Phương trình cân bằng :

$$\text{PTCB của trục O : } \Sigma m_o = rP - RF = 0(1)$$

PTCB của AC :

$$\Sigma m_A = AC.Q - AB.N' = 0(2)$$

Điều kiện cân bằng giới hạn : $F = fN$

3. Giải hệ phương trình :

$$Q = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{P}{f}$$

Muốn hãm được trục thì :

$$Q > \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{P}{f}$$

Thí dụ 1-8 (Một vật có lực ma sát trượt và ma sát lăn)

Đĩa đồng chất, bán kính R, trọng lượng P, chịu tác dụng lực Q đặt tại tâm O và nghiêng góc α , hệ số ma sát trượt là f, hệ số ma sát lăn là k (hình 1-26).

Tim trị số Q để đĩa cân bằng.

Bài giải.

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết.

Xét đĩa :

Tại 1 : - liên kết tựa có ma sát trượt và ma sát lăn.

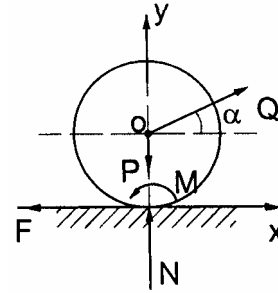
$$\text{Hệ lực } (\vec{Q}, \vec{P}, \vec{N}, \vec{F}, \vec{M}) \equiv 0$$

2. Phương trình cân bằng :

$$\Sigma F_{kx} = Q \cos \alpha - F = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_{ky} = Q \sin \alpha + N - P = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma m_1 = M - RQ \cos \alpha = 0 \quad (3)$$



Hình 1.26

Điều kiện ma sát :

$$F \leq fN ; M \leq kN$$

3. Giải hệ phương trình :

$$F = Q \cos \alpha ; M = RQ \cos \alpha ; N = P - Q \sin \alpha$$

Khi thay vào điều kiện ma sát, ta được :

$$Q \leq \frac{fP}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = Q_1 \quad Q \leq \frac{\frac{k}{R} \cdot P}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = Q_2$$

Vì vậy điều kiện cân bằng của đĩa là $Q \leq \min \{ Q_1, Q_2 \}$

Bài tập cho đáp số

I. Hệ lực phẳng (một vật)

1.1 Xe C mang vật nặng (hình bài 1.1)

$P_1 = 40 \text{ kN}$ chạy trên một dầm nằm ngang AB; dầm này đồng chất, trọng lượng $P = 60 \text{ kN}$, tựa trên hai ray A và

B. Tính phản lực A và B theo tỷ số

$$n = \frac{AC}{AB}$$

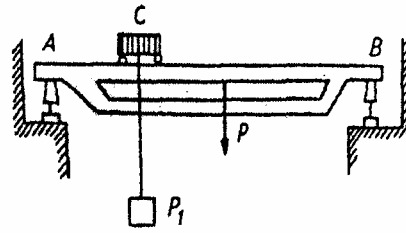
1.2 Trục nằm ngang trên hai ổ đỡ A, B mang ba đĩa có trọng lượng $P_1 = 3 \text{ kN}$, $P_2 = 5 \text{ kN}$, $P_3 = 2 \text{ kN}$. Kích thước ghi trên (hình bài 1.2), trọng lượng của trục không đáng kể, tìm phản lực các ổ đỡ

1.3. Dầm AB mắc vào tường nhờ bản lề A và được giữ ở vị trí nằm ngang nhờ thanh CD; thanh này có hai đầu là bản lề và nghiêng 60° với AB. Bỏ qua trọng lượng của dầm và thanh, biết $AC = 2 \text{ m}$, $CB = 1 \text{ m}$. (hình bài 1.3)

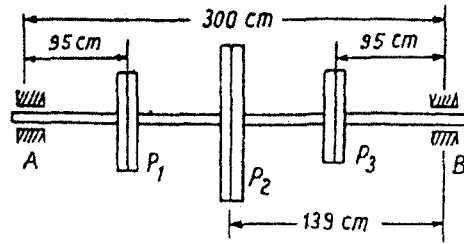
Tìm ứng lực của thanh CD và phản lực bản lề A khi đầu B đặt lực thẳng đứng $P = 10 \text{ kN}$.

1.4. Khung chữ nhật ABCD, trọng lượng không đáng kể, kích thước như (hình bài 1.4), được đỡ bằng gối cố định A và gối di động D. Dọc cạnh BC, tác dụng lực P. Tìm phản lực tại A và D.

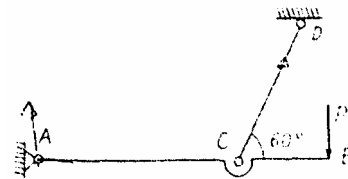
1.5. Dầm $AB = 4a$ chịu lực P và hệ lực phân bố đều cường độ q như (hình bài 1.5). Tìm phản lực tại A và B



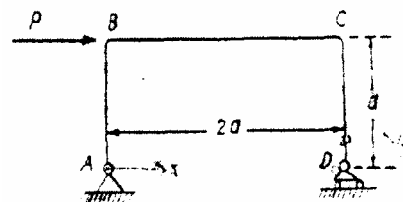
Hình bài 1.1



Hình bài 1.2



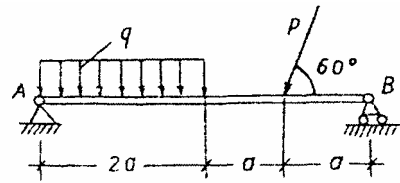
Hình bài 1.3



Hình bài 1.4

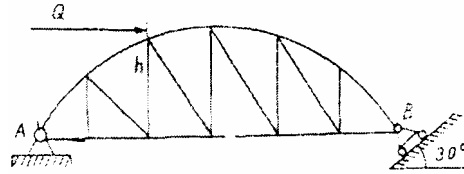
1.6. Cầu đồng chất $AB = 2a$.

trọng lượng P nằm ngang trên gối cố định A và di động B . Ở tầm cao h có lực gió Q . Xác định phản lực tại A và B (hình bài 1.6)



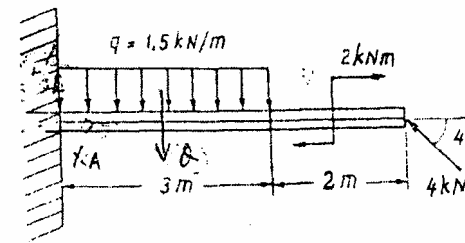
Hình bài 1.5

1.7. Xác định phản lực ở ngàm của dầm nằm ngang, trọng lượng không đáng kể, chịu lực như (hình bài 1.7)



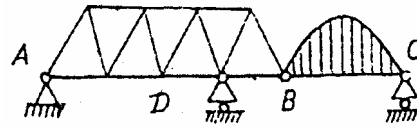
Hình bài 1.6

1.8 Cầu hai nhịp đồng chất. Nhịp $AB = 80m$, trọng lượng $P = 1200kN$, nhịp $BC = 40m$, trọng lượng $Q = 600kN$ nối với nhau bằng bản lề B và được đỡ nằm ngang nhờ các gối cố định A , gối di động C và D , ($BD = 20m$). Xác định phản lực các gối đỡ và lực tác dụng tương hỗ ở B (hình bài 1.8)



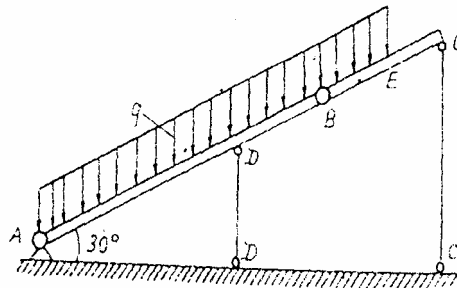
Hình bài 1.7

1.9 Một đường dốc nghiêng góc 30° gồm hai đoạn $AB = 60m$ và $BC = 20m$ nối với nhau bằng bản lề B và được giữ bởi gối cố định A (bản lề), hai cột CC và DD . Bỏ qua trọng lượng của dầm và các cột Trên đoạn AE có lực phân bố thẳng đứng cường độ lực phân bố là $q = 20 kN/m$. Tìm phản lực tại A , ứng lực các cột và lực tác dụng tương hỗ tại B . Cho $AD = 40m$, $AE = 70 m$ (hình bài 1.9)



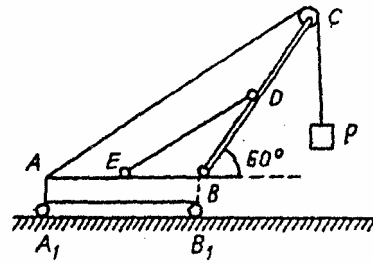
Hình bài 1.8

1.10 Trên đường nằm ngang có xe AB trọng lượng Q mang cần BC trọng lượng Q mang cần BC trọng lượng q ,



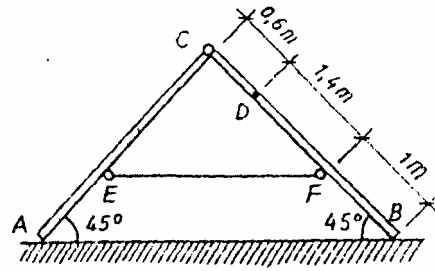
Hình bài 1.9

quay được quanh trục B và giữ được bởi dây ED, vòng qua đầu mút C là dây mang vật nặng P, có đầu kia buộc vào A. Cho $AE = EB = BD = DC$ và cần BC nghiêng 60° với mặt đường. Tìm phản lực đặt vào hai bánh xe A_1, B_1 sức căng của dây ED và lực tác dụng tương hỗ tại bản lề B (hình bài 1.10).



Hình bài 1.10

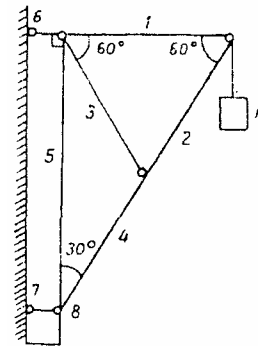
1.11 Trên nền nằm ngang đặt thang hai chân gối với nhau nhờ bản lề C và dây EP. Trọng lượng mỗi chân thang (đồng chất) là 120N. Tại D có người nặng 720N, kích thước ghi trên (hình bài 1.11). Tìm phản lực tại A, B và sức căng của dây.



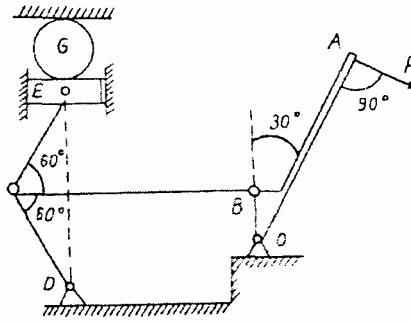
Hình bài 1.11

1.12 Giàn gồm các thanh như (hình bài 1.12) bỏ qua trọng lượng các thanh, tìm ứng lực của chúng khi vật nặng có trọng lượng P.

1.13 Cho cơ cấu ép như hình bài 1.13 lực P làm quay đòn OBA, kéo thanh BC, đẩy pittông E ép vào vật G. Cho $OB = \frac{1}{10} OA$. Các góc ghi trên (hình bài 1.13). Tìm lực nén vào G. Hướng dẫn: Quy hệ về ba vật: đòn OBA, nút C và pittông E.

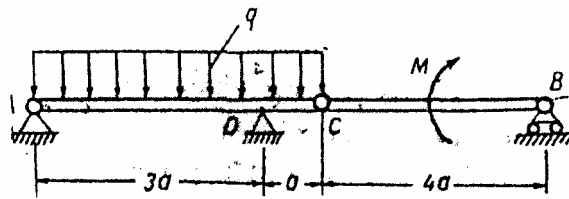


Hình bài 1.12



Hình bài 1.13

1.14 Hệ hai dầm AC và CB như (hình bài 1.14) ngẫu lực có momen $M = 20 \text{ Nm}$, cường độ lực phân bố đều $q = 10 \text{ N/m}$; $a = 1 \text{ m}$. Tìm phản lực tại A, B, D và nội lực tại C.

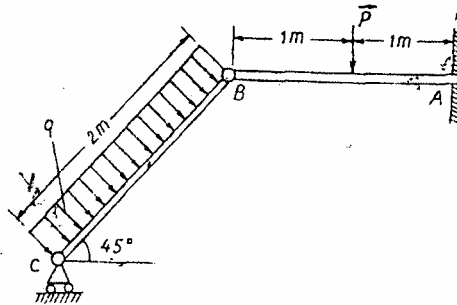


Hình bài 1.14

1.15 Hai dầm AB và BC có liên kết và chịu lực như (hình bài 1.15) biết:

$P = 100 \text{ N}$; lực phân bố $q = 20 \text{ N/m}$.

Tìm phản lực tại A, C và nội lực tại B.



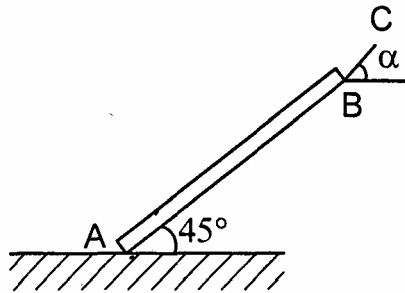
Hình bài 1.15

III. Hệ lực phẳng (có ma sát)

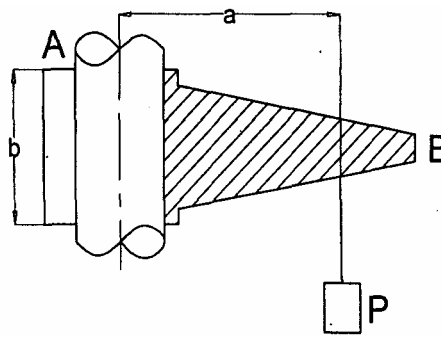
1.16 Thanh đồng chất AB có trọng lượng P, tựa lên nền ngang, hệ số

ma sát giữa thanh và nền là f . Thanh được giữ cân bằng ở vị trí nghiêng 45° nhờ dây BC. Tìm góc nghiêng α của dây khi thanh ở trạng thái sắp trượt (hình bài 1.16).

1.17 Giá đỡ AB trọng lượng không đáng kể, đầu A là ống trụ chiều dài $b = 2 \text{ cm}$ trượt dọc cột thẳng đứng không nhẵn với hệ số ma sát trượt là $f = 0,1$. Xác định khoảng cách a từ giữa trục của cột tới điểm treo vật P để giá đỡ cân bằng (hình bài 1.17)



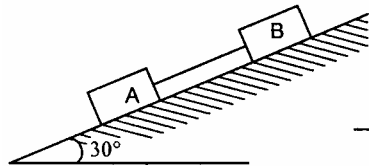
Hình bài 1.16



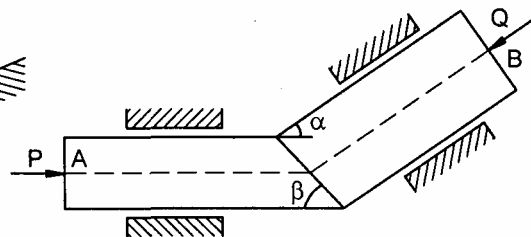
Hình bài 1.17

1.18 Trên mặt phẳng nghiêng một góc 30° với mặt nằm ngang có hai vật A và B, trọng lượng 200N và 400N nối với nhau bằng sợi dây. Biết hệ số ma sát giữa A và B với mặt nghiêng là $f_A = 0,5$ và $f_B = 2/3$.

Hệ hai vật có cân bằng không? Tìm sức căng T của dây và trị số các lực ma sát (hình bài 1.18)



Hình bài 1.18



Hình bài 1.19

1.19 Lực nằm ngang P đặt vào nêm A làm cho nó có xu hướng trượt sang bên phải và đẩy nêm B trượt lên cao theo máng trượt nghiêng một góc α với mặt nằm ngang. Góc nghiêng của mặt tiếp xúc giữa hai nêm là β (hình bài 1.19). Tìm lực Q phải tác dụng dọc nêm B để có cân bằng

trong các trường hợp sau:

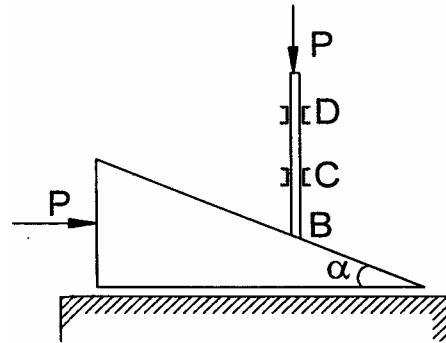
1. Khi bỏ qua ma sát.
2. Khi giữa hai nêm có ma sát hệ số f và nêm B ở trạng thái sắp trượt lên cao. Tìm điều kiện xảy ra tự hãm của nêm B.

1.20 Lực nằm ngang P đặt vào nêm A làm cho nó có xu hướng trượt sang phải và đẩy cần BCD trượt thẳng đứng lên cao, cần này được định hướng bằng hai giá đỡ C và D.

Biết góc nghiêng của nêm A là α_1 đoạn $BC = CD$, tìm lực Q phải nén xuống cần để cân bằng trong các trường hợp sau:

1. Khi bỏ qua ma sát.
2. Khi có ma sát hệ số f tại C và D và cần BD ở trạng thái sắp trượt lên cao.

Trong điều kiện nào xảy ra tự hãm (cân bằng $Q=0$ mà P rất lớn) (hình bài 1.20)



Hình bài 1.20

Chương 2 CÂN BẰNG CỦA HỆ LỰC KHÔNG GIAN

Vấn đề cần chú ý :

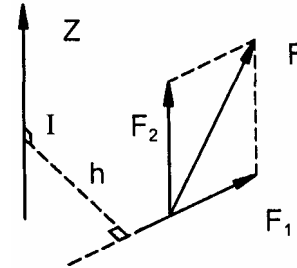
I. Chiếu lực lên ba trục. Mômen của lực đối với một trục

- Gọi xyz là trục tọa độ vuông góc và α, β, γ là các góc mà lực \vec{F} tạo với ba trục, ta có công thức chiếu lực:

$$F_x = \pm F \cos \alpha; F_y = \pm F \cos \beta; F_z = \pm F \cos \gamma \text{ lấy}$$

dấu + hoặc dấu - khi lực \vec{F} thuận hay ngược chiều trục tọa độ.

- Lấy mômen của \vec{F} đối với một trục. Phân tích lực ra các thành phần song song, hoặc cắt trục hoặc vuông góc với các trục. Tính tổng mômen các thành phần lực đối với trục (hình 2.1).



Hình 2.1

Thí dụ :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; \vec{F}_2 // Z \text{ và } \vec{F} \perp Z$$

$$m_z(\vec{F}) = m_z(\vec{F}_1) + m_z(\vec{F}_2) = m_z(\vec{F}_1 \pm h_1 F_1)$$

Lấy dấu +(hoặc -) khi nhìn ngược chiều dương của trục Z ta thấy \vec{F} quay quanh Z ngược (hoặc thuận) chiều kim đồng hồ.

II. Các phương trình không gian tổng quát

$$\sum F_{kx} = 0 \quad (1) \quad \sum m_x(\vec{F}_k) = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad (2) \quad \sum m_y(\vec{F}_k) = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_{kz} = 0 \quad (3) \quad \sum m_z(\vec{F}_k) = 0 \quad (6)$$

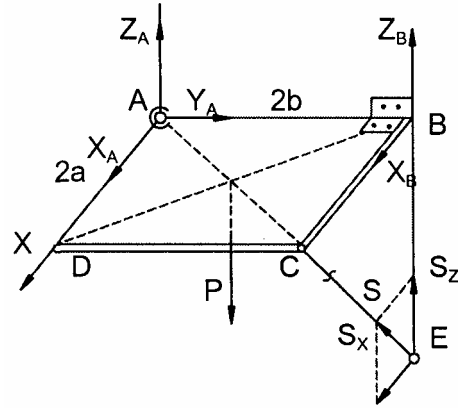
Trong đó : (1), (2), (3) : tổng hình chiếu các lực lên ba trục; (4), (5), (6) : tổng mômen của các lực đối với ba trục.

- Đối với hệ lực không gian đồng quy hoặc song song ta chỉ lập được ba PTCB.

Bài tập giải sẵn :

Thí dụ 2-1

Tấm chữ nhật trọng lượng P được giữ nằm ngang nhờ liên kết cầu A, bản lề B và thanh CE tạo với phương thẳng đứng góc 30° . Tìm phản lực tại A, B và lực nén thanh CE (hình 2.2).



Hình 2.2

Bài giải :

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết

Xét tấm ABCD : tại A - liên kết cầu tại B - liên kết bản lề, tại C - liên kết thanh.

$$\text{Hệ lực cân bằng } (\vec{P}, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B, \vec{Z}_B, \vec{S}) \equiv 0$$

2. Phương trình cân bằng : Đặt $AB = 2b$; $AD = 2a$.

$$\sum F_{kX} = X_A + X_B + S \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{kY} = Y_A = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_{kZ} = Z_A + Z_B + S \cdot \sin 60^\circ - P = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_X = -b \cdot P + 2b \cdot Z_B + 2b \cdot S \cdot \sin 60^\circ = 0 \quad (4)$$

$$\sum m_Y = a \cdot P - 2a\sqrt{3} \cdot S \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\sum m_Z = -2b \cdot X_B - 2b \cdot S \cdot \cos 60^\circ = 0 \quad (6)$$

3. Giải hệ phương trình

$$S = \frac{P\sqrt{3}}{3}; X_A = 0; Y_A = 0; Z_A = \frac{P}{2}; X_B = -\frac{P\sqrt{3}}{6}; Z_B = 0$$

Thí dụ 2-2

Tấm phẳng chịu lực P và được giữ bởi 6 thanh như (hình 2.3). Bỏ qua

trọng lượng tấm và các thanh. Toàn hình có dạng khối lập phương.

Tìm lực kéo nén thanh.

Bài giải :

1. Chọn vật khảo sát, đặt lực hoạt động và lực liên kết thanh. Giả thiết các S_i đều hướng vào mặt cắt của thanh (tức là giả thiết các thanh đều chịu nén)

Hệ lực cân bằng

$$(\vec{P}_1, \vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6) \equiv 0$$

2. Phương trình cân bằng:

Đặt cạnh hình hộp là a

$$\sum F_{kx} = S_2 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = P + S_4 \cos 45^\circ \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = S_1 + S_2 \cos 45^\circ + S_3 + S_4 \cos 45^\circ + S_5 \cos 45^\circ + S_6 = 0 \quad (3)$$

$$\sum m_x = -aP + aS_1 + aS_2 \cos 45^\circ + aS_3 = 0 \quad (4)$$

3. Giải hệ phương trình

$$S_1 = -P; S_2 = P\sqrt{2}; S_3 = P; S_4 = -P\sqrt{2}; S_5 = -P\sqrt{2}; S_6 = P$$

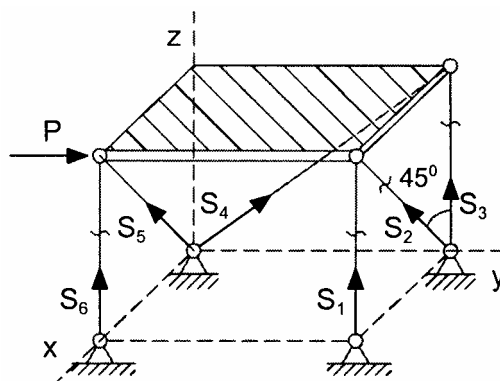
Nhận xét: Các vectơ $\vec{S}_1, \vec{S}_4, \vec{S}_5$ giả thiết sai về chiều, do đó các thanh 1, 4, 5 chịu kéo, các thanh khác bị nén.

Thí dụ 2-3

Trục nằm ngang mang hai đĩa tròn.

Đĩa 1 có bán kính R, chịu tác dụng ngẫu lực M, đĩa 2 có bán kính r, chịu tác dụng lực \vec{P} đặt ở vành và tạo với phương ngang x một góc α . Khoảng cách a được cho trên hình vẽ. Bỏ qua trọng lượng trục và các đĩa

Xác định ngẫu lực M để có cân bằng và tìm các phản lực liên kết tại A và B (hình 2.4).



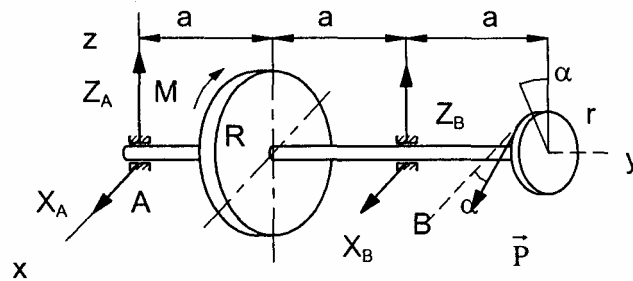
Hình 2.3

Bài giải:

1. Chọn vật khảo sát, đặt các lực hoạt động và lực liên kết:

Xét cả hệ (trục và hai đĩa): tại A và B là liên kết bản lề (ổ trục)

Hệ lực cân bằng: $(\vec{P}, \vec{M}, \vec{X}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Z}_B) \equiv 0$



Hình 2.4

2. Phương trình cân bằng:

$$\sum F_{kx} = X_A + X_B + P \cos \alpha = 0 \quad (1) \quad \sum m_x = 2aZ_B - 3a P \sin \alpha = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_{ky} \equiv 0 \quad (2) \quad \sum m_y = -M + RP = 0 \quad (5)$$

$$\sum F_{kz} = Z_A + Z_B - P \sin \alpha = 0 \quad (3) \quad \sum m_z = -2aX_B - 3a P \cos \alpha = 0 \quad (6)$$

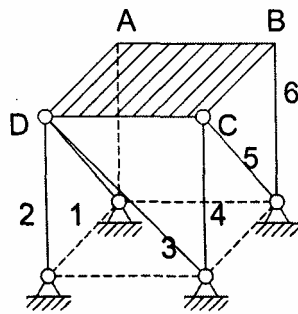
3. Giải hệ phương trình

$$M = RP; X_A = \frac{P}{2} \cdot \cos \alpha; Z_A = -\frac{P}{2} \cdot \sin \alpha; X_B = -\frac{3}{2} P \cdot \cos \alpha; Z_B = \frac{3}{2} \cdot P \cdot \sin \alpha$$

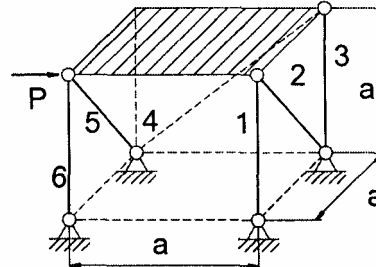
Bài tập cho đáp số :

2.1. Tấm phẳng đồng chất hình vuông trọng lượng P được đỡ ở vị trí nằm ngang nhờ sáu thanh (không trọng lượng) bố trí như (hình bài 2.1).

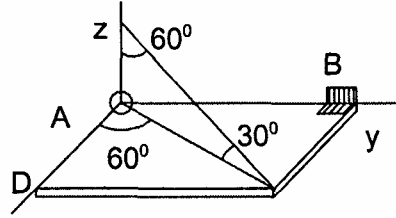
Toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm ứng lực các thanh.



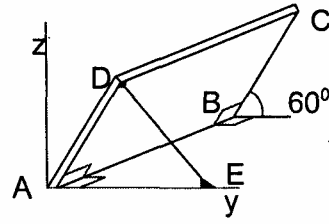
Hình bài 2.1



Hình bài 2.2



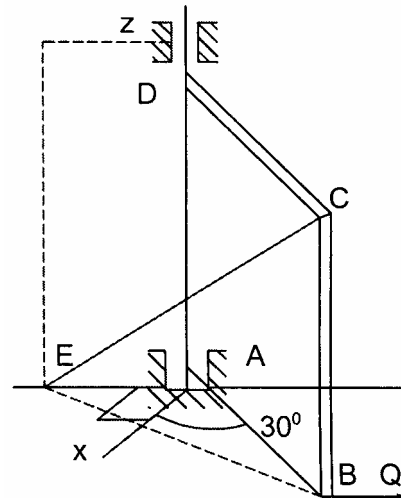
Hình bài 2.3



Hình bài 2.4

2.2. Tấm phẳng chịu lực \vec{P} và được đỡ ở vị trí nằm ngang nhờ 6 thanh như (hình bài 2.2). Bỏ qua trọng lượng của tấm và các thanh, toàn hình có dạng khối lập phương. Tìm ứng lực các thanh.

2.3. Tấm phẳng đồng chất hình chữ nhật, trọng lượng 200N, lắp vào tường nhờ gối cầu A và bản lề B và được giữ cân bằng ở vị trí nằm ngang nhờ dây CE nghiêng 60° Với đường thẳng đứng AE. Biết đường chéo AC nghiêng 60° với cạnh AD, tìm phản lực ở A, B và sức căng dây (hình bài 2.3)



Hình bài 2.5

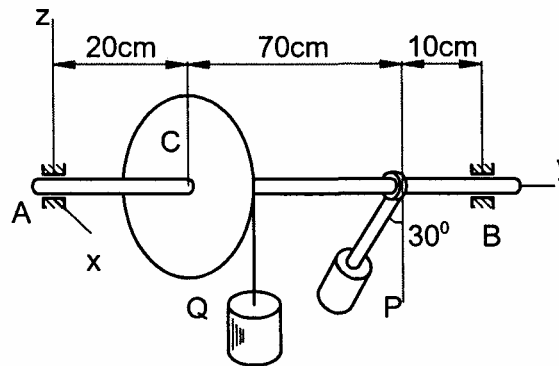
2.4. Tấm phẳng hình chữ nhật ABCD, đồng chất, trọng lượng $P=120N$, gắn với nền nhờ hai bản lề A, B và được đỡ cân bằng ở vị trí nghiêng 60° nhờ thanh chống (không trọng lượng) $DE = EA$, nằm trong mặt thẳng đứng qua AD. tìm phản lực các bản lề và ứng lực thanh (hình bài 2.4).

2.5. Cánh cửa đồng chất hình chữ nhật ABCD, trọng lượng P, chiều dài $AD = a\sqrt{3}$, chiều rộng $AB = a$, có trục quay thẳng đứng AD tạo bởi hai ổ đỡ A (gối cầu) và D (bản lề). Cửa được mở ra một góc 120° với khuôn cửa, đầu B chịu lực \vec{Q} song song với cạnh dưới AE của khuôn, đầu C được giữ bởi dây CE. tìm sức căng của dây và phản lực các ổ đỡ (hình bài 2.5).

Hướng dẫn:

Chú ý dây CE nghiêng 45° nối EB và CB, sức căng T phân tích ra hai thành phần đặt tại C (nằm theo CB và song song với BE).

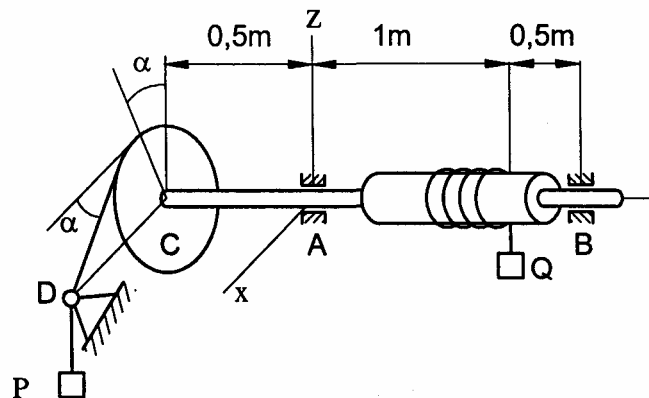
2.6 Trục AB nằm ngang trên hai ổ đỡ A và B (bản lề) mang đĩa C và thanh DE (đều có trọng lượng không đáng kể). Trục cân bằng dưới tác dụng của hai vật nặng: $Q = 250\text{N}$ treo ở đầu dây quấn quanh vành đĩa và $P = 1\text{ kN}$ gắn vào đầu E.



Hình bài 2.6

Biết DE nghiêng 30° với đường thẳng đứng, bán kính đĩa bằng 20cm, các kích thước khác ghi trên (hình bài 2.6). Tìm chiều dài $l = DE$ và phản lực các ổ đỡ.

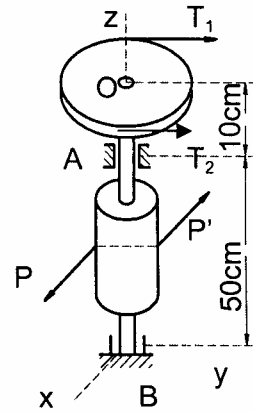
2.7. Hai ổ A, B (bản lề) đỡ trục nằm ngang AB mang theo đĩa C và khối trụ AB; bán kính của đĩa gấp 6 lần bán kính khối trụ.



Hình bài 2.7

Quanh trục, cuộn dây treo vật Q, quanh vành đĩa cũng cuộn dây, đầu tự do treo vật P = 60N, sau khi vòng qua ròng rọc nhỏ D. Kích thước cho trên (hình bài 2.7), nhánh dây giữa đĩa và ròng rọc nằm trong mặt phẳng của đĩa và nghiêng với đường kính nằm ngang một góc $\alpha = 30^\circ$. tìm Q, tìm phản lực các ổ đĩa.

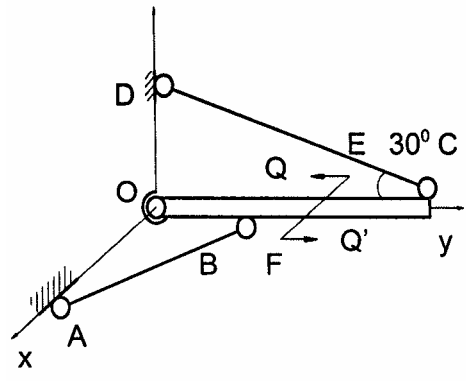
2.8. trục AB thẳng đứng nhờ hai ổ đỡ A (bản lề) và B (ổ chặn) mang theo bánh đai O và roto (AB.) Tổng trọng lượng bánh đai và roto là Q = 200N. Bánh đai O có bán kính 10cm và hai nhánh đai truyền vòng qua có hai sức căng song song nằm ngang trị số $T_1 = 100N$, $T_2 = 50N$. (hình bài 2.8)



Hình bài 2.8

Tìm momen ngẫu lực của (P, P') cân có ở roto để giữ cân bằng. Tìm phản lực ổ đỡ.

2.9. Dầm ngang OC, trọng lượng P = 100N, dài 2m chịu tác dụng của ngẫu lực (Q, Q') trong mặt phẳng ngang Q = 100N tay đòn EF = 20cm. Dầm liên kết với tường bằng bản lề cầu O và hai dây AB, CD. Cho OB = 0,5m. Tìm phản lực ở O và sức căng cả dây (hình bài 2.9).



Hình bài 2.9

Chương 3 ĐỘNG HỌC

3.1 CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

Để giải bài toán về chuyển động của điểm, ta thường dùng hai phương pháp: phương pháp tọa độ Đêcac và phương pháp tọa độ tự nhiên.

