Chương 12

UỐN NGANG VÀ UỐN DỌC ĐỒNG THỜI

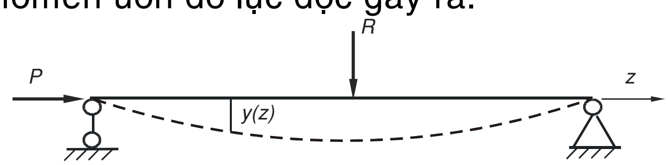
12.1 ĐẶC ĐIỂM BÀI TOÁN

Xét một thanh chịu uốn bởi tác động đồng thời của lực ngang *R* và lực nén dọc *P* như trên H.12.1. Nếu chuyển vị là đáng kể thì cần phải xét cân bằng của thanh trên sơ đồ biến dạng và mômen nội lực sẽ bao gồm ảnh hưởng của lực *R* và *P*:

$$M(z) = M_R + M_P = M_R + Py(z) \qquad (12.1)$$

trong đó: M_R - mômen uốn do riêng tải trọng ngang gây ra

$Py(z)$ - mômen uốn do lực dọc gây ra.



Hình 12.1 *Uốn ngang và uốn dọc đồng thời*

Bài toán như vậy được gọi là uốn ngang và uốn dọc đồng thời.

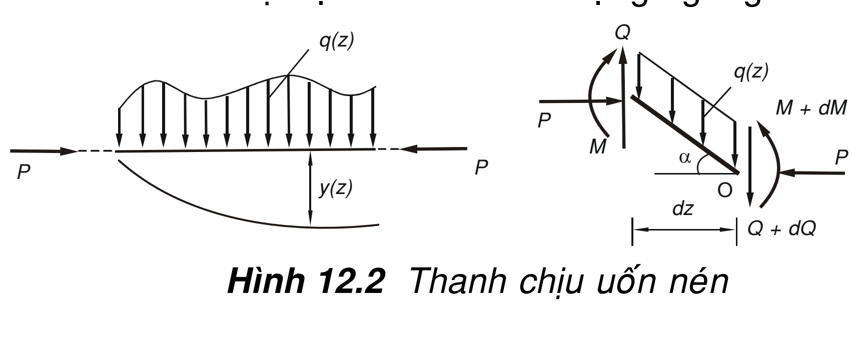
Đặc điểm của bài toán:

- Mômen *M(z)* phụ thuộc vào độ võng *y(z)*

- Mômen *M(z)* phụ thuộc phi tuyến vào lực *P* vì độ võng *y(z)* cũng phụ thuộc vào *P*. Vì vậy, nguyên lý cộng tác dụng không áp dụng được cho loại bài toán này.

12.2 PHƯƠNG PHÁP CHÍNH XÁC

Để tìm được mômen uốn, trước hết cần thiết lập phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu lực nén *P* và tải trọng ngang.



Hình 12.2 *Thanh chịu uốn nén*

Xét cân bằng trên sơ đồ biến dạng của phân tố thanh *dz* như trên H.12.2

$$\sum M_o = 0: \quad M + dM - M - Qdz - Pdz\,tg\alpha = 0$$

chú ý rằng : $tg\alpha = \dfrac{dy}{dz}$

ta có: $$\frac{dM}{dz} - P\frac{dy}{dz} = Q \qquad (12.2)$$

lấy đạo hàm hai vế của (12.2), chú ý rằng $\frac{dQ}{dz} = -q(z)$, ta có phương trình:

$$\frac{d^2M}{dz^2} - P\frac{d^2y}{dz^2} = -q(z) \qquad (12.3)$$

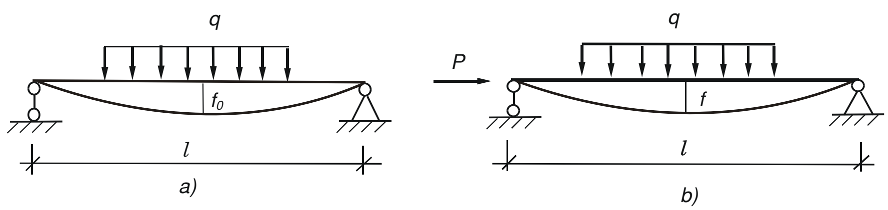
thế $M = -EIy''$ (*) vào (12.3) ta thu được:

