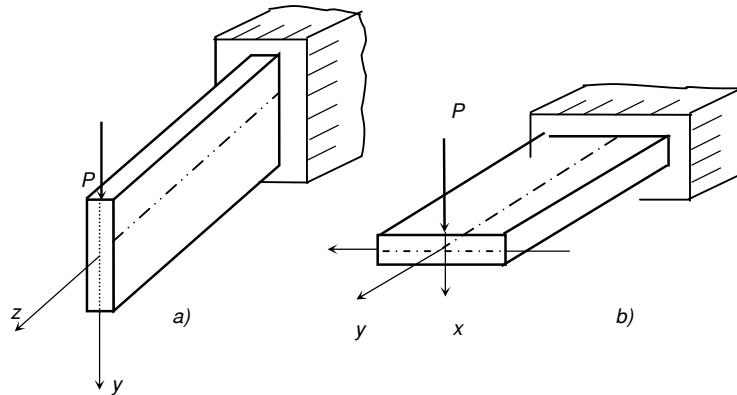


Chương 6

ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MẶT CẮT NGANG

6.1 KHÁI NIỆM

Ở chương 3, khi tính độ bền của thanh chịu kéo (nén) đúng tâm, ta thấy ứng suất trong thanh chỉ phụ thuộc vào độ lớn của diện tích mặt cắt ngang F (mặt cắt F , diện tích F). Trong những trường hợp khác, như thanh chịu uốn, xoắn... thì ứng suất trong thanh không chỉ phụ thuộc vào diện tích F mà còn phụ thuộc vào hình dáng, cách bố trí mặt cắt... nghĩa là còn những yếu tố khác mà người ta gọi chung là **đặc trưng hình học của mặt cắt ngang**.



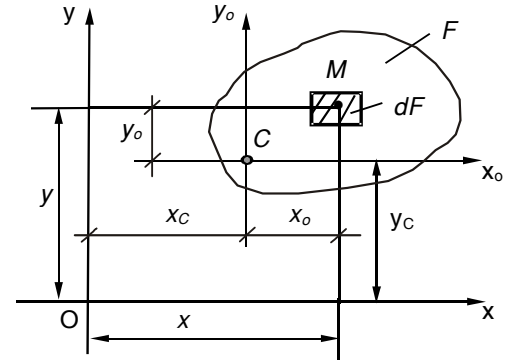
H.6.1. Dầm chịu uốn

a) Tiết diện đứng; b) Tiết diện nằm ngang

Xét thanh chịu uốn trong hai trường hợp mặt cắt đặt khác nhau như trên H.6.1. Bằng trực giác, dễ dàng nhận thấy trường hợp a), thanh chịu lực tốt hơn trường hợp b), tuy rằng trong hai trường hợp diện tích của mặt cắt ngang thanh vẫn như nhau. Như vậy, khả năng chịu lực của thanh còn phụ thuộc vào cách sắp đặt và vị trí mặt cắt ngang đối với phương tác dụng của lực. (Ứng suất nhỏ 04 lần độ võng nhỏ 16 lần). Cho nên sự chịu lực không những phụ thuộc F , mà cần phải nghiên cứu các đặc trưng hình học khác của mặt cắt ngang để tính toán độ bền, độ cứng, độ ổn định và thiết kế mặt cắt của thanh cho hợp lý.

6.2 MÔMEN TÍNH - TRỌNG TÂM

Xét một hình phẳng biểu diễn mặt cắt ngang F (mặt cắt F) như trên H.6.2. Lập một hệ tọa độ vuông góc Oxy trong mặt phẳng của mặt cắt. $M(x,y)$ là một điểm bất kỳ trên hình. Lấy chung quanh M một diện tích vi phân dF .



H.6.2 Mặt cắt F và trọng tâm C

♦ **Mômen tĩnh** của mặt cắt F đối với trục x (hay y) là tích phân:

$$S_x = \int_F y dF, \quad S_y = \int_F x dF \quad (6.1)$$

vì x, y có thể âm hoặc dương nên mômen tĩnh có thể có trị số âm hoặc dương.

Thứ nguyên của mômen tĩnh là $[(\text{chiều dài})^3]$.

♦ **Trục trung tâm** là trục có mômen tĩnh của mặt cắt F đối với trục đó bằng không.

♦ **Trọng tâm** là giao điểm của hai trục trung tâm.

⇒ **Mômen tĩnh đối với một trục đi qua trọng tâm bằng không.**

♦ **Cách xác định trọng tâm C** của mặt cắt F :

