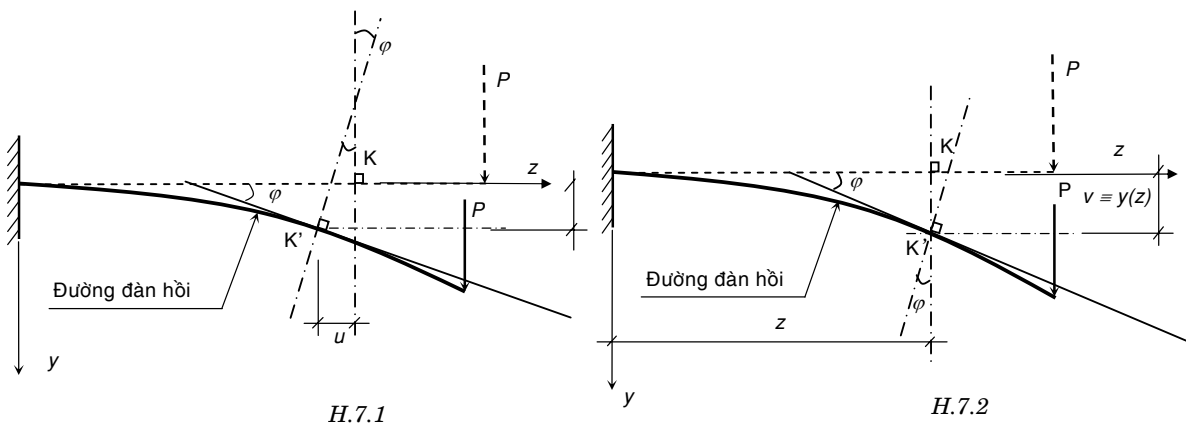


Chương 8

CHUYỂN VỊ CỦA DẦM CHỊU UỐN

8.1 KHÁI NIỆM CHUNG

Khi tính một dầm chịu uốn ngang phẳng, ngoài điều kiện bền còn phải chú ý đến điều kiện cứng. Vì vậy, cần phải xét đến biến dạng của dầm. Dưới tác dụng của các ngoại lực, trục dầm bị uốn cong, trục cong này được gọi là **đường đàn hồi** của dầm (H.8.1).



Xét một điểm K nào đó trên trục dầm trước khi biến dạng. Sau khi biến dạng, điểm K sẽ di chuyển đến vị trí mới K'. Khoảng cách KK' được gọi là **chuyển vị thẳng** của điểm K. Chuyển vị này có thể phân làm hai thành phần:

Thành phần v vuông góc với trục dầm (song song với trục y) gọi là **chuyển vị đứng** hay **độ võng** của điểm K.

Thành phần u song song với trục dầm (song song với trục z) gọi là **chuyển vị ngang** của điểm K.

Ngoài ra, sau khi trục dầm biến dạng, mặt cắt ngang ở K bị xoay đi một góc φ , ta gọi góc xoay này là **chuyển vị góc** (hay là **góc xoay**) của mặt cắt ngang ở điểm K. Có thể thấy rằng, góc xoay φ chính bằng góc giữa trục chưa biến dạng của dầm và tiếp tuyến ở điểm K của đường đàn hồi (H.8.1).

Ba đại lượng u , v , φ là ba thành phần chuyển vị của mặt cắt ngang ở điểm K.

Trong điều kiện biến dạng của dầm là bé thì thành phần chuyển vị ngang u là một đại lượng vô cùng bé bậc hai so với v , do đó có thể bỏ qua chuyển vị u và xem KK' là bằng v , nghĩa là vị trí K' sau khi biến dạng nằm trên đường vuông góc với trục dầm trước biến dạng (H.8.2).

Góc xoay φ có thể lấy gần đúng: $\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{dv}{dz}$.

Nếu chọn trục dầm là z , trục y vuông góc với trục dầm, thì chuyển vị v chính là tung độ y của điểm K' . Tung độ y cũng chính là độ võng của điểm K. Ta thấy rõ nếu K có hoành độ z so với gốc nào đó thì các chuyển vị y , φ cũng là những hàm số của z và phương trình đàn hồi là:

$$y(z) = v(z)$$

Phương trình của góc xoay sẽ là:

$$\varphi(z) = \frac{dv}{dz} = \frac{dy}{dz} = y'(z)$$

hay, **phương trình của góc xoay là đạo hàm của phương trình đường đàn hồi.**

Quy ước dương của chuyển vị:

- Độ võng y dương nếu hướng xuống.
- Góc xoay φ dương nếu mặt cắt quay thuận chiều kim đồng hồ.

Điều kiện cứng: Trong kỹ thuật, khi tính toán dầm chịu uốn, người ta thường khống chế độ võng lớn nhất của dầm không được vượt qua một giới hạn nhất định để đảm bảo yêu cầu về sự làm việc, mỹ quan của công trình..., điều kiện này được gọi là **điều kiện cứng**. Nếu gọi f là độ võng lớn nhất của dầm thì điều kiện cứng thường chọn là:

$$\left[\frac{f}{L} \right] = \frac{1}{300} \div \frac{1}{1000}$$

trong đó: L - là chiều dài nhịp dầm.

Tùy loại công trình mà người ta quy định cụ thể trị số của $[f/L]$.

8.2 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Xét 1 điểm bất kỳ K trên trục dầm.

Trong chương 7 (công thức 7.1) ta đã lập được mối liên hệ giữa độ cong của trục dầm tại K sau biến dạng với mômen uốn nội lực M_x tại K là:

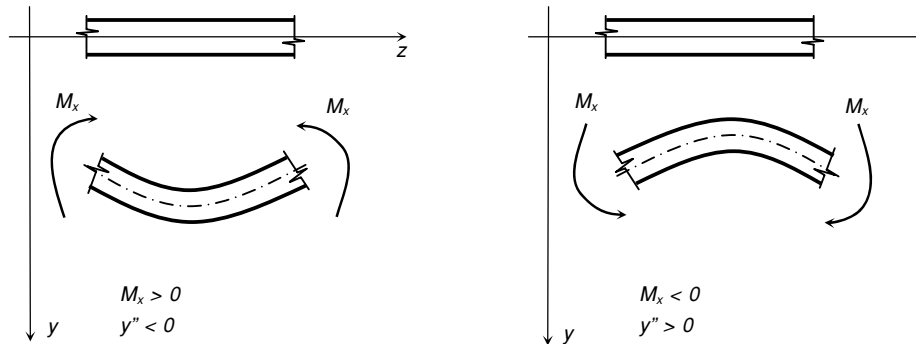
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (a)$$

Mặt khác, vì đường đàn hồi được biểu diễn bởi phương trình hàm số $y(z)$ trong hệ trục (yz) nên độ cong của đồ thị biểu diễn của hàm số ở 1 điểm K có hoành độ z được tính theo công thức:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (b)$$

$$(a) \text{ và } (b) \Rightarrow \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (c)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi, tuy nhiên phải chọn sao cho hai vế của phương trình trên đều thỏa mãn.