$$EIy^{IV} + Py'' = q(z) \qquad (12.4)$$

Đây là phương trình vi phân đường đàn hồi của dầm chịu nén uốn. Nếu biết tải trọng tác dụng và các điều kiện biên thì có thể giải (12.4) để tìm đường đàn hồi, từ đó suy ra mômen uốn theo phương trình (*). Trong thực tế, thường có nhiều quy luật tải trọng khác nhau trên chiều dài thanh nên việc giải phương trình (12.4) rất phức tạp. Vì vậy, người ta thường áp dụng phương pháp gần đúng dưới đây.

12.3 PHƯƠNG PHÁP GẦN ĐÚNG

Xét dầm đơn giản chịu tải trọng đối xứng như H.12.3.



Hình 12.3 *Đường đàn hồi đối xứng*

Sơ đồ (a) chỉ chịu tải trọng ngang, với độ võng giữa nhịp f_o.

Sơ đồ (b) chịu đồng thời tải trọng ngang và tải trọng dọc, có độ võng giữa nhịp *f*.

Giả thiết đường đàn hồi có dạng hình *sine* (giống dạng mất ổn định), ta có phương trình đường đàn hồi trong hai trường hợp như sau:

$$y_o = f_o \sin\frac{\pi z}{l}; \quad y = f \sin\frac{\pi z}{l}$$

Dạng phương trình này thỏa điều kiện biên $y = y'' = 0$ tại hai khớp. Mômen uốn nội lực tương ứng như sau:

$$M_o = -EIy_o'' = EI\frac{\pi^2}{l^2} f_o \sin\frac{\pi z}{l} = EI\frac{\pi^2}{l^2} y_o$$

$$M = -EIy'' = EI\frac{\pi^2}{l^2}f\,\sin\frac{\pi z}{l} = EI\frac{\pi^2}{l^2}y$$

Thế các kết quả này vào phương trình (12.1) ta có:

$$EI\frac{\pi^2}{l^2}y = EI\frac{\pi^2}{l^2}y_o + Py \qquad (12.5)$$

từ đó suy ra: $y(z) = \dfrac{y_o(z)}{1 - P/\dfrac{\pi^2 EI}{l^2}}$

hay: $$y(z) = \frac{y_o(z)}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}} \qquad (12.6)$$

với: $P_{th} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$ là lực tới hạn của thanh khi mất ổn định trong mặt phẳng uốn.

đạo hàm hai vế của (12.6) và nhân với $-EI$ ta có:

$$-EIy''(z) = \frac{-EIy_0''(z)}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}}$$

hay: $$M(z) = \frac{M_o}{1 - \dfrac{P}{P_{th}}} \qquad (12.7)$$

Chú ý: - Nếu tải không đối xứng nhưng cùng hướng về một phía thì các công thức trên kém chính xác hơn nhưng vẫn dùng được.

- Nếu thanh có liên kết hai đầu khác thì vẫn dùng được các công thức (12.6), (12.7) nhưng cần xét tới hệ số liên kết μ trong công thức P_{th}:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \qquad (12.8)$$

12.4 ỨNG SUẤT VÀ KIỂM TRA BỀN

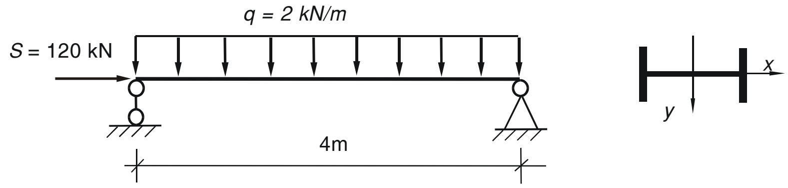
Ứng suất lớn nhất được tính theo công thức:

$$\max\sigma = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{A} + \frac{M_o}{W(1 - \dfrac{P}{P_{th}})} \qquad (12.9)$$