Vấn đề cần chú ý :

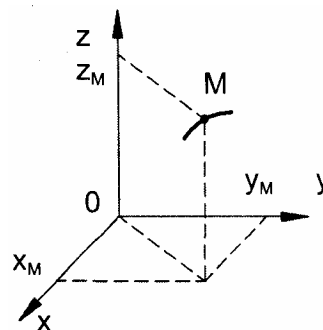
I. Phương pháp tọa độ Đêcac

Vị trí điểm M được xác định bởi các tọa độ X_M, Y_M, Z_M (hình 3.1)

1. Phương trình chuyển động biểu diễn sự liên hệ giữa tọa độ theo thời gian:

$$\begin{aligned} x_M &= x(t) \\ y_M &= y(t) \\ z_M &= z(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Nếu khử được thời gian t ở phương trình chuyển động và tìm quan hệ các tọa độ ra nhận được phương trình quỹ đạo của điểm.



Hình 3.1

2. Vận tốc. Vector vận tốc \vec{V} của điểm xác định qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ:

$$V_x = \dot{x}; V_y = \dot{y}; V_z = \dot{z}$$

$$\text{ở đây } \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{Trị số } V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (3.2)$$

$$\text{Các cosin chỉ phương: } \cos\alpha = \frac{V_x}{V}$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{V}$$

$$\cos\gamma = \frac{V_z}{V}$$

3. Gia tốc. Vector gia tốc \vec{a} của điểm xác định qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ:

$$a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z}$$

ở đây $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Trị số $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (3.3)

các cosin chỉ phương:

$$\cos\alpha = a_x/a$$

$$\cos\beta = a_y/a$$

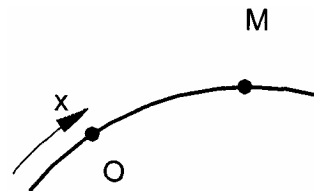
$$\cos\gamma = a_z/a$$

4. Tính chất chuyển động: xét tích vô hướng $\vec{V} \cdot \vec{a}$

$$\vec{V} \cdot \vec{a} = \dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z} \begin{cases} > 0 \text{ chuyển động nhanh dần} \\ < 0 \text{ chuyển động chậm dần} \end{cases} \quad (3.4)$$

II. Phương pháp tọa độ tự nhiên.

Khi biết quỹ đạo, chọn gốc 0 và chiều dương (+). Vị trí của điểm M được xác định bởi độ cong của điểm trên quỹ đạo $S = OM$ (hình 3.2)



Hình 3.2

1. Phương trình chuyển động theo quỹ đạo

Biểu diễn sự liên hệ giữa tọa độ cong theo thời gian:

$$S = s(t) \quad (3.5)$$

2. Vận tốc. Vectơ vận tốc có phương tiếp tuyến với quỹ đạo, chiều phụ thuộc S:

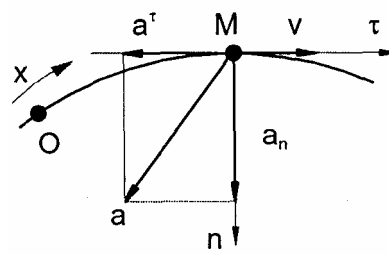
- $S > 0$ \vec{V} hướng theo chiều dương của quỹ đạo

$S < 0$ \vec{V} hướng theo chiều âm của quỹ đạo (3.6)

Trị số $V = |S|$ ở đây $S = \frac{dS}{dt}$ và $\vec{\tau}$ và \vec{n} vectơ đơn vị của tiếp tuyến

và pháp tuyến tại M.

3. Gia tốc. Vectơ gia tốc \vec{a} có hai thành phần: gia tốc pháp tuyến \vec{a}^n và gia tốc tiếp tuyến \vec{a}^τ (hình 3.3)



Hình 3.3

$$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau$$

$$* \vec{a}^n = \frac{V^2}{\rho} \cdot \vec{n}$$

- Hướng vào tâm cong của quỹ
- Trị số

$$a^n = \frac{V^2}{\rho} \quad (3.7)$$

ρ - bán kính cong của quỹ đạo tại M.

$$* \vec{a} = \ddot{S} \cdot \vec{\tau}$$

- Tiếp tuyến với quỹ đạo tại M
- Cùng chiều hoặc ngược chiều với τ phụ thuộc vào $\ddot{S} > 0$ hoặc $\ddot{S} < 0$

$$- \text{Trị số } a^\tau = |\ddot{S}| \text{ ở đây } \ddot{S} = \frac{d^2S}{dt^2}$$

4. Tính chất chuyển động: xét tích vô hướng $\vec{V} \cdot \vec{a}^\tau$

$$* \vec{V} \cdot \vec{a}^\tau$$

- > 0 : chuyển động nhanh dần đều
- < 0 : chuyển động chậm dần đều

$$(3.9)$$

5. Các chuyển động đặc biệt:

*) Chuyển động đều: $V = \text{const.}$

Suy ra: $a^\tau = 0$; $S = V \cdot t$. Chuyển động biến đổi đều: $a^\tau = \text{const}$

$$\text{Suy ra : } V = V_0 \pm a^\tau \cdot t; S = V_0 t + \frac{1}{2} a^\tau \cdot t^2$$

trong đó: quy ước chọn góc của quỹ đạo ở vị trí đầu, chiều dương của quỹ đạo theo chiều chuyển động ban đầu của điểm.

Dấu (+): ứng với chuyển động nhanh dần.

Dấu (-) : ứng với chuyển động chậm dần.

Bài tập giải sẵn:

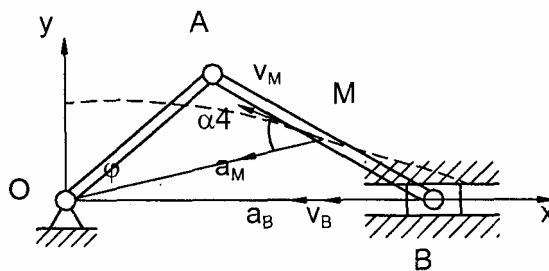
I. Tìm phương trình chuyển động và các đặc trưng của chuyển động

Thí dụ 3-1 (Phương pháp tọa độ Đécac. Bài toán thuận)

Cơ cấu tay quay con trượt OAB có $OA = AB = 3b$. Tay quay OA quay quanh O theo luật làm cho con trượt B chuyển động theo rãnh ngang. Tìm phương trình chuyển động, quỹ đạo, vận tốc, gia tốc của điểm B và M : $MB = b$.

Xét sự nhanh chậm của điểm B và M khi:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$



Hình 3. 4

Bài giải.

- Xét điểm B.

1. Phương trình chuyển động. Tìm $X_B(t)$

$$X_B = 6b \cos \varphi = 6b \cos kt$$

Quỹ đạo B là đoạn thẳng dọc trục x.

2. Vận tốc: $V_B = \dot{X}_B = -6bk \sin kt$.

Vector \vec{V}_B hướng về O (và $0 < \varphi = kt < \frac{\pi}{2}$)

3. Gia tốc: Vector $a_B = \ddot{X}_B = -6bk^2 \cos kt$ hướng về O

4. Xét sự nhanh chậm: $\vec{V}_B \cdot \vec{a}_B = 36b^2k^3 \sin kt \cdot \cos kt > 0$, do đó B chuyển động sang trái, nhanh dần

• Xét điểm M

1. Phương trình chuyển động. Tìm $X_M(t)$ và $Y_M(t)$

$$X_M = 5b \cos \varphi = 5b \cos kt$$

$$Y_M = b \sin \varphi = b \sin kt$$

Tìm quỹ đạo điểm M. Rút $\sin(kt)$ và $\cos(kt)$ từ phương trình chuyển động, bình phương hai vế rồi cộng lại

$$\frac{x_M^2}{(5b)^2} + \frac{y_M^2}{b^2} = 1$$

Quỹ đạo B là đường elip, tâm O với bán kính trục là $5b$ và b .

2. Vận tốc:

$$\vec{V}_M \begin{cases} V_{Mx} = \dot{x}_M = -5bk \sin kt \\ V_{My} = \dot{y}_M = bk \cos kt \end{cases}$$

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2} = bk \sqrt{25 \sin^2 kt + \cos^2 kt}$$

Vector \vec{V}_M tiếp tuyến với quỹ đạo elip.

3. Gia tốc:

$$\vec{a}_M \begin{cases} a_{Mx} = \ddot{x}_M = -5bk^2 \cos kt = -k^2 x_M \\ a_{My} = \ddot{y}_M = -bk^2 \sin kt = -k^2 y_M \end{cases}$$

\vec{a} có các hình chiếu tỷ lệ và ngược dấu với tọa độ, do đó \vec{a} hướng về tâm O

4. Xét sự nhanh chậm.: $\vec{V}_M \cdot \vec{a}_M > 0$ (Vì góc $\varphi < \frac{\pi}{2}$) do đó M đang chuyển động nhanh dần.

$$\text{Có thể thấy: } \vec{V}_M \cdot \vec{a}_M = V_{Mx} a_{Mx} + V_{My} a_{My} > 0$$

Thí dụ 3.2 (Phương pháp tọa độ Đécac. Bài toán ngược).

Một điểm chuyển động trong mặt phẳng Oxy, gia tốc có hình chiếu $a_x = a \text{ cm/s}^2$; $a_y = 2t \text{ cm/s}^2$.

Tìm phương trình chuyển động của điểm, biết lúc $t = 2(\text{s})$ thì vectơ vận tốc của điểm tạo với trục x góc $\alpha = 45^\circ$ giá trị số vận tốc

$$v = \sqrt{12} \text{ cm/s}^2.$$

Bài giải.

1. Xác định vận tốc điểm :

Vì

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} ; a_y = \frac{dV_y}{dt}$$

suy ra:

$$dV_x = a_x \cdot dt = 4 \cdot dt$$

$$dV_y = a_y \cdot dt = 2t \cdot dt$$

Lúc $t=2\text{s}$ thì $V_{x2} = V_{y2} = 12 \sqrt{2} \cos 45^\circ = 12 \text{ cm/s}$

$$\text{Do đó: } \int_{12}^{V_x} dV_x = \int_2^t 4 dt ; \int_{12}^{V_y} dV_y = \int_2^t 2t \cdot dt$$

$$\text{Ta được } V_x = 4t + 4$$

$$V_y = t^2 + 8$$

2. Xác định phương trình chuyển động:

$$\text{Vì } V_x = \frac{dx}{dt} ; V_y = \frac{dy}{dt}$$

$$\text{Suy ra: } dx = V_x dt = (4t + 4)dt ; dy = V_y dt = (t^2 + 8)dt$$

Lúc $t = 0$ thì $x = y = 0$, do đó:

$$\int_0^x dx = \int_0^t (4t + 4)dt ; \int_0^y dy = \int_0^t (t^2 + 8)dt$$

Ta được phương trình chuyển động của điểm:

$$x = 2(t^2 + 2t)$$

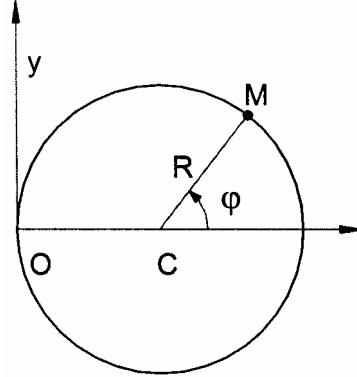
$$y = 1/3t^3 + 8t$$

II. Bài toán tổng hợp

Thí dụ 3-3 (dùng cả hai phương pháp: tọa độ Đêcac và tọa độ tự nhiên).

Điểm M chuyển động trên đường tròn, bán kính $R=8(m)$, tâm C có tọa độ $(8m;0)$. Vị trí của M được xác định bởi góc giữa bán

kính CM và trục x (hình 3.5): $\varphi = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$



Hình 3.5

1. Lập phương trình chuyển động của điểm ở dạng tọa độ tự nhiên. xác định vận tốc, gia tốc của điểm lúc hướng chuyển động thay đổi.

2. Lập phương trình chuyển động của điểm ở dạng tọa độ Đêcac và viết phương trình quỹ đạo của điểm.

Bài giải :

1. Dùng phương pháp tọa độ tự nhiên:

Phương trình chuyển động theo quỹ đạo:

$$S = R\varphi = 8 \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t = 4\pi \sin \frac{\pi}{2} t \text{ (m)}$$

$$\text{Vận tốc: } V = \dot{S} = 2\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} t \text{ (m/s)}$$

$$\text{Gia tốc: gia tốc pháp tuyến: } a^n = \frac{V^2}{R} = \frac{\pi^4}{2} \cos^2 \frac{\pi}{2} t$$

$$\text{Gia tốc tiếp tuyến: } a^\tau = \ddot{S} = \pi^3 \sin \frac{\pi}{2} t$$

Tìm lúc chuyển động đổi hướng:

$$\vec{V} \cdot \vec{a}^\tau = -2\pi^2 \cos \frac{\pi}{2} t \cdot \pi^3 \sin \frac{\pi}{2} t = -\pi^5 \sin \pi t \quad \begin{cases} = 0 \text{ khi } t = 1 \\ < 0 \text{ khi } t < 1 \\ > 0 \text{ khi } t > 1 \end{cases}$$

Khi $t=1$ thì vectơ đổi hướng, lúc đó:

$$V = 0; a^n = \frac{\pi^4}{2}; a^r = 0; a = a^n = \frac{\pi^4}{2} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

2. Dùng phương pháp tọa độ Đêcac: hương trình chuyển động:

$$x_M = R + R \cos \varphi = 8 + 8 \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)$$

$$y_M = R \sin \varphi = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)$$

Quý đạo: Rút $\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)$ và $\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t\right)$ từ hai phương trình trên, bình phương hai vế rồi cộng lại, ta được phương trình quỹ đạo:

$$\frac{(x_M - 8)^2}{8^2} + \frac{y_M^2}{8^2} = 1$$

Đó chính là đường tròn có bán kính $R=8$ và tâm $C(8;0)$.

Thí dụ 3-4. (Dùng cả hai phương pháp: tọa độ Đêcac và tọa độ tự nhiên).

Biết phương trình chuyển động của một điểm có dạng:

$$x = a_1 \cos t; y = a_1 \sin t; z = b_1 t; a_1 \text{ và } b_1 \text{ là các hằng số}$$

Tìm phương trình chuyển động theo quỹ đạo và bán kính cong của quỹ đạo

Bài giải :

1. Dùng phương pháp tọa độ Đêcac:

- Vận tốc.

$$\vec{V} \begin{cases} V_x = \dot{x} = -a_1 \sin t; \\ V_y = \dot{y} = a_1 \cos t; \\ V_z = \dot{z} = b_1; \end{cases} \quad V = \sqrt{\overset{\cdot 2}{x} + \overset{\cdot 2}{y} + \overset{\cdot 2}{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{const}$$

-Gia tốc:

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \ddot{x} = -a_1 \cos t; \\ a_y = \ddot{y} = -a_1 \sin t; \\ a_z = \ddot{z} = 0; \end{cases} \quad a = \sqrt{\overset{\cdot\cdot}{x^2} + \overset{\cdot\cdot}{y^2} + \overset{\cdot\cdot}{z^2}} = a_1 = \text{const}$$

2. Dùng phương pháp tọa độ tự nhiên:

-Phương trình chuyển động theo quỹ đạo:

$$S = \int_0^t V dt = \int_0^t \sqrt{a_1^2 + b_1^2} dt = t \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

Gia tốc:

Gia tốc tiếp tuyến: $a^t = \frac{dV}{dt} = 0$

Gia tốc pháp tuyến: $a^n = \sqrt{a^2 - (a^t)^2} = a_1 = \text{const}$

Bán kính cong của quỹ đạo:

$$\rho = \frac{V^2}{a^n} = \frac{a_1^2 + b_1^2}{a_1} = \text{const}$$

Bài tập cho đáp số :

3.1.1. Xác định quỹ đạo, vận tốc, gia tốc điểm, nếu phương trình chuyển động của điểm đã cho như sau (x, y, z tính bằng cm, t tính bằng giây):

a) $x = t^3 + 2$	b) $x = 10 \cos \frac{2\pi}{5} t$	c) $x = \frac{4}{t+1}$
$y = 3 - t^3$	$y = 10 \sin \frac{2\pi}{5} t$	$y = -4t - 4$
		$z = 2t + 2$

3.1.2. Một điểm chuyển động trên vòng tròn bán kính R theo luật

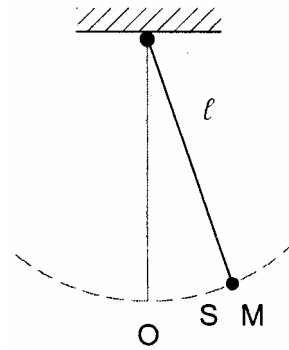
$$S = V_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2$$

a) Xác định giá trị gia tốc của điểm.

b) Xác định thời điểm t mà trị số gia tốc bằng a_1 và số vòng N mà

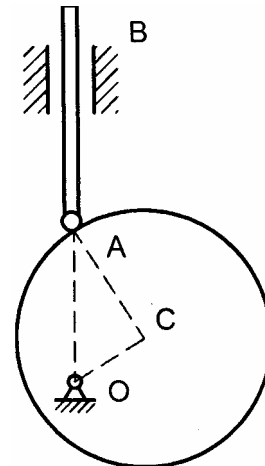
điểm chuyển động được lúc đạt đến gia tốc đó.

3.1.3. Con lắc chuyển động theo vòng tròn bán kính l theo luật $S = b\sin(kt)$, trong đó b và k là các hằng số (hình bài 3.3). Xác định vận tốc, gia tốc tiếp, gia tốc pháp của con lắc và các vị trí tại đó các đại lượng này bằng không.



Hình bài 3.1.3

3.1.4. Cơ cấu cam (hình bài 3.4), cam đĩa tròn có bán kính r , trục quay O cách tâm C một đoạn $OC=d$, cam quay quanh O theo luật $\varphi = \omega_0 t$. Tìm phương trình chuyển động và vận tốc của thanh AB . Trục x hướng dọc thanh, gốc ở O .



Hình bài 3.1.4

3.1.5. Cơ cấu tay quanh thanh truyền như hình bài 3.5. Biết $\varphi = \omega_0 t$ và coi

$$\lambda = \frac{AO}{AB} = \frac{r}{l} \text{ là rất nhỏ}$$

a) Tìm phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc điểm B.

b) Tìm phương trình chuyển động, vận tốc, gia tốc trung điểm M của thanh AB.

3.1.6. Con chạy chuyển động thẳng với gia tốc.

$$a_x = -r\pi^2 \sin\frac{\pi}{2} t \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Tìm phương trình chuyển động biết vận tốc đầu con chạy là và vị trí ban đầu của nó trùng với gốc tọa độ. Vẽ đường biểu diễn khoảng cách, vận tốc, gia tốc của nó theo thời gian t .

3.1.7. Một điểm chuyển động từ gốc tọa độ, gia tốc có hình chiếu là $a_x = -a$; $a_y = a$. Ban đầu vận tốc của các hình chiếu $V_x = -V_0$; $V_y = 0$

Xác định quỹ đạo, trị số nhỏ nhất của vận tốc.

Ban đầu vận tốc có các hình chiếu : $V_{0x} = V_0$; $V_{0y} = 0$. Xác định quỹ đạo, trị số nhỏ nhất của vận tốc.

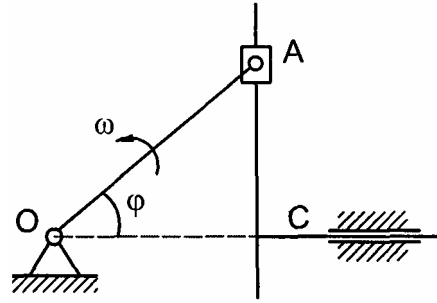
II. Bài toán hợp chuyển động của chất điểm

3.1.8 Tay quay OA = l quay quanh trục qua O với vận tốc góc $\omega =$ hằng làm cho cần C trượt trong rãnh nằm ngang.

Lúc OA nghiêng với phương nằm ngang góc $\varphi = 30^\circ$

Tìm :

- Vận tốc và gia tốc của cần C
- Vận tốc và gia tốc của con trượt A đối với cần C.



Hình bài 3.1.8

Trả lời :

- Vận tốc của cần C : $V_C = \frac{l\sqrt{3}}{2}\omega$

- Gia tốc góc của cần C : $w_C = \frac{l}{2}\omega^2$

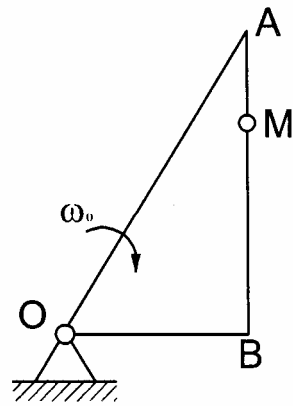
- Vận tốc của con trượt A đối với cần C : $V'_A = \frac{l}{2}\omega$

- Gia tốc của con trượt A đối với cần C : $w'_A = \frac{l\sqrt{3}}{2}\omega^2$

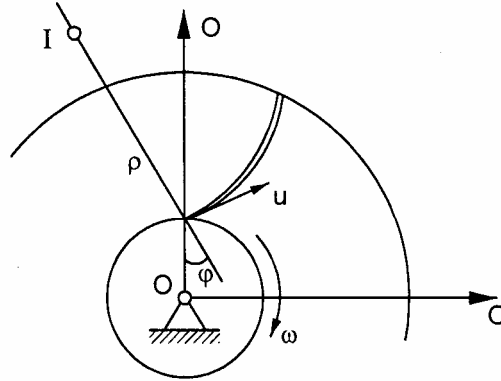
3.1.9. Tam giác vuông OAB quay quanh O với vận tốc góc không đổi $\omega = 1$ rad/s. Điểm M chuyển động từ A đến B với gia tốc không đổi 2 cm/s^2 vận tốc ban đầu bằng 0.

Tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm M lúc $t = 1/2$ s, biết lúc này $MB = OB = 4$ cm

Trả lời : $v = \sqrt{41} \text{ cm/s}$; $w = 6\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$



Hình bài 3.1.9



Hình bài 3.1.10

3.1.10. Máy nén khí quay đều quanh trục qua O với vận tốc ω .

Khí chạy trong rãnh cong với vận tốc tương đối $u = \text{const}$. Xét một phân tử khí tại cửa vào C.

Tìm hình chiếu lên trục Ox và Oy của vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của phân tử khí đó.

Biết bán kính cong của rãnh tại C là $IC = \rho$, góc giữa IC và OC là φ ; $OC = r$.

$$v_x = u \cos \varphi + r\omega, v_y = u \sin \varphi$$

$$\text{Trả lời: } w_x = 2u\omega - \frac{u^2}{\rho} \sin \varphi$$

$$w_y = -r\omega - (2u\omega - \frac{u^2}{\rho} \cos \varphi)$$

3.2 CHUYỂN ĐỘNG QUAY CỦA VẬT RẮN QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH

Vấn đề cần chú ý :

Đối với một vật rắn quay quanh trục cố định, ta phải xét chuyển động toàn vật và chuyển động từng điểm thuộc vật. Sau đó ta xét sự truyền chuyển động quay giữa các vật.

I. Xét chuyển động toàn vật

Chọn chiều quay dương quanh trục (nhìn từ chiều dương của trục z thấy vật quay ngược chiều kim đồng hồ).

Vị trí của vật được xác định bởi góc định hướng φ giữa mặt phẳng cố định và mặt phẳng gắn cứng với vật cũng qua trục quay (Hình 3.6)

1. Phương trình chuyển động của vật

$$\varphi = \varphi(t) \quad (3.1)$$

2. Vận tốc góc của vật là đại lượng đại số biểu thị tốc độ và chiều quay của vật, ω đo bằng rad/s (rad/s):

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (3.2)$$

$\bar{\omega} > 0$ Vật quay theo chiều dương
đã chọn để tính φ

$\bar{\omega} < 0$: Vật quay theo chiều âm.

Gọi n là số vòng/phút, trị số của vận tốc góc:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ (rad / s)} \quad (3.3)$$

3. Gia tốc góc của vật là đại lượng đại số biểu thị sự biến thiên của ω về trị số và dấu ; ε đo bằng rad/s²

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\varphi^2}{dt^2} \quad (3.4)$$

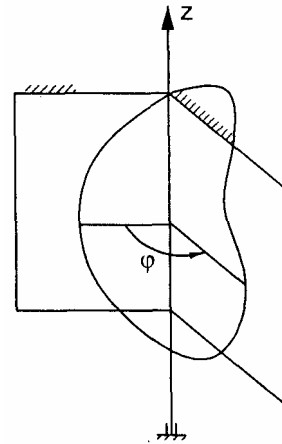
4. tính chất chuyển động :

Xét $\omega\varepsilon > 0$: Vật quay nhanh dần.

< 0 : Vật quay chậm dần. (3.5)

Ban đầu vận tốc có các hình chiếu: $V_{0x} = V_0, V_{0y} = 0$. Xác định quỹ đạo, trị số nhỏ nhất của vận tốc.

Ban đầu vận tốc có các hình chiếu: $V_{0x} = V_0; V_{0y} =$ Xác định quỹ đạo, trị số nhỏ nhất của vận tốc.



Hình 3.6

5. Chuyển động quay đặc biệt :

Quay đều : $\omega = \omega_0$ suy ra $\varepsilon = 0$; $\varphi = \omega_0 t$ (3.6)

Quay biến đổi đều : chọn chiều quay ban đầu làm chiều dương và vị trí đầu làm gốc:

$$\varepsilon = \text{const}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \pm \varepsilon t \\ \phi &= \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

(Dấu + : chuyển động nhanh dần đều. Dấu - : chậm dần đều)

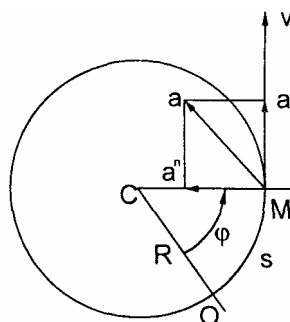
II. xét chuyển động của điểm thuộc vật

1. Phương trình chuyển động của điểm (Hình 3.7)

$$S = OM = R(\varphi(t)) \quad (3.8)$$

2. vận tốc của điểm :

$$\vec{V} \begin{cases} \perp CM \\ \text{theo chiều quay} \\ + \text{Trị số } V = R\omega \end{cases} \quad (3.9)$$



Hình 3.7

3. Gia tốc của điểm có thành phần pháp tuyến và tiếp tuyến

$$\vec{a} = \vec{a}^n + \vec{a}^\tau \quad a = \sqrt{(a^n)^2 + (a^\tau)^2}$$

Gia tốc phát tuyến: \vec{a}^n :

$$\begin{cases} - \text{Hướng vào trục quay} \\ - \text{Trị số } a^n = R\omega^2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Gia tốc tiếp tuyến: \vec{a}^τ :

$$\begin{cases} \text{Cùng phương với } \vec{V} \\ - \text{Chiều phù hợp } \varepsilon \\ - \text{Trị số } a^\tau = R\varepsilon \end{cases} \quad (3.11)$$

III. Truyền chuyển động quay quanh hai trục cố định :

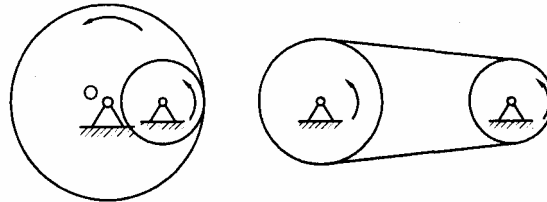
Tỷ số vận tốc góc giữa hai bánh :

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} \quad (3.12)$$

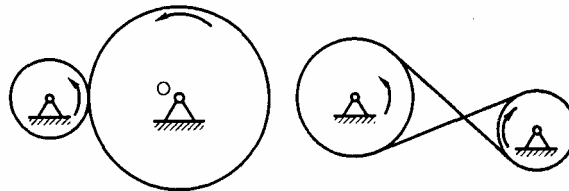
r_i : bán kính ; z_i : số răng.

Truyền chuyển động quay cùng chiều (Hình 3.8)

Truyền chuyển động quay ngược chiều (Hình 3.9)



Hình 3.8



Hình 3.9

Bài tập giải sẵn :

I. Biết chuyển động của vật (hoặc của điểm thuộc vật), tìm các đặc trưng khác của chuyển động

Thí dụ 3-5 : Một trục máy đang quay với vận tốc góc $n = 600$ vòng/phút thì tắt máy và sau 20 giây thì dừng hẳn. Tìm gia tốc góc và số vòng mà trục còn quay được sau khi tắt máy. Giả sử trong quá trình đó trục máy quay biến đổi đều.

Bài giải :

Sau khi tắt máy, trục máy quay chậm dần đều. Vì vậy theo (3.7) :

$$\omega = \omega_0 - \epsilon t$$

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2} \epsilon t^2$$

Trong đó: $\omega_0 = \frac{\pi \cdot n}{30} = 20\pi(\text{rad/s})$. Lúc $t=20$ s thì $\omega = 0$; $\phi = \phi_1$

Vậy thay vào hệ phương trình trên, ta có:

$$0 = 20\pi - \varepsilon \cdot 20$$

$$\phi_1 = 20\pi \cdot 20 - \varepsilon \cdot \frac{20^2}{2}$$

Giải hệ phương trình này ta được :

$$\varepsilon = \pi(\text{rad/s}); \phi_1 = 200\pi(\text{rad})$$

Vậy số vòng trục máy còn quay được là

$$N = \frac{\phi_1}{2\pi} = 100(\text{vòng})$$

Thí dụ 3-6 : Thanh OA quay quanh trục O theo quy luật $\phi = \frac{\pi}{6}t^3$. Tìm tính chất chuyển động của thanh OA và vận tốc, Gia tốc của điểm A lúc thanh quay được 18 vòng.

Biết $OA = l = 20$ cm (Hình 3.10)

Bài giải :

1. trước hết ta cần tìm vận tốc góc và gia tốc góc của thanh theo (3.2) và (3.4):

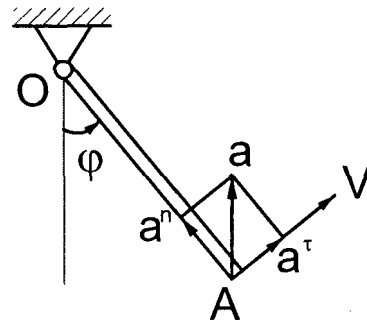
$$\bar{\omega} = \dot{\phi} = \frac{\pi}{2} \cdot t^2$$

$$\bar{\varepsilon} = \ddot{\phi} = \pi \cdot t$$

Gọi t_1 là thời điểm mà thanh quay được 18 vòng, tức là quay được góc ($\phi_1 = 18 \cdot 2\pi = 36\pi$). Từ phương trình chuyển động ta có :

$$36\pi = \frac{\pi}{6}t^3$$

Rút ra : $t_1 = \sqrt[3]{36 \cdot 6} = 6(\text{s})$ tạo với lúc đó:



Hình 3.10

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\pi}{2} \cdot 6^2 = 18\pi(\text{rad/s})$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = 6\pi(\text{rad/s}^2)$$

$\bar{\omega} \quad \bar{\varepsilon} > 0$: Vật quay nhanh dần.

2) Tìm vận tốc, gia tốc điểm A.

Theo (3.9), (3.10), (3.11): $V = l\omega_1 = 0,2 \cdot 18\pi = 11,3\text{m/s}$

$$a^r = l\varepsilon_1 = 0,2 \cdot 6\pi = 3,8\text{m/s}^2$$

$$a^n = l\omega_1^2 = 0,2 \cdot (18\pi)^2 = 648\text{m/s}^2$$

Các vectơ vẽ ở hình 3.10.

II. Truyền chuyển động quay

Thí dụ 3.7: Cơ cấu tời như hình 3.11
Do hãm bị hỏng, nên vật M rơi xuống với quy luật : $x = 3t^2$

(x : tính bằng m ; t : tính bằng giây)

Tìm vận tốc và gia tốc mút A của tay quay lúc $t = 2\text{s}$. Biết đường kính của trống là $d = 40\text{ cm}$, số răng của bánh 1 và 2 là $z_1 = 72$; $z_2 = 24$ (Hình 3.11).

Bài giải :

1. Trước hết xét vật M.

$$\text{Vận tốc } V_M = \dot{x} = 6t(\text{cm/s})$$

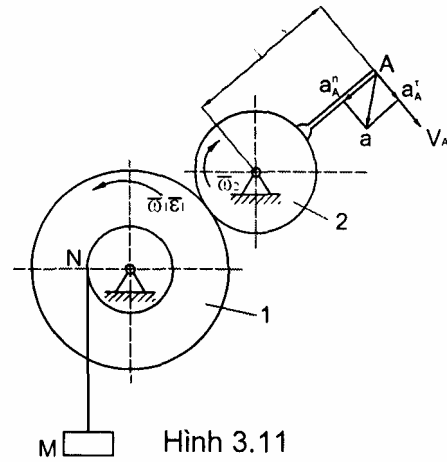
$$\text{Gia tốc } a_M = \ddot{x} = 6(\text{cm/s}^2)$$

2. Bánh 1 chuyển động được nhờ dây quấn quanh trống. Gọi N là điểm trên vành trống, ta có :

$$V_N = V_M = 6t(\text{cm/s})$$

$$a_n^r = a_M = 6(\text{cm/s}^2)$$

$$\text{suy ra vận tốc góc : } \omega_1 = \frac{V_N}{d/2} = \frac{6t}{20} = 0,3t(\text{rad/s})$$



$$\text{Gia tốc góc : } \varepsilon_1 = \frac{a_N^r}{d/2} = \frac{6}{20} = 0,3(\text{rad/s}^2)$$

Chiều của $(\omega_1; \varepsilon_1)$ như (Hình 3.11)

3. Bánh 2 quay được nhờ ăn khớp với bánh 1. Trị số vận tốc góc của bánh 2 tính theo công thức :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{z_1}{z_2}; \omega_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \omega_1 = \frac{72}{24} \cdot 0,3t = 0,9t(\text{rad/s})$$

Suy ra gia tốc góc : $\varepsilon_2 = 0,9\text{rad/s}^2$.

Lúc $t = 2\text{s}$ thì $\omega_2 = 1,8(\text{rad/s}); \varepsilon_2 = 0,9(\text{rad/s}^2)$

4. Biết chuyển động của bánh 2, xác định được chuyển động điểm A :

Vận tốc $V_A = l\omega_2 = 40 \cdot 1,8 = 72 \text{ cm/s}$.