H.8.3

Khảo sát một đoạn dầm bị uốn cong trong hai trường hợp như H.8.3. Trong cả 2 trường hợp mômen uốn M_x và đạo hàm bậc hai y'' luôn luôn trái dấu, cho nên phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{M_x}{EI_x}$$

Với giả thiết chuyển vị là bé (độ võng và góc xoay bé), có thể bỏ qua $(y')^2$ so với 1 và khi đó **phương trình vi phân của đường đàn hồi** có dạng gần đúng như sau:

$$y'' = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (8.1)$$

trong đó: Tích số EJ_x là **độ cứng khi uốn** của dầm .

8.3 LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÔNG ĐỊNH HẠN

Vế phải của phương trình vi phân (8.1) chỉ là một hàm số của z nên (8.1) là phương trình vi phân thường.

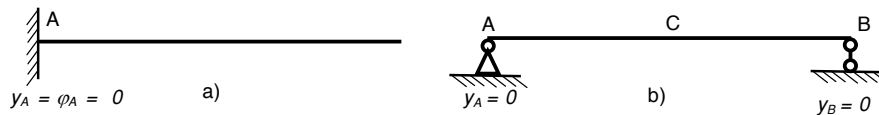
Tích phân lần thứ nhất (8.1) \Rightarrow phương trình góc xoay:

$$\varphi = y' = \int -\frac{M_x}{EJ_x} dz + C \quad (8.2)$$

Tích phân lần thứ hai \Rightarrow phương trình đường đàn hồi:

$$y = \int \left(\int -\frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right) dz + D \quad (8.3)$$

Trong (8.2) và (8.3), C và D là hai hằng số tích phân sẽ được xác định các điều kiện biên. Các điều kiện này phụ thuộc vào liên kết của dầm và phụ thuộc vào sự thay đổi tải trọng trên dầm.



H. 8.4

Đối với dầm đơn giản, có thể có các điều kiện như sau:

+ Đầu ngàm của dầm console có góc xoay và độ võng bằng không

(H.8.4a): $y_A = \varphi_A = 0$

+ Các đầu liên kết khớp độ võng bằng không (H.8.4b):

$$y_A = y_B = 0$$

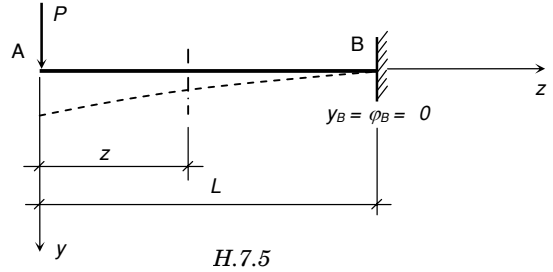
+ Tại nơi tiếp giáp giữa hai đoạn dầm có phương trình đường đàn hồi khác nhau, độ võng và góc xoay bên trái bằng với độ võng và góc xoay bên phải (điểm C trên H.8.4b): $y_C^{tr} = y_C^{ph}$; $\varphi_C^{tr} = \varphi_C^{ph}$

Thí dụ 8.1 Viết phương trình đường đàn hồi và góc xoay cho dầm công son (console) như H.8.5. Từ đó suy ra độ võng và góc xoay lớn nhất. Cho $EJ_x =$ hằng số.

Giải.

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ z là:

$$M_x = -Pz \quad (a)$$



thế vào (8.1) \Rightarrow phương trình vi phân của đường đàn hồi :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} = \frac{Pz}{EJ_x} \quad (b)$$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C \quad (c)$

$$y = \frac{Pz^3}{6EJ_x} + Cz + D \quad (d)$$

C và D được xác định từ các điều kiện biên về độ võng và góc xoay tại ngàm:

$$z = L; \varphi = 0 \text{ và } y = 0$$

thay các điều kiện này vào (c) và (d) \Rightarrow

$$C = -\frac{PL^2}{2EJ_x}; D = \frac{PL^3}{3EJ_x}$$

Vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{Pz^3}{6EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}z + \frac{PL^3}{3EJ_x};$$

$$\varphi = \frac{Pz^2}{2EJ_x} - \frac{PL^2}{2EJ_x}$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất ở đầu tự do A của dầm; ứng với $z = 0$, ta có:

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EJ_x}; \varphi = -\frac{PL^2}{2EJ_x}$$

$y_{\max} > 0$ chỉ rằng độ võng của điểm A hướng xuống

$\varphi < 0$ chỉ rằng góc xoay của điểm A ngược kim đồng hồ.

Thí dụ 8.2 Tính độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm (H.8.6).

Cho $EJ_x = \text{hằng}$

Giải.