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số n dự kiến. Trong trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như sau:

$$\frac{nP}{A} + \frac{nM_o}{W(1 - \dfrac{nP}{P_{th}})} \le \sigma_o \qquad (12.10)$$

Ví dụ 12.1 Tìm mômen uốn và độ võng lớn nhất của dầm thép chữ **I**N^{o}36 chịu lực như trên H.12.4.



Hình 12.4

Giải. Sử dụng bảng tra thép định hình, tương ứng với số hiệu **IN^o**36 và các ký hiệu trên hình trên, ta có:

$A = 61{,}9\ cm^2$; $I_x = 516\ cm^4$; $I_y = 13380\ cm^4$; $E = 2{,}1.10^4\ kN/cm^2$

Trị số lớn nhất của mômen uốn, độ võng do tải trọng ngang gây ra tại giữa nhịp: $M_o = \frac{ql^2}{8} = \frac{2.4^2}{8} = 4\ kNm$

$$y_o = \frac{5}{384}.\frac{ql^4}{EI_x} = \frac{5}{384}.\frac{2.10^{-2}.400^4}{2{,}1.10^4.516} = 0{,}615\ cm$$

Trị số lực tới hạn:

$$P_{th} = \frac{\pi^2 EI_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2.2{,}1.10^4.516}{(1.400)^2} = 668\ kN$$

Độ võng của dầm, theo công thức gần đúng:

$y = \frac{y_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{0{,}615}{1 - \frac{120}{668}} = 0{,}75 cm$, tăng 22% so với y_o

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ nhất:

$$M = M_o + Sy = 4 + 120.0{,}075 = 4{,}9\ kNm$$

Mômen uốn lớn nhất, theo công thức gần đúng thứ hai:

$M = \frac{M_o}{1 - \frac{S}{P_{th}}} = \frac{4}{1 - \frac{120}{668}} = 4{,}87\ kNm$ sai số 0,5% so với công thức gần đúng thứ nhất.

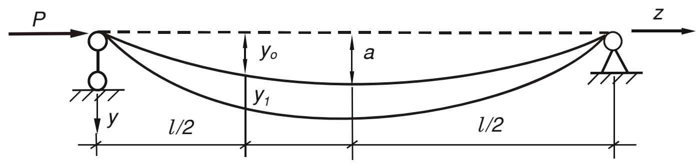
Giá trị mômen trong trường hợp uốn ngang và dọc tăng 22,5% so với mômen chỉ do lực ngang gây ra, tức là thiên về an toàn hơn.

12.5 THANH CÓ ĐỘ CONG BAN ĐẦU

1- Ảnh hưởng của độ cong ban đầu

Xét thanh có độ cong ban đầu, chịu lực nén *P* như trên H.12.5. Giả sử đường cong ban đầu có dạng:

$$y_o = a \sin\frac{\pi z}{l} \qquad (12.11)$$



Hình 12.5 *Thanh có độ cong ban đầu*

Do tác dụng của lực *P*, thanh bị võng thêm có phương trình $y_1(z)$. Độ võng toàn phần: $y = y_o + y_1$

(12.12)

Mômen uốn do lực *P* gây ra:

$$M = Py = P(y_o + y_1) \quad (12.13)$$

Phương trình vi phân độ võng thêm:

$$EIy_1'' = -M = -P(y_o + y_1) \quad (12.14)$$

thế (12.11) vào (12.14) và đặt: $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ ta có:

$$y_1'' + \alpha^2 y_1 = -\alpha^2 a \sin\frac{\pi z}{l} \quad (12.15)$$

Nghiệm của phương trình này có dạng:

$$y_1 = A\sin\alpha z + B\cos\alpha z + \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a\sin\frac{\pi z}{l} \quad (12.16)$$

