

Chương 2 LÝ THUYẾT NỘI LỰC

2.1 KHÁI NIỆM VỀ NỘI LỰC - PHƯƠNG PHÁP KHẢO SÁT - ỨNG SUẤT

1- Khái niệm về nội lực:

Xét một vật thể chịu tác dụng của ngoại lực và ở trạng thái cân bằng (H.2.1). Trước khi tác dụng lực, giữa các phân tử của vật thể luôn có các lực tương tác giữ cho vật thể có hình dáng nhất định. Dưới tác dụng của ngoại lực, các phân tử của vật thể có thể dịch lại gần nhau hoặc tách xa nhau. Khi đó, lực tương tác giữa các phân tử của vật thể phải thay đổi để chống lại các dịch chuyển này. Sự thay đổi của lực tương tác giữa các phân tử trong vật thể được gọi là *nội lực*.

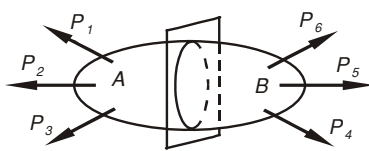
Một vật thể không chịu tác động nào từ bên ngoài thì được gọi là vật thể ở *trạng thái tự nhiên* và nội lực của nó được coi là *bằng không*.

2-Phương pháp khảo sát nội lực: Phương pháp mặt cắt

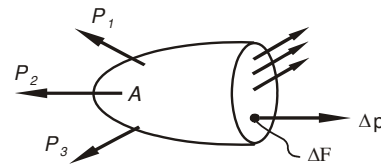
Xét lại vật thể cân bằng và 1 điểm C trong vật thể (H.2.1),.

Tưởng tượng một mặt phẳng Π cắt qua C và chia vật thể thành hai phần A và B; hai phần này sẽ tác động lẫn nhau bằng hệ lực phân bố trên diện tích mặt tiếp xúc theo định luật lực và phản lực.

Nếu tách riêng phần A thì hệ lực tác động từ phần B vào nó phải cân bằng với ngoại lực ban đầu (H.2.2).



H.2.1 Vật thể chịu lực cân bằng



H.2.2 Nội lực trên mặt cắt

Xét một phân tử diện tích ΔF bao quanh điểm khảo sát C trên mặt cắt Π có phương pháp tuyến v . Gọi $\Delta \vec{p}$ là *vector* nội lực tác dụng trên ΔF . Ta định nghĩa ứng suất toàn phần tại điểm khảo sát là:

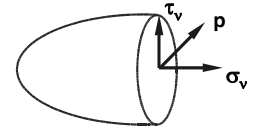
$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta F} = \frac{d\vec{p}}{dF}$$

Thứ nguyên của ứng suất là [lực]/[chiều dài]² (N/m², N/cm²...).

Ứng suất toàn phần p có thể phân ra hai thành phần:

+ Thành phần ứng suất pháp σ_v có phương pháp tuyến của mặt phẳng Π

+ Thành phần ứng suất tiếp τ_v nằm trong mặt phẳng Π (H.2.3).



Hình 2.3 Các thành phần ứng suất

Các đại lượng này liên hệ với nhau theo biểu thức:

$$p_v^2 = \sigma_v^2 + \tau_v^2 \quad (2.1)$$

Ứng suất là một đại lượng cơ học đặc trưng cho mức độ chịu đựng của vật liệu tại một điểm; ứng suất vượt quá một giới hạn nào đó thì vật liệu bị phá hoại. Do đó, việc xác định ứng suất là cơ sở để đánh giá độ bền của vật liệu, và chính là một nội dung quan trọng của môn SBVL.

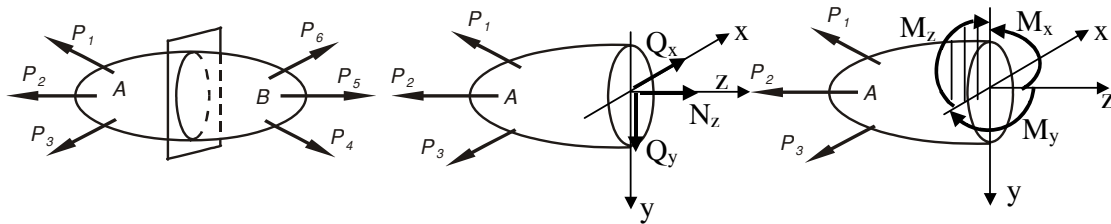
Thừa nhận: Ứng suất pháp σ_v chỉ gây ra biến dạng dài.

Ứng suất tiếp τ_v chỉ gây biến dạng góc.

2.2 CÁC THÀNH PHẦN NỘI LỰC - CÁCH XÁC ĐỊNH

1- Các thành phần nội lực:

Như đã biết, đối tượng khảo sát của SBVL là những chi tiết dạng thanh, đặc trưng bởi mặt cắt ngang (hay còn gọi là tiết diện) và trục thanh.



H.2.4 Các thành phần nội lực

Gọi hợp lực của các nội lực phân bố trên mặt cắt ngang của thanh là R . R có điểm đặt và phương chiều chưa biết.

Dời R về trọng tâm O của mặt cắt ngang \Rightarrow $\begin{cases} \text{Lực } R \\ \text{Mômen } M \end{cases}$ có phương bất kỳ

Đặt một hệ trục tọa độ Descartes vuông góc ngay tại trọng tâm mặt cắt ngang, $Oxyz$, với trục z trùng pháp tuyến của mặt cắt, còn hai trục x, y nằm trong mặt cắt ngang.

Khi đó, có thể phân tích R ra ba thành phần theo ba trục:

- + N_z , theo phương trục z (\perp mặt cắt ngang) gọi là *lực dọc*
- + Q_x theo phương trục x (nằm trong mặt cắt ngang) gọi là *lực cắt*.
- + Q_y theo phương trục y (nằm trong mặt cắt ngang) gọi là *lực cắt*.

Mômen M cũng được phân ra ba thành phần :

- + Mômen M_x quay quanh trục x gọi là *mômen uốn*.
- + Mômen M_y quay quanh trục y gọi là *mômen uốn*.
- + Mômen M_z quay quanh trục z gọi là *mômen xoắn*.

Sáu thành phần này được gọi là *các thành phần nội lực* trên mặt cắt ngang (H.2.4)

2 Cách xác định:

Sáu thành phần nội lực trên một mặt cắt ngang được xác định từ sáu phương trình cân bằng độc lập của phần vật thể được tách ra, trên đó có tác dụng của ngoại lực ban đầu P_i và các nội lực.

Các phương trình cân bằng hình chiếu các lực trên các trục tọa độ:

$$\begin{aligned}\sum Z = 0 &\Leftrightarrow N_z + \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \Rightarrow N_z \\ \sum Y = 0 &\Leftrightarrow Q_y + \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \Rightarrow Q_y \\ \sum X = 0 &\Leftrightarrow Q_x + \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \Rightarrow Q_x\end{aligned}\quad (2.2)$$

trong đó: P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} - là hình chiếu của lực P_i xuống các trục x, y, z .