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ z là:

$$M_x = -\frac{qz^2}{2}$$

thế vào (8.1), $\Rightarrow y'' = -\frac{qz^2}{2EJ_x}$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = \frac{qz^3}{6EJ_x} + C$

$$y = \frac{qz^4}{24EJ_x} + Cz + D$$

hai điều kiện biên ở đầu ngàm $z = L$; $\varphi = 0$ và $y = 0$ cho :

$$C = -\frac{qL^3}{6EJ_x}; \quad D = \frac{qL^4}{8EJ_x}$$

Vậy phương trình đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qL^4}{24EJ_x} - \frac{qL^3}{6EJ_x}z + \frac{qL^4}{8EJ_x};$$

$$\varphi = \frac{qL^3}{6EJ_x} - \frac{qL^3}{6EJ_x}z$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất ở đầu tự do A của dầm; ứng với $z = 0$, ta có:

$$y_{\max} = \frac{qL^4}{8EJ_x} \quad \text{và} \quad \varphi_A = -\frac{qL^3}{6EJ_x}$$

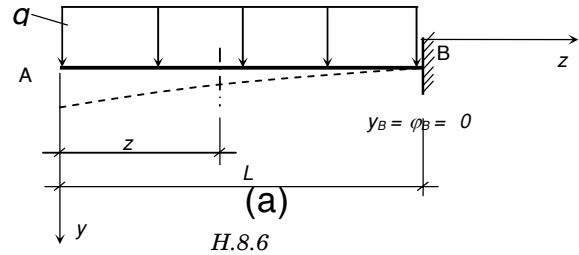
Thí dụ 8.3 Tính độ võng và góc xoay lớn nhất của dầm đơn giản chịu tải phân bố đều (H.8.7). Độ cứng EJ_x của dầm không đổi.

Giải.

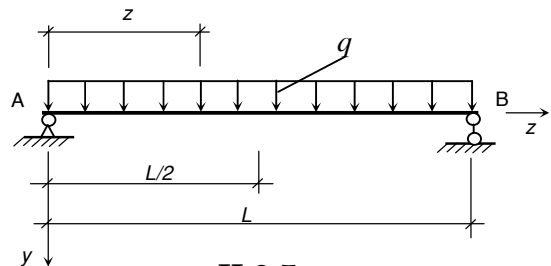
Phương trình mômen uốn tại mặt cắt ngang có hoành độ z là:

$$M_x = \frac{qL}{2}z - \frac{qz^2}{2} = \frac{q}{2}(Lz - z^2) \quad (a)$$

thay vào (8.1), \Rightarrow phương trình vi phân của đường đàn hồi như sau:



H.8.6



H.8.7

$$y'' = -\frac{q}{2EJ_x}(Lz - z^2) \quad (b)$$

tích phân hai lần, $\Rightarrow \varphi = y' = -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right) + C \quad (c)$

$$y = -\frac{q}{2EJ_x}\left(\frac{Lz^3}{6} - \frac{z^4}{12}\right) + Cz + D \quad (d)$$

điều kiện biên ở các gối tựa trái và phải của dầm: $\begin{cases} \text{khi : } z = 0; & y = 0 \\ \text{khi : } z = L; & y = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow D = 0; C = \frac{qL^3}{24EJ_x}$$

Như vậy phương trình đường đàn hồi và góc xoay là:

$$y = \frac{qL^3}{24EJ_x} z \left(1 - 2\frac{z^2}{L^2} + \frac{z^3}{L^3}\right) \quad (e)$$

$$\varphi = y' = \frac{qL^3}{24EJ_x} \left(1 - 6\frac{z^2}{L^2} + 4\frac{z^3}{L^3}\right) \quad (g)$$

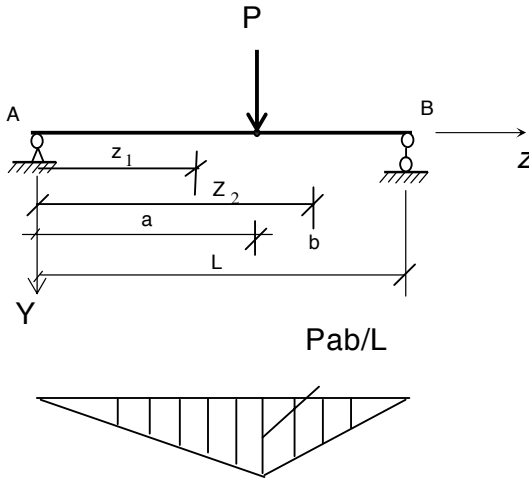
Độ võng lớn nhất của dầm ở tại mặt cắt ngang giữa nhịp ứng với:
 $z = \frac{L}{2}$ (tại đây $y' = 0$)

thay $z = \frac{L}{2}$ vào (e), $y_{\max} = y\left(z = \frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EJ_x}$

Góc xoay lớn nhất, nhỏ nhất (y'_{\max}, y'_{\min}) tại mặt cắt ngang có $y'' = 0$ (hay $M_x = 0$), tức ở các gối tựa trái và phải của dầm. Thay $z = 0$ và $z = L$ lần lượt vào (g) $\Rightarrow \varphi_{\max} = y'_{\max} = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x} \quad \varphi_{\min} = y'_{\min} = -\frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x}$

Góc xoay của mặt cắt ở gối tựa trái thuận chiều kim đồng hồ, góc xoay của mặt cắt ở gối tựa phải ngược chiều kim đồng hồ.

Thí dụ 8.4 Lập phương trình độ võng và góc xoay của dầm trên hai gối tựa chịu lực tập trung P như H.8.8 cho biết $EJ_x =$ hằng số.



H.8.8

Giải.

Dầm có hai đoạn, biểu thức mômen uốn trong hai đoạn AC và CB khác nhau nên biểu thức góc xoay và độ võng trong hai đoạn cũng khác nhau. Viết cho từng đoạn các biểu thức M_x , y'' , y' , y như sau:

Mômen uốn M_x trong các đoạn sau:

$$\text{Đoạn AC } (0 \leq z_1 \leq a): M_{x(1)} = \frac{Pb}{L} z_1 \quad (\text{a})$$

$$\text{Đoạn CB } (a \leq z_2 \leq L): M_{x(2)} = \frac{Pb}{L} z_2 - P(z_2 - a) \quad (\text{b})$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi trong mỗi đoạn:

$$\text{Đoạn AC: } y_1'' = -\frac{Pb}{LEJ_x} z_1 \quad (\text{c})$$

$$\text{Đoạn CB: } y_2'' = -\frac{Pb}{LEJ_x} z_2 + \frac{P}{EJ_x} (z_2 - a) \quad (\text{d})$$

Tích phân liên tiếp các phương trình trên, ta được:

Đoạn AC $(0 \leq z_1 \leq a)$:

$$y_1' = -\frac{Pb}{2LEJ_x} z_1^2 + C_1 \quad (\text{e})$$

$$y_1 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} z_1^3 + C_1 z_1 + D_1 \quad (\text{g})$$