Các điều kiện biên: $y_1(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$y_1(l) = 0 \Rightarrow A = 0$

Do đó: $y_1 = \frac{1}{\frac{\pi^2}{\alpha^2 l^2} - 1} a\sin\frac{\pi z}{l} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{\frac{P}{EI} l^2} - 1} a\sin\frac{\pi z}{l}$

hay: $$y_1 = \frac{k}{1-k} a\sin\frac{\pi z}{l} \quad (12.17)$$

với: $$k = \frac{P}{P_{th}} = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} \quad (12.18)$$

Độ võng toàn phần: $y = y_o + y_1 = (a + \frac{k}{1-k} a)\sin\frac{\pi z}{l} = \frac{a}{1-k}\sin\frac{\pi z}{l}$

hay: $$y = \frac{y_o}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.19)$$

Mômen lớn nhất giữa nhịp:

$$M_{\max} = Py_{\max} = \frac{Pa}{1 - \frac{P}{P_{th}}} \quad (12.20)$$

Nếu đường cong ban đầu có dạng bất kỳ thì có thể phân tích thành chuỗi *Fourier* như sau: $y_o = a_1\sin\frac{\pi z}{l} + a_2\sin\frac{2\pi z}{l} + ...$ (12.21)

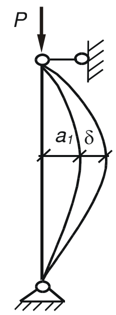
thế (12.13) vào (12.21) và giải ra y_1 ta có:

$$y_1 = k\left(\frac{a_1}{1-k}\sin\frac{\pi z}{l} + \frac{a_2}{2^2-k}\sin\frac{2\pi z}{l} + \dots\right) \qquad (12.22)$$

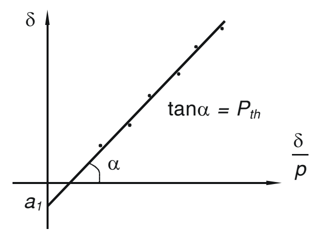
vì: $k = \frac{P}{P_{th}} < 1$ nên khi P đủ lớn thì số hạng đầu trội hẳn và chỉ cần xét số hạng này.

2- Xác định lực tới hạn bằng thực nghiệm thanh liên kết khớp hai đầu

Xét thanh chịu nén như trên H.12.6, trong thực tế thanh luôn có độ cong ban đầu.



Hình 12.6
Thanh có độ cong ban đầu chịu nén



Hình 12.7
Cách xác định lực tới hạn

Khi lực P đủ lớn thì dù thanh bị cong ban đầu thế nào, ta vẫn có quan hệ giữa δ và a_1 theo (12.17):

$$\delta = \frac{k}{1-k}a_1 = \frac{a_1}{\frac{P_{th}}{P} - 1}$$

hay: $$\delta = P_{th}\left(\frac{\delta}{P}\right) - a_1$$

Đây là phương trình bậc nhất của hai biến δ và δ / P nên có đồ thị là một đường thẳng như trên H.12.7.

Khi thí nghiệm, ứng với mỗi giá trị lực nén P_i, ta đo được chuyển vị δ_i và tính được δ_i / P_i, từ đó lập bảng kết quả thí nghiệm có dạng:

P	P_1	P_2	……	P_n
δ	δ_1	δ_2	……	δ_n
δ / P	δ_1 / P_1	δ_2 / P_2	……	δ_n / P_n

Từ đó xác định các điểm trên hệ trục $\delta/P - \delta$ và vẽ được đồ thị như trên H.12.7. Ta thường dùng phương pháp bình phương cực tiểu để xác định P_{th} và độ võng ban đầu lớn nhất a_1.