Gia tốc tiếp tuyến : $a_a^r = l\omega_2 = 40 \cdot 0,9 = 36(\text{cm/s}^2)$

Gia tốc pháp tuyến : $a_A^n = l\omega_2 = 40 \cdot (1,8)^2 = 130(\text{cm/s}^2)$

Gia tốc $a_A = \sqrt{(36)^2 + (130)^2} = 135(\text{cm/s}^2)$

Bài tập cho đáp số:

I. Biết chuyển động của vật (hoặc điểm thuộc vật), tìm các đặc trưng khác của chuyển động

3.2.1. Roto của tuabin quay nhanh đều, ở thời điểm t_1 và t_2 có vận tốc tương ứng là $n_1 = 1300$ vòng/phút và $n_2 = 4000$ vòng/phút.

Xác định gia tốc góc ε và số vòng quay n_1 roto quay được trong thời gian $t = t_2 - t_1 = 30 \text{ s}$.

3.2.2. Một trục máy đang quay với tốc độ $n = 1200$ vòng/phút thì hãm. Sau khi hãm trục máy quay được 80 vòng thì dừng hẳn.

Tìm thời gian hãm, biết rằng trục quay chậm dần đều.

3.2.3. Vật quay quanh trục cố định theo phương trình:

$$\varphi = 1,5t^2 - 4t \quad (\varphi - \text{radian}; t - \text{giây}).$$

Xác định:

1. Tính chất của chuyển động ở các thời điểm $t_1 = 1 \text{ s}; t_2 = 2\text{s}$.

2. Vận tốc và gia tốc của điểm cách trục quay một khoảng $r = 0,2 \text{ m}$

ở những thời điểm trên.

3.2.4. Quả cầu A treo ở đầu một sợi dây có chiều dài $l = 398 \text{ cm}$, dao động trong mặt phẳng, thẳng đứng theo luật:

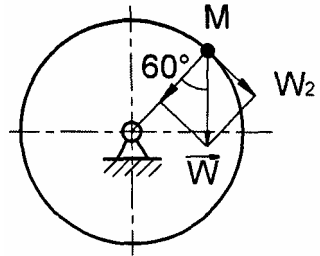
$$\phi = \frac{\pi}{8} \sin \frac{\pi}{2} t, \quad (\phi - \text{radian}, t - \text{giây})$$

Xác định :

1. Thời điểm đầu tiên từ khi bắt đầu chuyển động để gia tốc pháp của quả cầu bằng không.
2. Thời điểm đầu tiên để gia tốc tiếp bằng không.
3. Gia tốc toàn phần lúc $t = 2\text{s}$

3.2.5. Một vật quay nhanh dần đều từ trạng thái nghỉ. Lúc $t = 1\text{s}$ điểm cách trục quay một khoảng $R = 2\text{m}$ có gia tốc $a = 2\sqrt{2} \text{ m/s}^2$.

Tìm gia tốc của điểm cách trục quay một khoảng $R = 4\text{m}$, lúc $t = 2\text{s}$.



Hình bài 3.2.6

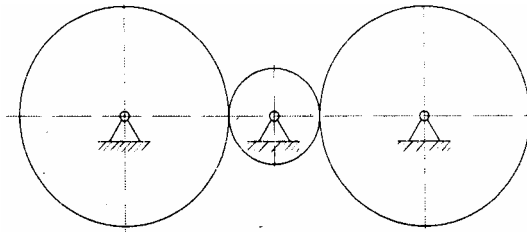
3.2.6. Gia tốc một điểm trên vành vô lăng làm với bán kính góc 60° . Gia tốc tiếp của điểm ấy ở thời điểm khảo sát là $a^t = 10\sqrt{3} \text{ m/s}^2$ (hình bài 3.2.6).

Tìm gia tốc pháp của điểm cách trục quay một khoảng $r = 0,5 \text{ m}$.
bán kính vô lăng $R = 1\text{m}$.

II. Truyền chuyển động quay quanh các trục cố định

3.2.7. Ba bánh răng ăn khớp với nhau (hình bài 3.2.7). Bán kính các bánh là $r_1 = 20 \text{ cm}$; $r_2 = 12 \text{ cm}$; $r_3 = 15 \text{ cm}$. Bánh đầu quay với vận tốc góc $n_1 = 90$ vòng/phút.

Tìm vận tốc góc thứ ba.



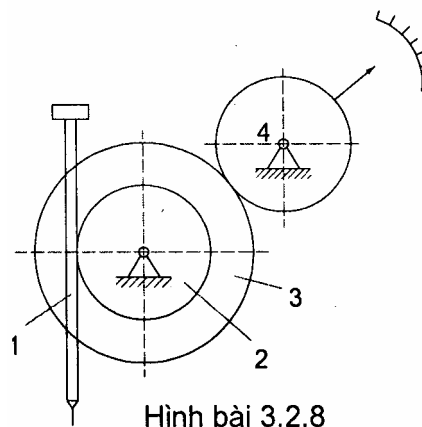
Hình bài 3.2.7

3.2.8. Cơ cấu như hình bài 3.2.8 Chuyển động từ thanh 1 truyền vào bánh răng 2, bánh răng 3 lắp cứng cùng trục với bánh răng 2 và ăn khớp với bánh răng 4 có mang kim (hình vẽ).

Xác định vận tốc góc của kim nếu thanh 1 chuyển động theo phương trình :

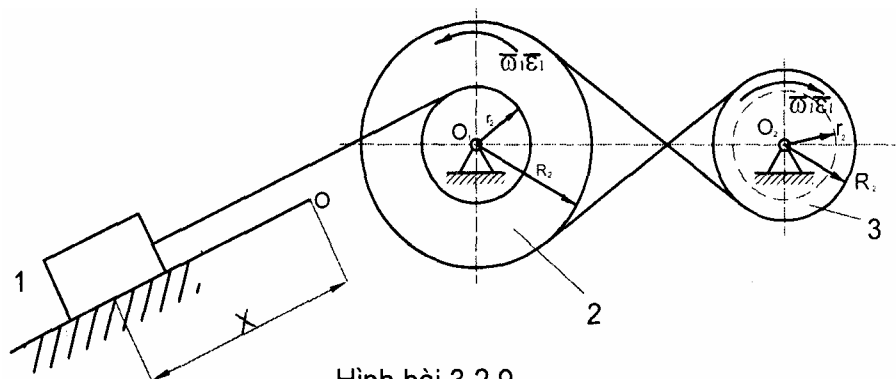
$$x = d \sin kt$$

bán kính các bánh răng tương ứng là r_2 , r_3 và r_4 .



Hình bài 3.2.8

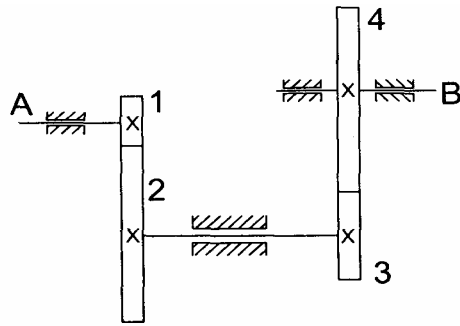
3.2.9. Cơ cấu như (Hình bài 3.2.9). Vật 1 chuyển động theo luật $x = 2 + 70t^2$ (x tính bằng cm; t - giây); $R_2 : 50$ cm; $r_2 = 30$ cm ; $R_3 = 60$ cm. Tính vận tốc góc, gia tốc góc của bánh 3 và vận tốc, gia tốc điểm m cách trục 1 khoảng $r_3 = 40$ cm lúc vật nặng 1 di chuyển được một đoạn bằng 40 cm.



Hình bài 3.2.9

3.2.10. Hộp biến tốc có các bánh răng với số răng tương ứng là $z_1 = 10$; $z_2 = 60$; $z_3 = 12$; $z_4 = 70$.

Tìm tỉ số truyền động của hai trục A và B.



Hình bài 3.2.10

3.2.11. Một điểm chuyển động trong mặt phẳng thẳng đứng theo luật :

$$x = 300 t$$

$$y = 400 t - 5t^2$$

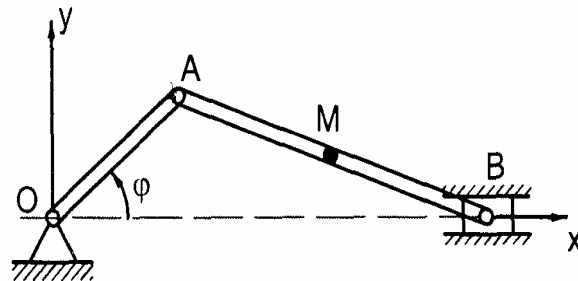
(t: tính bằng giây, y : tính bằng mét)

- Tìm :
- Vận tốc và gia tốc của điểm ở thời điểm đầu.
 - Độ cao và độ xa của điểm.
 - Bán kính cong của quỹ đạo ở điểm đầu và điểm cao nhất.

3.2.12. Một điểm chuyển động theo đường đỉnh ốc có phương trình: $x = \cos 4t$; $y = 2\sin 4t$; $z = 2t$ (đơn vị là mét). Tính bán kính cong của quỹ đạo.

3.2.13. Điểm M trên thanh truyền của cơ cấu tay quay thanh truyền OAB với $OA = AB = l = 60$ cm; $MB = \frac{l}{3}$; $\phi = 4\pi t$ (t tính bằng giây).

Tìm quỹ đạo của M Tính vận tốc, gia tốc và bán kính cong của quỹ đạo tại vị trí $\phi = 0$.



Hình bài 3.2.13

3.3 HỢP CHUYỂN ĐỘNG CỦA ĐIỂM

Vấn đề cần chú ý:

I. Định nghĩa

Điểm M chuyển động đối với vật A, vật A chuyển động B cố định. Gắn vào A một hệ tọa độ - gọi là hệ động. Gắn vào B một hệ tọa độ - gọi là hệ động. Ta có các định nghĩa (Xem hình 3.12) sau:

- Chuyển động của điểm M đối với hệ cố định là chuyển động tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối. Ký hiệu là \vec{V}_a, \vec{a}_a .

- Chuyển động của điểm M đối với hệ động là chuyển động tương đối.

- Vận tốc và gia tốc của điểm M trong chuyển động này là vận tốc tương đối và gia tốc tương đối.

- Chuyển động của hệ động đối với hệ cố định là chuyển động theo. Gọi trùng điểm của M là một điểm M* thuộc hệ động, tại thời điểm khảo sát M* trùng với M.

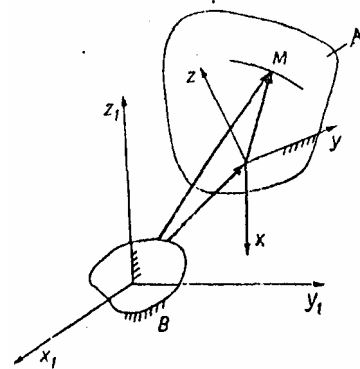
Vận tốc và gia tốc của trùng điểm M* là vận tốc theo và gia tốc theo của M. Ký hiệu \vec{V}_r, \vec{a}_e .

$$\vec{V}_r = \vec{V}_M, \quad \vec{a}_e = \vec{a}_M.$$

Như vậy, chuyển động tuyệt đối, chuyển động tương đối là chuyển động của điểm. Đó là những chuyển động: thẳng, cong, tròn. Chuyển động của vật, đó là những chuyển động: tịnh tiến, quay xung quanh trục cố định, song phẳng...

II. Định lý hợp vận tốc thể hiện bằng công thức

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e \quad (3.13)$$



Hình 3.12

III. Định lý hợp gia tốc thể hiện bằng các công thức sau

a. Nếu hệ động chuyển động tịnh tiến:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e \quad (3.14)$$

b. Nếu hệ động quay xung quanh trục cố định:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}^n_e + \vec{a}^t_e + \vec{a}_c \quad (3.15)$$

Trong đó: $\vec{a}^n_e = R \cdot \omega^2_c$; $\vec{a}^t_e = R \cdot \varepsilon_c$

$$\text{Gia tốc Côriôlit: } \vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r \quad (3.16)$$

($\vec{\omega}_e$; $\vec{\varepsilon}_e$ là Vận tốc góc, gia tốc góc cả hệ quy chiếu động, R là

khoảng cách giữa hai trục quay đến trùng điểm M.)

Chú ý: Trong (3.14) và (3.15), nếu chuyển động tuyệt đối và chuyển động tương đối là cong thì tiếp tục phân tích chúng thành hai thành phần: Tiếp và pháp:

$$\vec{a}_a = \vec{a}^n_a + \vec{a}^t_a; \quad \vec{a}_r = \vec{a}^n_r + \vec{a}^t_r$$

* Phương pháp xác định gia tốc Côriôlit \vec{a}_c

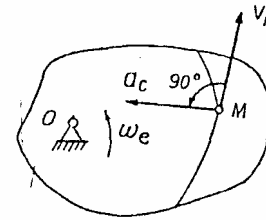
Dùng quy tắc tích véc tơ để tính (3.16) hoặc dùng quy tắc thực hành sau:

- Đối với bài toán phẳng ($\vec{\omega}_e \perp \vec{V}_r$)

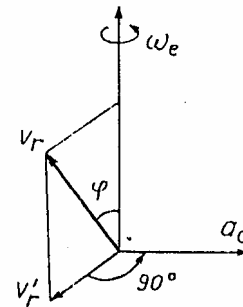
Quay \vec{V}_r đi một góc 90° theo chiều quay của hệ động ta nhận được một vectơ biểu diễn phương, chiều \vec{a}_c ; còn trị số bằng (hình 3.13a)

$$a_c = 2 \cdot \omega_e V_r$$

- Đối với bài toán không gian ($\vec{\omega}_e$ tạo với



a)



b)

Hình 3.13

\vec{V}_r một góc φ)

Chiều \vec{V}_r Xuống mặt phẳng \perp trục quay, nhận được \vec{V}_r quay \vec{V}_r

đi một góc 90° theo chiều quay của hệ động, nhận được \vec{a}_c (hình 3.13b)

trị số : $a_c = 2 \cdot \omega_e V_r \sin \varphi$ (3.16b)

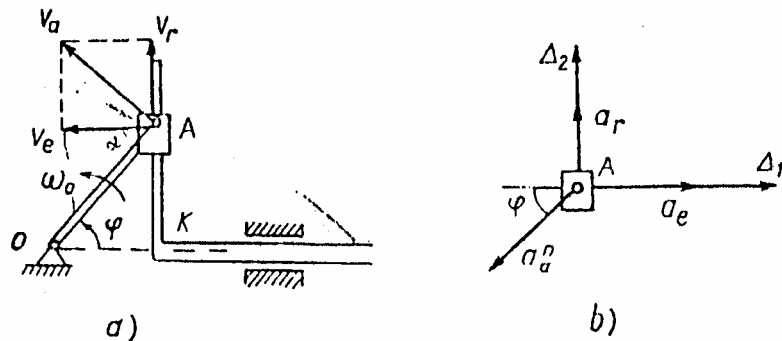
Bài tập giải sẵn

I. Bài toán phân tích chuyển động của điểm

Thí dụ 3-8. Cơ cấu culit như hình vẽ (hình 3.14). Tay quay OA quay với vận tốc góc ω_0 không đổi.

Tìm vận tốc trượt và gia tốc trượt của con chạy A trên chất K và vận tốc, gia tốc của culit K

Biết $OA = 1$ và thời điểm khảo sát là $\varphi = 60^\circ$



Hình 3.14

Bài giải

1. Phân tích chuyển động điểm A

Điểm A chuyển động đối với chất A, culit K chuyển động đối với giá cố định.

Vì vậy ta chọn cuối K làm hệ động.

- Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của A đối với giá cố định A. Đó là chuyển động tròn đều, tâm O, bán kính OA.
- Chuyển động tương đối là chuyển động của A đối với chất K. Đó là

chuyển động thẳng dọc theo nhánh trên của K.

Chuyển động theo là chuyển động của K đối với giá. Đó là chuyển động tịnh tiến.

2. Vận tốc.

- Biểu thức vận tốc: $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$

trong đó: \vec{V}_a có phương chiều đã biết, trị số $V_a = l\omega_0$. Còn \vec{V}_r và $\vec{V}_e = \vec{V}_A$ chỉ biết phương (trùng điểm A*) là điểm thuộc culit)

- Căn cứ vào (a) có thể vẽ được các vector vận tốc (hình 3.14a)

- Tính V_r và V_e . Từ hình 3.14a, ta có :

$$V_r = V_a \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\omega_0; V_e = V_a \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$$

\vec{V} là vận tốc trượt của A trên culit, \vec{V}_e là vận tốc của chất tại thời điểm khảo sát.

3. Gia tốc

- Biểu thức gia tốc: vì chuyển động theo là tịnh tiến, chuyển động tuyệt đối tròn đều nên:

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e \quad (b)$$

Dựa Vào phân tích chuyển động ta thấy: \vec{a}_a^n hướng về O, trị số $a_a^n = l\omega_0^2$ còn \vec{a}_r và $\vec{a}_e = \vec{a}_A$ chỉ biết phương, chiều được giả thiết.

- Các vector được vẽ ở hình 3.14b.

- Tính a_r và a_e : Chiếu cả hai vế của (b) lên hai trục $\Delta 1$ và $\Delta 2$ ta được:

$$a_a^n \cdot \cos 60^\circ = a_e; a_a^n \cdot \sin 60^\circ = a_r$$

$$\text{suy ra: } a_e = -\frac{1}{2}l\omega_0^2; a_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}l\omega_0^2. \text{ vector } \vec{a}_r \text{ và } \vec{a}_e \text{ cùng giả thiết sai}$$

chiều. Vậy ở thời điểm khảo sát con chạy A trượt chậm dần về phía trên,

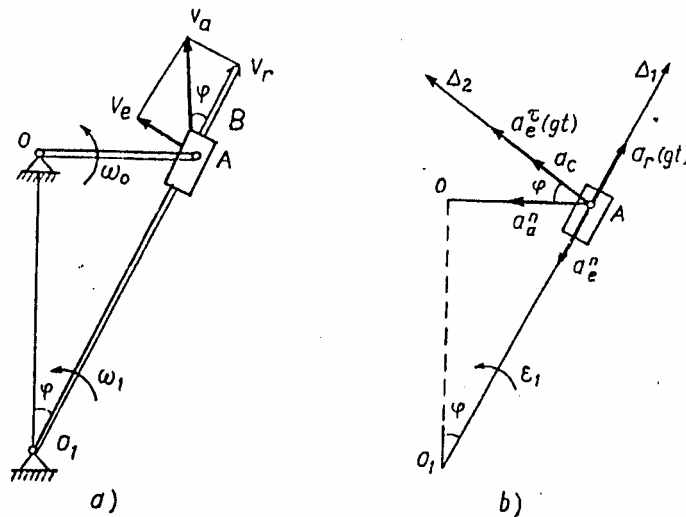
culit K tịnh tiến nhanh dần về bên trái

Thí dụ: 3-5 Cơ cấu tay quay culit (hình 3.15). Tay quay $OA = l = 10$ cm quay đều với vận tốc góc $\omega_0 = 6$ rad/s làm cho con chạy A trượt theo culit O_1B ở thời điểm CA nằm ngang $\varphi = 30^\circ$.

1) tìm vận tốc trượt của A theo culit, vận tốc góc ω_1 của culit O_1B .

2) Tìm gia tốc trượt của A và gia tốc ε_1 của chất.

Bài giải



Hình 3.15

1. Phân tích chuyển động điểm A : điểm A chuyển động dọc O_1B , O_1B quay quanh O_1 . Vì vậy chọn O_1B làm hệ động.

- Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của A đối với giá cố định. Đó là chuyển động tròn đều, tâm O, bán kính OA

- Chuyển động tương đối là chuyển động của A đối với O_1B . Đó là chuyển động thẳng dọc O_1B .

- Chuyển động theo là chuyển động của O_1B đối với giá cố định. Đó là chuyển động quay trục cố định O_1 .

2. Vận tốc

Biểu thức vận tốc:
$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

trong đó: $\vec{V}_a \perp OA$, Phù hợp với chiều quay của ω_0 $V_a = l\omega_0 = 60\text{cm/s}$ \vec{V}_e có phương dọc O_1B trị số V_r chưa biết.

$\vec{V}_a = \vec{V}_e$ (A^* thuộc O_1B và trùng với A) do đó $\vec{V}_a \perp O_1B$, trị số V_e chưa biết.

Dựa vào (a) và cơ cấu, vẽ được các vector vận tốc (hình 3.15a)

- Tính V_r và V_e . Từ hình (3.15a), ta có:

$$V_r = V_e \cos 60^\circ = 30\sqrt{3} \text{ cm/s}; V_e = V_a \sin 60^\circ = 30 \text{ cm/s}$$

Vì $V_{A^*} = V_e O_1A \cdot \omega_1$, nên vận tốc góc của culit O_1B là

$$\omega_1 = \frac{V_e}{O_1A} = \frac{30}{21} = \frac{3}{2} \text{ rad/s}$$

căn cứ chiều vào vẽ $\vec{V}_r, \vec{\omega}_e$ có chiều ngược chiều kim đồng hồ

3. Gia tốc

Biểu thức gia tốc

Vì Chuyển động theo là chuyển động quay, chuyển động tuyệt đối tròn đều nên:

$$\vec{a}_a^n = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_e^n \text{ hướng vào } O, a_e^n = l \omega_0^2 = 360 \text{ cm/s}^2$$

$$\vec{a}_e^t = \vec{a}_{A^*}^t \text{ hướng vào } O_1; a_e^t = O_1A = 2l\omega_1^2 = 45 \text{ cm/s}^2$$

$$\vec{a}_c \text{ xác định theo quy tắc đã biết (quay } \vec{V}_r \text{ đi một góc } 90^\circ \text{ theo}$$

chiều quay của hệ động); $a_c = 2 \omega_1 V_r = 90 \sqrt{3} \text{ cm/s}^2$

$$\vec{a}_e^t \perp O_1B \text{ Chiều giả thiết trị số chưa biết}$$

$$\vec{a}_r \text{ dọc } O_1B \text{ Chiều giả thiết, trị số chưa biết.}$$

- Dựa vào cơ cấu, vẽ được các vectơ gia tốc (hình 3.15b)

Xác định a_e^r và a_r . Chiếu hai vế của (b) lên hai trục Δ_1 và Δ_2 ta được hai phương trình

$$a_e^n \sin \varphi = -a_e^r + a_r$$

$$a_e^n \cos \varphi = a_e^r + a_c$$

Giải được $a_r = a_e^n - a_e^n \sin \varphi = -135 \text{ cm/s}^2$

$$a_e^r = a_e^n \cos \varphi - a_c = 90\sqrt{3} \text{ cm/s}^2$$

Kết quả chứng tỏ a_r ngược chiều giả thiết, a_e^r có chiều đúng. Vì $a_e^r = O_1A \cdot \varepsilon_1$, do đó # gia tốc của chất O_1B là:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_e^r}{O_1A} = \frac{9}{2}\sqrt{3} \text{ rad/s}^2$$

Căn cứ a_e^r , nhận được chiều ε_1 như (hình 3.15b)

Như vậy tại thời điểm khảo sát, con chạy chuyển động chậm dần dọc O_1B (vì $V_r, a_r < 0$) còn culit O_1B quay nhanh dần ($\omega_1, \varepsilon_1 > 0$).

II. Bài toán tổng hợp chuyển động

Thí dụ 3-9. Cơ cấu 4 khâu có dạng hình bình hành ($O_1O_2 = AB, O_1A - O_2B$). Tay quay O_1A dài 0,5 m, quay với vận tốc góc ($\omega_1 = 2t \text{ rad/s}$). Dọc theo thanh AB có con chạy M chuyển động theo phương trình: $AM = S = 5t^2$ (Stính bằng giây s)

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối của con chạy lúc $t = 2s$. Biết lúc đó $\varphi = 300$ (hình 3.16).

Bài giải :

1. Phân tích chuyển động điểm M : điểm M chuyển động dọc AB , thanh AB chuyển động tịnh tiến. Vì vậy chọn AB làm hệ động.

- Chuyển động tương đối là chuyển động của M đối với AB . Đó là chuyển động thẳng dọc AB .

- Chuyển động theo là chuyển động của AB đối với giá. Đó là chuyển động tịnh tiến.

- Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của M đối với giá. Đó là chuyển động cần phải tìm.

2. Vận tốc

- Biểu thức vận tốc: $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (a)

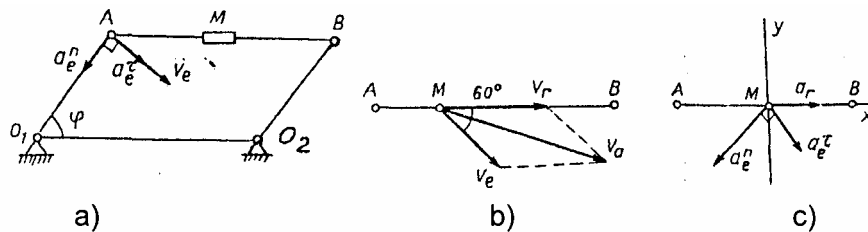
\vec{V}_r hướng dọc AB, $V_r = |\dot{S}| = 10$ t. Lúc $t = 2$ s; $V_r = 20$ m/s

$\vec{V}_e = \vec{V}_{M^*} = \vec{V}_A$ (thanh AB tịnh tiến M^* thuộc AB, trùng với M)

Do đó $\vec{V}_e \perp OA$; $V_e = O_1A \cdot \omega = 1$ t. Lúc $t = 2$ s; $V_e = 2$ m/s. \vec{V} chưa

xác định

- Các vector vận tốc được vẽ như hình (3.16b)



Hình 3.16

Tính trị số V_a , V_a là đường chéo hình bình hành, các cạnh V_e và V_r nên"

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e \cdot V_r \cdot \cos 60^\circ} = 21,07 \text{ m/s}$$

có thể chiếu (a) lên hai trục vuông góc, tìm được

$$V_{ax} = 21 \text{ m/s}; \quad V_{ay} = -\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$V_a = \sqrt{V_{ax}^2 + V_{ay}^2}$$

3. Gia tốc

- Vì chuyển động theo là tịnh tiến, nên $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e$. Trùng điểm

M* có gia tốc bằng gia tốc của A nên $\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t$ do đó biểu thức

gia tốc là: $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t$

Dựa vào phân tích chuyển động ta thấy:

\vec{a}_r hướng dọc AB, trị số $a_r = |\vec{S}| = 10 \text{ m/s}^2$

\vec{a}_e^n hướng về O₁, trị số $a_e^n = O_1A \cdot \omega_1^2 = 8 \text{ m/s}^2$

$\vec{a}_e^t \perp O_1A$, trị số $a_e^t = O_1A \cdot \varepsilon_1 = O_1A \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ m/s}^2$

\vec{a}_a hoàn toàn chưa xác định, được phân tích thành a_{ax} và a_{ay}

- Các vectơ về bên phải của (b) được vẽ như hình 3.16c

- Xác định \vec{a}_a : Chiếu hai véc của (b) lên hai trục x và y.

$$a_x = a_e^t \cdot \cos 60 - a_e^n \cdot \cos 30 + a_r = 1 \cdot \frac{1}{2} - 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 = 3,58 \text{ cm/s}^2$$

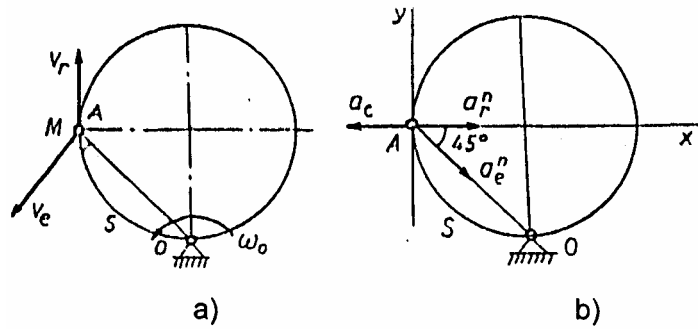
$$a_y = -a_e^t \cdot \sin 60 - a_e^n \cdot \sin 30 = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\right) \text{ cm/s}^2$$

Từ đó, gia tốc tuyệt đối của điểm M là:

$$a = \sqrt{(3,58)^2 + \left(4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 6,1 \text{ m/s}^2$$

Thí dụ 3-10. Vành tròn bán kính $R = 20 \text{ cm}$ quay trong mặt phẳng của nó quanh trục O với vận tốc góc $\omega_0 = 3 \text{ rad/s}$. Một điểm M chuyển động trên vành theo quy luật $S = OM = 5\pi t \text{ (cm)}$

Tìm vận tốc và gia tốc tuyệt đối lúc $t = 2 \text{ giây}$ (hình 3.17)



Hình 3.17

Bài giải

1. Phân tích chuyển động của điểm M: điểm M chuyển động theo vành, vành quay quanh O, vì vậy chọn vành làm hệ động.

- Chuyển động tương đối là chuyển động của M đối với vành. Đó là chuyển động tròn theo vành.

- Chuyển động theo là chuyển động của vành. Đó là chuyển động quay đều quanh O.

- Chuyển động tuyệt đối là chuyển động của M đối với giá cố định ta chưa biết.

2. Vận tốc

- Biểu thức vận tốc: $\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$ (a)

Khi $t = 2$ s thì $S = 10\pi - R \cdot \frac{\pi}{2} = OA$, điểm M chuyển động đến A.

Khi đó: \vec{V}_r hướng tiếp tuyến với vành, trị số $V_r = |\vec{S}| = 5\pi$ cm/s.

= const. Trùng điểm A^* là điểm thuộc vành, $\vec{V}_e = \vec{V}_{A^*}$ nên

$\vec{V}_e \perp OA$, trị số:

$V_e = OA \cdot \omega_0 = \omega R \cdot \sqrt{2} = 60\sqrt{2}$ cm/s

- Vectơ \vec{V}_r, \vec{V}_e được vẽ như hình 3.17a

Tính \vec{V}_a : Chiếu hai véc của (a) lên hai trục tọa độ Đề-các

$$V_{ax} = -V_e \cos 45^\circ = -60\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -60 \text{ cm/s}$$

$$V_{ay} = -V_e \sin 45^\circ + V_r = -60\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 5\pi = 44,3 \text{ cm/s}$$

$$V_a = \sqrt{60^2 + (44,3)^2} = 74,6 \text{ cm/s}$$

3. Gia tốc

Biểu thức gia tốc: vì chuyển động theo là quay đều và chuyển động tương đối là tròn đều, nên:

$$\vec{a}^n_a = \vec{a}_r + \vec{a}^n_e + \vec{a}^r_e + \vec{a}_c$$

Dựa vào phân tích chuyển động ta thấy: $\vec{a}^n_e = \vec{a}^n_{A^*}$ (A^* là điểm thuộc vành) nên \vec{a}^n_e hướng vào O, trị số $a^n_a = OA \omega^2 = R \sqrt{2} \omega^2 = 180\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$

Vector \vec{a}^n_r hướng vào tâm của vành, trị số $a^n_r = \frac{(V_r)^2}{R} = \frac{(5\pi)^2}{20} = \frac{5\pi^2}{4}$

Vector \vec{a}_c được xác định theo quy tắc đã biết (quay \vec{V}_r đi một góc 90° theo chiều quay của hệ động); $a_c = 2 \omega_1 V_r = 30\pi \text{ cm/s}^2$

Véc tơ \vec{a}_a hoàn toàn chưa xác định, được phân tích thành hai thành phần a_{ax} và a_{ay}

- Vẽ các vector véc phải của (b) (hình 3.17b)

- Tìm a_a : Chiếu hai véc của b lên hai trục Đề-các, ta có:

$$a_{ax} = a^n_e \cdot \cos 45^\circ + a^n_r - a_c = 180\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\pi^2}{4} - 30 = 98,25 \text{ cm/s}^2$$

$$a_{ay} = -a^n_e \cdot \sin 45^\circ = 180\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = -180 \text{ cm/s}^2$$

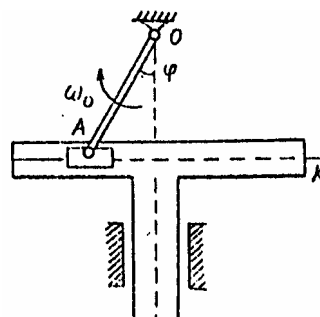
Gia tốc tuyệt đối của M là

$$a = \sqrt{(98.25)^2 + (100)^2} = 182.6 \text{ cm/s}^2$$

Bài tập cho đáp số

I. Bài toán phân tích chuyển động của điểm

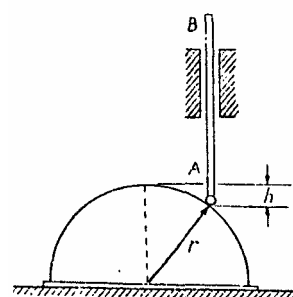
3.3.1. Tay quay $OA = l$ quay đều quanh O với vận tốc ω_0 làm con chạy A chuyển động trong rãnh của culit K và culit K chuyển động lên xuống (Xem hình bài 3.3.1.).



Hình bài 3.3.1.

Tìm vận tốc và gia tốc của culit K và vận tốc gia tốc của con chạy A đối với chất cho biết lúc khảo sát $\varphi = 30^\circ$.

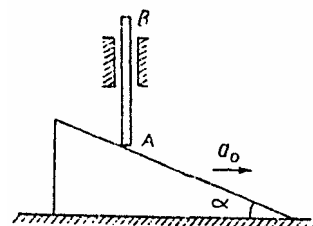
3.3.2. Cần đẩy AB chuyển động hẳng, nhanh dần đều, sau 4 giây nó vượt từ vị trí cao nhất xuống đoạn $h = 4\text{cm}$ làm cho cam bán kính $r = 10\text{cm}$ trượt trên nền ngang.



Hình bài 3.3.2

Tìm vận tốc và gia tốc của cam lúc đó (Xem hình bài 3.3.2.)

3.3.3. Một cam hình tam giác có góc nhọn α trượt theo mặt nằm ngang với gia tốc không đổi a_0 làm cho thanh AB chuyển động khe thẳng đứng (hình bài 3.3.3).

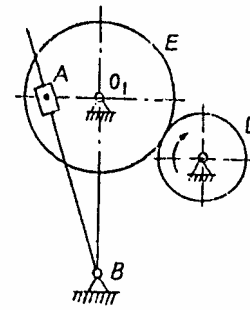


Hình bài 3.3.3.

Tìm vận tốc và gia tốc của thanh AB .

3.3.4. Con chạy A của cơ cấu tay quay cần lắc có chốt trên bánh răng E , bánh răng này được truyền chuyển động nhờ bánh răng $R_D = 100\text{mm}$. $R_E = 350\text{mm}$, khoảng cách $O_1A = 300\text{mm}$, $O_1B = 700\text{mm}$, (Xem hình 3.3.4.) Cho vận tốc góc của bánh D là $\omega_D = 7\text{rad/s}$.

Tìm vận tốc góc và gia tốc góc của cần lắc BA lúc A ở vị trí cao nhất và lúc O_1B vuông góc với cần lắc BA.