Đoạn CB $(a \leq z_2 \leq L)$:

$$y_2' = -\frac{Pb}{2LEJ_x} z_2^2 + \frac{P}{2EJ_x} (z_2 - a)^2 + C_2 \quad (h)$$

$$y_2 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} z_2^3 + \frac{P}{6EJ_x} (z_2 - a)^3 + C_2 z_2 + D_2 \quad (i)$$

Xác định các hằng số tích phân C_1, D_1, C_2, D_2 từ các điều kiện biên

- Ở gối tựa A, B độ võng bằng không
- Ở mặt cắt ngang C nối tiếp hai đoạn, độ võng và góc xoay của hai đoạn phải bằng nhau.

$$\Leftrightarrow \text{khi:} \quad \begin{aligned} z_1 = 0; \quad y_1 &= 0 \\ z_2 = 0; \quad y_2 &= 0 \\ z_1 = z_2 = a; \quad y_1 = y_2; \quad y_1' &= y_2' \end{aligned}$$

Từ bốn điều kiện này \Rightarrow :

$$\begin{cases} D_1 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEJ_x} L^3 + \frac{P}{6EJ_x} (L-a)^3 + C_2 L + D_2 = 0 \\ -\frac{Pb}{6LEJ_x} a^3 + C_1 a + D_1 = -\frac{Pb}{6LEJ_x} a^3 + C_2 a + D_2 \\ -\frac{Pb}{2LEJ_x} a^2 + C_1 = -\frac{Pb}{2LEJ_x} a^2 + C_2 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên, \Rightarrow

$$D_1 = D_2 = 0; \quad C_1 = C_2 = \frac{Pb}{6LEJ_x} (L^2 - b^2)$$

Vậy phương trình góc xoay và độ võng trong từng đoạn là:

Đoạn AC ($0 \leq z_1 \leq a$):

$$\begin{cases} \varphi_1 = y_1' = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{L^2 - b^2}{6} - \frac{z_1^2}{2} \right) \\ y_1 = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{L^2 - b^2}{6} z_1 - \frac{z_1^3}{6} \right) \end{cases}$$

Đoạn BC ($a \leq z_2 \leq L$):

$$\begin{cases} \varphi_2 = y_2' = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{z_2^2}{2} - \frac{L(z_2 - a)^2}{2b} - \frac{L^2 - b^2}{6} \right) \\ y_2 = \frac{Pb}{LEJ_x} \left(\frac{(z_2 - a)^3}{6b} L + \frac{L^2 - b^2}{6} z_2 - \frac{z_2^3}{6} \right) \end{cases}$$

Tính độ võng lớn nhất trong dầm bằng cách dựa vào điều kiện $y' = 0$,

Giả sử $a > b$. Trước hết ta sẽ xét độ võng lớn nhất trong đoạn nào ở gối tựa A ($z_1 = 0$) góc xoay bằng:

$$\varphi_{1A} = \frac{PbL}{6EJ_x} \left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right) > 0$$

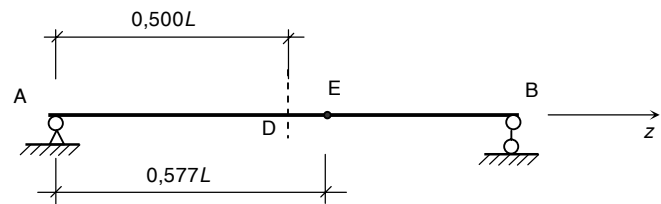
và ở C ($z_1 = a$): $\varphi_{1C} = -\frac{PbL}{3EJ_x} (a - b) < 0$

Như vậy, giữa hai điểm A và C góc xoay φ_1 đổi dấu, nghĩa là sẽ bị triệt tiêu một lần. Điều đó cho thấy độ võng có giá trị lớn nhất trong đoạn AC.

Để tìm hoành độ $z_1(0)$ của mặt cắt ngang có độ võng lớn nhất, ta cho phương trình $\varphi_1 = 0$:

$$\varphi_1[z_1(0)] = \frac{Pb}{LEJ_x} \left[\frac{L - b^2}{6} - \frac{(z_1(0))^2}{2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow z_1(0) = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (o)$$



H.8.9

Sau đó đưa vào biểu thức (l) của độ võng, \Rightarrow giá trị lớn nhất của độ võng

$$y_{\max} = y_{1(z_1(0))} = \frac{\sqrt{3}Pb(L^2 - b^2)}{27EJ_x} \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right)} \quad (p)$$

Các hệ quả:

- Nếu P đặt ở giữa nhịp dầm ($b = L/2$), thì từ (o) và (p), ta được:

$$z_1(0) = \frac{L}{2} = 0,500L; \quad y_{\max} = \frac{PL^3}{48EJ_x}$$

- Khi P ở gần gối B, tức $b \rightarrow 0$ ta có: $z_1(0) = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577L$

Như vậy, nếu tải trọng di chuyển từ trung điểm D giữa nhịp dầm đến gối tựa B (H.8.9) thì hoành độ $z_1(0)$ sẽ biến thiên từ $0,5L$ đến $0,577L$, tức là từ điểm D đến điểm E. Trong thực tế người ta thường quy ước là khi tải trọng P tác dụng ở một vị trí nào đó thì vẫn có thể coi độ võng lớn nhất ở giữa nhịp dầm.

Thí dụ, nếu tải trọng P tác dụng ở vị trí như H.8.8 thì độ võng ở giữa nhịp dầm sẽ bằng:

$$y_{(l/2)} = \frac{Pb}{48EJ_x} (3L^2 - 4b^2)$$

So sánh hai giá trị y_{\max} và $y_{(l/2)}$ thấy hai giá trị này khác nhau và rất ít

Nhận xét: Nếu dầm có nhiều đoạn, cần phải lập phương trình vi phân đường đàn hồi cho nhiều đoạn tương ứng. Ở mỗi đoạn, phải xác định hai hằng số tích phân, nếu dầm có n đoạn thì phải xác định $2n$ hằng số, bài toán trở nên phức tạp nếu số đoạn n càng lớn, vì vậy phương pháp này ít dùng khi tải trọng phức tạp hay độ cứng dầm thay đổi.