12.6 CỘT CHỊU NÉN LỆCH TÂM

Xét cột mảnh chịu nén lệch tâm bởi lực *P* như trên H.12.8.

$$y_o = a\sin\frac{\pi z}{l} \qquad (12.11)$$

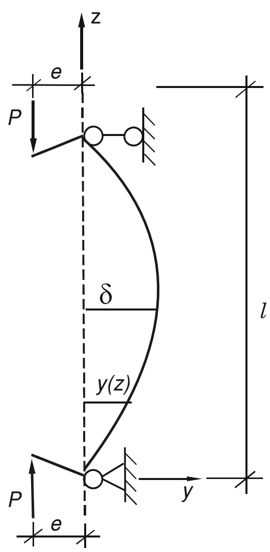
Do tác dụng của lực *P*, cột bị cong và có phương trình *y(z)*.

Mômen uốn tại một tiết diện do lực *P* gây ra:

$$M = P\{e + y(z)\} = Pe + Py(z) \qquad (12.23)$$

trong đó: *e* - là độ lệch tâm ban đầu; *y* - là độ võng của trục cột.

Phương trình vi phân đường đàn hồi như sau:



Hình 12.8 *Cột có độ cong ban đầu*

$$y''(z) = -\frac{M}{EI} \qquad (12.24)$$

Thế (12.23) vào (12.24) và đặt $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ ta được:

$$y'' + \alpha^2 y = -\alpha^2 e \qquad (12.25)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình này là tổng của nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng:

$$y = A\sin\alpha z + B\cos\alpha z - e \qquad (12.26)$$

trong đó: *A* và *B* - là các hằng số của nghiệm thuần nhất; *e* - là nghiệm riêng.

Các điều kiện biên:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = e$$

$$y(l) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{e(1-\cos\alpha l)}{\sin\alpha l} = e\tan\frac{\alpha l}{2}$$

Phương trình đường đàn hồi trở thành:

$$y = e(\tan\frac{\alpha l}{2}\sin\alpha z + \cos\alpha z - 1) \qquad (12.27)$$

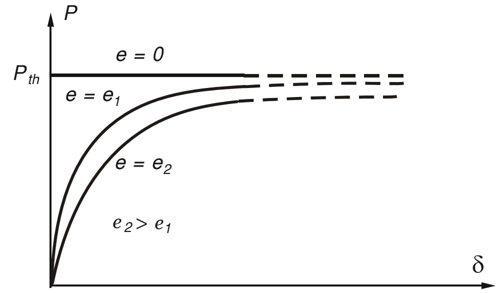
Độ võng lớn nhất tại giữa nhịp, tức $z = \frac{l}{2}$ là:

$$\delta = y_{\max} = e(\frac{1}{\cos\frac{\alpha l}{2}} - 1) \qquad (12.29)$$

(12.28)

Nếu *e = 0* hoặc *P* = 0 thì $\delta = 0$.

Đồ thị quan hệ giữa P - δ được cho trong H.12.9. Đồ thị này chỉ có ý nghĩa khi vật liệu còn đàn hồi, tức là δ còn nhỏ và $P < P_{th}$.



Hình 12.9 *Đồ thị quan hệ giữa P - δ*

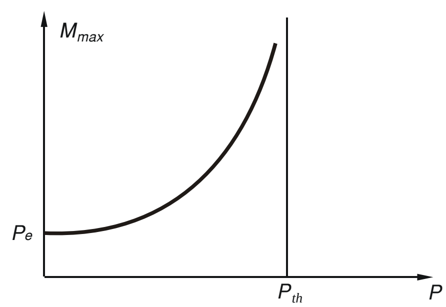
Mômen uốn lớn nhất tại giữa nhịp được tính:

$$M_{\max} = P(e + y_{\max}) = Pe\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{l}{2}} \qquad (12.30)$$

Quan hệ $M_{\max}$- P cho bởi H.12.10. Khi P nhỏ thì $M_{\max} \approx Pe$, nhưng khi P lớn thì $M_{\max}$ tăng rất nhanh.

Từ các đồ thị này ta thấy quan hệ P - δ và $M_{\max}$- P phi tuyến.