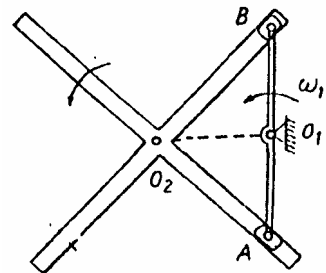
Hình bài 3.3.4

3.3.5. Để truyền chuyển động quay giữa hai trục song song, người ta dùng cơ cấu như (hình bài 3.3.5). Tay quay AB quay quanh trục O_1 với vận tốc góc ω_1 không đổi làm cho máng chữ nhật quay quanh trục O_2

Biết $O_1O_2 = O_1A = O_1B = b$.

Xác định:

- 1) Vận tốc tương đối và theo của con chạy A, vận tốc góc của máng.
- 2) Gia tốc tương đối, theo và côriôlit của con chạy A.

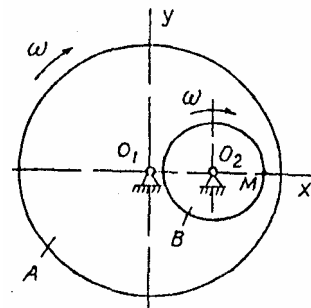


Hình bài 3.3.5.

Hướng dẫn: đặt $O_2O_1A = \varphi = \omega_1 t$.

3.3.6. Hai đĩa A và B cùng quay với vận tốc góc ω quanh các trục cố định O_1 và O_2 (hình bài 3.3.6). Trên đĩa B lấy điểm M trên vành và khảo sát chuyển động của nó khi lấy đĩa A làm hệ quy chiếu động.

Xác định trị số gia tốc tương đối và côriôlit của M nếu $\omega = 10 \text{ rad/s}$ và $O_1O_2 = 15 \text{ cm}$. Hướng dẫn: hoàn toàn hình bài 3.3.6. chưa xác định, phân tích thành a_{rv}



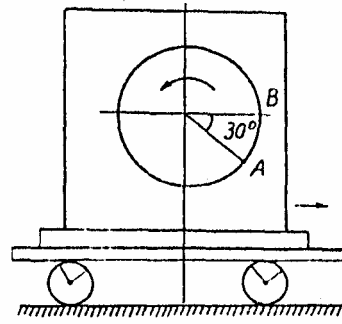
Hình bài 3.3.6.

II- Bài toán tổng hợp chuyển động của điểm.

3.3.7. Trên xe chuyển động nhanh dần với gia tốc $49,2 \text{ cm/s}^2$ có đặt một trong cơ điện. Roto của động cơ quay với phương trình $\varphi = t_2$. Bán

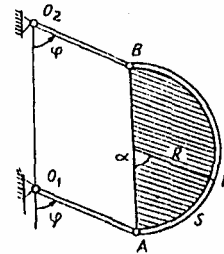
kính roto là 20cm

Xác định vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm A nằm trên vành nhỏ lúc $t = 1$ giây, biết lúc đó A có vị trí như (hình bài 3.3.7).



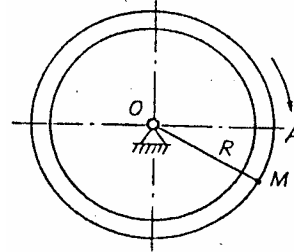
Hình bài 3.3.7

3.3.8. Cơ cấu như (hình bài 3.3.8) $O_1A = O_2B = 20$ cm; $R = 16$ cm. Thanh O_1A quay theo luật: $\varphi = \frac{5}{48} \pi t^3$ Điểm M chuyển động trên vành tròn theo luật $S = AM = \pi t^2$ cm. Tại thời điểm $t_1 = 2$ s, hãy tìm vận tốc tuyệt đối, gia tốc tuyệt đối của điểm M.



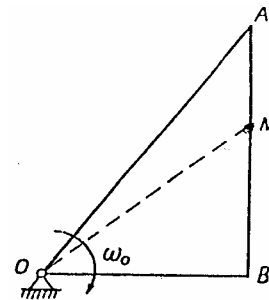
Hình bài 3.3.8

3.3.9. Một ống tròn bán kính $R = 1$ m quay quanh trục O với vận tốc góc không đổi $\omega_0 = 1$ rad/s. Trong ống có điểm M dao động quanh điểm A theo luật $\varphi = \sin \pi t$ (hình bài 3.3.9). Xác định gia tốc tuyệt đối của M ở thời điểm $t_A = 2 \frac{1}{6}$ s.



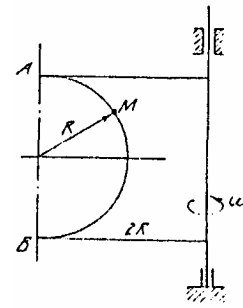
Hình bài 3.3.9

3.3.10. Tam giác vuông OAB quay quanh trục O với vận tốc góc không đổi $\omega_0 = 1$ rad/s. Điểm M chuyển động từ A đến B với gia tốc không đổi bằng 2cm/s^2 , vận tốc bằng không. Tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của M ở thời điểm (Hình 3.3.10) $t = \frac{1}{2}$ s, biết lúc này $OB = 1$ m



Hình bài 3.3.10

3.3.11. Nửa đường tròn bán kính R quay quanh trục song song với đường kính AB với vận tốc góc $\omega = \text{hằng}$. Khoảng cách giữa trục quay với AB bằng $2R$. Trên đường tròn có điểm M chuyển động từ A đến B với vận tốc tương đối $u = \text{hằng}$.



Hình bài 3.3.11

Tìm vận tốc tuyệt đối và gia tốc tuyệt đối của điểm M ở thời điểm đầu và ở thời điểm nó đã "đi" được $1/4$ vòng tròn. (Hình bài 3.3.11.)

Trả lời: $V = \sqrt{u^2 + 4R^2\omega^2}$

$$W = \sqrt{4R^4\omega^4 + \frac{u^4}{R^2} + 4u^2\omega^2}$$

$$V = \sqrt{u^2 + 4R^2\omega^2}; \quad w = \frac{u^4}{R} - R\omega^2$$

3.3.12. Cho cơ cấu điều tiết ly tâm Watt.

Lúc khảo sát, trục quay có vận tốc góc $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s, gia tốc góc $\varepsilon = 1$ rad/s²; các thanh treo quả cầu có vận tốc góc

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s, gia tốc góc } \varepsilon_1 = 0,4 \text{ rad/s}^2;$$

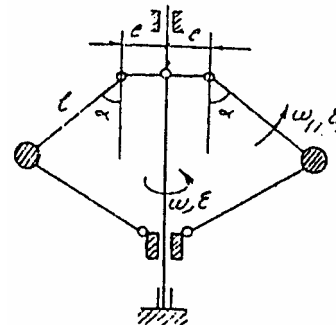
$$\alpha = 45^\circ$$

Tìm gia tốc tuyệt đối của quả cầu.

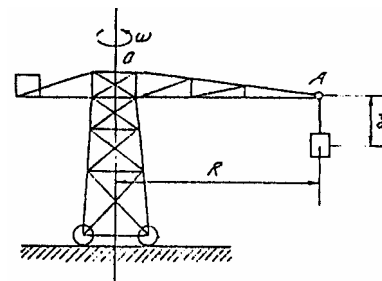
Biết $l = 50$ cm, $e = 5$ cm (hình bài 3.3.12)

Trả lời: $W_a = 293,7 \text{ cm/s}^2$.

3.3.13. Một cần trục chuyển động trên đường ray với gia tốc w_1 đồng thời quay quanh trục thẳng đứng với vận tốc ω . Ở đầu cuối A của cánh tay cần trục, người ta cầu vật nặng, chiều dài dây treo thay đổi theo



Hình bài 3.3.12



Hình bài 3.3.13

$$\text{luật } z = l_0 - \frac{1}{2} w_2 t^2 \quad (w_2 =$$

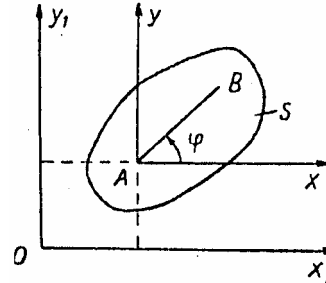
hằng). Cho $OA = R$ Tìm gia tốc tuyệt đối của vật nặng ở thời điểm OA song song với đường rây (hình 3.3.13.)

Trả lời: $w_a = \sqrt{(w_1 - R\omega^2)^2 + w_2^2}$

3.4 CHUYỂN ĐỘNG SONG PHẪNG CỦA VẬT RẮN

Vấn đề cần chú ý

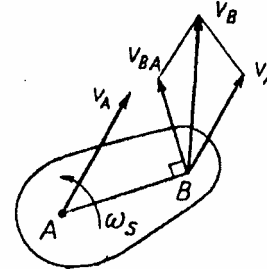
Chuyển động song phẳng của vật rắn là chuyển động mà mỗi điểm thuộc vật chỉ chuyển động trong một mặt phẳng song song với mặt phẳng cố định.



Hình 3.18

I. Phân tích chuyển động phẳng

1. Chuyển động song phẳng có thể phân tích thành chuyển động tịnh tiến cùng với điểm cực A và chuyển động quay xung quanh cực đó (Hình 3.18)



Hình 3.19

2. Phương trình chuyển động :

$$X_a = x_1(t)$$

$$Y_a = y_1(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

AB là đoạn thẳng bất kỳ thuộc vật.

3. Các yếu tố đặc trưng cho chuyển động song phẳng là :

Vận tốc, gia tốc cực A và vận tốc gia tốc góc của vật

$$\vec{v}_A(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$$

$$\vec{a}_1(\ddot{x}_1, \ddot{y}_1)$$

$$\bar{\omega}_s = \dot{\varphi}; \bar{\varepsilon}_s = \ddot{\varphi}$$

trong đó $\bar{\omega}_s, \bar{\varepsilon}_s$ không phụ thuộc vào việc chọn điểm cực.

II. Vận tốc của điểm thuộc vật

1. Quan hệ vận tốc hai điểm thể hiện bằng công thức :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \quad (3.16)$$

trong đó: $\vec{V}_{BA} \perp BA$, chiều của \vec{V}_{BA} phụ thuộc $\overline{\omega}_s$, trị số

$$\vec{V}_{BA} = BA \cdot \omega_s$$

2. Công thức hình chiếu vận tốc.

Chiếu hai vế của (3.16) lên phương AB, ta có:

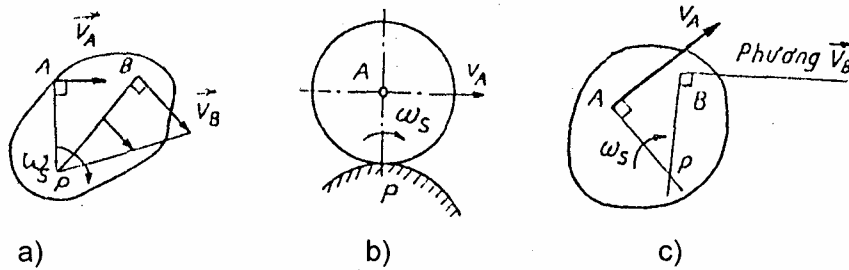
$$H.ch_{AB} \vec{V}_B = H.ch_{AB} \vec{V}_A \quad (3.17)$$

3. Tâm vận tốc tức thời P

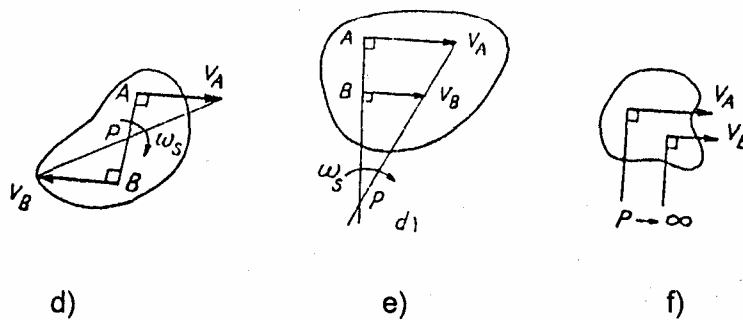
Tại mỗi thời điểm hình phẳng có một điểm P, tại đó $V_P = 0$ - vận tốc mọi niệm phân bố giống như hình phẳng đang quay quanh P với vận tốc góc ω_s :

$$V_B = PB \cdot \omega_s; V_A = PA \cdot \omega_s$$

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{PB}{PA} \quad (3.18)$$



Hình 3.20



Hình 3.21

* Phương pháp xác định P:

III. Gia tốc của điểm thuộc vật

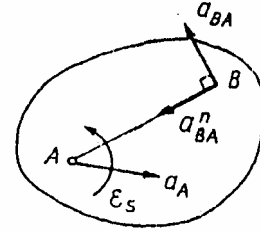
1. Quan hệ gia tốc hai điểm thể hiện bằng công thức:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t \quad (3.19)$$

Trong đó

$$\vec{a}_{BA}^n \begin{cases} \text{hướng từ B đến a} \\ \vec{a}_{BA}^n = BA \cdot \omega_s^2 \end{cases}$$

$$\vec{a}_{BA}^t \begin{cases} \perp BA \\ \text{Chiều phù hợp } \overline{\varepsilon}_s, \text{ hoặc giả thiết} \\ \vec{a}_{BA}^t = BA \cdot \varepsilon_s \end{cases}$$



Hình 3.22

2. Chú ý:

• Nếu quỹ đạo của A và B là cong, thì tiếp tục phân tích:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t; \vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t$$

• Đối với đĩa phẳng (bánh xe, bánh răng, ròng rọc động), gia tốc góc của đĩa tìm được bằng cách lấy đạo hàm vận tốc góc của đĩa theo thời gian:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\omega_s}{dt} \quad (3.20)$$

Đặc biệt đối với đĩa phẳng lăn không trượt (hình 3.20) ở đây $AP = R = \text{const}$:

$$\varepsilon_s = \frac{a_A^t}{R} \quad (3.21)$$

Vì khi này

$$\omega_s = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B}{R} \text{ nên}$$

$$\varepsilon_s = \frac{d\omega_s}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dV_A}{dt} = \frac{a_A^t}{R}$$

Bài tập giải sẵn

I. Viết vận tốc, gia tốc điểm A và tâm vận tốc P với $AP = \text{const}$ (cơ cấu đĩa lăn không trượt)

Thí dụ 3.11. Tay quay OA quay xung quanh trục O làm bánh 2 lăn không trượt theo vành bánh 1 cố định (hình 3.23). Biết $r_2 = 0,2$ m và $r_1 = 0,3$ m. Tại thời điểm tay quay có vận tốc góc $\omega = 1$ rad/s và gia tốc góc $\varepsilon = 4$ rad/s². Hãy tìm:

- Vận tốc góc bánh 2 và vận tốc điểm B trên vành bánh 2 ($AB \perp OA$).
- Gia tốc góc bánh 2 và gia tốc điểm B

Bài giải

1. Phân tích chuyển động các khâu

Tay quay OA chuyển động quay, bánh 2 chuyển động song phẳng, điểm tiếp xúc chính là tâm vận tốc tức thời P. Đối với bánh 2 ta biết \vec{V}_A , \vec{a}_A và P với $AP = \text{const}$.

2. Vận tốc.

Dùng phương pháp tâm vận tốc tức thời.

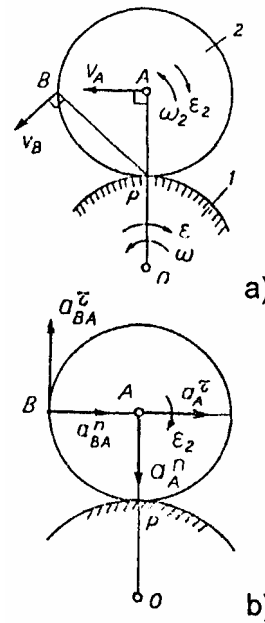
- Xác định tâm vận tốc: điểm tiếp xúc giữa hai bánh là tâm vận tốc
- Xác định vận tốc góc của bánh và vận tốc điểm B.

Vận tốc bánh 2:
$$\omega_2 = \frac{V_A}{PA} = \frac{OA \cdot \omega}{r_2} = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot \omega = 2,5 \text{ rad/s}$$

$\overline{\omega_2}$ ngược chiều kim đồng hồ

Vận tốc điểm B:

$$V_B = BP \cdot \omega_2 = r_2 \sqrt{2} \omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Hình 3.23

V_B có chiều như (hình 3.23a)

3. Gia tốc

Vì $AP = \text{const}$ (cơ cấu bánh tăn không trượt) nên theo (3.21) ta có gia tốc góc bánh 2:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_A^\tau}{AP} = \frac{OA \cdot \varepsilon}{AP} = \frac{(r_1 + r_2)}{r_2} = 10 \text{ rad/s}^2$$

ε_2 thuận chiều kim đồng hồ

- Chọn điểm a làm cực, biểu thức gia tốc:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau \quad (\text{a})$$

\vec{a}_A^n hướng về O, $a_A^n = OA \cdot \omega^2 = 0,5 \text{ m/s}^2$

$\vec{a}_A^\tau \perp OA$, chiều phù hợp $\overline{\varepsilon}$; $a_A^\tau = OA \cdot \varepsilon = 2 \text{ m/s}^2$

\vec{a}_{BA}^n hướng B về A, $a_{BA}^n = BA \cdot \omega_2^2 = 1,25 \text{ m/s}^2$

$\vec{a}_{BA}^\tau \perp OA$, chiều phù hợp $\overline{\varepsilon_2}$; $a_{BA}^\tau = BA \cdot \varepsilon_2 = 2 \text{ m/s}^2$

- Vẽ các vectơ gia tốc như hình 3.23b.

- Tính \vec{a}_B : \vec{a}_B chưa biết phương chiều, được phân tích hai thành phần vuông góc. Trị số tìm được bằng cách chiếu hai vế của (a) lên hai trục vuông góc:

$$a_{Bx} = a_A^\tau + a_{BA}^n = 3,25 \text{ m/s}^2$$

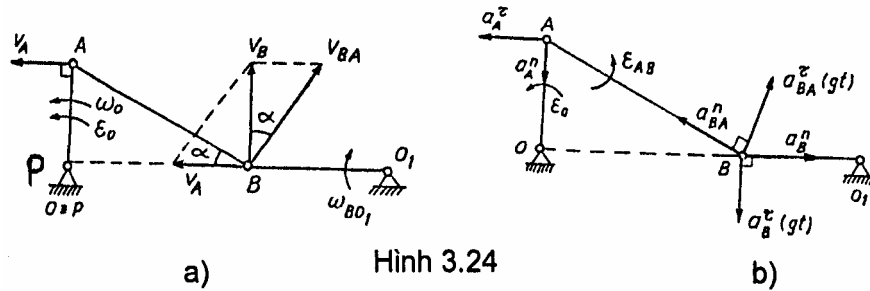
$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^\tau = 1,5 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 3,58 \text{ m/s}^2$$

II. Biết vận tốc, gia tốc một điểm và quỹ đạo điểm khác (Cơ cấu phanh)

Thí dụ 3.12 Có cơ cấu bốn khâu như hình 3.24. Cho: $OA = r$, $AB = 2r$; $O_1B = 2r\sqrt{3}$. Tại thời điểm thanh OA thẳng đứng, các điểm O, B, O_1

cùng nằm trên đường ngang, khi đó tay quay có vận tốc ω_0 và gia tốc góc $\varepsilon_0 = \omega_0^2 \sqrt{3}$. Hãy xác định vận tốc góc và gia tốc góc của thanh AB lúc đó.



Hình 3.24

Bài giải.

Thanh OA và O₁B quay xung quanh các trục cố định. Thanh AB chuyển động song phẳng. Đối với thanh này, ta biết được đặc trưng chuyển động của hai điểm: \vec{V}_A , \vec{a}_A và quỹ đạo B

1. Vận tốc

Có thể dùng các phương pháp tính vận tốc sau:

a. Tâm vận tốc tức thời: - Xác định tâm P, biết $\vec{V}_A \perp OA$, $\vec{V}_B \perp O_1A$, do đó từ A và B kẻ các đường tương ứng vuông góc với \vec{V}_A và \vec{V}_B , giao điểm của hai đường này là tâm vận tốc tức thời P, ở đây P trùng với O (hình 3.24).

- Xác định vận tốc góc các khâu và vận tốc các điểm: Điểm A thuộc OA nên: $V_A = r\omega_0$

Mặt khác thuộc AB nên: $V_A = PA\omega_{AB}$

Do đó vận tốc góc khâu AB là

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{V_A} = \frac{r\omega_0}{r} = \omega_0$$

Điểm B thuộc AB nên:

$$V_B = PB.\omega_{AB} = r\sqrt{3}\omega_0$$

Mặt khác, B thuộc BO_1 nên: $V_B = V_{BO_1} \cdot \omega_{BO_1}$

Do đó vận tốc góc khâu BO_1 là:

$$\omega_{BO_1} = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{r\sqrt{3}\omega_0}{2r\sqrt{3}} = \frac{\omega_0}{2}$$

b. Có thể dùng quan hệ vận tốc hai điểm: Chọn điểm A có chuyển động đã biết làm điểm cực.

Biểu thức vận tốc là:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{v}_A \perp OA, V_A = r\omega_0$$

$$\vec{v}_{BA} \perp AB, V_{BA} = AB\omega_{AB} \text{ chưa biết}$$

$$\vec{v}_B \perp O_1B, V_B = BO_1\omega_{BO_1} \text{ chưa biết}$$

- Vẽ các vectơ vận tốc, đưa vectơ \vec{v}_A về B (hình 3.24a)

- Tìm trị số V_{BA} và V_B : trị số V_A, V_{BA}, V_B là độ dài ba cạnh của tam giác vuông ($\alpha = 30^\circ$) nên:

$$V_{BA} = \frac{V_A}{\sin \alpha} = 2r\omega_0; \quad V_B = \frac{V_A}{\tan \alpha} = r\sqrt{3}\omega_0;$$

$$\text{Suy ra: } \omega_{BA} = \frac{V_{BA}}{AB} = \omega_0; \quad \omega_{BO_1} = \frac{V_B}{BO_1} = \frac{\omega_0}{2};$$

c. Có thể dùng công thức hình chiếu vận tốc để tìm \vec{v}_B :

$$\text{Ta có: } H.ch_{AB} \cdot \vec{v}_B = H.ch_{AB} \cdot \vec{v}_A \text{ hay là: } V_B \cos 60^\circ = V_A \cos 30^\circ$$

$$\text{Suy ra } V_B = r\sqrt{3}\omega_0$$

2. Vận tốc

Dùng phương pháp tâm vận tốc tức thời.

a) Xét bánh 1

(bánh lăn không trượt)

- Xác định tâm vận tốc: điểm tiếp xúc giữa 2 bánh là tâm vận tốc tức thời P_1 của bánh 1.

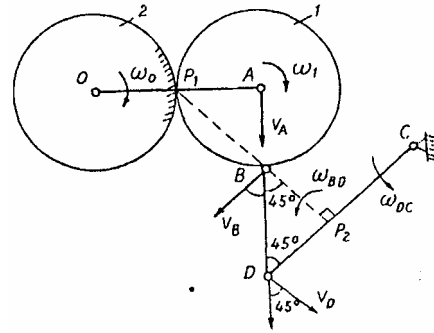
- Xác định vận tốc góc bánh 1 và vận tốc điểm B:

Vận tốc góc bánh 1 :

$$\omega_1 = \frac{V_A}{P_1A} = \frac{2r\omega_0}{r} = 2\omega_0$$

ω_1 thuận chiều kim đồng hồ.

Vận tốc điểm B: $V_B = P_1B\omega_1 = 2r\sqrt{2}\omega_0$



Hình 3.25a

$\vec{V}_B \perp P_1B$, chiều phù hợp với ω_1 .

b) xét thanh BD, biết \vec{V}_B và quỹ đạo D (vòng tròn tâm C)

-Xác định tâm vận tốc tức thời.

Từ B và D kẻ các đường tương ứng vuông góc với \vec{V}_B và \vec{V}_D giao điểm của 2 đường đó là tâm vận tốc tức thời P_2 của thanh DB. ở đây

$$BP_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} l$$

- Xác định vận tốc góc của thanh BD và vận tốc điểm D:

Vận tốc góc của thanh BD: $\omega_{BD} = \frac{V_P}{P_2B} = \frac{4r}{l} \omega_0$; ω_{BD} ngược chiều kim đồng hồ.

Áp dụng hệ quả hình chiếu tìm V_D :

$$H.ch_{BD} \cdot \vec{V}_B = H.ch_{BD} \cdot \vec{V}_D \text{ hay là: } V_B \cos 45^\circ = V_D \cos 45^\circ$$

$$V_D = V_B = 2r\sqrt{2} \omega_0; \vec{V}_D \text{ có chiều như ở (hình 3.25a)}$$

Suy ra vận tốc góc thanh DC:

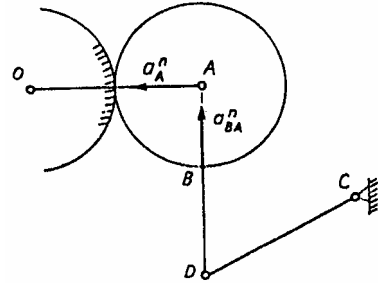
$$\omega_{D'} = \frac{V_D}{DC} = \frac{2r\sqrt{2}}{l} \omega_o;$$

$\overline{\omega_{DC}}$ ngược chiều kim đồng hồ.

3. Gia tốc: Xét bánh 1 :

Vì $AP_1 = \text{const}$ (cơ cấu bánh lăn không trượt) nên theo (3.21) ta có gia tốc bánh 1 :

$$\varepsilon = \frac{a_A^r}{r} = 0$$



Hình 3.25b

- Chọn điểm A làm cực, ta có biểu thức gia tốc :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r$$

$$\vec{a}_A^n \text{ hướng từ A đến O: } a_A^n = OA \omega_o^2 = 2r \omega_o^2$$

$$\vec{a}_{BA}^n \text{ hướng từ B đến A: } a_{BA}^n = BA \omega_1^2 = 4r \omega_o^2$$

$$\vec{a}_{BA}^r \perp BA; a_{BA}^r = BA \varepsilon_1 = 0$$

- Vẽ các vectơ gia tốc: (hình 3.25b)

$$\text{- Tính } a_B: \text{ Vì } \vec{a}_A^n \perp \vec{a}_{BA}^n \text{ nên } a_B = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_{BA}^n)^2} = 2\sqrt{5}r \omega_o^2$$

Chú ý: Muốn tìm ε_{DB} và ε_{DC} ta xét thanh DB và chọn điểm B làm cực :

$$\vec{a}_D^n + \vec{a}_D^r = \vec{a}_B + \vec{a}_{DB}^n + \vec{a}_{DB}^r$$

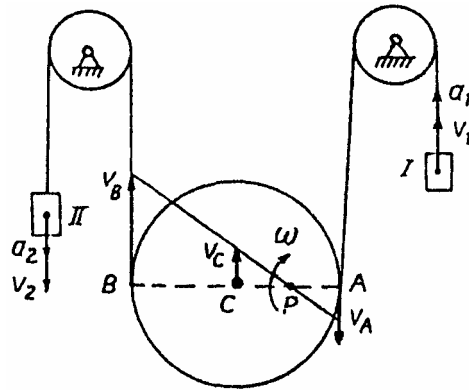
trong đó:

$$\vec{a}_{DB}^r = DB \cdot \varepsilon_{DB}; \vec{a}_D^r = DC \cdot \varepsilon_{DC}$$

Thí Dụ 3.13. Hệ ròng rọc như hình 3.26a.

Ở thời điểm khảo sát, vật I được nâng lên với vận tốc \vec{V}_1 , gia tốc \vec{a}_1 .

Vật II hạ xuống với vận tốc \vec{V}_2 gia tốc \vec{a}_2 . Tìm vận tốc góc, vận tốc và gia tốc tâm C của ròng rọc di động bán kính R và gia tốc điểm B trên vành của ròng rọc di động.



Hình 3.26a

Bài giải :

1. Phân tích chuyển động.

Vật 1 và 2 chuyển động tịnh tiến, 2 ròng rọc quay xung quanh trục cố định. Ròng rọc di động chuyển động song phẳng. Khi không có trượt giữa dây và ròng rọc thì trị số vận tốc của vật nặng bằng trị số vận tốc điểm tiếp xúc; trị số gia tốc vật nặng bằng trị số gia tốc điểm tiếp xúc, nghĩa là :

$$V_1 = V_a; a_1 = a'_A;$$

$$V_2 = V_B; a_2 = a'_B$$

2. Vận tốc. Trên ròng rọc động ta biết vận tốc 2 điểm do đó xác định được tâm vận tốc tức thời P (hình 3.26a)

- Vận tốc góc của ròng rọc là:

$$\omega = \frac{V_B}{PB} = \frac{V_A}{PA} = \frac{V_B + V_A}{PB + PA} = \frac{V_1 + V_2}{2R}$$

- Vận tốc tâm C. Do tính chất đồng dạng (hình3.26a) ta có:

$$V_C = \frac{V_B - V_A}{2} = \frac{V_2 - V_1}{2}$$

Nếu $V_2 > V_1$ tâm C đang được nâng lên ; nếu $V_2 < V_1$ thì tâm C sẽ hạ xuống; nếu $V_2 = V_1$ thì $V_C = 0$.

3. Gia tốc:

Biểu thức (a) đúng cho bất kỳ thời điểm nào, nên theo (3.20) ta có gia tốc góc của ròng rọc:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2R} \cdot \frac{d}{dt}(V_1 + V_2) = \frac{a_1 + a_2}{2R}$$

$\overline{\varepsilon}$ thuận chiều kim đồng hồ.

Vì C chuyển động thẳng nên gia tốc cùng phương với vận tốc, từ biểu thức (b) ta có:

$$a_c = \frac{d}{dt}V_c = \frac{d}{dt}\left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right) = \frac{a_1 - a_2}{2}$$

Nếu $a_2 > a_1$ thì $\overline{a_c}$ hướng lên.

- Chọn điểm C làm cực, ta có gia tốc điểm B:

$$\overline{a_B} = \overline{a_c} + \overline{a_{BC}^n} + \overline{a_{BC}^t}$$

$\overline{a_{BC}^n}$ hướng từ B đến C

$$a_{BC}^n = BC \cdot \omega^2 = R \cdot \left(\frac{V_1 + V_2}{2R}\right)^2 = \frac{(V_1 + V_2)^2}{4R}$$

$\overline{a_{BC}^t} \perp BC$, chiều phù hợp $\overline{\varepsilon}$

$$a_{BC}^t = BC \cdot \varepsilon = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

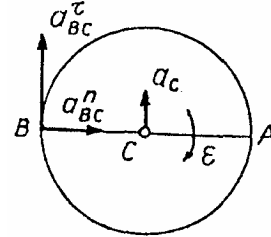
Các vector được vẽ như hình 3.26b

Tính trị số a_B . Chiếu hai vế của (c) lên hai trục vuông góc:

$$a_{Bx} = a_{BC}^n = \frac{(V_1 + V_2)^2}{4R}$$

$$a_{By} = a_c + a_{BC}^t = \frac{a_2 - a_1}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} = a_2$$

Gia tốc điểm B: $a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}$



Hình 3.26b

Bài tập cho đáp số

3.4.1. Đĩa phẳng có bán kính $R = 0,5\text{m}$ lăn không trượt theo mặt phẳng nghiêng. Tại thời điểm khảo sát của đĩa có vận tốc $V_A = 1\text{ m/s}$ và gia tốc $a_A = 3\text{ m/s}^2$

Tìm : - Vận tốc của đĩa, vận tốc các điểm C, D, E.

Gia tốc góc của đĩa, gia tốc các điểm B, C
Biết $BD \perp CE$, CE song song với mặt phẳng nghiêng (hình bài 3.4.1.)

3.4.2. Cơ cấu hành tinh có tay quay OA quay với vận tốc góc $\omega_0 = \text{const}$ làm cho bánh I bán kính r lăn không trượt theo vành trong của bánh cố định, bán kính $R = 3r$ (hình bài 3.4.2)

Tìm :

Vận tốc các điểm C, D, E thuộc bánh I.

Gia tốc các điểm B, C. Cho $BD \perp CE$.

3.4.3. Một đĩa phẳng được cuốn bằng một sợi dây có một đầu B cố định. Đĩa có bán kính r rơi xuống không vận tốc đầu và mở dần dây ra (hình bài 3.4.3)

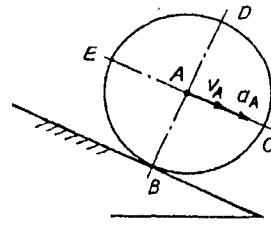
Tâm vận tốc đĩa có vận tốc

$$V = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

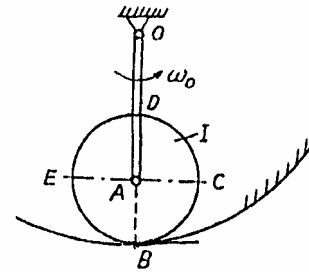
trong đó, h là khoảng cách của tâm đĩa từ vị trí đầu đến vị trí bắt đầu khảo sát.

Tìm vận tốc của các điểm D và E. Biết $DE \perp CH$

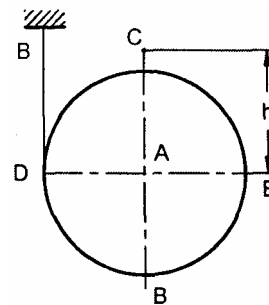
3.4.4. Tay quay $OA = \sqrt{3}\text{ m}$ quay đều quanh O với vận tốc $\omega = \sqrt{3}\text{ s}^{-1}$ làm cho con lăn, bán kính $R = 1\text{ m}$ lăn không trượt trên đường nằm ngang.



Hình bài 3.4.1.

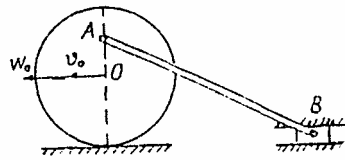


Hình bài 3.4.2



Hình bài 3.4.3

Lúc đó $\varphi = 60^\circ$; $\angle OAB = 90^\circ$. Tìm vận tốc và gia tốc các điểm B và M (Hình bài 3.4.4)

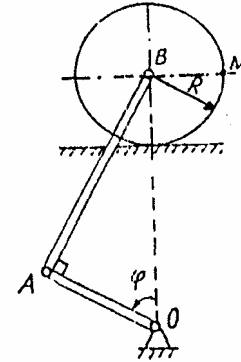


Hình bài 3.4.4.

Trả lời: $V_n = 6 \text{ m/s}$; $V_M = 6\sqrt{2} \text{ m/s}$

$$W_n = 18 \text{ m/s}^2; W_M = 18\sqrt{2} \text{ m/s}^2$$

3.4.5. Con lăn bán kính R lăn không trượt trên đường nằm ngang truyền chuyển động cho một con trượt B chạy trong rãnh ngang nhờ thanh AB dài l.