Dựng hệ trục $x_o C y_o$ song song với hệ trục $x O y$ ban đầu (H.6.2). Ta có

$$x = x_C + x_o; \quad y = y_C + y_o, \quad \text{với } C(x_c, y_c)$$

Thay vào (6.1), ⇒

$$S_x = \int_F (y_C + y_o) dF = y_C \int_F dF + \int_F y_o dF = y_C F + S_{x_o}$$

vì trục x_o là trục trung tâm nên $S_{x_o} = 0$, ⇒

$$S_x = y_C F, \quad \text{và} \quad S_y = x_C F \quad (6.2)$$

Từ (6.2) ⇒

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F} \quad (6.3)$$

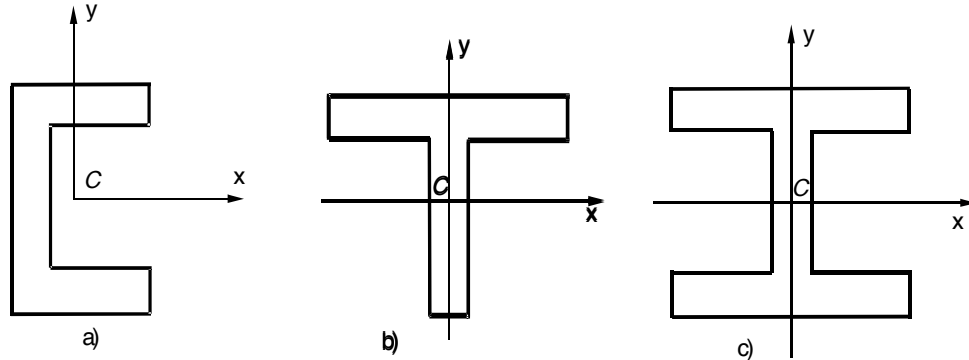
Kết luận: Tọa độ trọng tâm $C(x_C, y_C)$ được xác định trong hệ trục $x O y$ ban đầu theo mômen tĩnh S_x, S_y và diện tích F theo (6.4).

Ngược lại, nếu biết trước tọa độ trọng tâm, có thể sử dụng (6.2), (6.3) để xác định các mômen tĩnh.

Nhận xét 1:

Mặt cắt có trục đối xứng, trọng tâm nằm trên trục này vì mômen tĩnh đối với trục đối xứng bằng không (H.6.3a,b).

Mặt cắt có hai trục đối xứng, trọng tâm nằm ở giao điểm hai trục đối xứng (H.6.3c).



H.6.3 Mặt cắt có trục đối xứng

Thực tế, có thể gặp những mặt cắt ngang có hình dáng phức tạp được ghép từ nhiều hình đơn giản.

Tính chất: mômen tĩnh của hình phức tạp bằng tổng mômen tĩnh của các hình đơn giản.

Với những hình đơn giản như chữ nhật, tròn, tam giác hoặc mặt cắt các loại thép định hình I, U, V, L... ta đã biết trước (hoặc có thể tra theo các bảng trong phần phụ lục) diện tích, vị trí trọng tâm, từ đó dễ dàng tính được mômen tĩnh của hình phức tạp gồm n hình đơn giản:

$$S_x = F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n = \sum_1^n F_i y_i \quad (6.4)$$

$$S_y = F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n = \sum_1^n F_i x_i$$

trong đó: F_i, x_i, y_i - diện tích và tọa độ trọng tâm của hình đơn giản thứ i ,
 n - số hình đơn giản.

⇒ Tọa độ trọng tâm của một hình phức tạp trong hệ tọa độ xy .

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} ; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (6.5)$$

Thí dụ 6-1 Xác định trọng tâm mặt cắt chữ L chỉ gồm hai hình chữ nhật như trên H.6.4. Tọa độ trọng tâm C của hình trên là:

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2};$$

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2}{F_1 + F_2}$$

Thí dụ 6.2 Một mặt cắt thanh ghép, gồm thép chữ I số hiệu N^o55, thép chữ [số hiệu N^o27, và thép chữ nhật $15 \times 1,2$ cm (H.6.5). Xác định trọng tâm C của mặt cắt.

Giải.

Tra bảng (ГОСТ 8239-89) \Rightarrow số liệu sau:

- Đối với thép chữ I N^o55:

$$h_2 = 55 \text{ cm}$$

$$t = 1,65 \text{ cm}$$

$$F_2 = 118 \text{ cm}^2$$

- Đối với thép chữ [N^o27:

$$h_3 = 27 \text{ cm}$$

$$F_3 = 35,2 \text{ cm}^2$$

$$z_3 = 2,47 \text{ cm}$$

- Hình chữ nhật:

$$F_1 = 15 \text{ cm} \times 1,2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}^2$$

Chọn hệ trục tọa độ xy qua gốc $C_2 \Rightarrow$ tọa độ trọng tâm của ba hình trên là:

$$y_1 = \frac{55}{2} + \frac{1,2}{2} = 28,1 \text{ cm}; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = \frac{55}{2} + 2,47 = 29,97 \text{ cm}$$

Diện tích và mômen tĩnh của toàn mặt cắt là:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = 18 + 118 + 35,2 = 171,2 \text{ cm}^2$$