8.4 XÁC ĐỊNH ĐỘ VĨNG VÀ GÓC XOAY BẰNG PHƯƠNG PHÁP TẢI TRỌNG GIẢ TẠO (PHƯƠNG PHÁP ĐỒ TOÁN)

◆ Phần trước, đã có liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực (CH. 2):

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} = q \\ \frac{dM_x}{dz} = Q \\ \frac{d^2M_x}{dz^2} = q \end{cases} \quad (a)$$

◆ Đối với việc khảo sát đường đàn hồi của dầm, cũng có phương trình vi phân:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} \quad (b)$$

Đối chiếu các phương trình (a) và (b), ta thấy có sự tương tự sau:

y	M_x
$\frac{dy}{dz} = y'$	$\frac{dM_x}{dz} = Q$
$\frac{d^2y}{dz^2} = y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$	$\frac{d^2M_x}{dz^2} = q$

Ta nhận thấy muốn tính góc xoay y' và độ võng y thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số $\frac{M_x}{EJ_x}$

Tương tự muốn có lực cắt Q_y và mômen uốn M_x thì phải tích phân liên tiếp hai lần hàm số tải trọng q .

Tuy nhiên ở phần trước (CH.2), ta đã tính lực cắt Q_y và mômen uốn M_x theo tải trọng q từ việc khảo sát các phương trình cân bằng.

Như vậy, cũng có thể tính góc xoay y' và độ võng y theo hàm $y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$ mà không cần tích phân. Đó cũng chính là **phương pháp tải trọng giả tạo**.

◆ **Phương pháp tải trọng giả tạo:**

Tưởng tượng một **dầm giả tạo (DGT)** có chiều dài giống **dầm thực (DT)**, trên DGT có **tải trọng giả tạo** q_{gt} giống như biểu đồ $-\frac{M_x}{EJ_x}$ trên dầm thật, thì sẽ có sự tương đương:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} = q_{gt} \quad ; \quad y' = Q_{gt} \quad ; \quad y = M_{gt}$$

trong đó: q_{gt} - Tải trọng giả tạo

Q_{gt} - Lực cắt giả tạo- Lực cắt trong DGT

M_{gt} - Mômen giả tạo- Mômen uốn trong DGT

⇒ Muốn tính góc xoay y' và độ võng y của một **dầm thực (DT)** (dầm đang khảo sát) thì chỉ cần tính lực cắt Q_{gt} và mômen uốn M_{gt} do tải trọng giả tạo tác dụng trên DGT gây ra.

Tuy nhiên, để có được sự đồng nhất đường đàn hồi y và Momen uốn M_{gt} thì điều kiện biên của chúng phải giống nhau: $y' = Q_{gt}$; $y = M_{gt}$ tại bất kỳ điểm trên hai DT và DGT; Ngoài ra nếu xét tại điểm bất kỳ trên dầm phải khảo sát đến sự giống nhau của bước nhảy góc xoay $\Delta y'$ và bước nhảy lực cắt ΔQ_{gt} .

◆ **Cách chọn dầm giả tạo (DGT)**

DGT được suy từ DT với điều kiện là nơi nào trên DT không có độ võng và góc xoay thì điều kiện liên kết của DGT ở những nơi đó phải tương ứng sao cho q_{gt} không gây ra M_{gt} và Q_{gt} .

Chiều dài của DT và DGT là như nhau.

Bảng 8.1 cho một số DGT tương ứng với một số DT thường gặp.

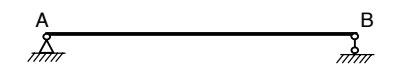
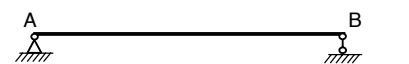
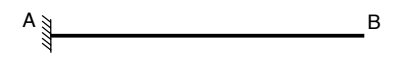
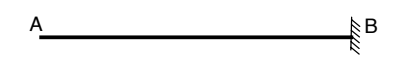
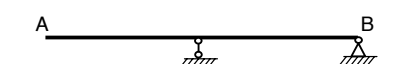
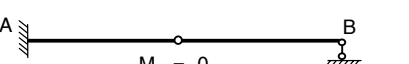
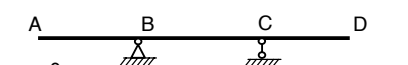
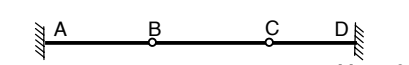
◆ Cách tìm tải trọng giả tạo q_{gt}

Vì $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$, nên q_{gt} bao giờ cũng ngược dấu với mômen uốn M_x . Do đó:

- Nếu: $M_x > 0$ thì $q_{gt} < 0$, nghĩa là nếu biểu đồ M_x nằm phía dưới trục hoành (theo qui ước $M_x > 0$ vẽ phía dưới trục thanh) thì q_{gt} hướng xuống
- Nếu: $M_x < 0$ thì q_{gt} hướng lên.

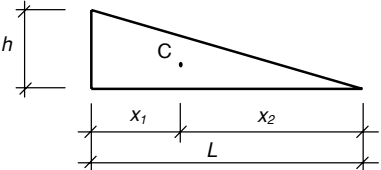
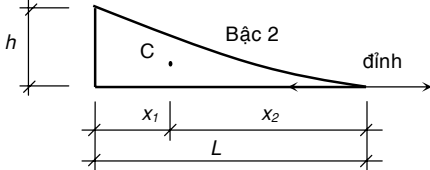
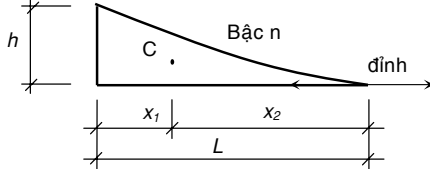
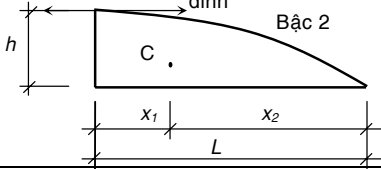
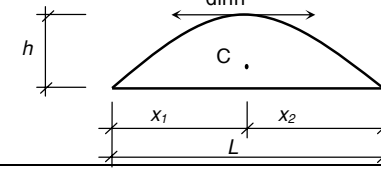
⇔ q_{gt} luôn có chiều hướng theo thớ căng của biểu đồ mô men M_x