Các phương trình cân bằng mômen đối với các trục tọa độ ta có:

$$\begin{aligned}\sum M / Ox &\Leftrightarrow M_x + \sum_{i=1}^n m_x(P_i) = 0 \Rightarrow M_x \\ \sum M / Oy &\Leftrightarrow M_y + \sum_{i=1}^n m_y(P_i) = 0 \Rightarrow M_y \\ \sum M / Oz &\Leftrightarrow M_z + \sum_{i=1}^n m_z(P_i) = 0 \Rightarrow M_z\end{aligned}\quad (2.3)$$

với: $m_x(P_i), m_y(P_i), m_z(P_i)$ - các mômen của các lực P_i đối với các trục x, y, z .

3-Liên hệ giữa nội lực và ứng suất:

Các thành phần nội lực liên hệ với các thành phần ứng suất như sau:

- Lực dọc là tổng các ứng suất pháp
- Lực cắt là tổng các ứng suất tiếp cùng phương với nó
- Mômen uốn là tổng các mômen gây ra bởi các ứng suất đối với trục x hoặc y
- Mômen xoắn là tổng các mômen của các ứng suất tiếp đối với trục z

2-3 BÀI TÓÁN PHẪNG:

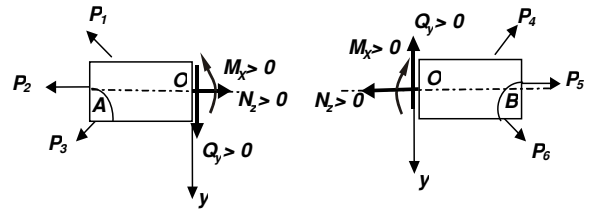
Trường hợp bài toán phẳng (ngoại lực nằm trong một mặt phẳng (thí dụ mặt phẳng yz)), chỉ có ba thành phần nội lực nằm trong mặt phẳng yz : N_z, Q_y, M_x .

♦ Qui ước dấu (H.2.5)

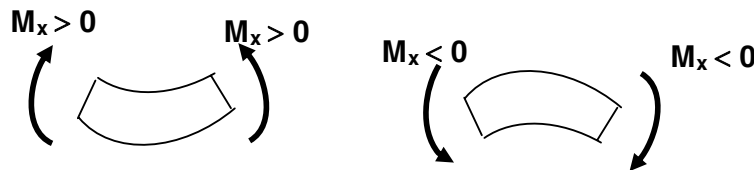
- Lực dọc $N_z > 0$ khi gây kéo đoạn thanh đang xét (có chiều hướng ra ngoài mặt cắt)

- Lực cắt $Q_y > 0$ khi làm quay đoạn thanh đang xét theo chiều kim đồng hồ.

- Mômen uốn $M_x > 0$ khi căng thớ dưới (thớ y dương).



Hình 2.5: Chiều dương các thành phần nội



Mômen $M_x > 0$, Mômen $M_x < 0$

♦ Cách xác định:

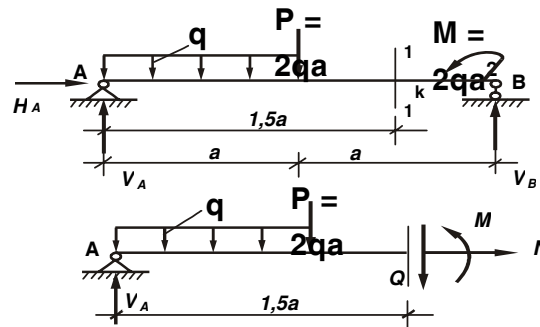
Dùng 3 phương trình cân bằng tĩnh học khi xét cân bằng phần A) hay phần B)

Từ phương trình $\Sigma Z = 0 \Rightarrow N_z$

Từ phương trình $\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_y$ (2.4)

Từ phương trình $\Sigma M/O = 0 \Rightarrow M_x$

Thí dụ 2.1 Xác định các trị số nội lực tại mặt cắt 1-1 của thanh AB, với :
 $q = 10 \text{ kN/m}$; $a = 1\text{m}$; $M_0 = 2qa^2$. (H.2.6)



H.
2.6

Giải.

Tính phản lực: Giải phóng các liên kết và thay vào đó bằng các phản lực liên kết V_A , H_A , V_B .

Viết các phương trình cân bằng tĩnh học khi xét cân bằng thanh AB

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A + V_B - qa - P = 0$$

$$\sum M/A = 0 \Rightarrow qa \times \frac{a}{2} + P \times a - M_0 - V_B \times 2a = 0$$

$$\Rightarrow H_A = 0; \quad V_A = \frac{11}{4}qa = 27,5 \text{ kN}; \quad V_B = \frac{1}{4}qa = 2,5 \text{ kN}$$

Tính nội lực: Mặt cắt 1-1 chia thanh làm hai phần.

Xét sự cân bằng của phần bên trái (H.2.6) :

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_A - qa - P - Q = 0 \Rightarrow Q = -\frac{1}{4}qa = -2,5 \text{ kN}$$

$$\sum M/O_1 = 0 \Rightarrow M = V_A \times 1,5a - qa \times a - 2qa \times \frac{a}{2} = \frac{17}{8}qa^2 = 21,25 \text{ kNm}$$

Nếu xét cân bằng của phần phải ta cũng tìm được các kết quả như trên.

2.4 BIỂU ĐỒ NỘI LỰC (BÀI TOÁN PHẪNG)

1. Định nghĩa: Thường các nội lực trên các mặt cắt ngang của một thanh không giống nhau.

Biểu đồ nội lực (BĐNL) là đồ thị biểu diễn sự biến thiên của các nội lực theo vị trí của các mặt cắt ngang. Hay gọi là mặt cắt biến thiên.

Nhờ vào BĐNL có thể xác định vị trí mặt cắt có nội lực lớn nhất và trị số nội lực ấy.

2. Cách vẽ BĐNL- Phương pháp giải tích:

Để vẽ biểu đồ nội lực ta tính nội lực trên mặt cắt ngang ở một vị trí bất kỳ có hoành độ z so với một gốc hoành độ nào đó mà ta chọn trước. Mặt cắt ngang chia thành ra thành 2 phần. Xét sự cân bằng của một phần (trái, hay phải) , viết biểu thức giải tích của nội lực theo z .

Vẽ đường biểu diễn trên hệ trục tọa độ có trục hoành song song với trục thanh (còn gọi là đường chuẩn), tung độ của biểu đồ nội lực sẽ được diễn tả bởi các đoạn thẳng vuông góc các đường chuẩn.

Thí dụ 2.2- Vẽ BĐNL của dầm nút thừa (H.2.7)

Giải

Xét mặt cắt ngang 1-1 có hoành độ z so với gốc A, ta có ($0 \leq z \leq l$)

Biểu thức giải tích của lực cắt và mômen uốn tại mặt cắt 1-1 được xác định từ việc xét cân bằng phần phải của thanh:

$$\sum Z = 0 \Rightarrow N = 0$$

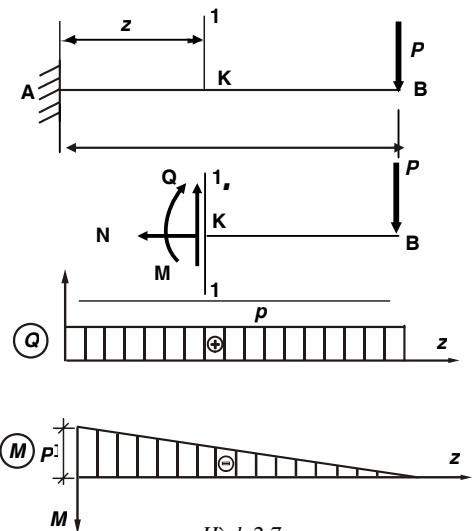
$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y - P = 0 \Rightarrow Q_y = P$$

$$\sum M/O_1 = 0 \Rightarrow M_x + P(l-z) = 0 \Rightarrow M_x = -P(l-z)$$

Cho z biến thiên từ 0 đến l , ta sẽ được biểu đồ nội lực như trên H.2.7.