Hình bài 3.4.5.

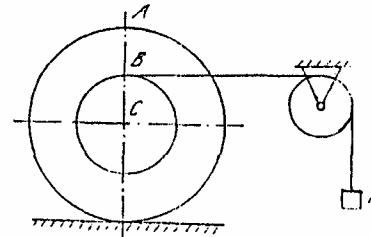
Khi đầu A ở vị trí cao nhất, tâm O có vận tốc V_0 và gia tốc W_0 . Tìm gia tốc của điểm A, điểm B và gia tốc góc của thanh AB lúc ấy, biết $OA = R/2$ (Hình bài 3.4.5.)

Trả lời:

$$w_{ax} = -\frac{3}{2}w_0; \text{ và } w_{ay} = -\frac{w_0}{2R}$$

$$w_B = \frac{3}{2}w_0 - \frac{3w_0^2}{2\sqrt{4l^2 - 9R^2}};$$

$$\varepsilon_B = \frac{w_0^2}{R\sqrt{4l^2 - 9R^2}}$$



Hình bài 3.4.6.

3.4.6. Con lăn 2 tầng bán kính $R = 20\text{cm}$, và $r = 1$ đềm lăn không trượt trên đường nằm ngang. Tầng nấc được cuốn vào một sợi dây và buộc vào vật M. Tìm gia tốc điểm cao nhất A lúc $t = 1$ giây biết rằng vật M rơi xuống với vận tốc $v = 3 \text{ t(m/s)}$ (hình 3.4.6) Trả lời:

$$W_A = 4\sqrt{26} \text{ m/s}^2 \text{ lập với đường thẳng đứng một góc } \beta; \cos\beta = 5/\sqrt{26}$$

Chương 4 CƠ CẤU PHẪNG

4.1 CẤU TRÚC VÀ XẾP LOẠI CƠ CẤU

4.1.1 Xếp loại khớp động

Vấn đề cần chú ý

1. Khớp động là chỗ nối động giữa hai khâu, nhờ đặc điểm tiếp xúc hình học tại chỗ nối (thành phần khớp động) trên mỗi khâu mà khớp động có tác dụng hạn chế bớt bậc tự do tương đối độc lập giữa hai khâu.

2. Căn cứ vào đặc điểm tiếp xúc hình học của khớp động, có thể phân loại khớp động như sau :

- Khớp cao : tiếp xúc điểm hoặc đường.

- Khớp thấp : tiếp xúc mặt.

3. Căn cứ vào tác dụng của khớp động, tức là bậc tự do tương đối độc lập giữa hai khâu bị hạn chế, có :

- Khớp loại 5 : hạn chế 5 bậc tự do tương đối độc lập giữa hai khâu

- Khớp loại 4 : hạn chế 4 bậc tự do tương đối độc lập giữa hai khâu

4. Vì thế muốn xếp loại khớp động, thường đặt hệ tọa độ (Đêcac hoặc tọa độ cực) vào chỗ tiếp xúc (hoặc tâm khớp động, hoặc trên mỗi khâu,...) mà xét bậc tự do tương đối độc lập bị hạn chế của khâu nọ đối với khâu kia.

Bài tập giải sẵn

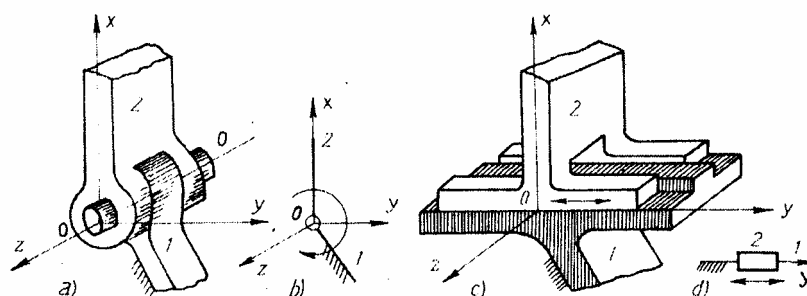
4.1.Xếp loại và vẽ lược đồ khớp động (hình 4.1a), sau đó xét trường hợp biên thể khi tâm O của khớp ở xa vô cùng.

Giải:

Hai khâu tiếp xúc với nhau bằng một mặt trụ (hình 4.1a) tạo thành một khớp thấp và gắn với khâu 1. Do đặc điểm tiếp xúc hình học của khớp, chỉ có một khả năng khâu 2 quay quanh trục z: Qz không bị hạn chế, còn 5 khả năng : khâu 2 tịnh tiến theo ba trục : T_x , T_y , T_z Và quay quanh hai trục Q_x , Q_y đều bị hạn chế. Nên đây là khớp loại 5, còn gọi là

khớp quay, hay bán lề, với lược đồ khớp động như ở (hình 4.1b)

Nếu tâm quay O của khớp ở xa vô cùng thì mặt tiếp xúc trở thành mặt tiếp xúc phẳng (hình 4.1c) nên cũng là khớp thấp: khả năng Q_z trở thành T_y và cũng là khớp loại 5, còn gọi là khớp tịnh tiến với lược đồ, khớp động như (hình 4.1d)



Hình 4.1

Hai loại khớp thấp này được dùng phổ biến nhất trong cơ cấu phẳng và trong thực tế kỹ thuật.

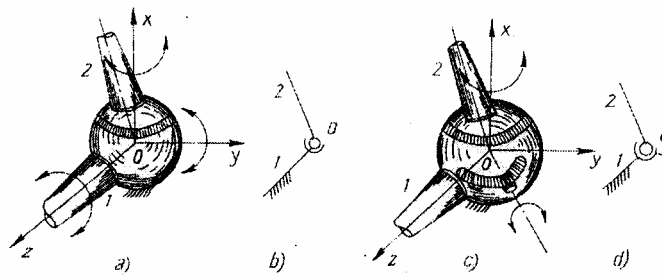
4.2. Xếp loại và vẽ lược đồ khớp động (hình 4.2a). Xét trường hợp hợp biến thể (hình 4.2c) nếu gắn chốt vào khâu 2, xẻ rãnh trên khâu 1.

Giải.

Hai khâu tiếp xúc với nhau bằng một mặt cầu (hình 4.2a) tạo thành một khớp thấp. Đặt một hệ trục Oxyz vào tâm mặt cầu và gắn với khâu 1, khâu 2 chỉ có ba khả năng chuyển động quay tương đối độc lập với khâu 1 : Q_x, Q_y, Q_z : ba khả năng chuyển động tịnh tiến T_x, T_y, T_z đều bị hạn chế do mặt cầu ngoài của khâu 1. Vậy đây là khớp loại 3, còn gọi là khớp cầu với lược đồ khớp động như (hình 4.2b)

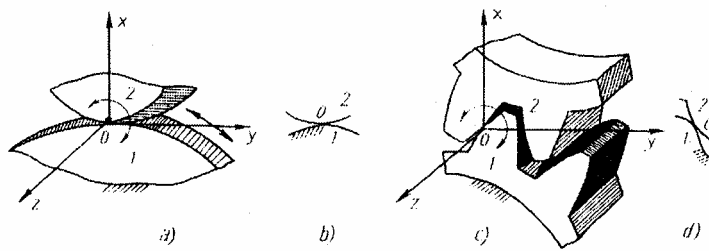
Nếu gắn chốt vào khâu 1 và xẻ rãnh trên khâu 2 (hình 4.2c) thì thêm một trong hai khả năng chuyển động quay Q_z hoặc Q_y bị hạn chế, chỉ còn hai khả năng chuyển động quay Q_x và Q_y (Q_z) vì Q_y và Q_z không phải là hai khả năng chuyển động độc lập đối với nhau nên khớp cầu chốt là khớp thấp, loại 4 với lược đồ khớp động như (hình 4.2d).

Hai loại này thường dùng trong cơ cấu không gian hoặc cơ cấu phẳng cho phép độ hớ nhất định



Hình 4.2

4.3. Xếp loại và vẽ lược đồ khớp động (hình 4.3a). Xét trường hợp biến thể (hình 4.3c) nếu mặt tiếp xúc của hai khâu lại là mặt răng thân khai của cặp bánh răng thẳng ăn khớp khít.



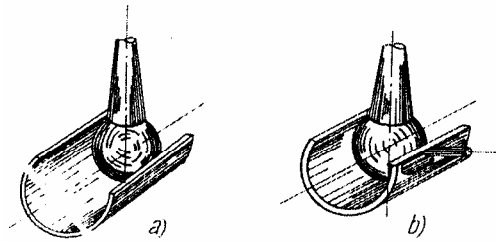
Hình 4.3

Giải :

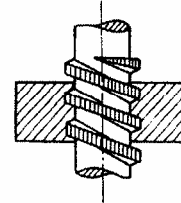
Hai mặt trụ tiếp xúc ngoài theo một đường tạo thành một khớp cao. Đặt một hệ trục tọa độ đường tiếp xúc và giới hạn việc xếp loại khớp trong mặt phẳng xây (hình 4.3a), vì thế có ba khả năng chuyển động : T_z , Q_x , Q_y bị hạn chế sẵn. Ngoài ra do phải đảm bảo luôn tiếp xúc theo đường song song với trục z nên khâu 2 chỉ có hai khả năng chuyển động lăn trên khâu 1 tức là quay quanh trục z : Q_z và trượt trên khâu 1 tức là tịnh tiến theo mặt trụ của khâu 1 : T_y (T_x) hay T_x (T_y) phụ thuộc vào nhau qua liên hệ của phương trình mặt trụ. Vì tiếp xúc đường và có bốn hạn chế nên là khớp cao, loại 4, với lược đồ khớp động như ở (hình 4.3b). Khớp động của các cơ cấu cam và bánh răng trụ thẳng thuộc loại này.



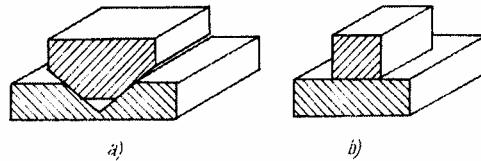
Hình bài 4.1.1



Hình bài 4.1.2



Hình bài 4.1.3



Hình bài 4.1.4



Hình bài 4.1.5

Bài tập cho đáp số :

4.1.1. Xếp loại và vẽ lược đồ khớp động giữa ổ trượt và trục trơn (hình bài 4.1.1a) rồi suy ra trường hợp trục có gờ (hình bài 4.1.1b)

4.1.2. Xếp loại và so sánh các khớp động giả hình cầu tiếp xúc với máng trụ hình cầu chốt (hình bài 4.1.2a) tiếp xúc với máng trụ xẻ rãnh (hình bài 4.1.2b)

4.1.3. Xếp loại và vẽ lược đồ khớp vít (hình bài 4.1.3)

4.1.4. Xếp loại khớp động tại rãnh trượt chữ V (hình bài 4.1.4a) so sánh với mặt phẳng (hình bài 4.1.4b)

4.1.5. Xếp loại khớp động giữa hai hình xuyên tròn lồng khít với

nhau (hình bài 4.1.5)

4.1.6. Hãy biểu thị khớp động (hình bài 4.1.1a) thành khớp động loại 6 và khớp động (hình bài 4.1.2a) thành khớp động loại 1, rồi loại 0. Có thể có khớp động loại 6 và khớp động loại 0 được không? Tại sao?

4.1.2 Vẽ lược đồ động và tính bậc tự do của cơ cấu phẳng

Vấn đề cần chú ý

1. Muốn vẽ lược đồ khớp động phải căn cứ vào những kích thước động (khoảng cách giữa các khớp động ảnh hưởng đến tính chất động học và động lực học của cơ cấu), số khâu động, số khớp động và loại khớp động (ảnh hưởng đến khả năng chuyển động của cơ cấu). So với hình vẽ cấu tạo thực của cơ cấu, nhưng yếu tố nêu trên không thay đổi, nhưng việc nghiên cứu về nguyên lý máy đơn giản hơn.

2. Hầu hết các cơ cấu phẳng có thể sử dụng công thức sau đây để tính bậc tự do:

$$W=3n - 2p_5 - P_4 + R_t - W_t$$

trong đó:

n - số khâu động;

p_5 - số khớp 5 thấp;

p_4 - số khớp 4 cao;

R_t - số ràng buộc thừa (ràng buộc đưa vào trong cơ cấu qua những khâu và không ảnh hưởng đến khả năng chuyển động và chỉ tăng cường độ bền, độ chính xác cơ cấu) thường nhận biết qua những cấu tạo kích thước đặc biệt (bằng nhau, song song, đôi một...).

Tất nhiên phải xác định các yếu tố trên mới tính ra bậc tự do của cơ cấu phẳng theo công thức đã nêu, trừ hai trường hợp:

- Cơ cấu chêm phẳng toàn khớp tịnh tiến;

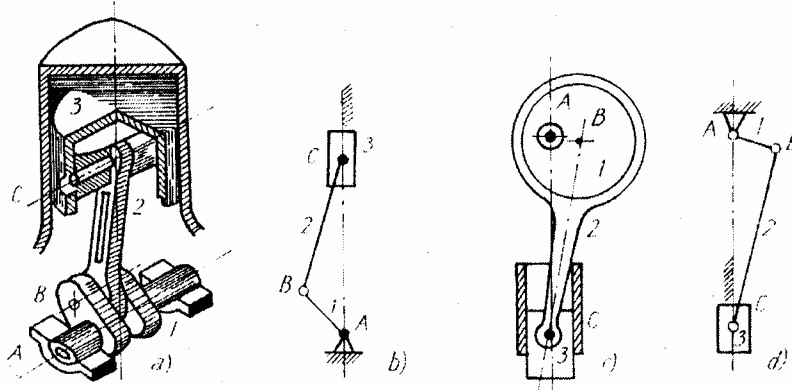
- Cơ cấu tâm tích, cơ cấu bánh răng phẳng ăn khớp khít.

Bài tập giải sẵn

4.10. Vẽ lược đồ tính bậc tự do của cơ cấu trên (hình 4.4a) (động cơ đối trọng) và so sánh nguyên lý cấu tạo với cơ cấu trên (hình 4.4c) (máy đập lệch tâm)

Giải:

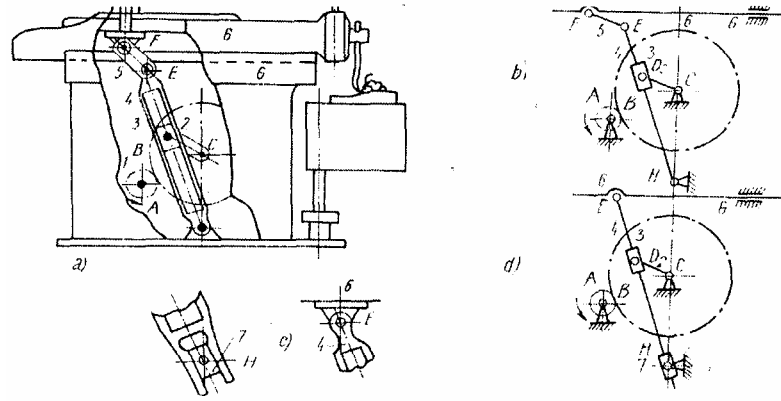
Trong cấu tạo thực của động cơ ta thấy: áp lực khí đốt đẩy pittông (con trượt 3) đi xuống, qua tay biên (thanh truyền 2) khiến trục khuỷu (tay quay 1) quay. Cơ cấu có 3 khâu động, $n = 3$ với các kích thước động là CB, AB, AC và 4 khớp, 3 khớp quay (giữa 1 và giá), B (giữa 1 và 2), C (giữa 2 và 3), 1 khớp tịnh tiến (giữa 3 và giá) đều là khớp thấp loại 5. Đồng thời các khâu trong cơ cấu đều chuyển động trong cùng một mặt phẳng nên có lược đồ như (hình 4.4b). Đó là cơ cấu tay quay con trượt với bậc tự do:



Hình 4.4

Hoàn toàn phân tích tương tự, ta thấy về mặt nguyên lý cấu tạo (lược đồ động, bậc tự do) của cơ cấu máy đập lệch tâm (hình 4.4c và hình 4.4d) không khác cơ cấu động cơ đốt trong (hình 4.4a và 4.4b),

4.11. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do của cơ cấu máy bào ngang (hình 4.5a) và so sánh nguyên lý cấu tạo với cơ cấu máy bào ngang trên (hình 4.5c) (bỏ thanh truyền 5 và thêm con trượt 7)



Hình 4.5

Giải:

Trên cấu tạo thực của máy bào ngang (hình 4.5a) ta thấy: chuyển động từ động cơ truyền đến bánh răng 1 nối với giá một bằng khớp quay A rồi qua khớp loại cao B của hai bánh răng 1 và 2, bánh răng 2 nối với giá bằng khớp quay C. Trên bánh răng 2 lắp con trượt 3 bằng khớp quay D, trượt tròn culit 4 nhờ khớp trượt D giữa 3 và 4, culit kéo thanh truyền 5 làm đầu bào tịnh tiến trên giá nhờ các khớp quay E (giữa 4 và 5), F (giữa 5 và 6) và khớp trượt G (giữa 6 và giá). Ngoài ra ở phía cuối culit nối với giá bằng khớp quay H. Vậy cơ cấu có số khâu động $n=6$, số khớp loại thấp $p_5=8$, số khớp loại cao $p_4=1$. Qua các kích thước động AB, BC, CD, DH, EF, GC, CH ta biểu diễn lược đồ cơ cấu máy bào ngang ở (hình 4.10a) như trên (hình 4.5b) và tính được bậc tự do của cơ cấu:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3.6 - 2.8 - 1 = 1$$

So sánh máy bào ngang ở hình 4.10c bỏ thanh truyền 5, thêm con trượt 7, tổng số khâu động không đổi, bớt khớp quay F, thêm khớp trượt H (giữa 4 và 7) đều là loại 5 nên tổng số khớp và loại khớp cũng không đổi, do đó bậc tự do không đổi, chỉ có lược đồ thay đổi như (hình 4.5d).

4.12. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do của cơ cấu bơm mỡ (hình 4.6a) và so sánh với cơ cấu bơm hình (4.6c).

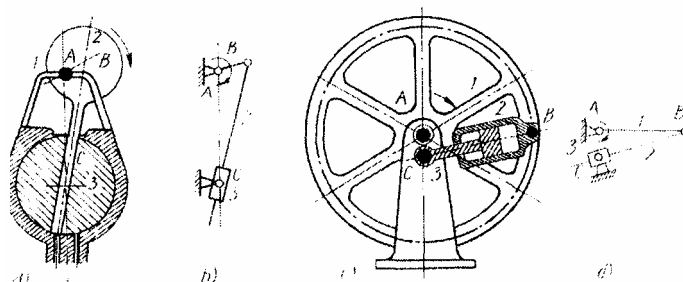
Giải:

Trên cấu tạo của cơ cấu bơm mỡ (hình 4.6a): tay quay 1 nối với

thanh truyền 2 (có tác dụng như một pittông) bằng khớp quay B thanh truyền 2 vừa quay theo, vừa trượt trong khâu 3 (có tác dụng như một xilanh) nhờ khớp trượt C; giá (là thân bơm) nối với 1 và 3 bằng những khớp quay: A và C. Tất cả đều là khớp thấp. $P_5 = 4$. Qua các kích thước động AB, BC và AC lược đồ động của cơ cấu bơm mỡ được biểu diễn như (hình 4.6b). Bậc tự do của cơ cấu:

$$W = 3n - 2p_5 - P_4 = 3.3 - 2.4 - 0 = 1$$

Cũng phân tích tương tự cơ cấu bơm (hình 4.6c) với thanh truyền 2 là một xilanh và con trượt 3 là một pittông, ta thấy lược đồ động và bậc tự do không đổi (hình 4.6d)



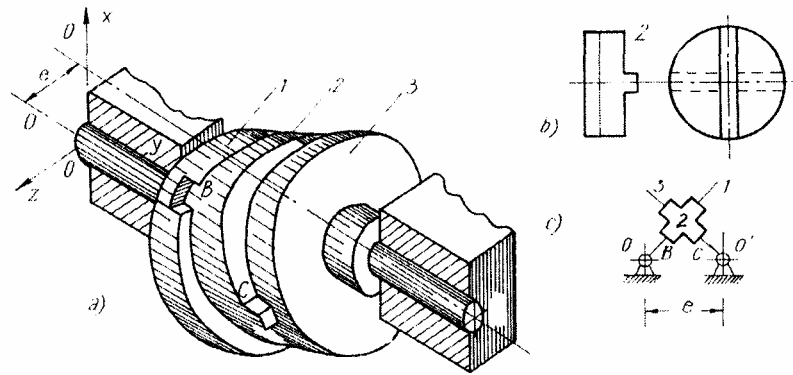
Hình 4.6

4.13. Vẽ lược đồ động và tính bậc tự do cơ cấu nối trục ondam (hình 4.7a)

Giải.

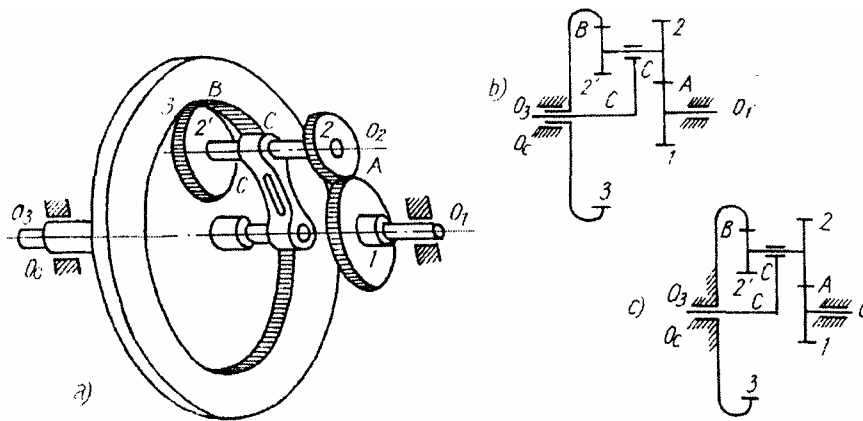
Trên cấu tạo thực của cơ cấu nối trục ondam (hình 4.7a) để truyền chuyển động giữa hai trục song song nhau một khoảng $OO' = c$, ta thấy trục O gắn đặt vào đĩa 1, đĩa này có rãnh trượt để gờ trượt của đĩa 2 chạy trong đó, tạo thành khớp trượt B. Cấu tạo của đĩa 2 với hai gờ thẳng góc được vẽ trên (hình 4.7b). Tương tự, giữa 2 và 3 có khớp trượt C, còn giá nối với hai trục O và O' bằng hai khớp quay O và O'. Vậy số khâu động $n = 3$, số khớp loại thấp $p_5 = 4$. Qua kích thước động OO', lược đồ của cơ cấu nối trục ondam được vẽ trên (hình 4.7c). Bậc tự do của cơ cấu:

$$W = 3n - 2p_5 - P_4$$



Hình 4.7

4.14. Vẽ lược đồ động và tính bậc tự do của cơ cấu bánh răng vi sai (hình 4.8a). Xét trường hợp khi bánh răng 3 cố định.



Hình 4.8

Giải.

Trên cấu tạo thực của cơ cấu bánh răng vi sai: những đường tâm O_1 và O_3 . Của hai bánh răng trung tâm 1 và 3 cùng nằm trên một đường thẳng và cố định, còn đường tâm của hai bánh răng vệ tinh 2 và 2' - hai bánh răng này nối cùng với trục của chúng quay theo cần C quanh O_1 và O_3 . số khớp động $n=4$, số khớp loại thấp (đều là những khớp quay) $p_5 = 4$ (tại O có hai khớp theo định nghĩa của khớp động - là chỗ nối động giữa hai khâu). Như đã nêu trong bài tập 3, số khớp loại cao $p_4 = 2$. Kích thước động là khoảng cách trục và bán kính vòng lăn của các bánh răng. Lược đồ động trường hợp này vẽ trên hình 4.8b và cơ cấu bánh răng vi

sai có bậc tự do là:

$$w = 3n - 2p_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$$

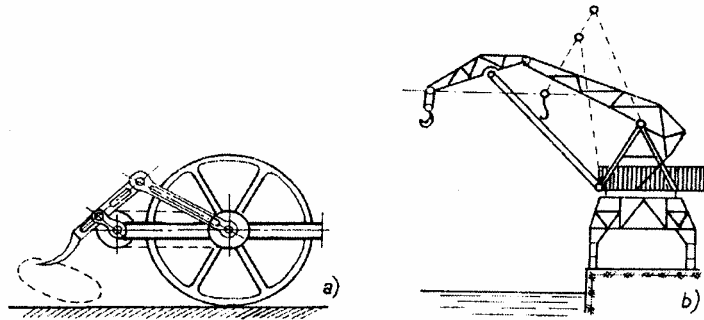
Khi cố định bánh răng 3 (một trong hai bánh răng trung tâm) có cơ cấu bánh răng hành tinh. Số khâu động giảm 1, số khớp quay giảm 1 (tại O_3), lược đồ động được vẽ trên (hình 4.8c) và bậc tự do của cơ cấu bánh răng hành tinh là:

$$W = 3n - 2p_5 - P_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1$$

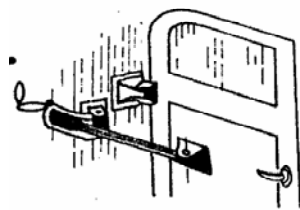
Bài tập cho đáp số:

4.1.6. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do cơ cấu máy bừa rom (hình bài 4.1.6a) và so sánh với cơ cấu cầu trục băng (hình bài 4.1.6b)

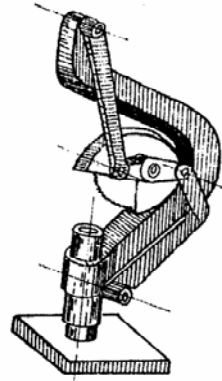
4.1.7. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do cơ cấu cửa ô tô buýt (hình bài 4.1.7)



Hình bài 4.1.6



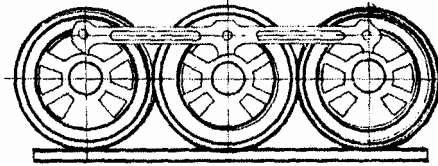
Hình bài 4.1.7



Hình bài 4.1.8

4.1.8. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do cơ cấu máy cưa đĩa di động (hình bài 4.1.8)

4.1.9. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do cơ cấu bánh xe đầu máy xe lửa (hình bài 4.1.9)

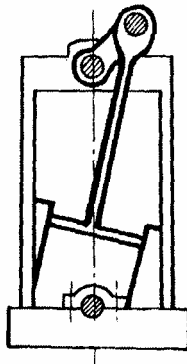


Hình bài 4.1.9

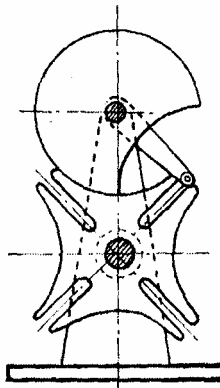
4.1.10. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do cơ cấu máy bơm nước (hình bài 4.1.10)

4.1.11. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do cơ cấu mantơ (hình bài 4.1.11)

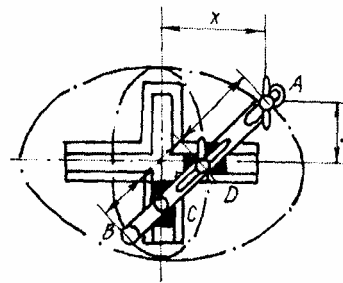
4.1.12. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do cơ cấu vẽ cấp (hình bài 4.1.12.)



Hình bài 4.1.10



Hình bài 4.1.11

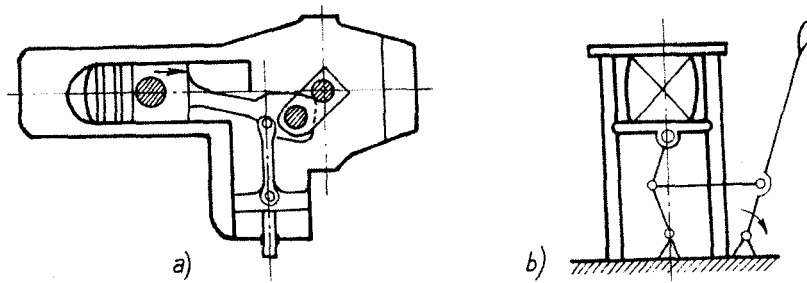


Hình bài 4.1.12

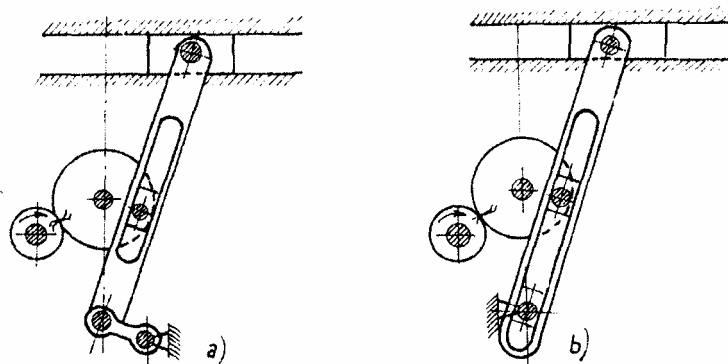
4.1.13. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do của cơ cấu máy nén (hình bài 4.1.1 3a, b). Hãy phân tích xem mỗi máy hợp bởi những cơ cấu đơn giản nào? Từ đó suy ra phải thêm hoặc bớt một nhóm như thế nào thì bậc tự do của cơ cấu là không đổi.

4.1.14. Vẽ lược đồ động, tính bậc tự do của hai cơ cấu máy bào (hình bài 4.1.14a, b). Có nhận xét gì về nguyên lý cấu tạo của hai cơ cấu đó.

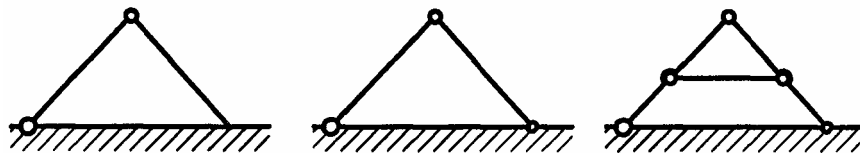
4.1.15. Xác định bậc tự do của các cơ cấu và kết cấu cho như (hình bài 4.1.15).



Hình bài 4.1.13



Hình bài 4.1.14



Hình bài 4.1.15

4.1.3 Xếp loại cơ cấu phẳng

Vấn đề cần lưu ý

1. Mục đích của việc xếp loại cơ cấu là để hệ thống hóa việc nghiên cứu, ứng với từng loại có thể sử dụng những phương pháp nghiên cứu động học thích hợp.

2. Dựa vào đặc điểm cấu tạo (số lượng, cách sắp xếp các khâu, khớp trong lược đồ cơ cấu) của những nhóm tính định (là những nhóm có bậc

tự do bằng không- còn gọi là nhóm Axua) để xếp loại cơ cấu.

Loại của nhóm là số cạnh đa giác nhiều nhất tạo nên bởi cách nối những khớp của một khâu, hoặc hợp bởi nhiều khâu liên tiếp, mỗi khâu là một cạnh.

Bậc của nhóm là số khớp chờ trong nhóm.

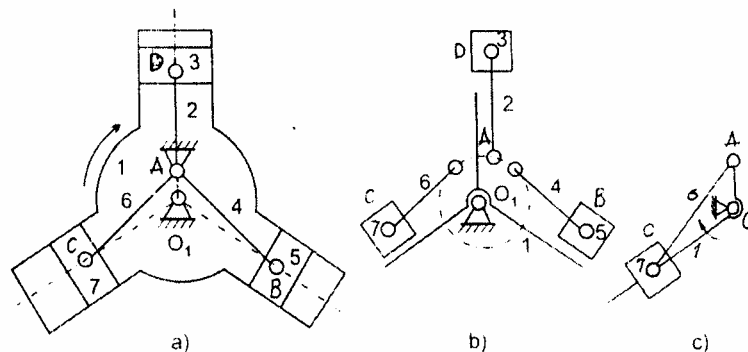
3. Loại cơ cấu là loại của nhóm tĩnh định có loại cao nhất tách ra từ cơ cấu đó (Theo nguyên lý hình thành cơ cấu, gồm những nhóm tĩnh định nối với nhau, với khớp dẫn và giá).

4. Muốn xếp loại phải tách cơ cấu thành từng nhóm tĩnh định (nên tách từ nhóm xa khâu dẫn nước, nhóm đơn giản trước). Mỗi lần tách xong một nhóm, phần còn lại vẫn là một cơ cấu, nhưng đơn giản hơn, cuối cùng chỉ còn lại khâu dẫn nối với giá (tức là còn lại cơ cấu loại 1)

5. Nếu khớp cao trong cơ cấu, phải thay thế một khớp loại cao bằng một khâu và hai khớp loại thấp, nếu có bậc tự do thừa hoặc ràng buộc thừa cũng phải bỏ đi trước khi tách.

Bài tập giải sẵn

4.15. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu động cơ đốt trong xylanh quay (hình 4.9a). Hãy vẽ lược đồ riêng của một trong ba nhánh và so sánh nguyên lý cấu tạo với cơ cấu động cơ đốt trong ở (hình 4.9b)



Hình 4.9

Giải.

Xylanh 1 quay quanh tâm O_1 , mang ba pittông 3, 5, 7 nối với nó bằng những khớp tịnh tiến vừa trượt, vừa quay, ba pittông này nối với ba thanh truyền 2, 4, 6 bằng những khớp quay A, B, C; đầu kia của ba thanh

truyền nối với giá bằng ba khớp quay tại O_2 vì thế cơ cấu gồm 7 khâu động, 10 khớp thấp (3 khớp tịnh tiến và 7 khớp quay)

Bậc tự do của cơ cấu là:

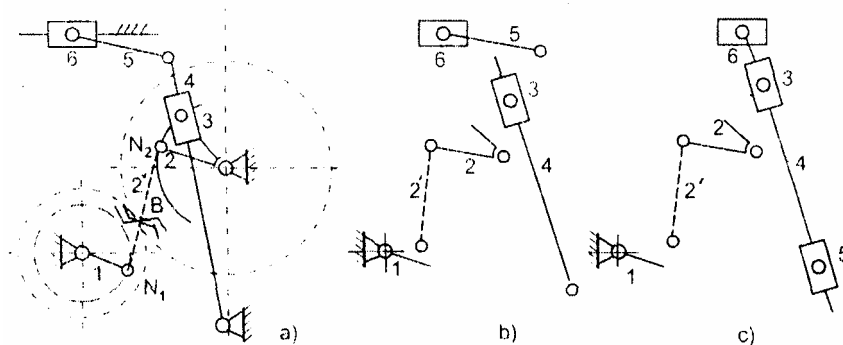
$$W = 3n - 2p_5 - P_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1$$

Để xếp loại, ta có thể tách cơ cấu thành ba nhóm loại 2: (7,6); (5,4); (3,2) và khâu dẫn 1 (hình 4.14b). Cơ cấu thuộc loại 2.