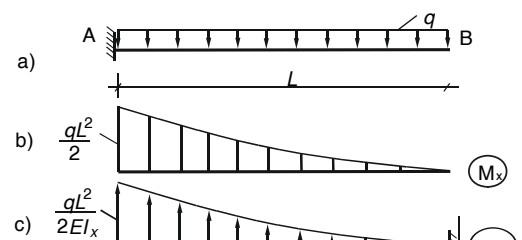
Bảng 8.1

Dầm thực	Dầm giả tạo
 <p> $y = 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ </p>	 <p> $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p>
 <p> $y = 0$ $y \neq 0$ $\varphi = 0$ $\varphi \neq 0$ </p>	 <p> $M_{gt} = 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p>
 <p> $y \neq 0$ $y = 0$ $y = 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi_{tr} = \varphi_{ph}$ </p>	 <p> $M_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{tr} = Q_{ph}$ </p>
 <p> $y \neq 0$ $y = 0$ $y = 0$ $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ $\varphi \neq 0$ </p>	 <p> $M_{gt} \neq 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} = 0$ $M_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ $Q_{gt} \neq 0$ </p>

Ngoài ra trong quá trình tính các nội lực M_{gt} , Q_{gt} của DGT, cần phải tính hợp lực của lực phân bố q_{gt} trên các chiều dài khác nhau. Do đó, để tiện lợi ta xác định vị trí trọng tâm và diện tích Ω của những hình giới hạn bởi các đường cong như bảng 8.2 dưới đây

Bảng 8.2

Hình vẽ	Diện tích (Ω)	Vị trí trọng tâm	
		x_1	x_2
	$\frac{Lh}{2}$	$\frac{L}{3}$	$\frac{2L}{3}$
	$\frac{Lh}{3}$	$\frac{L}{4}$	$\frac{3L}{4}$
	$\frac{Lh}{n+1}$	$\frac{L}{n+2}$	$\frac{L(n+1)}{n+2}$
	$\frac{2Lh}{3}$	$\frac{3L}{8}$	$\frac{5L}{8}$
	$\frac{2Lh}{3}$	$\frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}$



Thí dụ 8.5 Tính độ võng và góc xoay ở

đầu tự do B của dầm công xon chịu tải trọng phân bố đều q (H.8.10a). Độ cứng của dầm $EJ_x = \text{const}$

Giải.

+ Biểu đồ mômen uốn M_x của DT có dạng đường bậc 2 được vẽ trên H.810b.

+ DGT tương ứng với lực phân bố q_{gt} như H.8.10c.

+ Độ võng và góc xoay tại B của DT chính bằng mômen uốn M_{gt} và lực cắt Q_{gt} tại B của DGT. Dùng mặt cắt ở sát B của dầm giả tạo, tính nội lực ở mặt cắt ngang này và được:

$$\varphi_B = Q_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EJ_x} \times L = \frac{qL^3}{6EJ_x};$$

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3} \times \frac{qL^2}{2EJ_x} \times L \times \frac{3}{4}L = \frac{qL^4}{8EJ_x}$$

Thí dụ 8.6 Tính độ võng và

góc xoay tại C của dầm cho

trên H.8.11a. Đoạn dầm AB

có độ cứng $2EJ$, đoạn

dầm BC có độ cứng EJ .

Giải.

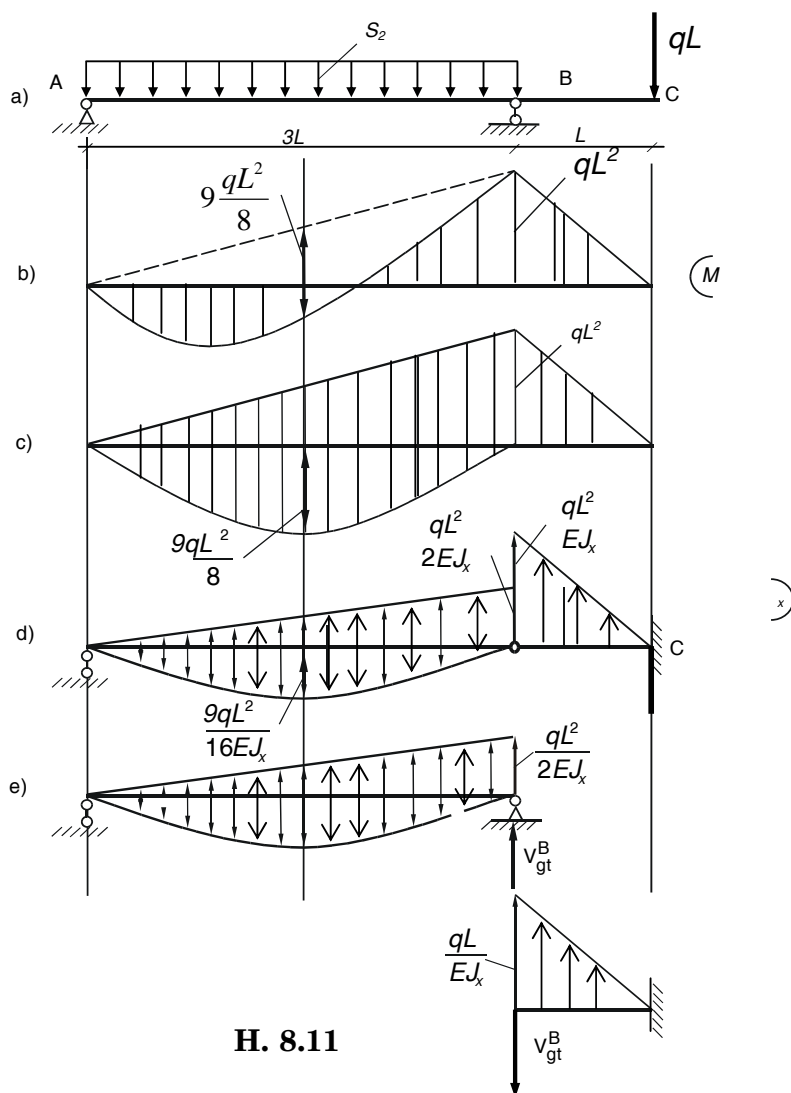
+ Biểu đồ mômen uốn được vẽ trên H.8.11b.