Qui ước: +Biểu đồ lực cắt Q_y tung độ dương vẽ phía trên trục hoành.

+Biểu đồ mômen uốn M_x tung độ dương vẽ phía dưới trục hoành.



Hình 2.7

(Tung độ của biểu đồ mômen luôn ở về phía thõ căng của thanh).

Thí dụ 2.3 – Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu tải phân bố đều q (H.2.8a).

Giải

Phản lực: Bỏ các liên kết tại A và B, thay bằng các phản lực (H.2.8a).

$$\sum Z = 0 \Rightarrow H_A = 0.$$

$$\text{Do đối xứng} \Rightarrow V_A = V_B = \frac{ql}{2}$$

Nội lực: Chọn trục hoành như trên H.2.8b. Xét mặt cắt ngang 1-1 tại K có hoành độ là z , ($0 \leq z \leq l$). Mặt cắt chia thanh làm hai phần.

Xét cân bằng của phần bên trái AK (H.2.8b)

Từ các phương trình cân bằng ta suy ra:

$$\begin{cases} \sum Z = 0 \Rightarrow N_z = 0 \\ \sum Y = 0 \Rightarrow Q_y = \frac{ql}{2} - qz = q\left(\frac{l}{2} - z\right) \\ \sum M / O_1 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{qz}{2}(l - z) \end{cases}$$

Q_y là hàm bậc nhất theo z , M_x là hàm bậc 2 theo z .

Cho z biến thiên từ 0 đến l ta vẽ được các biểu đồ nội lực (H2.8).

Cụ thể: +Khi $z=0 \Rightarrow Q_y = ql/2$, $M_x = 0$

+Khi $z=l \Rightarrow Q_y = -ql/2$, $M_x = 0$

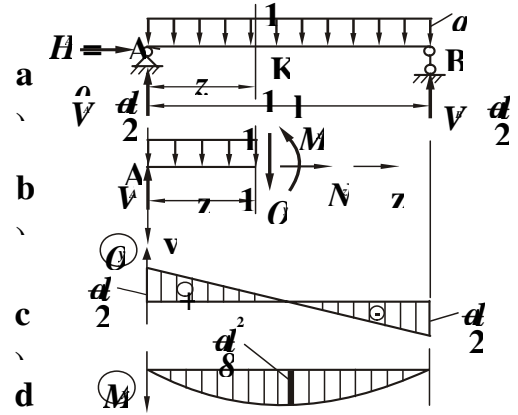
+Tìm $M_{x, \text{cực trị}}$ bằng cách cho đạo hàm $dM_x / dz = 0$,

$$dM_x / dz = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ql}{2} - qz = 0 \Rightarrow z = \frac{l}{2} \\ \Rightarrow M_{x, \text{max}} = \frac{ql^2}{8} \end{cases}$$

Qua các BĐNL, ta nhận thấy:

Lực cắt Q_y có giá trị lớn nhất ở mặt cắt sát gối tựa,

Mômen uốn M_x có giá trị cực đại ở giữa dầm.



H.2.8

Thí dụ 2.4 Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu lực tập trung P (H.2.9a) .

Giải

Phản lực: Các thành phần phản lực tại các gối tựa là:

$$H_A = 0; V_A = \frac{Pb}{l}; V_B = \frac{Pa}{l}$$

Nội lực : Vì tải trọng có phương vuông góc với trục thanh nên lực dọc N_z trên mọi mặt cắt ngang có trị số bằng không.

Phân đoạn thanh: Vì tính liên tục của các hàm số giải tích biểu diễn các nội lực nên phải tính nội lực trong từng đoạn của thanh; trong mỗi đoạn phải không có sự thay đổi đột ngột của ngoại lực .

♦ Đoạn AC- Xét mặt cắt 1-1 tại điểm K_1 trong đoạn AC và cách gốc A một đoạn z , ($0 \leq z \leq a$).

Khảo sát cân bằng của phần bên trái ta được các biểu thức giải tích của nội lực:

$$\begin{cases} Q_y = V_A = \frac{Pb}{l} = \frac{P(l-a)}{l} \\ M_x = V_A \cdot z = \frac{Pb}{l} z = \frac{P(l-a)}{l} z \end{cases}$$

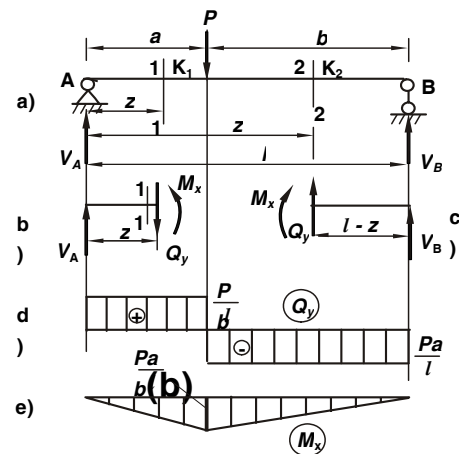
♦ Đoạn CB- Xét mặt cắt 2-2 tại điểm K_2 Trong đoạn CB cách gốc A một đoạn z , ($a \leq z \leq l$). Tính nội lực trên mặt cắt 2-2 bằng cách xét phần bên phải (đoạn K_2B). Ta được:

$$\begin{aligned} Q_y &= -V_B = -\frac{Pa}{l} \\ M_x &= V_B(l-z) = \frac{Pa}{l}(l-z) \end{aligned} \quad (b)$$

Từ (a) và (b) dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực như H.2.9d,e.

Trường hợp đặc biệt : Nếu $a=b= L/2$, khi đó mômen cực đại xảy ra tại giữa dầm và có giá trị: $M_{\max} = PL/4$

(a)



H. 2.9

Thí dụ 2.5 Vẽ BĐNL của dầm đơn giản chịu tác dụng của mômen tập trung M_o (H.2.10a.)

Giải

Phản lực: Xét cân bằng của toàn dầm ABC \Rightarrow các phản lực liên kết tại A và B là: $H_A = 0$; $V_A = V_B = \frac{M_o}{l}$, chiều phản lực như H.2.10a.