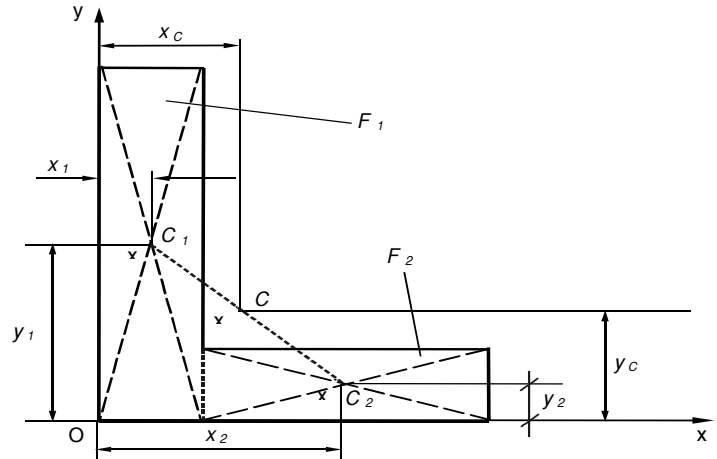
$$S_x = y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3 = (28,1)(18) + 0 - (29,97)(35,2) = -549,144 \text{ cm}^3$$

vì y là trục đối xứng, trọng tâm C sẽ nằm trên trục này.

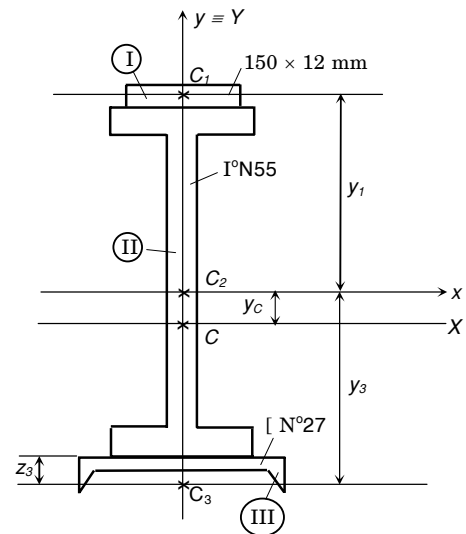
$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } C \text{ là: } x_C = 0; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{-549,144}{171,2} \approx -32 \text{ cm}$$

Dấu (-) cho thấy trọng tâm C nằm phía dưới trục x .

Chú ý rằng, **trục x có thể chọn tùy ý** song ở thí dụ này ta đặt trục x đi qua trọng tâm C_2 của mặt cắt chữ I cho tiện tính toán.



H.6.4 Trọng tâm hình phức tạp



H.6.5. Trọng tâm C của hình ghép

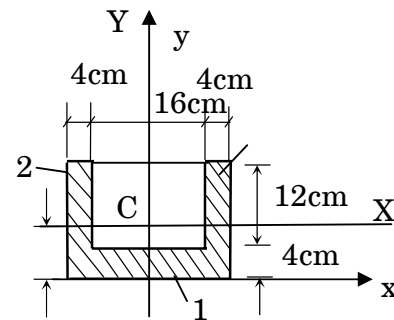
Thí dụ 6.3. Cho mặt cắt hình chữ U .Tìm trọng tâm C

Chọn hệ trục x,y như hình vẽ, trục x qua đáy mặt cắt (trục y là trục đối xứng, C nằm trên trục y)

$$y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{24 \times 4 \times 2 + 2(4 \times 12 \times 10)}{(24 \times 4) + 2(4 \times 12)} = 6 \text{ cm}$$

Hay :

$$y_C = \frac{S_{x_1} - S_{x_2}}{F_1 - F_2} = \frac{(24 \times 16 \times 8) - (16 \times 12 \times 10)}{(24 \times 16) - (16 \times 12)} = 6 \text{ cm}$$



H. 6.12

6.3 MÔMEN QUÁN TÍNH- HỆ TRỤC QUÁN TÍNH CHÍNH TRUNG TÂM

1- Mômen quán tính (MMQT)

◆ Mômen quán tính độc cực

(MMQT đối với điểm) của mặt cắt F đối với điểm O được định nghĩa là biểu thức tích phân:

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF \quad (6.6)$$

với: ρ - khoảng cách từ điểm M đến gốc tọa độ O,

◆ Mômen quán tính đối với trục y và x của mặt cắt F được định nghĩa:

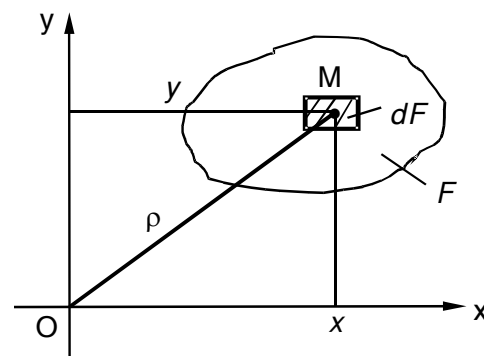
$$J_y = \int_F x^2 dF; J_x = \int_F y^2 dF \quad (6.7)$$

◆ Mômen quán tính ly tâm của mặt cắt F đối với hệ trục x,y được định nghĩa:

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad (6.8)$$

Từ định nghĩa các mômen quán tính, ta nhận thấy:

- MMQT có thứ nguyên là $[\text{chiều dài}]^4$
- $J_x, J_y, J_\rho > 0$
- MMQT ly tâm J_{xy} có thể dương, âm hoặc bằng không.
- Vì $\rho^2 = x^2 + y^2$ nên $J_\rho = J_x + J_y$ (6.9)



H. 6.6 Hình phẳng F