Để dễ dàng trong việc tính toán ta phân tích M_x thành tổng của các biểu đồ mômen uốn có dạng đơn giản như H.8.11c.

+ DGT với lực q_{gt} như H.8.11d.

(chú ý là độ cứng trong AB và BC khác nhau).

+ Tính nội lực ở C của DGT.



H. 8.11

Chia DGT thành hai DGT như H.8.11e, phản lực ở B của DGT AB là:

$$V_{gt}^B = \frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

Phản lực này tác dụng lên DGT BC và dễ dàng tính được:

$$Q_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x} + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EJ_x} = +\frac{7}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

$$M_{gt}^C = -\frac{1}{16} \frac{qL^3}{EJ_x} L + \frac{1}{2} L \frac{qL^2}{EJ_x} \frac{2}{3} L = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EJ_x}$$

⇒ độ võng và góc xoay tại C của DT

$$y_C = M_{gt}^C = \frac{13}{48} \frac{qL^4}{EJ_x}; \quad \varphi_C = Q_{gt}^C = \frac{7}{16} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

8.5 BÀI TOÁN SIÊU TÍNH (BTST)

Tương tự các bài toán về thanh chịu kéo, nén đúng tâm, ta còn có các BTST về uốn.

Đó là các bài toán mà ta không thể xác định toàn bộ nội lực hoặc phản lực chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học, vì số ẩn số phải tìm của bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học có được.

Để giải được các BTST, cần tìm thêm một số phương trình phụ dựa vào điều kiện biến dạng của dầm.

Xét cụ thể thí dụ sau:

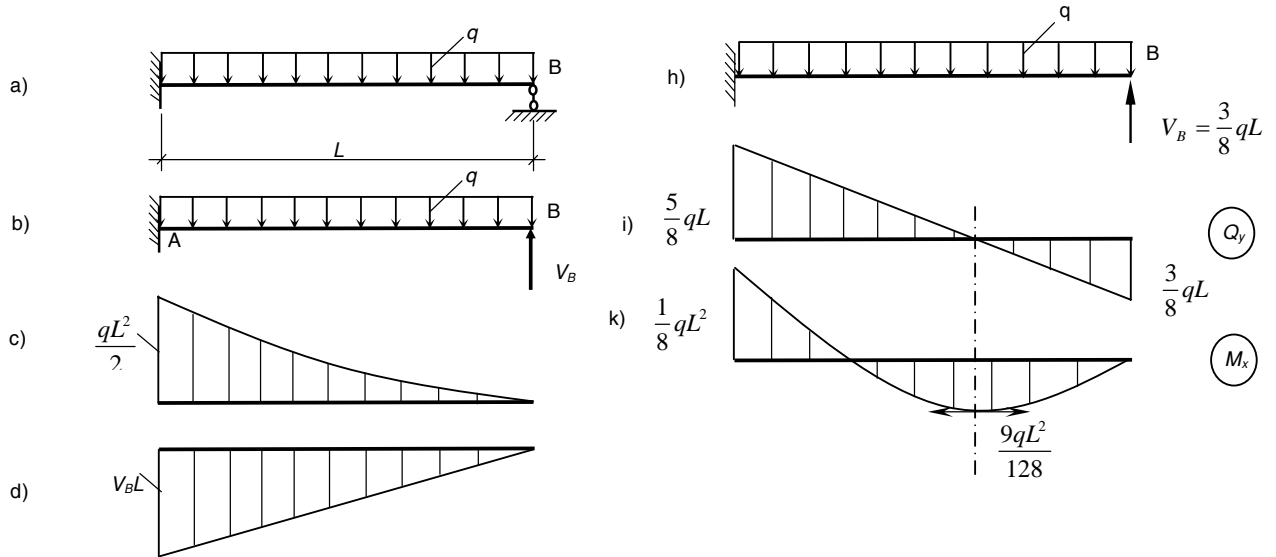
Thí dụ 8.6 Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm như H.8.12a. Biết $EJ =$ hằng số.

Giải.

+ Dầm đã cho có bốn phản lực cần tìm (ba ở ngàm A và một ở gối tựa B). Ta chỉ có ba phương trình cân bằng tĩnh học, nên cần tìm thêm một phương trình phụ về điều kiện biến dạng của dầm.

+ Tưởng tượng bỏ gối tựa ở đầu B và thay vào đó một phản lực V_B (H.8.12b), ta được một hệ mới. Hệ này chỉ có thể làm việc giống như hệ trên khi V_B phải có trị số và chiều thế nào để độ võng tại B, do tải trọng q và V_B sinh ra, phải bằng không

⇔ Điều kiện biến dạng (chuyển vị): $y_B(q, V_B) = 0$



+ Ta tính độ võng tại B bằng phương pháp tải trọng giả tạo (hay một phương pháp khác).

Biểu đồ mômen uốn của dầm ở H.8.12b do tải trọng q và phản lực V_B gây ra vẽ như H.8.12c,d, DGT và q_{gt} như H.8.12 e, g. Ta có:

Độ võng y_B của hệ 8.12b chính là Mômen giả tạo tại B của DGT

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3} L \frac{qL^2}{2EJ} \times \frac{3}{4} L - \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EJ} \times \frac{2}{3} L$$