Nội lực:

Đoạn AC: Dùng mặt cắt 1-1 cách gốc A một đoạn z_1 ; ($0 \leq z_1 \leq a$). Xét cân bằng của đoạn AK_1 bên trái mặt cắt $K_1 \Rightarrow$ các nội lực

$$\text{như sau } \begin{cases} Q_{y_1} = -V_A = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x_1} = -V_A z_1 = -\frac{M_o}{l} z_1 \end{cases} \quad (c)$$

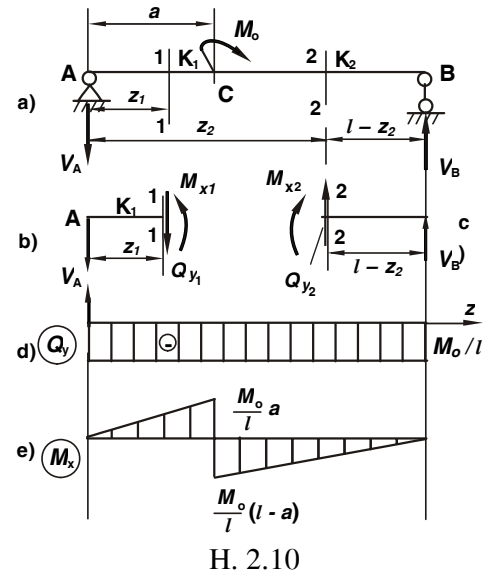
Đoạn CB: Dùng mặt cắt 2-2 trong đoạn CB cách gốc A một đoạn z_2 với ($a \leq z_2 \leq l$). Xét cân bằng của phần bên phải $K_2B \Rightarrow$ các biểu thức nội lực trên mặt cắt 2-2 là:

$$\begin{cases} Q_{y_2} = -V_B = -\frac{M_o}{l} \\ M_{x_2} = V_B(l - z_2) = \frac{M_o}{l}(l - z_2) \end{cases} \quad (d)$$

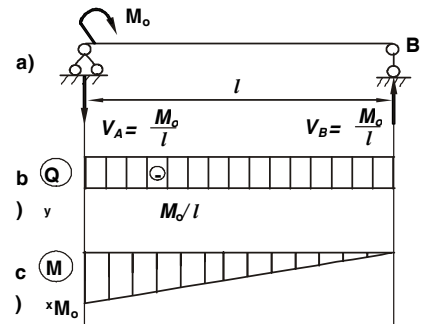
BĐNL được vẽ từ các biểu thức (c), (d) của nội lực trong hai đoạn (H.2.10d-e).

Trường hợp đặc biệt: Mômen tập trung M_o đặt tại mặt cắt sát gối tựa A (H.2.11).

Q_y và M_x sẽ được xác định bởi (d) ứng với $a = 0$. BĐNL vẽ như H.2.11



H. 2.10



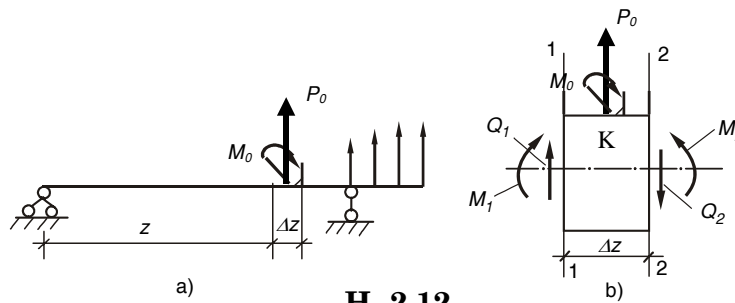
H. 2.11

Các nhận xét :

- Nơi nào có lực tập trung, biểu đồ lực cắt nơi đó có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng trị số lực tập trung. Chiều bước nhảy theo chiều lực tập trung nếu ta vẽ từ trái sang phải

- Nơi nào có mômen tập trung, biểu đồ mômen uốn nơi đó có bước nhảy. Trị số của bước nhảy bằng trị số mômen tập trung. Chiều bước nhảy theo chiều mômen tập trung nếu ta vẽ từ trái sang phải

Kiểm chứng các nhận xét :



H. 2.12

Khảo sát đoạn Δz bao quanh một điểm K có tác dụng lực tập trung P_0 , mômen tập trung M_0 (H.2.12b).

Viết các phương trình cân bằng \Rightarrow

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_1 + P_0 - Q_2 = 0 \Rightarrow Q_2 - Q_1 = P_0 \quad (i)$$

$$\sum M/K = 0 \Rightarrow M_1 + M_0 - M_2 + Q_1 \frac{\Delta z}{2} - Q_2 \frac{\Delta z}{2} = 0$$

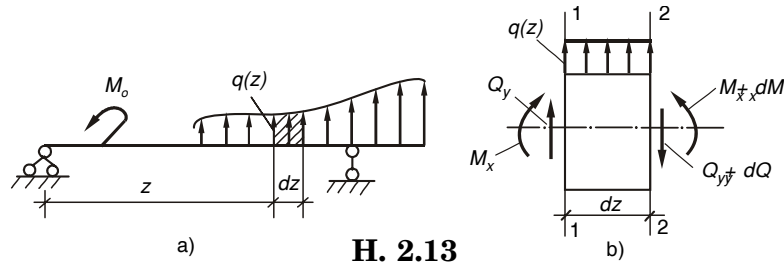
$$\text{Bỏ qua vô cùng bé bậc một } Q_1 \frac{\Delta z}{2}, Q_2 \frac{\Delta z}{2}, \Rightarrow M_2 - M_1 = M_0 \quad (ii)$$

Biểu thức (i) đã kiểm chứng nhận xét về bước nhảy của biểu đồ lực cắt.

Biểu thức (ii) đã kiểm chứng nhận xét về bước nhảy của biểu đồ mômen.

2.4. LIÊN HỆ VI PHÂN GIỮA NỘI LỰC VÀ TẢI TRỌNG PHÂN BỐ TRONG THANH THẲNG

Xét một thanh chịu tải trọng bất kỳ (H.2.13a). Tải trọng tác dụng trên thanh này là lực phân bố theo chiều dài có cường độ $q(z)$ có chiều dương hướng lên (H.2.13b).



H. 2.13

Khảo sát đoạn thanh vi phân dz , giới hạn bởi hai mặt cắt 1-1 và 2-2 (H.2.13b). Nội lực trên mặt cắt 1-1 là Q_y và M_x . Nội lực trên mặt cắt 2-2 so với 1-1 đã thay đổi một lượng vi phân và trở thành $Q_y + dQ_y$; $M_x + dM_x$. Vì dz là rất bé nên có thể xem tải trọng là phân bố đều trên đoạn dz .

Viết các phương trình cân bằng:

1-Tổng hình chiếu các lực theo phương đứng

$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\Rightarrow Q_y + q(z)dz - (Q_y + dQ_y) = 0 \\ \Rightarrow q(z) &= \frac{dQ_y}{dz} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Đạo hàm của lực cắt bằng cường độ của lực phân bố vuông góc với trục thanh.

2- Tổng mômen của các lực đối với trọng tâm mặt cắt 2-2 ta được:

$$\sum M/o_2 = 0 \Rightarrow Q_y dz + q(z) \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} + M_x - (M_x + dM_x) = 0$$

Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc hai $q(z) \cdot \frac{dz^2}{2} \Rightarrow$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y \quad (2.5)$$

Đạo hàm của mômen uốn tại một mặt cắt bằng lực cắt tại mặt cắt đó

$$\text{Từ (2.4) và (2.5) } \Rightarrow \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q(z) \quad (2.6)$$

nghĩa là: Đạo hàm bậc hai của mômen uốn tại một điểm chính là bằng cường độ của tải trọng phân bố tại điểm đó.

Thí dụ 2.6 Vẽ BĐNL cho dầm đơn giản AB chịu tác dụng của tải phân bố bậc nhất như H.2.14.