Nếu tách riêng một trong ba nhánh, thí dụ như ba khâu 1.7.6 ta có lược đồ như (hình 4.9c) là một dạng cơ cấu cilit: culit 1 đồng thời là tay quay, con trượt 7, thanh truyền 6. So sánh với cơ cấu động cơ cấu đôt trong ở (hình bài 4.1.1b)- là một dạng của cơ cấu tay quay con trượt: trục khuỷu (tay quay 1) quay, thông qua tay biên thanh truyền 2 khiến pittông (con trượt 3) tịnh tiến lên xuống - thì cơ cấu ở hình 4.9c cũng là cơ cấu như (hình bài 4.1.1b) nhưng tay quay là 1 (khâu BAC). Trong trường hợp này việc đổi giá không làm thay đổi loại cơ cấu

4.16. Xếp loại cơ cấu máy bào ở hình 4.5b và hình 4.5d. Nếu đổi khâu dẫn của của cơ cấu bào ở hình 4.5d (khâu 6 dẫn động) thì loại cơ cấu có thay đổi không?

Giải.



Hình 4.10

Ở đây khâu dẫn là bánh răng 1, truyền qua bánh răng 2 bằng khớp loại cao B. Hãy thay thế khớp này bằng một khâu và hai khớp loại thấp: tại thời điểm tiếp xúc, tìm hai tâm cong của cạnh răng (Nếu cạnh răng thân khai, tâm cong nằm trên vòng cơ sở: N_1 và N_2) và đặt thêm vào đó hai khớp quay N_1 và N_2 còn khâu thêm vào là khâu nối hai khớp đó (hình

4.10). Từ đó, được cơ cấu toàn khớp thấp để tách nhóm và xếp loại.

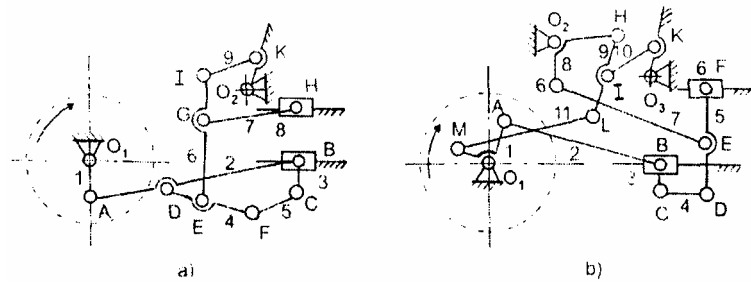
Tách cấu trên (hình 4.5b) thành ba nhóm loại 2: (6.5); (4.3); (2.2) và khâu dẫn 1. Cơ cấu thuộc loại 2 (hình 4.10b)

Tách cơ cấu ở (hình 4.5d) thành hai nhóm loại 3: (6.5, 4.3); loại 2 (2.21) và khâu dẫn 1. Cơ cấu thuộc loại 3 (hình 4.10c)

Bài tập cho đáp số

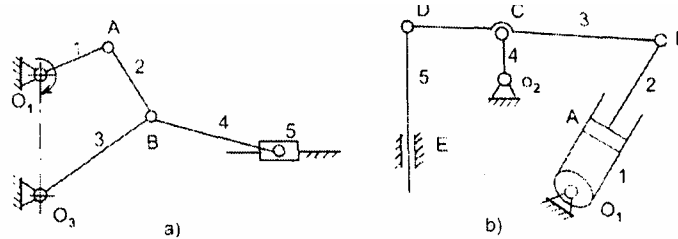
Xếp loại các cơ cấu đã vẽ lược đồ từ bài 18 đến bài 27 (xem tên các cơ cấu trong phần đáp số tương ứng để vẽ lược đồ)

4.1.16. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu phối hơi đầu máy xe lửa trên (hình bài 4.1.16a, b) (coi bánh xe là khâu dẫn)



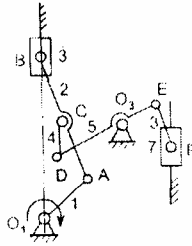
Hình bài 4.1.16

4.1.17. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu máy đập cơ khí (hình bài 4.1.17a) và máy ép thủy động (hình bài 4.1.17b)

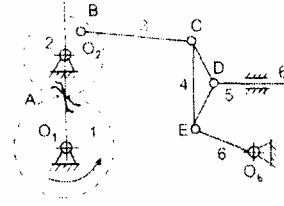


Hình 4.1.17

4.1.18. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu động cơ điêzen (hình bài 4.1.18)



Hình bài 4.1.18

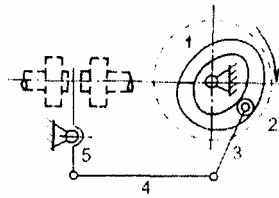


Hình bài 4.1.19

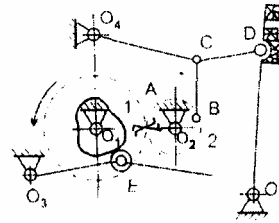
4.1.19. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu bơm oxy (hình bài 4.1.19)

4.1.20. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu điều khiển nổi trục (hình bài 4.1.20)

4.1.21. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu máy dệt vải dày, đập khô dờ (hình bài 4.1.21)



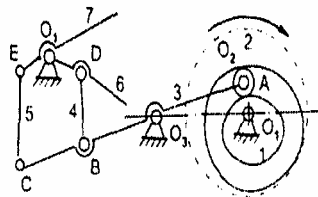
Hình bài 4.1.20



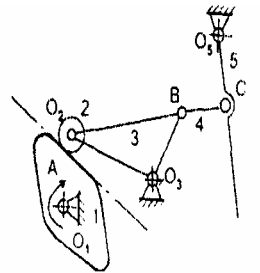
Hình bài 4.1.21

4.1.22. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu cắt kẹo tự động (hình bài 4.1.22)

4.1.23. Tính bậc tự do và xếp loại cơ cấu máy nghiền (hình bài 4.1.23)



Hình bài 4.1.22



Hình bài 4.1.23

4.2 PHÂN TÍCH ĐỘNG HỌC CƠ CẤU PHẪNG

4.2.1 Xác định vị trí và vẽ quỹ đạo các điểm trên cơ cấu phẳng

Vấn đề cần chú ý

1. Ngoài yêu cầu về công nghệ, cấu tạo hợp lý việc xác định vị trí và vẽ quỹ đạo các điểm trên cơ cấu còn là bài toán đầu tiên không thể thiếu được, để trên cơ sở đó xác định chuyển vị, vận tốc, gia tốc... của cơ cấu.

2. Muốn xác định vị trí, vẽ quỹ đạo các điểm trên cơ cấu phải xuất phát từ vị trí của khâu dẫn, kích thước động của các khâu, qua phương pháp quỹ tích tương giao (đơn giản nhất là cách cắt cung) hoặc dò mẫu (với những cơ cấu phức tạp hoặc kích thước tương đối lớn) mà lần lượt xác định vị trí, quỹ đạo các điểm trên khâu bị dẫn (lần lượt từng nhóm, kể từ nhóm gần khâu dẫn nhất).

4.2.2 Xác định vận tốc và gia tốc của cơ cấu loại hai

Vấn đề cần chú ý

1. Vận tốc, gia tốc là những yếu tố biểu thị tính chất động học của cơ cấu phụ thuộc vào cấu trúc cơ cấu, cho nên mỗi loại cơ cấu có những phương pháp xác định vận tốc, gia tốc thích hợp. Vì thế trước khi xác định vận tốc gia tốc phải loại cơ cấu.

2. Vận tốc, gia tốc là những đại lượng vectơ nên phương pháp thường dùng trong kỹ thuật là phương pháp hoạ đồ vectơ. Dựa vào điểm đã biết vận tốc, gia tốc (thường là một điểm trên khâu dẫn - hoặc giá - hoặc điểm đã xác định vận tốc, gia tốc ở trước) mà viết phương trình vectơ vận tốc, gia tốc của điểm cần tìm, phân tích từng yếu tố của các vectơ trong phương trình đó, rồi giải bằng phương pháp vẽ hoạ đồ vectơ.

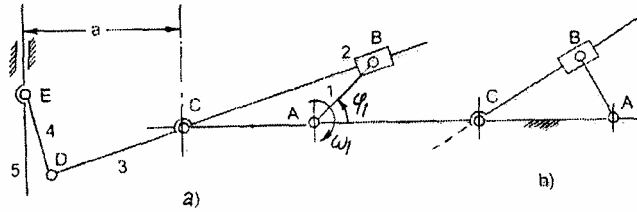
3. Vì giải bằng phương pháp vẽ nên cần chú ý tới việc chọn tỷ lệ xích sao cho phù hợp bản vẽ hoặc có thể tận dụng phương pháp vẽ trong khi xác định trị số của các vectơ.

Bài tập cho đáp số

4.2.1. Xác định vận tốc và gia tốc của dao bào E trong máy bào xọc (hình bài 4.2.1a) khi tay quay 1 quay đều với vận tốc góc $\omega_1 = 10^{s^{-1}}$ tại vị trí $\varphi_1 = 45^0$. cho biết kích thước các khâu của cơ cấu : $l_{AB} = l_{ED} = 0,2m$,

$$l_{AC} = l_{CD} = 0,3\text{m}, a = 0,35\text{m}.$$

Giải bài toán khi tay quay và culit thẳng góc (hình bài 4.2.1b).



Hình 4.2.1

4.2.2. Tìm vận tốc và gia tốc của dao bào E trong máy bào ngang (hình bài 4.2.2) ở vị trí $\omega_1 = 60^\circ$ nếu $l_{AB} = l_{AC} = 0,05\text{m}$, $l_{CD} = 0,12\text{m}$. Tay quay AB quay đều với vận tốc $n_1 = 120\text{vg/ph}$.

Có nhận xét gì về quan hệ động học và cấu tạo của cơ cấu cuối ABC.

4.2.3. Xác định vận tốc và gia tốc của pittông D trong cơ cấu động cơ đốt trong (hình bài 4.2.3) tại vị trí $\varphi_1 = 60^\circ$. Tay quay OA quay đều với vận tốc góc $\omega_1 = 100\text{s}^{-1}$. Kích thước các khâu $l_{OA} = 0,0225\text{m}$, $l_{AB} = 0,068\text{m}$, $l_{CD} = 0,05\text{m}$, $\beta = 30^\circ$

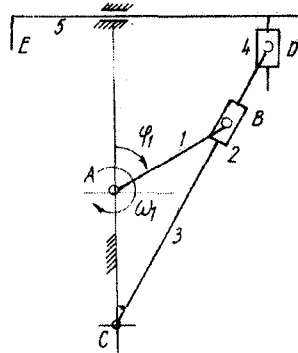
4.2.4. Tính vận tốc và gia tốc điểm D_2 ($\angle DBC = 120^\circ$) trên con trượt 2 của cơ cấu cuối tại vị trí $\varphi_1 - 90^\circ$. Tay quay AB quay đều với vận tốc góc $\omega_1 = 20\text{s}^{-1}$. Cho biết kích thước các khâu của cơ cấu (hình bài 4.2.4)

$$l_{AB} = l_{BD} = 0,5l_{BC} = 0,2\text{m}$$

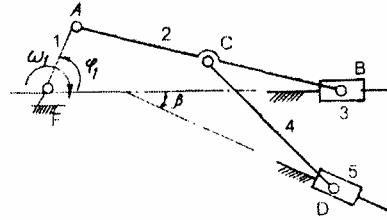
4.2.5. Tính vận tốc và gia tốc khâu 3 của cơ cấu tính tang một góc, nếu tay quay AB quay với vận tốc góc $\omega_1 = 10\text{s}^{-1}$ lại vị trí $\varphi_1 = 60^\circ$. cho trước $h = 0,05\text{m}$ (hình bài 4.2.5).

4.2.6. Tính vận tốc và gia tốc của điểm D trong cơ cấu nối chữ thập (hình bài 4.2.6) tại vị trí $\varphi_1 = 120^\circ$, vận tốc góc khâu AB $\omega_1 = 0$ nhưng $\varepsilon_1 = 25\text{s}^{-2}$. cho trước các kích thước $l_{CD} = 0,18\text{m}$, $l_{AC} = 0,14\text{m}$.

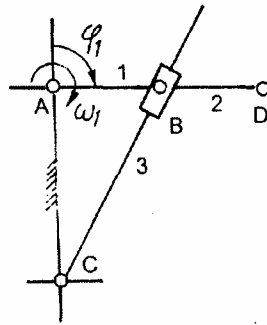
4.2.7. Tính vận tốc và gia tốc của điểm E trong cơ cấu (hình bài 4.2.7) khi biết cơ cấu ở vị trí như hình vẽ biết $\omega_1 = \text{const}$



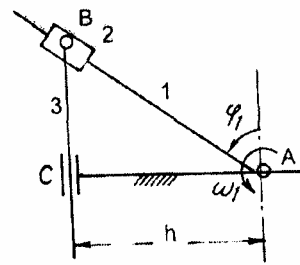
Hình bài 4.2.2



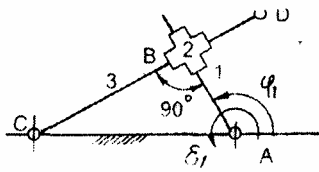
Hình bài 4.2.3



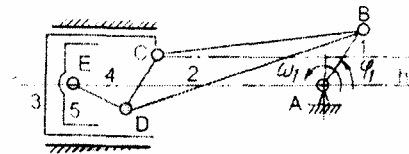
Hình bài 4.2.4



Hình bài 4.2.5



Hình bài 4.2.6



Hình bài 4.2.7

4.3 HỆ BÁNH RĂNG

Vấn đề cần chú ý

1. Những bài tập trong chương này giới hạn ở việc tính toán tỷ số truyền của các hệ bánh răng cũng như vận tốc góc của các bánh răng trong hệ, nghĩa là chỉ đề cập tới việc phân tích động học hệ bánh răng

theo phạm vi nghiên cứu của chương trình.

2. Phương pháp để giải những bài tập này là giải tích và đồ thị vectơ, thường phải tính bằng 1 phương pháp và nghiệm lại kết quả bằng phương pháp còn lại.

3. Khi giải mỗi bài toán cần chú ý:

a. Vì có nhiều hệ bánh răng: thường, vi sai (hành tinh, vi sai kín) và hỗn hợp mà cách tính của hệ thường khác hẳn cách tính hệ vi sai, nên điều đầu tiên là phải phân biệt theo định nghĩa của hệ : hệ cần tính là hệ gì ? nếu lẫn lộn hệ này sang hệ kia là bài toán sai ngay từ đầu

b. Trong khi giải cần phải chú ý tới dấu của tỷ số truyền và vận tốc góc, nghĩa là ta phải chú ý tới chiều quay các trục quay trong hệ (phải áp dụng quy tắc xét dấu hay chiều quay của bánh răng phẳng và không gian). Nếu làm chiều quay sẽ dẫn đến sai kết quả ngay từ phép tính trung gian.

c. Có thể trong đầu bài không cho ngay số răng của một số bánh răng nào đó, nhưng nhờ vận dụng những khái niệm cơ bản đã học về sự ăn khớp của 1 cặp bánh răng (khoảng cách trục : điều kiện ăn khớp đúng, cặp bánh răng tiêu chuẩn hay dịch chỉnh, ăn khớp ngoài hay ăn khớp trong) mà suy ra số răng cần thiết.

Bài tập giải sẵn

4.17. Cho hệ bánh răng trên hình 4.11 biết bánh răng 1 quay với số vòng quay $n_1 = 200$ vg/ph. Xác định số vòng quay của các bánh răng 5, 4 và 4', nếu số răng của bánh răng là:

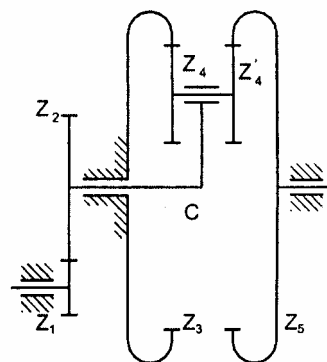
$$Z_1 = 20, Z_2 = 80, Z_3 = 144, Z_4 = 32, Z_{4'} = 28, Z_5 = 140.$$

Giải:

Theo lược đồ động cho trước (hình 4.16), hệ có bậc tự do:

Ở đây bánh răng 2 và cần C là 1 khâu, bánh răng 3 cố định và bao gồm :

- Cặp bánh răng 1-2 có đường tâm không thay đổi vị trí trong quá trình truyền



Hình 4.11

động, thuộc hệ thường

- Phần còn lại có các bánh răng 4 và 4' có đường tâm thay đổi trong quá trình truyền động; mặt khác bánh răng trung tâm 3 cố định thuộc hệ hành tinh. Vậy hệ đã cho là hệ hỗn hợp (phẳng).

1) Để tính số vòng quay n_5 của bánh răng 5 phải tính tỷ số truyền i_{15} của hệ hỗn hợp:

$$i_{15} = i_{12} \cdot i_{25}$$

trong đó:

* i_{12} là tỷ số truyền của hệ thường

$$i_{12} = -\frac{Z_1}{Z_2} = -\frac{80}{20} = -4$$

* i_{25} là tỷ số truyền trong hệ hành tinh, tính theo

$$i_{53}^c = \frac{n_5 - n_c}{n_3 - n_c} = \frac{Z_5 \cdot Z_4}{Z_4 \cdot Z_3}$$

nhưng $n_3 = 0$ suy ra $1 - \frac{n_5}{n_c} = 1 - i_{5c} = \frac{144 \cdot 28}{32 \cdot 140}$

$$\text{hay } 1 - \frac{1}{i_{c5}} = 0,9$$

$$\text{Vậy } i_{25} = i_{c5} = 10$$

Tỷ số truyền của cả hệ hỗn hợp : $i_{15} = (-4) \cdot 10 = -40$ và số vòng quay

của bánh răng 5 là : $n_5 = \frac{n_1}{i_{15}} = \frac{200}{-4} = -5 \text{ vg/ph}$

Dấu trừ chứng tỏ bánh răng 5 quay ngược chiều bánh răng 1.

2) Từ tỷ số truyền trong hệ hành tinh :

$$i_{43}^c = \frac{n_4 - n_c}{n_3 - n_c} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

Nhưng $n_3 = 0$ suy ra $1 - i_{5c} = \frac{144}{32}$

$$\Rightarrow i_{4c} = 1 - \frac{144}{32} = -\frac{7}{2}$$

Tính được số vòng quay của các bánh vệt tinh 4 và 4' :

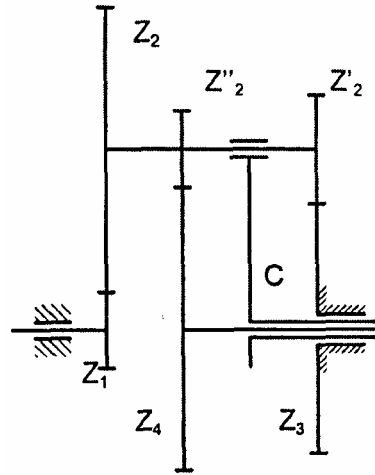
$$n_4 = i_{4c} \cdot n_c = i_{42} \cdot n_2 = i_{42} \cdot \frac{n_1}{i_{12}} = \left(-\frac{7}{2}\right) \frac{200}{(-4)} = 175 \text{ vg / ph}$$

bánh răng 4 và 4' quay cùng chiều với bánh răng 1.

4.17. Trong hộp giảm tốc trên hình 4.12 bánh răng 1 chủ động quay với tốc độ $n_1 = 1560 \text{ vg/ph}$. Tính số vòng quay n_c và n_3 của các trục bị động C và 3 nếu số răng của các bánh răng trong hộp giảm tốc là:

$$Z_1 = Z_2 = 20; Z_2 = Z_3 = 60$$

$$Z_2' = 15; Z_4 = 65$$



Giải.

Theo lược đồ động cho trước, bậc tự do của hệ là: Hình 4.12

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot p_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 3 = 1$$

(chú ý rằng các bánh răng 2, 2' và 2'' là 1 khâu, bánh răng 3 cố định).

Hệ hỗn hợp bao gồm:

- Hệ hành tinh với các bánh răng 1 - 2, 2' - 3 và cần C.
- Hệ vi sai với các bánh răng 1 - 2, 2'' - 4 và cần C.

Vì cơ cấu có 1 bậc tự do, nên phải tính hệ hành tinh trước.

1) Trong hệ hành tinh có :

$$i_{13}^c = \frac{n_1 - n_c}{n_3 - n_c} = (-1)^2 \cdot \frac{Z_3 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_1}$$

nhưng $n_3 = 0$ suy ra :

$$i_{1c} = 1 - \frac{60 \cdot 60}{20 \cdot 20} = -8$$

Do đó tính được số vòng quay của cần C :

$$n_c = \frac{n_1}{i_{1c}} = \frac{1560}{-8} = -195 \text{vg} / \text{ph}$$

dấu trừ chứng tỏ cần C quay ngược chiều bánh răng 1.

2) Trong hệ vi sai có :

$$i_{14}^c = \frac{n_1 - n_c}{n_4 - n_c} = (-1)^2 \frac{Z_4 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_1}$$

nhưng đã có $n_1 = 1560 \text{vg/ph}$, $n_c = -195 \text{vg/ph}$ và số răng của các bánh răng suy ra số vòng quay của bánh răng 4 :

$$i_{14}^c = \frac{n_1 - n_c}{n_4 - n_c} = (-1)^2 \frac{Z_4 \cdot Z_2}{Z_2 \cdot Z_1}$$

nhưng đã có $n_1 = 1560 \text{vg/ph}$, $n_c = -195 \text{vg/ph}$ và số răng của các bánh răng suy ra số vòng quay của bánh răng 4 :

$$n_4 = \frac{n_1 + 12n_c}{13} = \frac{1560 + 12 \cdot (-195)}{13} = -60 \text{vg} / \text{ph}$$

Dấu trừ chứng tỏ bánh răng 4 quay ngược chiều bánh răng 1.

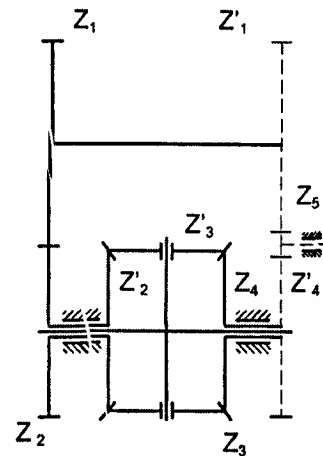
4.18. Cho hệ bánh răng như hình 4.13 (vẽ bằng nét liền). Tính tỷ số truyền i_{1c} nếu cho trước $i_{14} = \frac{67}{68}$ và số răng các bánh răng :

$$Z_1 = 69, Z_2 = 68, Z_2' = Z_4 = 67$$

Nếu dùng 1 hệ bánh răng thường (vẽ bằng nét đứt) để nối từ trục bánh răng 1 đến bánh răng 4 mà vẫn đảm bảo tỷ số truyền như cũ, thì cả hệ sẽ là hệ bánh răng gì ? Số răng của các bánh răng trong hệ thêm vào là bao nhiêu ?

Giải.

1. Để phân tích cấu tạo của hệ cho trước (vẽ bằng nét liền trên hình 4.13) cần chú ý là bánh răng 3 và 3' là giống hệt nhau về mặt cấu tạo và



Hình 4.13

chuyển động nên chỉ kể là 1 khâu động (đó là 1 ràng buộc thừa để đảm bảo sức bền của hệ), mặt khác theo định nghĩa khớp động : giữa cần C và giá chỉ có 1 khớp động.

Hệ bao gồm:

- Hệ thường với cặp bánh răng 1-2 có tỷ số truyền:

$$i_{12} = -\frac{Z_2}{Z_1} = \frac{68}{69}$$

- Hệ vi sai với cặp bánh răng 2' - 3 - 4 và cần C có quan hệ:

$$i_{24}^c = \frac{\omega_2 - \omega_c}{\omega_4 - \omega_c} = -\frac{Z_4}{Z_{2'}} = -\frac{67}{67} = -1$$

Dấu trừ được xác định theo quy ước ký hiệu chiều quay ngược nhau của hệ bánh răng không gian: 2' - 3 - 4

$$i_{24}^c = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_c} - 1}{\frac{\omega_4}{\omega_c} - 1} = -1$$

Chú ý tới

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{i_{12}} \quad \text{và} \quad \omega_4 = \frac{\omega_1}{i_{14}}$$

nên

$$i_{24}^c = \frac{\frac{i_{1c}}{i_{12}} - 1}{\frac{i_{1c}}{i_{14}} - 1} = -1$$

$$i_{12} = -\frac{68}{69} \quad \text{và} \quad i_{14} = \frac{67}{68}$$

Trong đó đã biết:

nên tính được tỷ số truyền i_{1c} của hệ:

$$i_{1c} = \frac{2}{\frac{1}{i_{12}} + \frac{1}{i_{14}}} = \frac{2}{-\frac{69}{68} + \frac{68}{67}} = 9112$$

2. Nếu dùng 1 hệ bánh răng thường nữa để nối trục bánh răng 1 đến trục bánh răng 4 mà vẫn đảm bảo tỷ số truyền như cũ :

$$i_{12} = -\frac{68}{69}, i_{14} = \frac{67}{68}, i_{1c} = 9112$$

thì cả hệ sẽ là hệ vi sai kín- chính là hộp giảm tốc Guliaiep.

Hệ bánh răng thường thêm vào 3 bánh răng: 1' lắp cùng 1 khâu với bánh răng 1, 4' lắp cùng 1 khâu với bánh răng 4 và bánh răng trung gian 5 (vẽ nét đứt trên hình 4.13) ; vì thế về mặt bậc tự do ta để thêm vào 1 ràng buộc gồm 1 khâu động là bánh răng 5; một khớp thấp giữa 5 và giá ; hai khớp cao giữa 5 với 1' và 4'.

Để đảm bảo tỷ số truyền $i_{14} = \frac{67}{68}$ thì số răng của hệ thêm vào sẽ được xác định như sau:

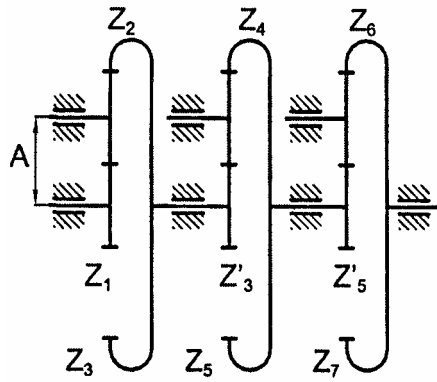
$$i_{14} = (-1)^2 \cdot \frac{Z_{4'} \cdot Z_5}{Z_5 \cdot Z_{1'}} = \frac{Z_{4'}}{Z_{1'}} = \frac{67}{68}$$

vậy $Z_{4'} = 67$, $Z_{1'} = 68$ còn Z_5 sẽ xác định theo điều kiện khác, không ảnh hưởng đến trị số của tỷ số truyền.

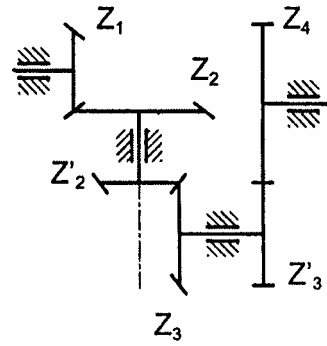
Bài tập cho đáp số

4.3.1. Tính tỷ số truyền i_{17} và khoảng cách trục A của hệ bánh răng; nếu các bánh răng đều tiêu chuẩn, ăn khớp đúng với mô đun $m = 15\text{mm}$, số răng tương ứng là $Z_1 = Z_2 = Z_{3'} = Z_4 = Z_{5'} = Z_6 = 20$ và $Z_3 = Z_5 = Z_7 = 60$ (hình bài 4.3.1). Hãy nghiệm lại kết quả bằng phương pháp đồ thị vectơ.

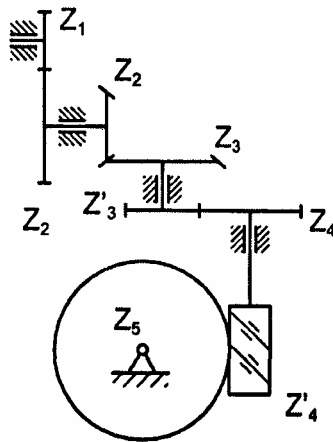
4.3.2. Tính tỷ số truyền i_{14} của hệ bánh răng, nếu số răng của các bánh răng là: $Z_1 = Z_{2'} = Z_{3'} = 20$, $Z_3 = 30$, $Z_2 = Z_4 = 40$ (hình bài 4.3.2). Không thay đổi trình tự ăn khớp và kích thước của các bánh răng, cần lắp bánh răng 2' trong hệ như thế nào để bánh răng 4 quay cùng chiều với bánh răng 1.



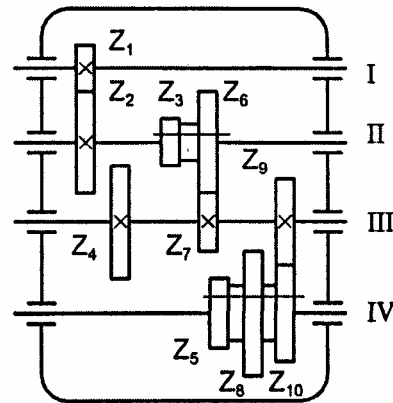
Hình bài 4.3.4



Hình bài 4.3.2



Hình bài 4.3.3



Hình bài 4.3.4

4.3.3. Tính tỷ số truyền của hệ và số vòng quay của trục bị động (hình bài 4.3.3) nếu số răng của các bánh răng là $Z_1 = 26$, $Z_2 = 48$, $Z_2' = 25$, $Z_4 = 60$, $Z_4' = 2$, $Z_5 = 80$ và số vòng quay của trục dẫn động $n_1 = 1440 \text{ vg/ph}$.

4.3.4. Cho hệ bánh răng trong hộp số trên hình bài 4.3.4 với số răng các bánh răng là $Z_1 = 20$, $Z_2 = 52$, $Z_3 = 22$, $Z_5 = 40$, $Z_7 = 32$, $Z_9 = 41$, $Z_{10} = 67$. Các bánh răng đều tiêu chuẩn và cùng môđun, số vòng quay của trục dẫn động 1 là $n_1 = 1000 \text{ vg/ph}$. Xác định:

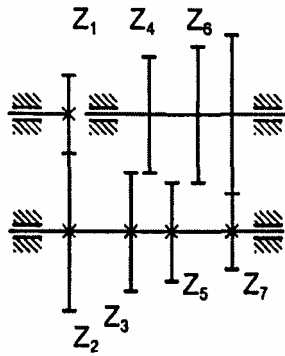
- Số răng các bánh răng 4,5 và 8.

2. Số tỷ số truyền của hệ.

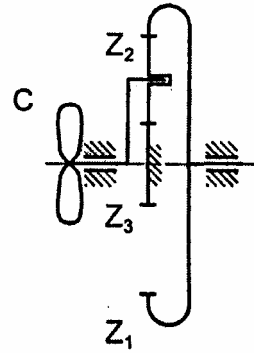
3. Tốc độ của trục bị động IV ứng với mọi số.

4.3.5. Trong hộp tốc độ có 3 bánh răng di động trượt (Z_4, Z_6, Z_8) để nhận được các tỷ số truyền sau: $i_{14} = 1,53, i_{16} = 2,8, i_{18} = 4,316$. Các bánh răng đều tiêu chuẩn với môđun ăn khớp $m = 6mm$ và khoảng cách trục $A = 180mm$, số răng các bánh răng $Z_1 = 20, Z_2 = 40$ (hình bài 4.3.5). Hãy tính số răng các bánh răng còn lại.

4.3.6. Tính số vòng phút của cánh quạt C và bánh răng 2 trong cơ cấu quạt máy (hình bài 4.3.6) nếu bánh răng 1 dẫn động quay với số vòng phút $n_1 = 2700vg/ph$ và các bánh răng đều tiêu chuẩn, ăn khớp đúng với số răng : $Z_1 = 66, Z_2 = 18$. Hãy nghiệm lại kết quả bằng phương pháp đồ thị vectơ.



Hình bài 4.3.5



Hình 4.3.6

Chương 5 ĐỘNG LỰC HỌC

5.1. ĐỘNG LỰC HỌC CHẤT ĐIỂM

Vấn đề cần chú ý

I. Phương trình vi phân chuyển động của chất điểm

* Chất điểm có khối lượng m , chịu tác dụng của các lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2 \dots \vec{F}_n$

Chuyển động với gia tốc \vec{a} trong hệ quy chiếu quán tính, ta có đẳng thức dạng vector:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k \quad (1)$$

* Nếu chiếu hệ thức (1) lên hệ trục tọa độ Đêcac oxyz cố định, ta được phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng tọa độ

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz} \quad (2)$$

* Nếu chiếu hệ thức (1) lên hệ trục tọa độ tự nhiên $M\tau nb$ gắn liền với điểm m chuyển động theo quỹ đạo, ta được phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng tọa độ tự nhiên:

$$m\dot{S} = \sum F_{k\tau}; \quad mV^2 / \rho = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{kb} \quad (3)$$

* Trong trường hợp chất điểm chuyển động trong một mặt phẳng, nếu chiếu hệ thức (1) lên hệ trục tọa độ độc cực, ta nhận được phương trình vi phân chuyển động của chất điểm ở dạng tọa độ độc cực:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \sum F_{kr}; \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = \sum F_{k\theta} \quad (4)$$

II. Bài toán thuận và bài toán ngược

Khi dùng một trong các dạng phương trình vi phân, ta có thể giải được hai bài toán cơ bản của động lực học đối với chất điểm. Bài toán thuận: Biết chuyển động của chất điểm, tìm lực tác dụng lên chất điểm hay các yếu tố liên quan đến lực đó.

Bài toán ngược: Biết lực tác dụng lên chất điểm và điều kiện đầu của chuyển động, tìm quy luật chuyển động của chất điểm.

Ta sẽ lần lượt khảo sát hai bài toán đó đối với chuyển động của chất điểm.

Bài tập giải sẵn

Thí dụ 5.1: Một vật nặng trọng lượng P được kéo lên theo phương thẳng đứng với gia tốc \vec{a} . Tìm sức căng T của dây (hình 5.1)

Bài giải:

Vật khảo sát.

Vật nặng được coi như một chất điểm. Các lực tác dụng lên chất điểm đã bao gồm: trọng lực P , sức căng T của dây.