Trong thực tế, tính cột mảnh chịu nén lệch tâm cần thiết phải xét đặc điểm phi tuyến này để đảm bảo an toàn.



Hình 12.10 *Quan hệ giữa M_{max} - P*

Ứng suất cực đại trong thanh:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}c}{I} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{l}{2}}\right] \qquad (12.31)$$

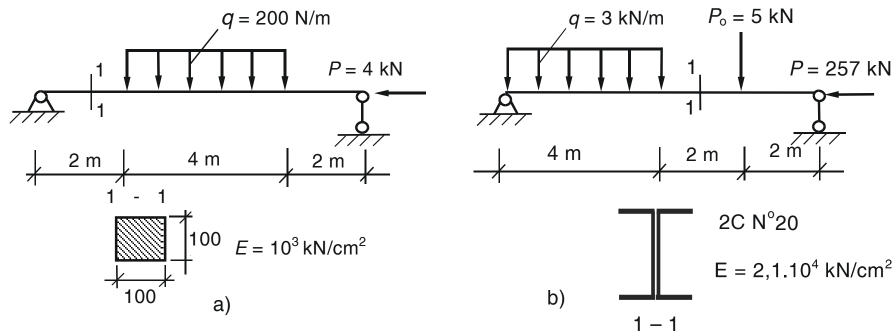
với: A - diện tích tiết diện thanh; r - bán kính quán tính

c - khoảng cách từ trục trung tâm đến mép xa nhất của tiết diện.

Vì ứng suất phụ thuộc phi tuyến vào tải trọng nên kiểm tra bền theo ứng suất cho phép không đảm bảo an toàn theo hệ số n dự kiến. Trong trường hợp này, người ta dùng điều kiện an toàn theo tải trọng như phương trình (12.10).

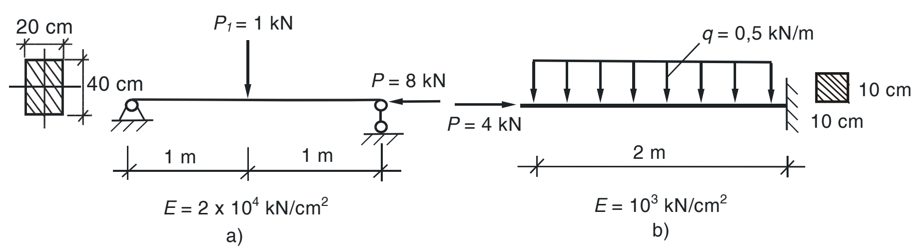
BÀI TẬP CHƯƠNG 12

12.1 Tính ứng suất nén lớn nhất theo phương pháp gần đúng của dầm chịu uốn ngang và uốn dọc đồng thời cho trên H.12.11.

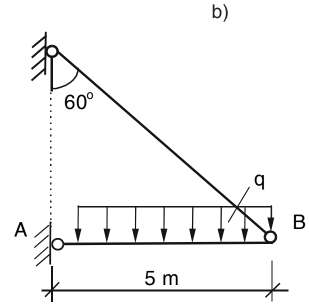


Hình 12.11

12.2 Cho dầm chịu lực như trên H.12.9. Hãy tính ứng suất pháp lớn nhất và hệ số an toàn n nếu $[\sigma] = 24\ kN/cm^2$. Tính độ võng lớn nhất.



Hình 12.12



Hình 12.13

12.3 Tính cường độ tải trọng cho phép tác dụng lên dầm AB như trên H.12.10, biết hệ số an toàn về độ bền n = 1,6. Dầm AB bằng thép số 3 có mặt cắt hình ống với đường kính trong d = 6 cm và đường kính ngoài D = 10 cm, vật liệu có $[\sigma]$ = 24 kN/cm^2, khi tính bỏ qua trọng lượng của dầm.

Kiểm tra ổn định của dầm nếu lấy $k_{ođ} = 2$. Cho $E = 2.10^4\ kN/cm^2$.