Giải

. Phản lực: Giải phóng liên kết, đặt các phản lực tương ứng ở các gối tựa, xét cân bằng của toàn thanh,

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0,$$

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow V_A l = \frac{1}{2} \times q_0 l \times \frac{l}{3} \Rightarrow V_A = \frac{1}{6} q_0 l$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{1}{3} q_0 l$$

. Nội lực: Cường độ của lực phân bố ở mặt cắt 1-1 cách gốc A một đoạn z cho bởi: $q(z) = q_0 \frac{z}{l}$

Dùng mặt cắt 1-1 và xét sự cân bằng của phần bên trái (H.2.14b).

$$\sum Y = 0 \Rightarrow Q_y = V_A - q(z) \frac{z}{2} = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 z^2}{2l} \quad (e)$$

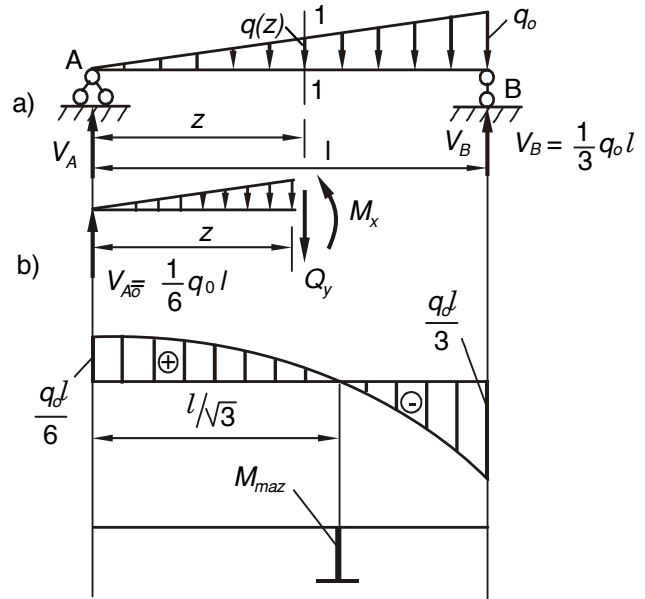
$$\sum M/o_1 = 0 \Rightarrow M_x = \frac{q_0 l}{6} z - q(z) \times \frac{z}{2} \times \frac{z}{3} = \frac{q_0 l}{6} z - \frac{q_0 z^3}{6l} \quad (g)$$

Từ (e) và (g) ta vẽ được biểu đồ lực cắt và mômen cho dầm đã cho. Các biểu đồ này có tính chất như sau:

Biểu đồ lực cắt Q_y có dạng bậc 2. Tại vị trí $z = 0$, $q(z) = 0$ nên ở đây biểu đồ Q_y đạt cực trị: $(Q_y)_{z=0} = Q_{\max} = q_0 l / 6$

Biểu đồ mômen uốn M_x có dạng bậc 3. Tại vị trí $z = l/\sqrt{3}$; $Q_y = 0$. Vậy tại đây M_x đạt cực trị:

$$(M_x)_{z=\frac{l}{\sqrt{3}}} = M_{\max} = \frac{q_0 l^2}{9\sqrt{3}}$$



H.2.14

Thí dụ 2.7 Vẽ BĐNL cho dầm chịu lực tổng quát (H.2.15)

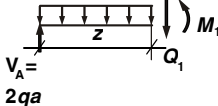
Giải

Phản lực: Giải phóng liên kết, xét cân bằng toàn thanh, suy ra phản lực liên kết tại A và C là:

$$H_A = 0, \quad V_A = 2qa; \quad V_C = 2qa$$

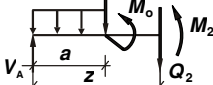
Nội lực:

* Đoạn AB: Mặt cắt 1-1, gốc A ($0 \leq z \leq a$), xét cân bằng phần trái

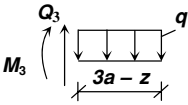
$$\begin{cases} Q_1 = 2qa - qz \\ M_1 = 2qaz - \frac{qz^2}{2} \end{cases}$$


* Đoạn BC: Mặt cắt 2-2, gốc A ($a \leq z \leq 2a$)

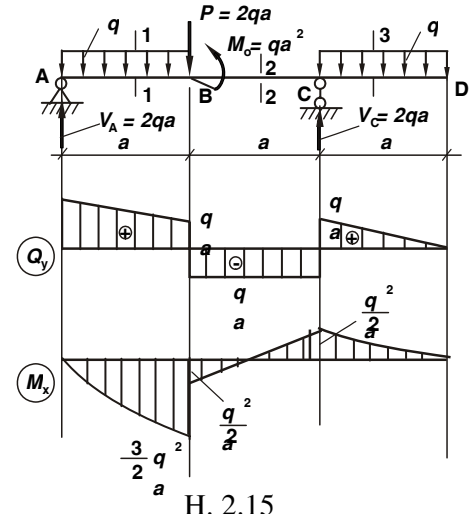
và xét cân bằng phần trái:

$$\begin{cases} Q_2 = -qa \\ M_2 = -qaz + \frac{3}{2}qa^2 \end{cases}$$


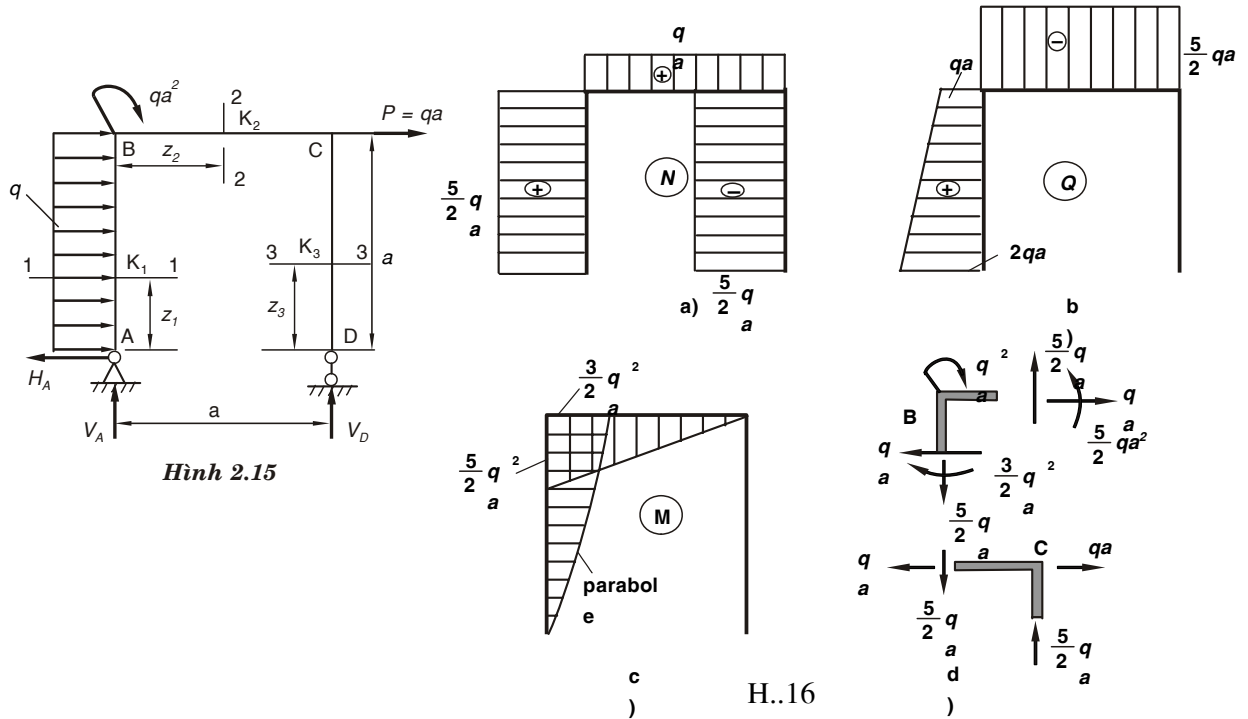
* Đoạn CD: Mặt cắt 3-3, gốc A, ($2a \leq z \leq 3a$) xét cân bằng phần phải:

$$\begin{cases} Q_3 = q(3a - z) \\ M_3 = -q \frac{(3a - z)^2}{2} \end{cases} \quad (2a \leq z \leq 3a)$$


Biểu đồ mômen và lực cắt vẽ như H.2.15.