Áp dụng đẳng thức (1) ta viết phương trình vi phân chuyển động cho chất điểm.

$$m\vec{\alpha} = \vec{P} + \vec{T}$$

Chọn toạ độ Oz hướng thẳng đứng từ dưới lên.
Chiều phương trình vectơ trên lên trục Oz :

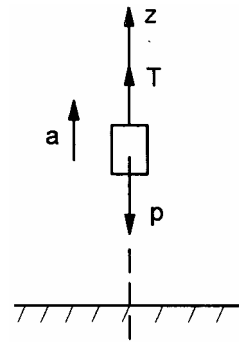
$$m\ddot{z} = ma = -P + T$$

Từ đây rút ra sức căng T của dây:

$$T = m(g + a)$$

Nhận xét:

Nếu $\vec{\alpha}$ hướng xuống thì: $T = m(g - a)$



Hình 5.1

Như vậy khi vật được kéo lên hay thả xuống không có gia tốc thì $T = P$. Ta nói đó là lực căng tĩnh của dây cáp.

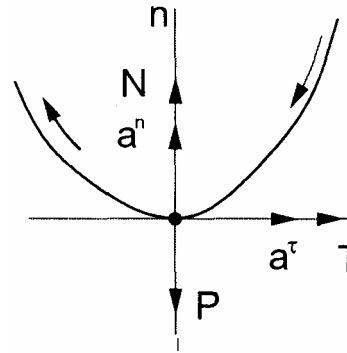
Sức căng dây trong điều kiện chuyển động có gia tốc của vật nặng (chuyển động không quán tính) bằng sức căng tĩnh cộng với một lực gọi là phản lực động lực.

Thí dụ 5-2: Một máy bay bỏ nhào trong mặt phẳng thẳng đứng rồi lái ngoặt lên. Ở điểm thấp nhất của quỹ đạo, máy bay có vận tốc $V = 1000$ m/giờ và bán kính cong của quỹ đạo là $R = 600$ m. Khối lượng của người

lái là 80kg. Tìm áp lực pháp tuyến do người lái tác dụng lên ghế ngồi ở vị trí thấp nhất đó.

Bài giải.

Con người lái là chất điểm M chuyển động theo đường cong (C), chịu tác dụng của trọng lực P và phản lực R được phân tích theo hai phương tiếp tuyến và pháp tuyến với quỹ đạo tại điểm đó (hình 5.2)



Hình 5.2

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

Phương trình vi phân chuyển động dạng vector

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N} \quad (a)$$

Khi chiếu hai vế của (a) lên phương pháp tuyến chính, ta có:

$$m a^n = -p + N \quad (b)$$

Từ (b) ta có

$$N = P + m \frac{V^2}{R} = m \left(\frac{V^2}{R} + g \right) = 11065 \text{ N}$$

Vậy người ta đã ép lên ghế một áp lực pháp tuyến bằng 11065 N, giống như trong điều kiện tĩnh người ấy nặng gấp 14 lần. Trong điều kiện ấy người lái, ghế, giá đỡ, ổ đỡ,... đều phải làm việc ở trạng thái siêu tải trọng.

Bài tập cho đáp số

I. Bài toán thuận

5.1.1. Trong quá trình chạy lên, biểu đồ vận tốc của thang máy theo thời gian có dạng hình thang cân mà các đáy lớn và bé là 10 và 6 đơn vị (theo trục t) và đường cao là 5 đơn vị (theo trục V tính bằng m/s); khối lượng của buồng bằng 500kg. Xác định lực kéo của dây cáp T_1 , T_2 , T_3 trong ba khoảng thời gian sau : từ $t = 0$ đến $t = 2$ giây, từ $t = 2$ giây đến $t = 8$ giây, từ $t = 8$ đến $t = 10$ giây. Đoạn $2 \leq t \leq 8$ ứng với đáy nhỏ của hình

thang.

5.1.2. Một đoàn tàu hoả không kể đầu máy có khối lượng là 200 tấn chạy nhanh dần trên đoạn đường ray nằm ngang. Sau 60 giây kể từ lúc bắt đầu chạy nó đạt tới vận tốc 54km/h. Tính lực kéo của đầu máy lên đoàn toa ở chỗ móc nối trong chuyển động đó, biết rằng lực cản chuyển động bằng 0,005 trọng lượng của đoàn tàu.

5.1.3. Một xe goòng có khối lượng 700kg đang chạy xuống dốc dọc theo đường ray thẳng và nghiêng với mặt ngang một góc 15^0 . Để giữ cho xe chạy đều, ta dùng dây cáp song song với mặt dốc. Vận tốc chạy của xe là 1,6m/s. Xác định lực kéo của dây cáp lúc xe chạy đều và khi nó hãm dừng lại trong 4 s? Lúc hãm coi rằng xe chạy chậm dần đều. Hệ số cản chuyển động tổng cộng là $f = 0,005$.

5.1.4. Một ô tô chở hàng, có khối lượng là 6 tấn chạy xuống một chiếc phà với tốc độ 21,6 km/h. Từ lúc bắt đầu xuống phà đến lúc dừng hẳn xe phải chạy thêm một quãng là 10km và cho rằng khi ấy ô tô chuyển động chậm dần đều. Tính lực căng mỗi dây cáp (có hai dây cáp) buộc giữ phà, coi rằng dây cáp luôn luôn căng.

5.1.5. Một cái sàng quặng thực hiện dao động điều hoà thẳng đứng với biên độ $a = 5\text{cm}$. Tìm tần số k nhỏ nhất của sàng để cho các hạt quặng bật được lên khỏi mặt sàng.

5.1.6. Một máy bay bỏ nhào trong mặt phẳng thẳng đứng rồi lại ngoặt lên. Ở điểm thấp nhất của quỹ đạo máy bay có vận tốc $V = 1000\text{km/giờ}$ và bán kính cong của quỹ đạo là $R = 600\text{m}$. Khối lượng của người lái là 80kg. Tìm áp lực pháp tuyến do người lái tác dụng lên ghế ngồi ở vị trí thấp nhất đó của quỹ đạo.

5.1.7. Một đoàn tàu hoả chạy trên một đoạn đường vòng với vận tốc bằng 72km/h. Trong toa người ta treo vật nặng vào một lực kế lò xo đặt thẳng đứng. Khối lượng của vật là 5kg. Lực kế chỉ 50N. Xác định bán kính cong của đường vòng, bỏ qua khối lượng của lò xo lực kế.

5.1.8. Một người đi xe đạp vạch nên đường cong có bán kính cong bằng 10m với vận tốc 5m/s. Tìm góc nghiêng giữa mặt phẳng trung bình của xe với mặt phẳng thẳng đứng và hệ số ma sát bé nhất f_{\min} giữa lốp xe và mặt đường để bảo đảm cho xe chạy ổn định.

II. Bài toán ngược

5.1.9. Một vật nặng hạ xuống theo mặt phẳng trơn nghiêng một góc 30^0 so với phương nằm ngang. Tại thời điểm đầu vận tốc của vật bằng 2m/s . Tìm xem vật đi được $9,6\text{m}$ hết bao nhiêu thời gian

5.1.10. Một vật nặng rơi xuống giếng mở không vận tốc đầu. Sau thời gian $6,5\text{ s}$ người ta nghe thấy tiếng va đập của vật vào đáy giếng. Cho biết vận tốc của tiếng động là 330m/s . Tìm chiều sâu h của hầm mở.

5.1.11. Một người lái tàu điện bằng cách mở dần điện trở làm tăng công suất động cơ sao cho lực kéo tăng tỉ lệ với thời gian từ giá trị bằng không và mỗi giây tăng được 1177N . Tìm quãng đường S toa tàu đi được trong các điều kiện cho sau đây: khối lượng của toa tàu bằng 10 tấn, lực ma sát không đổi và bằng $1,96 \cdot 10^3\text{N}$, vận tốc đầu bằng không.

5.1.12. Một chiếc tàu thủy có trọng lượng là P chuyển động thẳng ngang từ trạng thái nghỉ. Lực đẩy của chân vịt không đổi bằng Q và hướng theo hướng chuyển động của tàu. Lực cản của nước có giá trị $R = \frac{P}{9} k^2 V^2$. Trong đó: k là hệ số tỷ lệ và V là vận tốc của con tàu. Tìm giá trị của vận tốc giới hạn và tìm biểu thức vận tốc hàm theo thời gian chuyển động của con tàu.

5.1.13. Một chiếc tàu lặn đang nằm yên nhận được một trọng tải P thì lặn xuống sâu theo phương thẳng đứng. Trong trường hợp này có thể xem như lực cản của nước có giá trị tỷ lệ với vận tốc lặn xuống của tàu $R = KSV$ trong đó k là hệ số tỷ lệ, S là diện tích hình chiếu bằng của con tàu và V là vận tốc lặn của con tàu. Khối lượng của con tàu là m . Tìm biểu thức vận tốc của con tàu hàm theo thời gian. Tìm khoảng thời gian cần thiết.

5.2. NGUYÊN LÝ DI CHUYỂN KHẢ DĨ - NGUYÊN LÝ ĐĂLĂMBE

5.2.1. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

Vấn đề cần chú ý

I. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

"Đối với cơ hệ chịu liên kết giữ, dùm và lý tưởng, điều kiện cần và đủ để cơ hệ cân bằng ở một vị trí đang xét là tổng công nguyên tố của các

lực hoạt động tác dụng lên cơ hệ trong mọi di chuyển khả dĩ từ vị trí đó bằng không".

$$\sum_{k=1}^n \vec{F}_k \cdot \delta \vec{r}_k = 0 \quad (1)$$

- Đối với hệ chịu liên kết hólômôn, giữ, dừng và lý tưởng điều kiện cân bằng (1) được viết ở dạng tọa độ suy rộng là:

$$\sum \delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i = 0 \quad (2)$$

Ở đó Q_i là lực suy rộng tương ứng với tọa độ suy rộng đủ q_i ; S là số bậc tự do của cơ hệ; δq_i là biến phân của tọa độ q_i .

II. Các phương pháp tính lực suy rộng

* Phương pháp 1

Theo định nghĩa ta có

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k \frac{\partial r_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n (X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i}) \quad (3)$$

Như vậy để sử dụng công thức này ta cần tìm hình chiếu các lực hoạt động trên các trục tọa độ Đêcac và biểu thức các tọa độ của điểm đặt của lực hoạt động theo tọa độ suy rộng đủ.

* Phương pháp 2

Tính tổng công của các lực hoạt động di chuyển khả dĩ tương ứng rồi biểu diễn dưới dạng (2)

Các hệ số đứng trước các biến phân của tọa độ suy rộng đủ sẽ là lực suy rộng tương ứng.

Do các ∂q_i độc lập, ta có thể tính riêng từng lực suy rộng bằng cách chọn các di chuyển khả dĩ đặc biệt. Ví dụ, để tính lực suy rộng Q_1 ứng với tọa độ q_1 ta chọn hệ di chuyển khả dĩ đặc biệt như sau:

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0, \text{ khi đó } \sum \delta A = Q_1 \delta q_1$$

Để tìm Q_2 , ta truyền cho hệ một di chuyển khả dĩ, trong đó

$$\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = \dots = \delta q_s = 0, \text{ khi đó } \sum \delta A = Q_2 \delta q_2$$

Ta làm tương tự đối với các lực suy rộng khác

* Phương pháp 3

Khi các lực đều là lực thế (tức là hệ chỉ chịu các lực như: trọng lực, lực đàn hồi, ngẫu lực đàn hồi) và thế năng của các lực thế có dạng:

$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_s)$ thì lực suy rộng được tính theo công thức:

$$Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$$

Với $i = 1, 2, \dots, s$

III. Điều kiện cân bằng của cơ hệ chịu liên kết hólônôm, giữ, dừng và lý tưởng trong dạng tọa độ suy rộng đủ

$$Q_i = 0; i = 1, 2, \dots, s$$

5.2.2. Nguyên lý Đalămbe

Vấn đề cần chú ý

I. Lực quán tính

- Lực quán tính của chất điểm $\boxed{\vec{F}^{qt} = -m\vec{a}}$ (5)

trong đó: m và \vec{a} là khối lượng và gia tốc chất điểm.

- Thu gọn lực quán tính của vật rắn chuyển động:

* Vật tịnh tiến:

$$\vec{R}_c^{qt} = -M\vec{a}_c \quad (6)$$

trong đó: M - khối lượng của vật;

\vec{a}_c - gia tốc khối tâm C.

* Tâm phẳng quay quanh trục cố định, vuông góc với tâm tại O :

$$\vec{R}_o^{qt} = -M\vec{a}_c; M_o^{qt} = J_o \cdot \varepsilon \quad (7)$$

trong đó : J_o - momen quán tính của tấm đối với trục qua khối tâm C

ε gia tốc góc của vật.

* Tấm phẳng chuyển động song phẳng :

$$\vec{R}_e^{qt} = -M\vec{a}_e; \vec{M}_o^{qt} = J_e \cdot \varepsilon_s \quad (8)$$

trong đó : J_e - momen quán tính của tấm đối với trục qua khối tâm C
 $\vec{\varepsilon}$ gia tốc góc của tấm phẳng.

II. Nguyên lý Đalămbe

Ở mỗi thời điểm ta có một hệ lực cân bằng gồm các lực thật tác dụng lên cơ hệ và cả lực quán tính tương ứng của các chất điểm cơ hệ.

$$(\sum \vec{F}_k, \sum \vec{F}_k^{qt}) = 0$$

Hệ quả: nếu các lực thật được phân thành các ngoại lực và nội lực

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^c + \vec{F}_k$$

thì :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^c + \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^{qt} &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_k^e) + \sum_{k=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_k^{qt}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

III. Phương pháp tính động

Nhờ hệ quả đã nêu trên ta có thể giải quyết bài toán động lực học bằng cách viết phương trình cân bằng.

Trình tự áp dụng như sau :

a) Xác định vật khảo sát và phân tích chuyển động của từng vật thể thuộc cơ hệ.

b) Đặt ngoại tác dụng lên cơ hệ, đặt các lực quán tính của các vật thuộc hệ phù hợp với chuyển động và kết quả thu gọn để có một hệ gồm các ngoại lực và các lực quán tính.

c) Viết phương trình cân bằng tĩnh học.

d) Giải các phương trình đó và nhận xét kết quả.

Chú ý : đối với vật rắn cần sử dụng kết quả thu gọn của hệ lực quán tính.

- Bài toán thuận : khi đã biết chuyển động của cơ hệ, tìm lực tác dụng lên cơ hệ, đặc biệt quan trọng là tìm phản lực động lực.

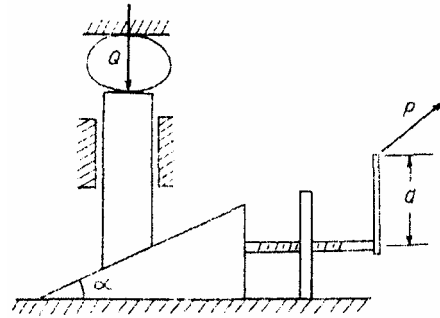
- Bài toán đặc biệt : tìm điều kiện cân bằng tương đối của một chất điểm hay vật thể nào đó đang chuyển động

- Phương pháp tĩnh động cũng có thể giúp ta giải quyết bài toán tìm các quy luật chuyển động (bài toán ngược)

Bài tập cho đáp số

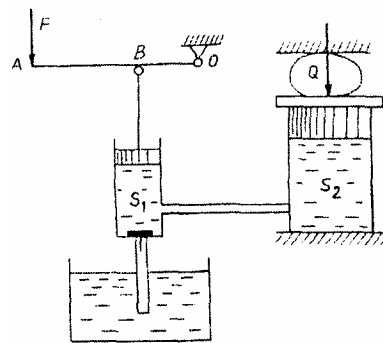
I. Nguyên lý di chuyển khả dĩ

5.2.1. Xác định trên hệ giữa lực P và Q trong máy ép dạng nêm như (hình bài 5.2.1) Lực \vec{P} tác dụng vào đầu tay quay và hướng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tâm với trục vít và tay quay. Bước của vít là h, góc đỉnh của nêm là α , chiều dài tay quay là a. Bỏ qua ma sát.



Hình bài 5.2.1

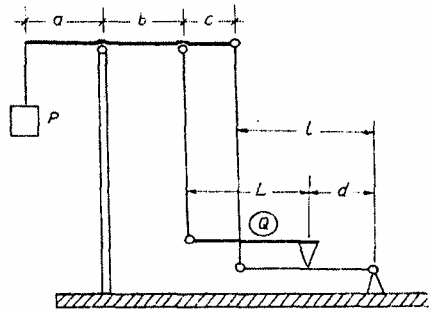
5.2.2. Máy ép thủy lực như (hình bài 5.2.2). Lực F tác dụng vào đầu tay quay OA và vuông góc với nó. Diện tích xy lanh trái là S_1 và xy lanh phải là S_2 . Tìm lực nén Q đặt vào vật. Biết $OA = a$, $OB = b$. Bỏ qua ma sát.



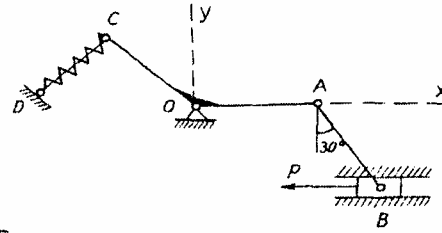
Hình bài 5.2.2

5.2.3. Sơ đồ của cân bàn như (hình bài 5.2.3). Tìm hệ thức giữa a, b, c, d, l sao cho vật cân và đối trọng cân bằng nhau ở bất cứ vị trí nào của vật trên mặt bàn cân. Khi đó tìm hệ thức giữa hai trọng lượng P và Q của đối trọng và vật vắn.

5.2.4. Cơ cấu cân bằng ở vị trí như (hình bài 5.2.4) dưới tác dụng của lực P và lò xo bị nén một đoạn là $h = 4\text{cm}$ và tỷ số $\frac{OA}{OC} = \frac{4}{5}$



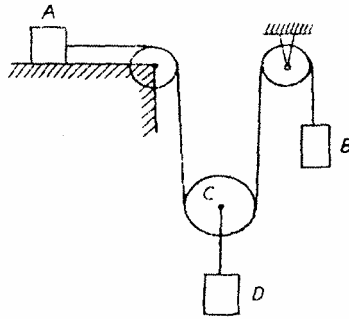
Hình bài 5.2.3



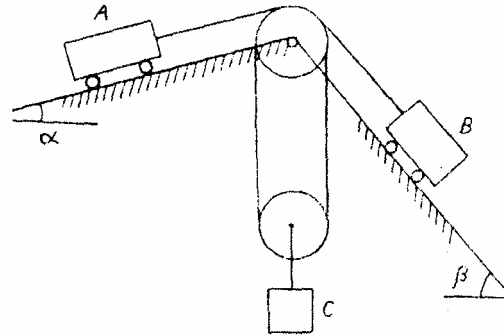
Hình bài 5.2.4

5.2.5. Hai vật A và B cùng trọng lượng P , ròng rọc C có trọng lượng không đáng kể. Vật D có trọng lượng Q . Khi hệ cân bằng, tìm hệ thức giữa P và Q , tìm hệ số ma sát trượt giữa vật A và nền (hình bài 5.2.5)

5.2.6. Vật A và vật B được nối với nhau bởi một sợi dây vòng qua hai ròng rọc (hình bài 5.2.6). Hai mặt phẳng nghiêng có góc nghiêng là α và β . Vật C có trọng lượng Q . Bỏ qua trọng lượng các ròng rọc và ma sát. Tìm các trọng lượng P_1 và P_2 của vật A và vật B để hệ cân bằng



Hình bài 5.2.5



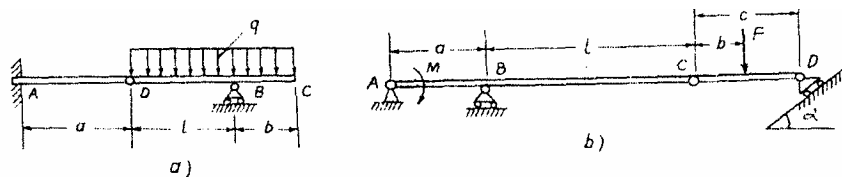
Hình bài 5.2.6

5.2.7. Cho các hệ dầm như (hình bài 5.2.7)

Hình bài 5.2.7). Cho $l = 2\text{m}$; $a = 2\text{m}$; $b = 1\text{m}$; $q = 4,9 \cdot 10^3 \text{N/m}$ Tìm phản lực liên kết tại ngàm A và điểm tựa B

(Hình bài 5.2.7b). Cho $l = 6\text{m}$; $a = 2\text{m}$; $b = 1\text{m}$; $c = 2\text{m}$; $\alpha = 45^\circ$
 $M = 1,96 \cdot 10^4 \text{Nm}$; $F = 2,94 \cdot 10^4 \text{N}$.

Tìm phản lực liên kết tại bản lề A ; điểm tựa B ; điểm tựa D



Hình bài 5.2.7

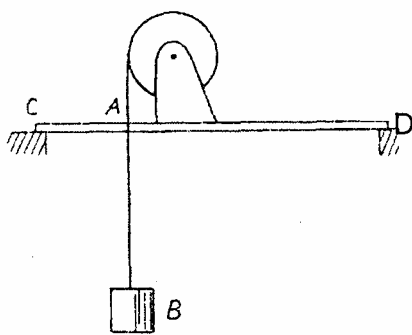
II. Nguyên lý Đalămbe

5.2.8. Một tời đặt trên dầm tựa lên C và D. Khoảng cách $CD = 8\text{m}$, $AC = 3\text{m}$. Vật B nặng 20kN được kéo tênh nhan dần với gia tốc $a = 0,5\text{m/s}^2$. Tìm sức căng của dây. Tìm áp lực phụ lên gối C, D do lực quán tính của vật nặng (hình bài 5.2.8)

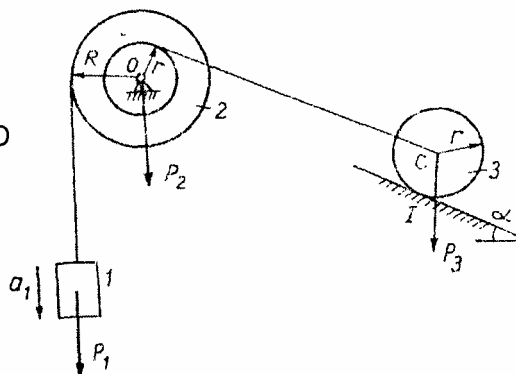
5.2.9. Vật có trọng lượng P_1 rơi xuống với gia tốc a_1 , trục 2 có trọng lượng P_2 có bán kính r , và R , momen quán tính đối với trục quay là J . Đĩa 3 có trọng lượng P_3 , bán kính r lăn không trượt

Dây song song với mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng α

Tìm sức căng các dây, lực liên kết tại O và lực ma sát tại (hình bài 5.2.9)



Hình 5.2.8



Hình 5.2.9

5.3. CÁC ĐỊNH LÝ TỔNG QUÁT CỦA LỰC HỌC

Các định lý tổng quát của động lực học là hệ quả của định luật cơ bản động lực học. Nó giúp chúng ta giải các bài toán của động lực học bằng cách lập mối quan hệ giữa các đặc trưng chuyển động và đặc trưng cho tác dụng của lực.

Trong chương này chúng ta xét chuyển động của cơ hệ trong hệ qui chiếu quán tính trường hợp đặc biệt có thể xét một chất điểm.

5.3.1. Định lý biên thiên động lượng và định lý chuyển động khối tâm của cơ hệ

Vấn đề cần chú ý

a. Khối tâm của cơ hệ. Khối tâm của hệ là một điểm hình học, vị trí của nó được xác định như sau:

Với m_k là khối lượng chất điểm thứ k .

$M = \sum m_k$ là khối lượng cả hệ ;

$\vec{r}_k (X_k, Y_k, Z_k)$ là bán kính vectơ chất điểm thứ k ;

$\vec{r}_c (X_c, Y_c, Z_c)$ là bán kính vectơ khối tâm C .

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{M} \\ x_c &= \frac{1}{M} \sum m_k x_k \\ y_c &= \frac{1}{M} \sum m_k y_k \\ z_c &= \frac{1}{M} \sum m_k z_k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

b. Động lượng của cơ hệ là một đại lượng vectơ:

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k \quad (2)$$

trong đó, m_k là khối lượng chất điểm thứ k ;

\vec{V}_k là vận tốc chất điểm thứ k .

Theo định nghĩa khối tâm C ta có thể viết động lượng của cơ hệ như sau:

$$\vec{Q} = M \vec{V}_c \quad (3)$$

c. Xung lượng của lực \vec{F} được định nghĩa như sau:

- Xung lượng nguyên tố: $dS = F \cdot di$

- Xung lượng của lực \vec{F} trong khoảng thời gian $t = t_2 - t_1$ là:

$$\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (4)$$

d. Định lý biến thiên động lượng của cơ hệ:

- Dạng đạo hàm:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e \\ \dot{Q}_x &= \sum F_{kx}^e \\ \dot{Q}_y &= \sum F_{ky}^e \\ \dot{Q}_z &= \sum F_{kz}^e \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

- Dạng hữu hạn:

$$\left. \begin{aligned} \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 &= \sum_{k=1}^n \vec{S}_k^e \\ Q_{2x} - Q_{1x} &= \sum S_{kx}^e \\ Q_{2y} - Q_{1y} &= \sum S_{ky}^e \\ Q_{2z} - Q_{1z} &= \sum S_{kz}^e \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Trong đó \vec{S}_h^e là xung lượng của ngoại lực \vec{K}_h^e ;

- Trường hợp bảo toàn động lượng.

Nếu $\sum F_k^e = 0$ thì $\vec{Q} = \text{const}$: Động lượng của hệ bảo toàn.

Nếu $\sum F_{kx}^e = 0$ thì $Q_x = \text{Const}$: Động lượng của hệ bảo toàn đối với trục x.

e. Định lý chuyển động khối tâm:

$$M\vec{a}_c = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^e$$

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_c &= \Sigma F_{kx}^c \\ M\ddot{y}_c &= \Sigma F_{ky}^c \\ M\ddot{z}_c &= \Sigma F_{kz}^e \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

trong đó M là khối lượng cả hệ, $\vec{a}_c(\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{z}_c)$ là gia tốc của khối tâm C ; $\vec{K}_k^e(K_{kx}^e, K_{ky}^e, K_{kz}^e)$ là ngoại lực thứ k .

Trường hợp bảo toàn chuyển động khối tâm.

Nếu $\Sigma F_k^e = Q$ thì $\vec{V} = \text{const}$: khối tâm của cơ hệ chuyển động theo quán tính (đứng yên hoặc chuyển động thẳng đều).

Nếu $\Sigma K_{kx}^e = 0$ thì $\dot{x}_c = \text{const}$: khối tâm của hệ chuyển động theo quán tính trên trục x , nghĩa là: hoặc $\dot{x}_c = \dot{x}_c(0)$ hay

$$M\dot{x}_c = \Sigma m_k \dot{x}_k = \Sigma m_k \dot{x}_k(0)$$

Hướng dẫn sử dụng:

Định lý biến thiên động lượng thường được áp dụng để giải các bài toán sau:

- Bài toán va chạm của các vật chuyển động thẳng (bài toán thuận và bài toán ngược).

- Bài toán xác định áp lực thủy động của dòng chất lỏng lên thành ống.

- Định lý chuyển động khối tâm thường ngược áp dụng trong bài toán sau:

- Biết chuyển động cơ hệ, tìm các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ (bài toán thuận).

- Bài toán chuyển động của cơ hệ, trong đó biết chuyển động của một số bộ phận, tìm các chuyển động của bộ phận còn lại (bài toán ngược).

Chú ý: Khi áp dụng các định lý biến thiên động lượng và chuyển động khối tâm chỉ cần chú ý đến ngoại lực tác dụng lên cơ hệ.

Khi áp dụng các định lý này cần theo trình tự sau:

- Phân tích chuyển động của các bộ phận thuộc cơ hệ.

Phân tích hệ ngoại lực tác dụng lên cơ hệ ấy, tìm đặc điểm của vectơ chính $\vec{R}' = \sum \vec{F}_h^e$ hoặc là hình chiếu của vectơ ấy lên một trục nào đó.

Từ đó xác định bài toán cần giải quyết là bài toán thuận hay ngược và định lý nào các công thức (3), (5), (7) có thể áp dụng để giải bài toán ấy.

5.3.2. Định lý biến thiên mômen động lượng

Vấn đề cần chú ý

- Momen động lượng của cơ hệ đối với một trục \vec{L}_O và đối với một trục (L_z) :

$$\vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(m_k \vec{v}_k)$$

$$\vec{L}_z = \sum_{k=1}^n \vec{m}_z(m_k \vec{v}_k)$$

- Momen động lượng của vật rắn quay quanh một trục cố định z:

$$\vec{L}_z = J_z \vec{\omega} \quad (8)$$

trong đó:

J_z là momen quán tính của vật đối với trục z;

ω là vận tốc góc của vật quay.

- Định lý biến thiên momen động.

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) \quad \frac{d}{dt} \vec{L}_z = \sum_{k=1}^n \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) \quad (9)$$

Trường hợp bảo toàn:

Nếu $\sum_{k=1}^n \vec{m}_O(\vec{F}_k^e) = 0$ thì $\vec{L}_O = \text{const}$: momen động của cơ hệ đối với

tâm O bảo toàn.

$$\text{Nếu} \quad \sum_{k=j}^n \vec{m}_z(\vec{F}_k^e) = 0 \quad (10)$$

thì $\vec{L}_z = \text{const}$: momen động của cơ hệ đối với trục z bảo toàn.

- Phương trình vi phân chuyển động của vật quay quanh một trục cố định:

$$J_z \dot{\omega} = J_z \vec{\varepsilon} = \sum \vec{m}_z (\vec{F}_k^e) \quad (11)$$

Hướng dẫn sử dụng:

Định lý biến thiên momen động thường được áp dụng cho các bài toán sau:

- Bài toán chuyển động của vật rắn quay quanh một tâm cố định hay một trục cố định.

- Bài toán của chất điểm hay của cơ hệ có momen động lượng đối với một tâm hay đối với một trục bảo toàn.

Áp dụng định lý momen động lượng theo trình tự sau:

Xác định cơ hệ khảo sát, phân tích chuyển động các vật của cơ hệ, chú ý quan hệ động học.

- Phân tích các ngoại lực tác dụng lên cơ hệ, phát hiện những đặc điểm về momen các ngoại lực.

Xác định định lý hay phương trình cần áp dụng:

Đối với cơ hệ (chất điểm, vật rắn tịnh tiến, vật rắn quay quanh một trục) thì áp dụng (9). trường hợp bảo toàn áp dụng (10).

Đối với một vật rắn quay quanh trục cố định áp dụng (11)

5. 3.3. Định lý biến thiên động năng

Vấn đề cần chú ý

a. Động năng của hệ

$$T = \frac{1}{2} \sum m_k V_k^2 \quad (1)$$

trong đó m_k và V_k là khối lượng và vận tốc của chất điểm thứ k.

Áp dụng định nghĩa tổng quát ta có các công thức tính động năng các vật rắn :

- Động năng của vật rắn chuyển động tịnh tiến.

$$T = \frac{1}{2} M V_c^2 \quad (2)$$

trong đó: M là khối lượng;

V_c là vận tốc khối tâm.

- Động năng của vật rắn quay quanh trục cố định z:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (3)$$

J_z là momen quán tính của vật đối với trục quay z, ω là vận tốc góc của vật.

- Động năng của vật rắn chuyển động song phẳng:

$$T = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} M V_c^2 \quad (4)$$

J_c là momen quán tính của vật đối với trục qua khối tâm C.

ω là vận tốc góc.

M là khối lượng vật; V_c là vận tốc khối tâm.

b. Công và công suất của lực:

- Công nguyên tố của lực \vec{F} trong di chuyển vô cùng bé:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = F \cos \alpha ds = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

- Công của lực \vec{F} trong một di chuyển hữu hạn $M_1 M_2$:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} F \cos \alpha ds = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Dựa vào định nghĩa cơ bản này ta có thể tính công của các lực hay gặp:

Công của trọng lực: $A = \pm Ph$ (5)

- Công của lực đàn hồi: $A = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2)$ (6)

trong đó: c là độ cứng; x_1 và x_2 là độ biến dạng đầu và cuối.

- Công của lực và ngẫu lực tác dụng vào vật quay quanh trục cố định.

$$dA = \vec{m}_z(F)d\varphi; dA = \vec{M}d\varphi$$

Khi $\vec{m}_z(F) = \text{const}$ và $\vec{M}_z = \text{const}$ thì:

$$A = \vec{m}_z(\vec{F})\varphi; A = \vec{M}_z\varphi \quad (7)$$

Công của ngẫu lực đàn hồi:

$$A = -\frac{c}{2}(\varphi_2^2 - \varphi_1^2) \quad (8)$$

c là độ cứng; φ_1 và φ_2 là các góc kể từ vị trí không biến dạng.

- Công suất:

• Công suất trung bình:	}	(9)
• Công suất của lực:		
• Công suất của ngẫu lực:		

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{dA}{dt} \\ N &= \frac{\Sigma A}{t} \\ N &= \vec{F} \cdot \vec{V} \\ N &= \vec{M} \cdot \vec{\omega} \end{aligned} \right\}$$

c. Định lý động năng:

• Dạng vi phân: $dT = \Sigma dA_k^i + \Sigma dA_k^e \quad (10)$

• Dạng đạo hàm: $\frac{dT}{dt} = \Sigma N_k^i + \Sigma N_k^e \quad (11)$

• Dạng hữu hạn: trong đó: $T - T_0 = \Sigma A_k^i + \Sigma A_k^e \quad (12)$

Trong đó:

A_k^i ; và A_k^e là công của nội lực \vec{F}_k^i ; và ngoại lực \vec{F}_k^e ;

N_k^i và N_k^e là công suất của nội lực và của ngoại lực;

T và T_0 là động năng của hệ lúc xét và lúc đầu.

d. Định lý bảo toàn cơ năng

Là trường hợp riêng của (5), (6) áp dụng cho trường lực thế (nghĩa là chỉ có trọng lực, lực đàn hồi).

$$T_0 + \Pi_0 = T + \Pi = E = \text{const} \quad (13)$$

trong đó: T_0, Π_0 - động năng, thế năng của hệ lúc đầu;

T, Π - động năng, thế năng của hệ lúc xét;

E - cơ năng của hệ.

Thế năng của trọng lực: $\Pi = \pm Ph + \text{const}$

Thế năng lực đàn hồi: $\Pi = \frac{1}{2} cx^2 + \text{const}$

Thế năng của ngẫu lực đàn hồi: $\Pi = \frac{1}{2} c\varphi^2 + \text{const}$

Hướng dẫn sử dụng:

Định lý động năng được áp dụng để tìm chuyển động (vận tốc, gia tốc) và công suất của hệ một bậc tự do. Trình tự giải bài toán sau:

a. Phân tích chuyển động và lực.