Thí dụ 2.8 Vẽ biểu đồ nội lực trong khung chịu tải trọng như trên H.2.16.



Hình 2.15

H.16

Giải

Tính phản lực liên kết

Xét sự cân bằng của toàn khung dưới tác dụng của tải trọng ngoài và các phản lực liên kết ta suy ra:

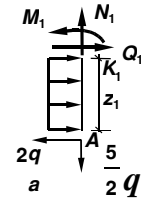
$$\begin{aligned} \sum N_{\text{ngang}} = 0 &\Rightarrow H_A = 0 \\ \sum M/D = 0 &\Rightarrow V_a \times a + qa \times \frac{a}{2} + qa^2 + qa \times a = 0 \rightarrow V_A = -\frac{5}{2}qa \\ \sum \text{Đúng} = 0 &\Rightarrow V_A + V_D = 0 \Rightarrow V_D = +\frac{5}{2}qa \quad (\text{Đúng chiều đã chọn}) \end{aligned}$$

Vậy chiều thật của V_A ngược với chiều đã chọn

Vẽ biểu đồ nội lực

Đoạn AB: dùng mặt cắt 1-1 và xét cân bằng đoạn AK₁ ta được:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{5}{2}qa \\ Q_1 = 2qa - qz_1 \\ M_1 = 2qaz_1 - \frac{qz_1^2}{2} \end{cases} \quad (0 \leq z_1 \leq a)$$

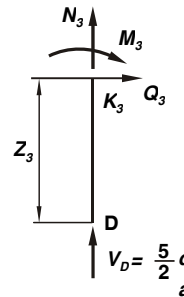


Đoạn BC: dùng mặt cắt 2-2 và xét cân bằng đoạn ABK₂ ta được:

$$\begin{cases} N_2 = qa \\ Q_2 = -\frac{5}{2}qa \\ M_2 = \frac{5}{2}qa^2 - \frac{5}{2}qaz_2 \end{cases} \quad (0 \leq z_2 \leq a)$$

Đoạn CD: dùng mặt cắt 3-3 và xét cân bằng DK₃

$$\begin{cases} N_3 = -\frac{5}{2}qa \\ Q_3 = 0 \\ M_3 = 0 \end{cases} \quad (0 \leq z_3 \leq a)$$



Kiểm tra sự cân bằng nút

Đối với khung, có thể kiểm tra kết quả bằng việc xét cân bằng các nút. Nếu tách nút ra khỏi hệ thì ta phải đặt vào nút các ngoại lực tập trung (nếu có) và các nội lực tại các mặt cắt, giá trị của chúng được lấy từ biểu đồ vừa vẽ.

Sau khi đặt các lực trên, nếu tính đúng các nội lực ở các nút thì nút sẽ cân bằng, nghĩa là các phương trình cân bằng được thỏa mãn. Ngược lại, nếu các phương trình không thỏa mãn thì các nội lực tính sai.

Cụ thể đối với khung đang xét, ta tách nút B và đặt vào đó mômen tập trung qa^2 và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như H.2.16d:

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc $+qa$ hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $5qa^2/2$ có chiều hướng lên và mômen $5qa^2/2$ gây căng thớ dưới.

- Tại mặt cắt trên thanh đứng có lực dọc $+5qa/2$ hướng ra ngoài mặt cắt (hướng xuống) lực cắt $+qa$ hướng từ phải sang trái và mômen $3qa^2/2$ gây ra căng thớ trong khung nên chiều quay có mũi tên hướng ra ngoài.

Ta dễ dàng thấy các phương trình cân bằng thỏa mãn:

$$\sum X = 0 ; \sum Y = 0 ; \sum M/B = 0$$

Tương tự, tách nút C và đặt vào đó lực tập trung qa hướng từ trái sang phải và các thành phần nội lực trên các đoạn thanh ngang và đứng như H.2.16d.

- Tại mặt cắt trên thanh ngang có lực dọc $+qa$ hướng ra ngoài mặt cắt, lực cắt $-5qa/2$ có khuynh hướng làm quay phần đoạn thanh đang xét ngược chiều kim đồng hồ nên có chiều hướng xuống, còn mômen thì bằng không.

- Tại mặt cắt trên thanh thẳng đứng tồn tại lực dọc $-5qa/2$ có chiều hướng vào mặt cắt (hướng lên) và không có lực cắt cũng như mômen.

Ta dễ dàng thấy rằng các phương trình cân bằng được thỏa mãn:

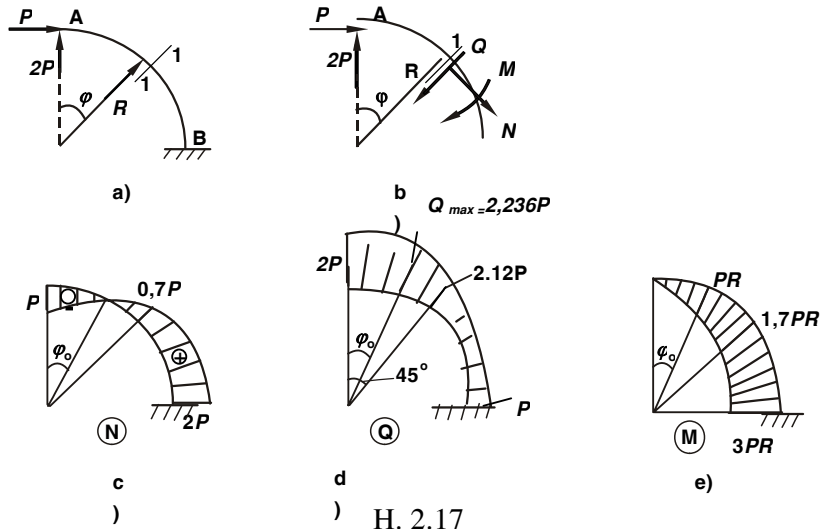
$$\sum X = -qa + qa = 0 ; \quad \sum Y = -\frac{5}{2}qa + \frac{5}{2}qa = 0 ; \quad \sum M/B = 0$$

Vậy các nút B và C đều cân bằng nghĩa là các hệ nội lực tại các nút đúng.

Thí dụ 2.9 Vẽ BĐNL trong thanh cong (H.2.17)

Giải

Cắt thanh tại tiết diện 1-1, xác định bởi góc φ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$), xét cân bằng của phần trên dưới tác dụng của các ngoại lực và các thành phần nội lực đặt theo chiều dương quy ước như H.2.17b.



Phương trình cân bằng hình chiếu các lực theo phương pháp tuyến với mặt cắt cho:

$$N = 2P \sin \varphi - P \cos \varphi = P(2 \sin \varphi - \cos \varphi) \quad (a)$$

Phương trình cân bằng hình chiếu các lực theo phương đường kính cho:

$$Q = 2P \cos \varphi + P \sin \varphi = P(2 \cos \varphi + \sin \varphi) \quad (b)$$

Phương trình cân bằng của các mômen các lực đối với trọng tâm mặt cắt dẫn đến:

$$M = -2PR \sin \varphi - PR(1 - \cos \varphi) = -PR(2 \sin \varphi + 1 - \cos \varphi) \quad (c)$$

Cho φ một vài trị số đặc biệt và tính các trị số nội lực tương ứng, ta vẽ được biểu đồ.

Lực cắt đạt cực trị khi $\frac{dQ_y}{d\varphi} = 0$, nghĩa là khi:

$$-2 \sin \varphi + \cos \varphi = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0,5 \Rightarrow \varphi = \varphi_0 = 26^\circ 56'$$

$$\sin \varphi_0 = 0,4472 ; \quad \cos \varphi_0 = 0,8944$$

Ta có bảng nội lực sau:

φ	0	φ_0	45°	90°
N	$-P$	0	$0,7 P$	$2 P$
Q	$2 P$	$2,236 P$	$2,12 P$	$+P$
M	0	$-PR$	$-1,7 PR$	$-3PR$

Khi vẽ cần chú ý đặt các tung độ theo phương vuông góc với trục thanh, tức là theo phương bán kính như trên H.2.17c,d,e.

2.5 CÁCH VẼ BIỂU ĐỒ NHANH

2.5.1 Phương pháp vẽ từng điểm

Dựa trên các liên hệ vi phân, ta định dạng các BĐNL tùy theo dạng tải trọng đã cho và từ đó ta xác định số điểm cần thiết để vẽ biểu đồ.

Trên 1 đoạn thanh

+ $q = 0 \Rightarrow Q = \text{hằng số}, M = \text{bậc nhất}$.

+ $q = \text{hằng} \Rightarrow Q = \text{bậc nhất}, M = \text{bậc hai}$.

.....

+ Nếu biểu đồ có dạng hằng số, chỉ cần xác định một điểm bất kỳ.

+ Nếu biểu đồ có dạng bậc nhất, cần tính nội lực tại hai điểm đầu và cuối đoạn thanh.

+ Nếu biểu đồ có dạng bậc hai trở lên thì cần ba giá trị tại điểm đầu, điểm cuối và tại nơi có cực trị, nếu không có cực trị thì cần biết chiều lồi lõm của biểu đồ theo dấu của đạo hàm bậc hai. Đoạn thanh có lực phân bố q hướng xuống sẽ âm, nên bề lõm của biểu đồ mômen hướng lên. Ngược lại, nếu q hướng lên sẽ dương nên bề lõm của biểu đồ mômen hướng xuống. Tóm lại, đường cong mômen hứng lấy lực phân bố q .

Thí dụ 2.10: Vẽ BĐNL trong dầm cho trên H.2.18 (phương pháp vẽ điểm)

Giải.

Phản lực liên kết

$$\sum M/B = 0 \Rightarrow -qa^2 + 2qa^2 + 2qa^2 - V_C \times 2a = 0 \Rightarrow V_C = \frac{3}{2}qa$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_B = \frac{5}{2}qa$$

Nội lực

Đoạn AB: $q=0 \Rightarrow Q_y = \text{hằng số}$,
 $M_x = \text{bậc nhất}$.

Trong trường hợp này Q_y là hằng số bằng không vì $Q_A^{(AB)} = 0$.

$\Rightarrow M_x$ trong đoạn này sẽ là hằng số

$$M_A^{(AB)} = M_B^{(BA)} = -M_o = -qa^2$$

Đoạn BD: $q = \text{hằng} \Rightarrow Q_y = \text{bậc 1}$,
 $M_x = \text{bậc 2}$.

$$\text{Tại B: } \begin{cases} Q_B^{(BD)} = +\frac{5}{2}qa \\ M_B^{(BD)} = -M_o = -qa^2 \end{cases}$$

$$\text{Tại D: } \begin{cases} Q_D^{(BD)} = \frac{5}{2}qa - qa = \frac{3}{2}qa \\ M_D^{(BD)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2 \end{cases}$$

Biểu đồ Q_y trong đoạn này không có vị trí nào $=0 \Rightarrow$ biểu đồ M_x không có cực trị.

Chỉ cần nối hai giá trị mômen tại B và D bằng đường cong bậc hai có bề lõm sao cho hứng lấy lực q .

Đoạn DC: $q = \text{hằng} \Rightarrow Q_y = \text{bậc 1}$, $M_x = \text{bậc 2}$.

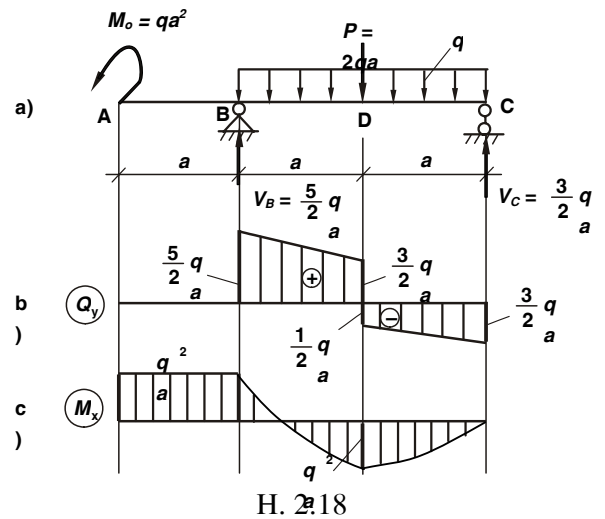
$$\text{Tại D: } Q_D^{(DC)} = -\frac{1}{2}qa; \quad M_D^{(DC)} = \frac{3}{2}qa^2 - \frac{qa^2}{2} = qa^2$$

$$\text{Tại C: } Q_C = -V_C = -\frac{3}{2}qa; \quad M_C = 0$$

Biểu đồ Q_y trong đoạn này không có vị trí nào $=0 \Rightarrow$ biểu đồ M_x không có cực trị.

Chỉ cần nối hai giá trị mômen tại D và C bằng đường cong bậc hai có bề lõm sao cho hứng lấy lực q .

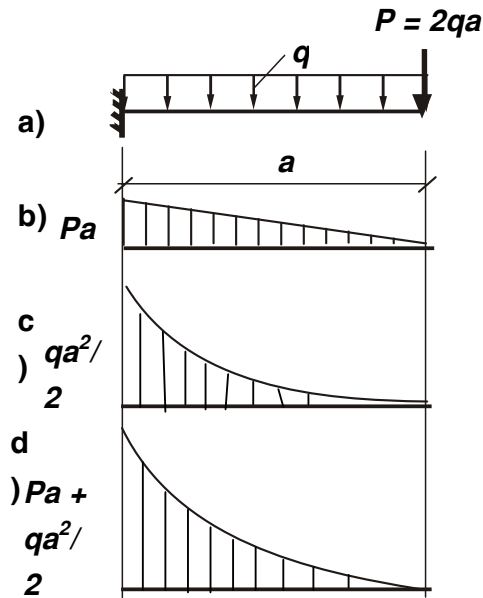
Các biểu đồ lực cắt Q_y và mômen M_x lần lượt được vẽ trên H.2.18b,c.