- Phân tích chuyển động của điểm và các vật (để chọn công thức tính động năng tương ứng).

- Phân tích lực (để chọn công thức tính công tương ứng).

b. áp dụng định lý động năng.

- Tính gia tốc hoặc công suất thì áp dụng (10) hoặc (11).

- Tính vận tốc cần phân biệt:

• Khi có lực hoặc ngẫu lực biến thiên (không tính được công hữu hạn) thì áp dụng (10)

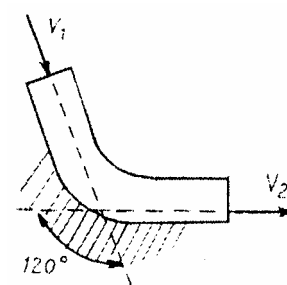
• Khi các lực và ngẫu lực đều là const (tính được công hữu hạn) thì áp dụng (12).

• Khi các lực đều là lực thế (tức là chỉ gồm trọng lực, lực đàn hồi) thì áp dụng (15)

Bài tập cho đáp số

I. Định lý động lượng

5.3.1. Xác định áp lực động lực tổng hợp lên gối đỡ của dòng chất lỏng chảy trong một đoạn ống cong đặt trong mặt phẳng ngang như (hình bài 5.3.1) Tiết diện ngang của ống có đường



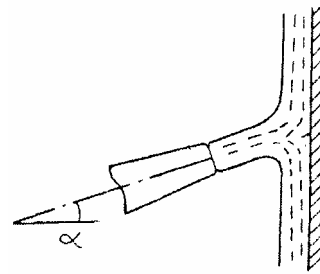
Hình bài 5.3.1

kính $d = 20\text{cm}$. Hai nhánh của đường ống tạo với nhau một góc $\alpha = 120^\circ$. Vận tốc nước chảy trong ống là $V = 127\text{ m/s}$.

Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

5.3.2. Một dòng nước được phóng ra với vận tốc bằng $V = 8\text{ m/s}$ và nghiêng với phương ngang một góc $\alpha = 30^\circ$ từ một vòi có tiết diện $S = 16\text{ cm}^2$.

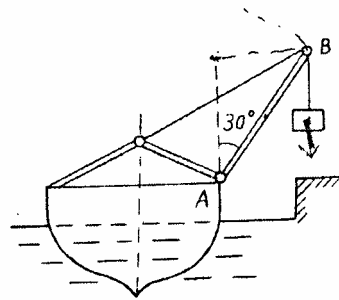
Xác định áp lực tổng hợp của dòng chất lỏng lên mặt tường phẳng đứng. Bỏ qua ảnh hưởng của trọng lực và coi rằng sau khi gặp tường, chất lỏng chuyển động theo mặt tường mô tả như hình bài 5.3.2



Hình bài 5.3.2

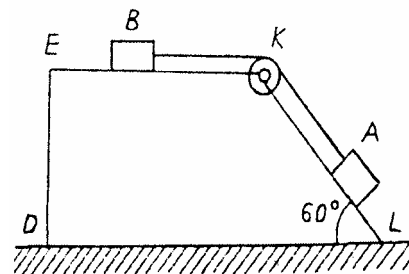
II. Định lý chuyển động khối tâm

5.3.3 Xác định độ di chuyển ngang của con tàu mang cần cẩu, khi cần AB mang vật nặng có khối lượng bằng 2 tấn cất thẳng đứng lên từ vị trí ban đầu nghiêng góc 30° như mô tả trên (hình bài 5.3.3). Khối lượng của tàu và cần cẩu bằng 20 tấn, chiều dài $AB = 8\text{m}$. Bỏ qua sức cản của nước và khối lượng của cần AB .



Hình bài 5.3.3

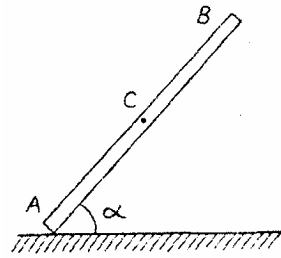
5.3.4. Hai vật nặng A và B có khối lượng là m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây mềm, nhẹ, không giãn và được đặt trên các mặt K và E của lăng trụ $DEKL$. Lăng trụ có khối lượng là m , được đặt trên mặt nền ngang nhẵn và cứng. Tìm độ di chuyển của lăng trụ khi vật nặng A trượt xuống theo mặt nghiêng KL một đoạn dài S . Ban đầu hệ đứng yên (hình bài 5.3.4)



Hình bài 5.3.4

5.3.5. Thanh đồng chất AB dài 1 tựa đầu A lên nền ngang nhẵn và có góc nghiêng ban đầu là α .

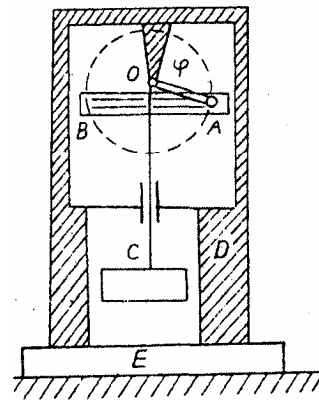
Tìm quỹ đạo của đầu mút B khi ta cho thanh rơi nằm xuống mặt nền ngang (hình bài 5.3.5)



Hình bài 5.3.5

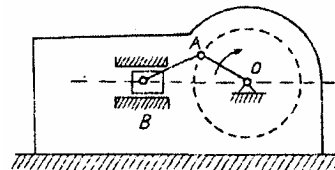
5.3.6. Một toa tàu dao động điều hoà thẳng đứng trên các lò xo với chu kỳ $T = 0,5$ s. Khối lượng của hòm xe và trọng là 10 tấn, của các bánh xe bằng 1 tấn. Xác định áp lực tổng hợp của các bánh xe lên các đường ray.

5.3.7. Xác định áp lực lên nền của một máy bơm nước lúc bơm chạy không. Trọng lượng của phần cố định gồm vỏ D và móng R bằng P_1 tay quay CA dài là a và có trọng lượng bằng P_2 . Trọng lượng của máng trượt B cùng với pittông là P_3 . Tay quay OA quay đều với vận tốc góc ω . Xem như các vật khảo sát đều là những vật đồng chất và có cấu tạo đối xứng như hình bài 5.3.7



Hình bài 5.3.7

5.3.8. Một động cơ hơi nước nằm ngang trên mặt móng nhẵn tròn. Tay quay OA có chiều dài r quay đều với vận tốc góc ω . Thanh truyền dài bằng tay quay. Coi rằng khối lượng của các bộ phận chuyển động được thu gọn về thành hai khối lượng m_1 và m_2 tập trung ở đầu tay quay và ở trọng tâm của pittông. Khối lượng của vỏ động cơ là m_3 . Xác định chuyển động ngang của vỏ động cơ, cho biết ban đầu giường ở vị trí xa nhất về bên trái (hình bài 5.3.8).



Hình bài 5.3.8

Khi động cơ được gắn chặt vào móng máy bằng pittông, tìm áp lực

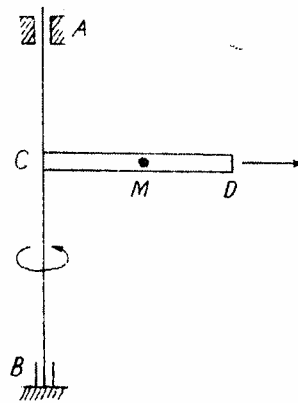
của động cơ lên mặt móng và tìm lực cắt ngang pittông. Bỏ qua lực căng ban đầu của thương.

III. Định lý momen động lượng

5.3.9. Một đĩa tròn đồng chất có khối lượng m_1 và có bán kính bằng r , quay quanh trục cố định AB với vận tốc góc ω_0 . Vào một thời điểm nào đó một chất điểm M có khối lượng m_2 bắt đầu chuyển động từ tâm đĩa ra ngoài vành theo một đường bán kính với vận tốc không đổi u . Xác định vận tốc góc ω của đĩa (hàm theo thời gian) kể từ lúc chất điểm M chuyển động. Bỏ qua lực ma sát ở ổ trục quay.

5.10. Một đá tròn đồng chất bán kính r khối lượng m_1 nằm ngang và quay được quanh một trục thẳng đi qua tâm đĩa. Một chất điểm M nằm trên vành đĩa có khối lượng là m_2 chuyển động theo vành đĩa với quy luật $S = M_0 M = \frac{at^2}{2}$. Xác định vận tốc góc, gia tốc góc của đá. Bỏ qua ma sát và biết ban đầu hệ đứng yên.

5.3.11. Ống nằm ngang CD quay quanh trục thẳng đứng AB. Trong ống có quả cầu khối lượng m nằm cách trục quay một khoảng $MC = a$. Tại thời điểm nào đó ống được truyền vận tốc góc cao tìm vận tốc góc ω của ống tại thời điểm quả cầu vừa rời khỏi ống CD. Biết momen quán tính của ống đối với trục quay là J , chiều dài $CD = L$. Bỏ qua ma sát (hình bài 5.3.11)

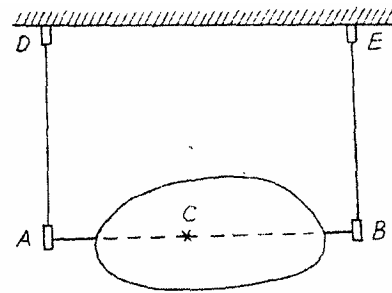


Hình bài 5.3.11

5.3.12. Một môm điện chịu tác dụng của một ngẫu lực tổng hợp (phát động và cản) có momen quay là $M = a - b\omega$, trong đó a, b là các hằng số dương, còn m là vận tốc góc mô tơ. Momen quán tính của rôto đối với trục quay hình học là J . Tìm biểu thức vận tốc góc $\omega(t)$ trong quá trình mở máy từ trạng thái nghỉ.

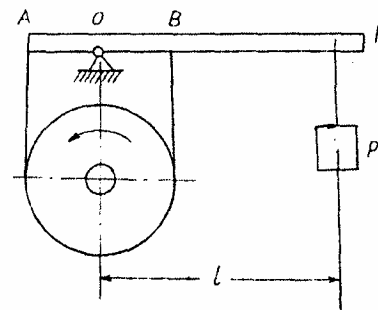
5.3.13. Để xác định momen quán tính của vật đối với trục AB qua khối tâm C của vật bằng hai thanh AD và BE gắn cứng vào vật, sao cho AB song song với DE và cùng nằm ngang. Cho vật dao động quay trục

DE và do nửa chu kỳ T của dao động. Biết trọng lượng của vật là P , khoảng cách $AD = BE = h$. Bỏ qua trọng lượng của hai thanh treo và bỏ qua ma sát ở các khớp quay. Tính mômen quán tính của vật đối với trục AB (hình bài 5.3.13).



Hình bài 5.13

5.3.14. Một vật rắn quay quanh trục cố định, khởi động từ trạng thái nghỉ, chịu tác dụng của momen quay không đổi M và của momen $M_c = \alpha\omega^2$, trong đó α là hằng số và ω là vận tốc góc của vật. Momen quán tính của vật đối với trục quay là J . Tìm luật biến thiên của vận tốc góc theo thời gian và tìm giá trị vận tốc góc giới hạn của vật.

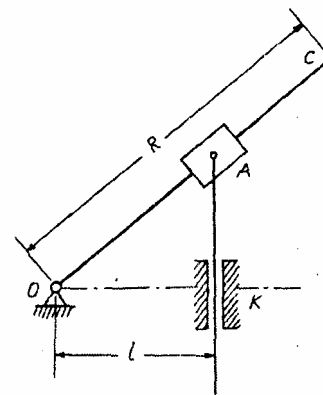


Hình bài 5.3.16

IV. Định lý biên thiên động năng

5.3.15. Búa máy có khối lượng $m = 200\text{kg}$ đập 84 lần trong 1 phút. Hành trình của búa $h = 0,35\text{m}$. Hiệu suất của búa $\eta = 0,7$. Tìm công suất của động cơ để đảm bảo chế độ làm việc đều của búa.

5.3.16. Trục động cơ được lắp vào bánh đai và nối với đòn AF nhờ dây như (hình bài 5.3.16). Tìm công suất của động cơ khi nó quay $n = 240$ vg/ph và để đòn cân bằng người ta treo vật nặng $P = 29,4\text{N}$, khoảng cách $l = 50\text{cm}$.

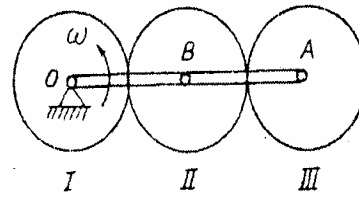


Hình bài 5.3.17

5.3.17. Cho cơ cấu cuối như hình trên thành bài 5.3.17). Cần lắc OC quay quanh trục O kéo thanh AB chuyển động lên xuống theo máng trượt thẳng đứng K . Cần OC được coi là thanh đồng nhất có chiều dài bằng R và khối lượng m_1 . Con chạy A có khối lượng m_2 , thanh AB có khối lượng m_3 . Khoảng cách giữa trục O và máng trượt K bằng l . Xem

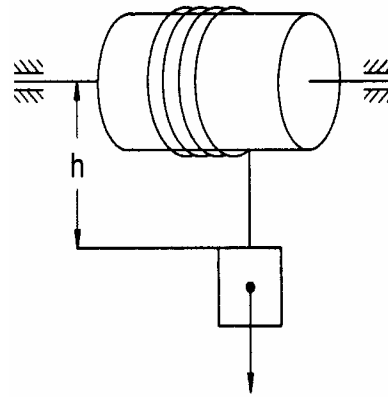
con chạy A như một chất điểm, tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc và góc quay của tay quay.

5.3.18. Cho cơ cấu hành tinh như (hình bài 5.3.18) các bánh I, II, III là các đĩa tròn đồng chất, cùng bán kính r , cùng khối lượng m . Tay quay OA được xem là một thanh đồng chất có khối lượng m_1 . Tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc của tay quay.



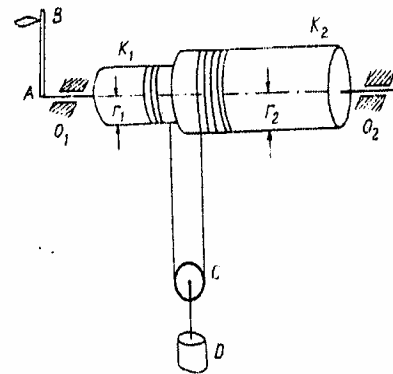
Hình 5.3.18

5.3.19. Một vật nặng là P được treo vào đầu một sợi dây mềm, nhẹ, không dẫn, rồi quấn dây vào trống hình trụ của một trục quay nằm ngang. Vật nặng rơi, kéo cả trống quay theo. Xác định vận tốc của vật nặng sau lúc nó rơi xuống được một độ cao h , ban đầu yên nghỉ. Trống có trọng lượng bằng Q và được coi là một khối trụ tròn đồng chất. Bỏ qua ma sát.



Hình bài 5.3.19

5.3.20. Một tời kéo gồm hai trống K_1 và K_2 có bán kính r_1 và r_2 ghép cứng với nhau và với trục quay nằm ngang O_1O_2 . Có momen quán tính đối với trục đó bằng J_1 và J_2 . Tác dụng vào tay quay của trục tời một ngẫu lực có momen M không đổi kéo vật nặng D có trọng lượng P lên cao. Khi trống K_2 quấn dây thì trống K_1 thả dây.



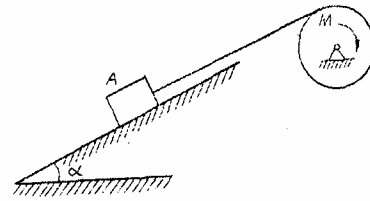
Hình bài 5.3.20

Bỏ qua ma sát và trọng lượng dây, cho biết ban đầu hệ đứng yên.

Tìm vận tốc góc của tay quay A khi vật D được kéo lên một đoạn h

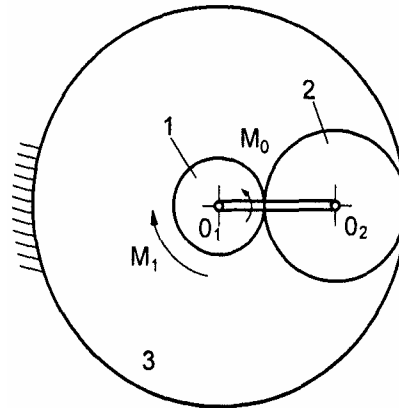
(hình bài 5.3.20)

5.3.21. Ngẫu lực có momen quay M không đổi tác dụng lên tang của một trục tời có bán kính bằng r và có trọng lượng P_1 . Quấn vào tang tời một sợi dây mềm nhẹ, không dẫn rồi buộc đầu mút dây vào vật nặng A có trọng lượng P_2 để kéo nó lên theo mặt phẳng nghiêng, góc nghiêng so với mặt phẳng ngang là α . Hệ số ma sát trượt giữa vật nặng và mặt phẳng nghiêng là f . Tang tời được xem là một trục tròn đồng chất.



Hình bài 5.3.21

Tìm biểu thức vận tốc góc của trục tời theo góc quay của nó. Tìm gia tốc góc (hình bài 5.3.21)



Hình bài 5.3.22

5.3.22. Cơ cấu hành tinh như trên (hình bài 5.3.22) chuyển động trong mặt phẳng ngang. Bánh răng 3 cố định, các bánh răng động 1 và 2 được coi là những đĩa tròn đồng chất cùng bề dày và cùng vật liệu. Biết bánh răng 1 quay nhanh gấp 10 lần tay quay. Bỏ qua khối lượng của tay quay. Momen quán tính của bánh răng 1 đối với trục O_1 là J_1 . Bánh răng 1 chịu tác dụng của ngẫu lực cân có momen là M_1 không đổi. Tay quay chịu tác dụng của ngẫu lực phát động có momen quay M_0 Cũng không đổi. Tìm gia tốc góc tay quay.

5.3.23. Tay quay của một cơ cấu tay quay thanh truyền được coi là thanh đồng chất có chiều dài bằng r , có khối lượng m_1 đang quay với vận tốc góc ω . Con chạy có khối lượng m_2 , thanh truyền dài l , coi rằng tỷ số $\frac{r}{l}$ là bé.

a. Bỏ qua khối lượng thanh truyền, tìm biểu thức động năng của cơ cấu theo vận tốc góc và góc quay của tay quay.

b. Kể đến khối lượng của thanh truyền là m_3 , tính động năng của hệ ở vị trí tay quay OA vuông góc với đường trượt của con chạy.

5.4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG CỦA VẬT RẮN VÀ CƠ HỆ

Vấn đề cần chú ý

I. Vật rắn chuyển động tịnh tiến

Phương trình vi phân chuyển động có dạng định lý chuyển động khối tâm (7) đã được xét ở. Chương 5, mục (5.3.1)

II. Vật rắn quay quanh trục cố định

Phương trình vi phân chuyển động có dạng 11 đã được xét ở định lý momen động lượng. Chương 5 (5.3.3)

III. Vật rắn quay quanh trục cố định

Phương trình vi phân chuyển động có dạng:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^c \\ M\ddot{y} &= \sum F_{ky}^c \\ J_C\ddot{\varphi}_S &= \sum m_c(F_k^e) \end{aligned} \right\} (1) \quad \text{hoặc} \quad \left. \begin{aligned} M\ddot{S} &= \sum F_{k\sigma}^c \\ M\frac{V_c^2}{\rho} &= \sum F_{kn}^c \\ J_C\ddot{\varphi}_S &= \sum m_c(F_k^e) \end{aligned} \right\} (2)$$

trong đó: X_c, Y_c - tọa độ của khối tâm C; φ_s - góc định vị của tâm phẳng S đối với hệ trục tọa độ tịnh tiến cùng với khối tâm; M - khối lượng của tấm;

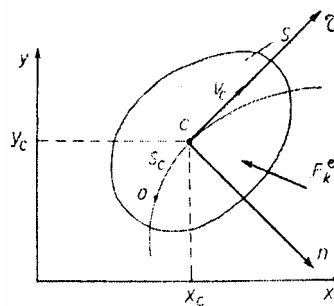
J_c - momen quán tính của tấm đối với trục đi qua C và thẳng góc với mặt phẳng của tấm,

F_k^c - ngoại lực thứ k;

$S_c = OC$ tọa độ cong của C;

V_c - vận tốc của c;

ρ - bán kính cong của quỹ đạo khối tâm C



Hình 5.3

IV. Cơ hệ những chất điểm và vật rắn chuyển động

Phương trình vi phân chuyển động có dạng phương trình Lagrange loại II:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$
$$i = 1, 2, \dots, S$$

trong đó: S - số bậc tự do của hệ;

$T = T(q_i, \dot{q}_i)$ - động năng của hệ được tính theo hệ tọa độ suy rộng q_i và vận tốc suy rộng $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$;

Q_i - lực suy rộng, được tính theo các phương pháp ở (5.2);

$\frac{\partial T}{\partial q_i}$ - đạo hàm riêng của động năng theo tọa độ suy rộng q_i ,

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ - đạo hàm riêng của động năng theo vận tốc suy rộng \dot{q}_i ;

$\frac{d}{dt}(q_i)$ đạo hàm theo thời gian của (q_i).

Phạm vi ứng dụng

1. Phương trình vi phân chuyển động song phẳng

* Phương trình này dùng để giải cả bài toán thuận và ngược.

a. Biết chuyển động của vật, xác định vectơ chính và momen chính các ngoại lực tạo dụng lên vật và do đó có thể xác định các lực liên b. Biết các lực tác dụng lên vật, xác định chuyển động của vật. Trường hợp đã biết quỹ đạo khối tâm C, ta áp dụng công thức dạng (12-2)

2. Phương trình Lagrange II

Phương trình này được áp dụng để thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ. Khi giải các phương trình lập được (bằng phương pháp giải tích hoặc phương pháp số trên máy tính) ta sẽ được $q_i(t)$ với $i = 1, 2, \dots, S$. Các $q_i(t)$ xác định chuyển động của hệ.

Bài tập giải sẵn

Thí dụ 5-3. Đĩa tròn có trọng lượng P, bán kính R, bán kính quán

tính đối với trục qua C và vuông góc với đĩa là p. Hệ số ma sát trượt giữa đĩa và nền là f (hình 5.3). Tìm lực F để đĩa lăn không trượt.

Bài giải.

1. Phân tích chuyển động và lực: Đĩa chuyển động song phẳng.

Lực tác dụng gồm: Trọng lực P, phản lực N, lực F nằm ngang, lực ma sát F_{ms} .

2. Lập phương trình vi phân chuyển động:

Chọn trục tọa độ như hình 5.4. Quy ước chiều dương của góc quay φ là ngược chiều kim đồng hồ.

Phương trình vi phân chuyển động có dạng.

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_c = F - F_{ms} \quad (a)$$

$$\frac{P}{g} \ddot{y}_c = N - P \quad (b)$$

$$\frac{P}{g} \rho^2 \ddot{\varphi} = -R.F_{ms} \quad (c)$$

Ta có ba phương trình với năm đại lượng chưa biết là: $\ddot{x}_c, \ddot{y}_c, \ddot{\varphi}, F_{ms}$ và N. Ta cần tìm một số liên hệ giữa các đại lượng này:

Vì đĩa lăn không trượt nên điểm I là tâm vận tốc tức thời:

$$V_c = R\omega \text{ hoặc } \dot{x}_c = -R\dot{\varphi} \text{ do đó : } \ddot{x}_c = -R\ddot{\varphi}$$

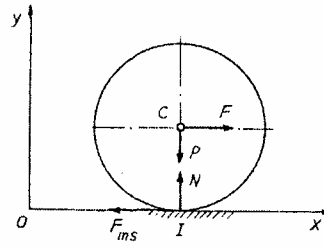
$$\text{Vì } y_c = R = \text{const nên } \ddot{y}_c = 0.$$

Giải các phương trình (a), (b), (c) và chú ý tới các liên hệ (d) và (e) ta được :

$$N = P; \quad F_{ms} = \frac{\rho^2 F}{R^2 + \rho^2}$$

Điều kiện để đĩa lăn không trượt là:

$$F_{ms} \leq f.N \quad \text{Hay: } \frac{\rho^2 F}{R^2 + \rho^2} \leq f.P$$



Hình 5.4

$$F \leq \frac{R^2 + \rho^2}{\rho^2} f''$$

vận lực F phải thỏa mãn điều kiện:

Thí dụ 5-4. Thanh đồng chất AB = 2a có đầu A, B tựa vào tường nhẵn và nền nhẵn. Giữ thanh AB đứng yên tạo với nền một góc φ_0 rồi thả ra cho nó chuyển động dưới tác dụng của trọng lực P.

Tìm vận tốc góc và gia tốc góc theo góc nghiêng φ . Tìm phản lực tại A và B, suy ra giá trị của φ lúc đầu A rời khỏi tường (hình 5.5).

Bài giải:

1. Phân tích chuyển động và lực: Thanh AB chuyển động song phẳng. Các lực tác dụng gồm: trọng lực P, các phản lực liên kết N_A, N_B

2. Lập phương trình vi phân chuyển động.

Chọn hệ tọa độ như (hình thí dụ 5-2) Quy ước chiều dương của φ là ngược chiều kim đồng hồ.

Phương trình vi phân chuyển động có dạng:

$$M \dot{x}_C = N_A \quad (a)$$

$$M y_C = N_B - P \quad (b)$$

$$J_C \ddot{\varphi} = N_B a \cos \varphi - N_A a \sin \varphi \quad (c)$$

Các liên hệ: Vì $x_C = a \cos \varphi$; $y_C = a \sin \varphi$ nên

$$\ddot{x}_C = -a \ddot{\varphi} \sin \varphi - a \dot{\varphi}^2 \cos \varphi \quad (d)$$

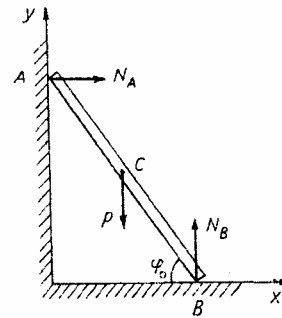
$$\ddot{y}_C = a \ddot{\varphi} \cos \varphi - a \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \quad (e)$$

Giải các phương trình trên với $J_C = \frac{1}{3} M a^2$ ta được:

$$N_A = -\frac{P}{g} a (\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

$$N_B = P + \frac{P}{g} a (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \quad (f)$$

$$\dot{\varphi} = \bar{\varepsilon} = -\frac{3g}{2a} \cos \varphi$$



Hình 5.5

Lấy tích phân biểu thức (f) với điều kiện đầu $\varphi(0) = \varphi_0; \dot{\varphi}(0) = 0$ ta được:

$$\dot{\varphi}^2 = \omega^2 = -\frac{3g}{a}(\varphi \cos \varphi - \varphi^2 \sin \varphi)$$

Đầu A rời tường khi $N_A = 0$, tức là:

$$\frac{P}{g} a \left[\frac{3g}{2a} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{3g}{a} (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi \right] = 0$$

vi $\cos \varphi \neq 0$ nên : $3 \sin \varphi - 2 \sin \varphi_0 = 0$

Vậy đầu A rời tường khi: $\sin \varphi = \frac{2}{3} \sin \varphi_0$

Sau khi thanh rời tường, từ (a) ta nhận được

$$\dot{x}_C = 0; \quad \ddot{x}_C = \text{const}$$

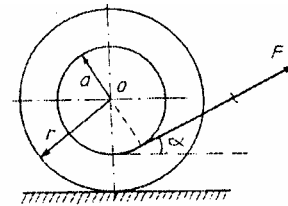
Suy ra hình chiếu của khối tâm chuyển động đều sau khi thanh rời tường.

Bài tập cho đáp số

I. Phương trình vi phân chuyển động song phẳng

5.4.1. Một bánh xe đồng nhất bán kính r lăn xuống không trượt theo đường dốc chính của một mặt phẳng nghiêng α so với phương ngang. Hệ số ma sát lăn giữa bánh xe và mặt phẳng nghiêng là k . Tìm điều kiện để bánh xe lăn xuống đều.

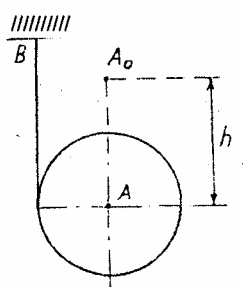
5.4.2. Một con lăn đồng chất hình trụ tròn, có trọng lượng P bán kính r , được đặt trên mặt phẳng ngang, không nhẵn, có một sợi dây quấn vào tầng trong của con lăn với bán kính a . Bán kính quán tính của con lăn đối với trục của nó là ρ . Tác dụng lên đầu tự do của dây một lực F , nghiêng với mặt phẳng ngang một góc không đổi α . Tìm quy luật chuyển động của trục O của con lăn (hình bài 5.4.2).



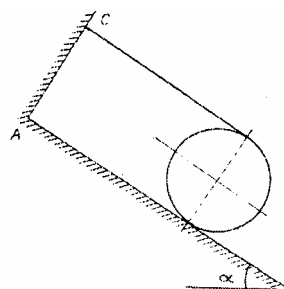
Hình bài 5.4.2

5.4.3. Một trụ tròn đồng chất A , có khối lượng m , lăn xuống theo dây treo thẳng đứng quấn vào nó. Đầu B của dây được buộc chặt và khi trụ

roi không vận tốc đầu thì nhả dây quấn ra tìm vận tốc trục khối trụ khi nó đã rơi được một đoạn thẳng h và tìm lực căng của dây treo (hình bài 5.4.3).



Hình bài 5.4.3

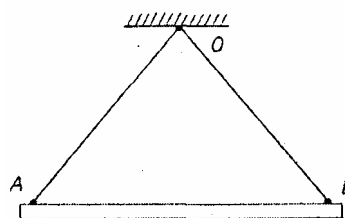


Hình bài 5.4.4

5.4.4. Người ta quấn hai dây mềm vào một khối trụ đồng nhất và quấn dây đối xứng qua mặt phẳng trung bình song song với đáy: khối trụ nặng là P được đặt lên mặt phẳng nghiêng sao cho đường sinh của nó vuông góc với đường dốc chính và buộc cố định mút tự do của hai dây trên sao cho phần dây tự do song song với đường dốc chính của mặt phẳng nghiêng AB . Hệ số ma sát trượt giữa mặt trụ và mặt nghiêng là f . Giả thiết rằng trọng lực thắng lực cản do ma sát và khối trụ trượt xuống không vận tốc đầu. Tìm quy luật chuyển động sai của trục khối trụ và lực căng của mỗi dây. Cho rằng trong chuyển động đang xét dây quấn chưa bị nhả ra hết (hình bài 5.4.4).

5.4.5. Một thanh đồng chất AB có trọng lượng P được treo vào điểm O nhờ hai dây có chiều dài bằng nhau và bằng độ dài của thanh. Xác định sức căng của một trong hai nhánh dây tại thời điểm nhánh kia bị đứt (hình bài 5.4.5).

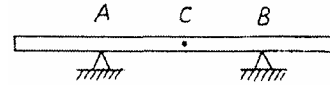
5.4.6 Một thanh mảnh đồng chất có chiều dài $2l$ và trọng lượng P nằm trên hai gối đỡ A và B . Trọng tâm C của thanh nằm cách đều hai gối đỡ: $CA = CB = a$. Áp lực tính trên mỗi gối đỡ bằng $P/2l$ (hình bài 5.4.6). Tìm sự thay đổi áp lực trên gối đỡ A tại thời điểm khi gối đỡ B bị rơi tức thời.



Hình bài 5.4.5

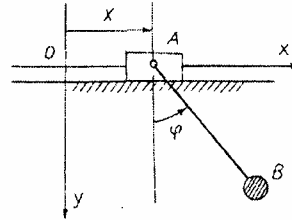
II Phương trình Lagrange loại II

5.4.7. Con lắc gồm con chạy A có khối lượng m_1 trượt trên nền ngang nhẵn và quả cầu nhỏ có khối lượng m_2 được nối với con chạy bằng thanh AB cứng, nhẹ, dài l . Lập phương trình vi phân chuyển động của cả hệ (hình bài 5.4.7)



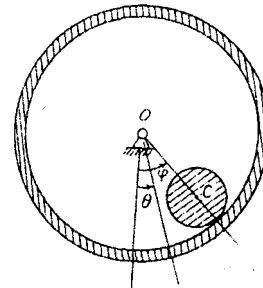
Hình bài 5.4.6

5.4.8. Một ống trụ tròn rỗng, đồng chất có trọng lượng P , bán kính R và có thể quay quanh trục thẳng đứng. Trên mặt trong của ống trụ có xẻ một rãnh đỉnh ốc, bước của đường đỉnh ốc là h . Một viên bi nhỏ, chạy trong rãnh ấy dưới tác dụng của trọng lượng bản thân. Bỏ qua ma sát. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của cơ hệ, cho biết ban đầu hệ đứng yên. Tìm phương trình chuyển động của cơ hệ.



Hình bài 5.4.7

5.4.9. Một hình trụ khối lượng m , bán kính r lăn không trượt bên trong của một trụ rỗng, khối lượng M , bán kính R , trụ này có thể quay quanh trục nằm ngang O . Momen quán tính của các trụ đối với các trục của mình tương ứng bằng MR^2 và $\frac{mr^2}{2}$. Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ và tìm các tích phân (hình bài 5.4.9).

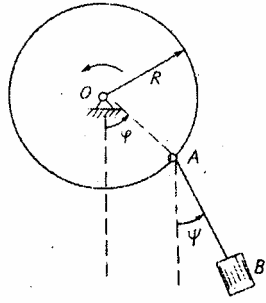


Hình bài 5.4.9

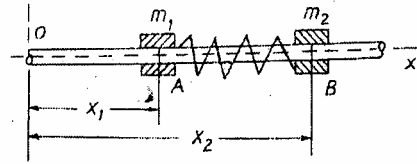
5.4.10. Một đĩa đồng chất bán kính R , có khối lượng M , có thể quay quanh trục nằm ngang O . Một dây nhẹ không giãn AB , một đầu của nó treo vào vành đĩa tại A và đầu kia buộc vật có khối lượng m tại B . Thành lập phương trình vi phân chuyển động của hệ. Mô tả như (hình bài 5.4.10).

5.4.11. Xác định chuyển động của cơ hệ gồm hai khối lượng m_1 và m_2 có thể trượt tịnh tiến dọc thanh nhẵn nằm ngang (Ox). Các khối lượng được nối với nhau nhờ một lò xo có độ cứng c . Khoảng cách giữa 2 khối tâm của hai khối lượng khi lò xo không làm việc là l . Trạng thái đầu của

cơ hệ được xác định bằng giá trị của vận tốc và tọa độ khối tâm của hai vật khi $t = 0$: $x_1 = 0$; $x_1 = u_0$; $x_2 = l$; $x_2 = 0$ (hình bài 5.4.11).



Hình bài 5.4.10



Hình bài 5.4.11