2.5.2 Cách áp dụng nguyên lý cộng tác dụng

Khi thanh chịu tác dụng nhiều loại tải trọng, ta có thể vẽ biểu đồ nội lực trong thanh do từng tải trọng riêng lẻ gây ra rồi cộng đại số lại để được kết quả cuối cùng.

Thí dụ 10. Vẽ biểu đồ mô men trong dầm như H.2.18a bằng cách cộng biểu đồ.



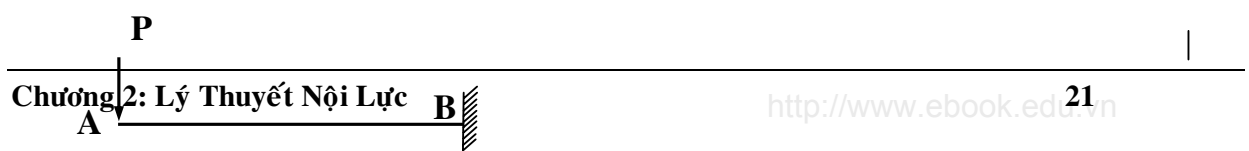
H.2.18

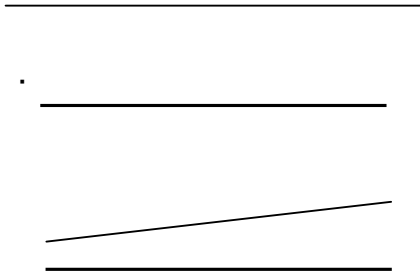
Giải. Tải trọng trên thanh được chia thành hai trường hợp cơ bản:

- + Hình 2.18b biểu diễn mô men do lực tập trung P gây ra
- + Hình 2.18c biểu diễn mô men do lực phân bố đều q gây ra

Hình 2.18d biểu diễn mô men tổng hợp cần tìm, các tung độ bằng tổng đại số các tung độ tại các tiết diện tương ứng trên H.2.18b,c

Bảng tóm tắt dầm console , dầm đơn giản, dầm đầu thừa

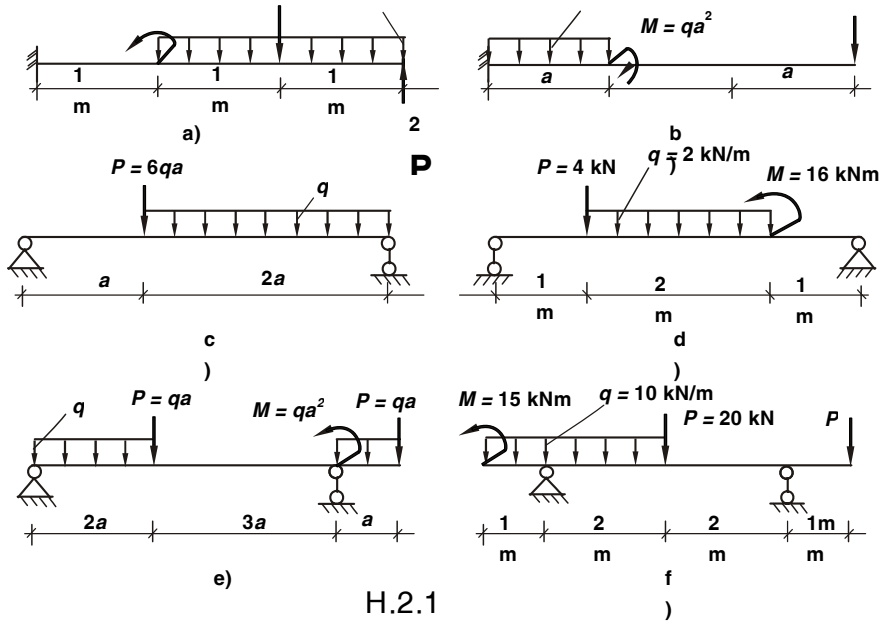




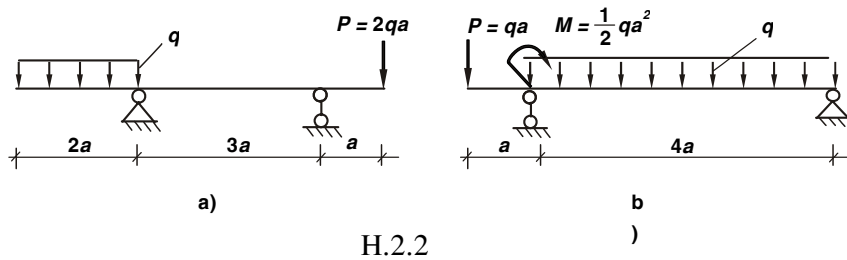
BÀI TẬP CHƯƠNG 2

2.1. Vẽ biểu đồ nội lực của các dầm cho trên H.2.1.

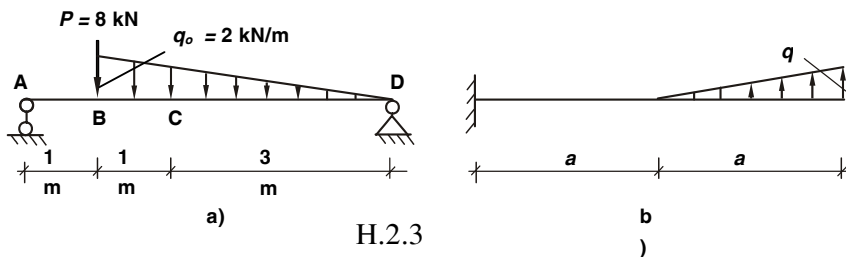
$$M = 10 \text{ kNm} \quad P = 5 \text{ kN} \quad q = 5 \text{ kN/m} \quad q \quad P = 2qa$$



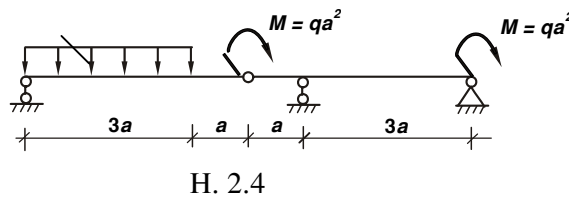
2.2. Không cần tính ra phản lực, vẽ BĐNL của các dầm cho trên H.2.2.



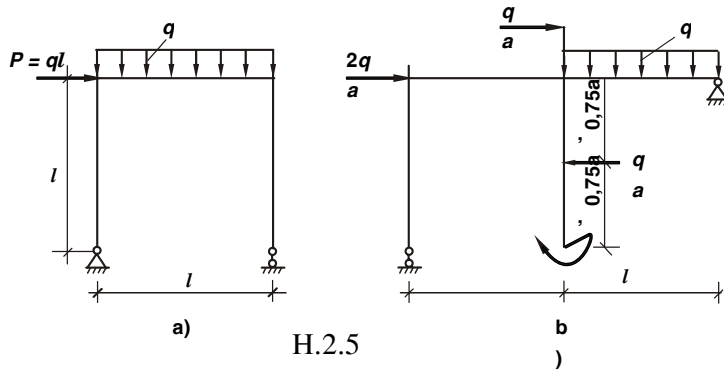
2.3. Vẽ biểu đồ nội lực như trên H.2.3.



2.4. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm tĩnh định như trên H.2.4.



2.5. Vẽ biểu đồ nội lực cho hệ khung sau (H.2.5).



2.6. Vẽ biểu đồ lực dọc, mômen uốn, mômen xoắn cho thanh không gian (H.2.6).