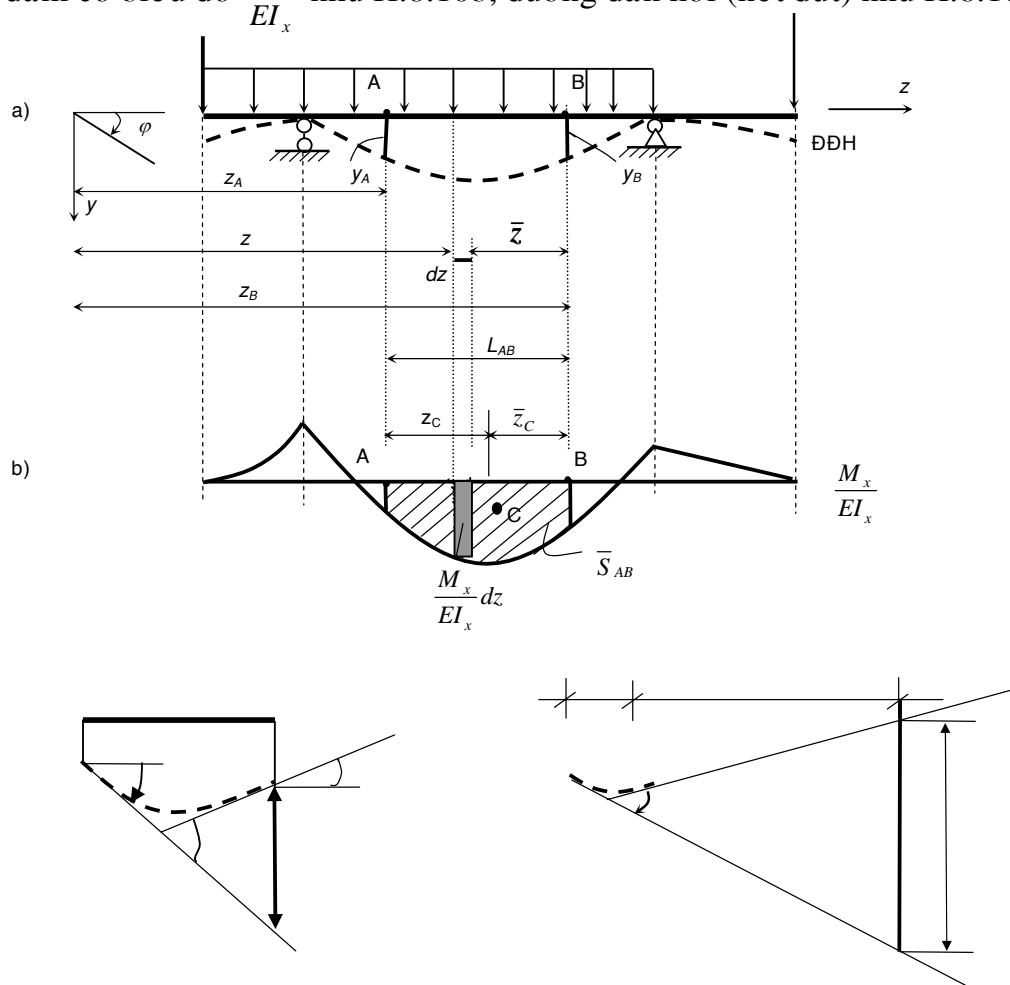
$$\text{Điều kiện độ võng } y_B = 0, \Rightarrow V_B = \frac{3}{8} qL$$

Sau khi tìm được V_B , dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực của dầm đã cho như H.8.12 i, k.

7.4. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH MÔMEN

1. Nội dung phương pháp

Xét dầm có biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ như H.8.10b, đường đàn hồi (nét đứt) như H.8.10a.



H.8.10 Phương pháp diện tích mô men

Xét đoạn dầm AB: $d\varphi = -\frac{M_x}{EI_x} dz$, suy ra: $\int_{z_A}^{z_B} d\varphi = \int_{z_A}^{z_B} -\frac{M_x}{EI_x} dz$

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{AB} = -\bar{S}_{AB} \quad (8.18)$$

với \bar{S}_{AB} là diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ gồm giữa hai mặt cắt A và B.

Định lý 1. Độ thay đổi góc xoay giữa hai mặt cắt của một dầm (thí dụ giữa A và B) thì bằng dấu trừ diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ giữa hai mặt cắt ấy.

Từ hình 8.10d: $dt = \bar{z}d\varphi = -\bar{z}\frac{M_x}{EI_x} dz$ suy ra: $t_{BA} = \int_{z_A}^{z_B} dt = \int_{z_A}^{z_B} -\bar{z}\frac{M_x}{EI_x} dz = -\bar{z}_C \bar{S}_{AB}$ (8.20)

\bar{z}_C là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích \bar{S}_{AB} đến B

Định lý 2. Độ sai lệch giữa tiếp tuyến ở một điểm B trên đường đàn hồi với một tiếp tuyến ở một điểm A khác cũng trên đường đàn hồi bằng với dấu trừ mô men

tính của diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ đối với đường thẳng đứng đi qua B.

Từ H.8.10d ta có:

$$y_B = y_A + \varphi_A L_{AB} + t_{BA} = y_A + \varphi_A (z_B - z_A) + t_{BA}$$

$$y_B = y_A + \varphi_A (z_B - z_A) - \bar{z}_C \bar{S}_{AB} \quad (8.21)$$

(7.21) chính là công thức dùng để xác định độ võng của điểm B nếu biết độ võng của một điểm A ($z_B > z_A$) và biểu đồ $\frac{M_x}{EI_x}$ giữa hai điểm này.

Từ (8.21) có thể tính độ võng của điểm A khi biết độ võng của điểm B ($z_B > z_A$).

$$\varphi_A = \varphi_B + \bar{S}_{AB} \quad \text{và} \quad y_A = y_B - \varphi_A (z_B - z_A) + \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

với: $\bar{z}_C = L_{AB} - z_C$

ta viết: $y_A = y_B - (\varphi_B + \bar{S}_{AB}) L_{AB} + (L_{AB} - z_C) \bar{S}_{AB}$

Khai triển và rút gọn, ta được: $y_A = y_B - \varphi_B L_{AB} - z_C \bar{S}_{AB} \quad (8.22)$

z_C - là khoảng cách từ trọng tâm C của \bar{S}_{AB} kể từ A.

Thí dụ 8.5. Dùng phương pháp diện tích mô men xác định góc xoay ở đầu trái A và độ võng ở điểm D giữa dầm (H.8.11). $EI_x =$ hằng số.

Giải. Theo định lý 1, công thức (7.4), xét hai điểm A ($z = 0$) và D ($z = L/2$)

$$\varphi_D = \varphi_A - \bar{S}_{AD}$$

Chú ý rằng $\varphi_D = 0$ vì bài toán đối xứng và \bar{S}_{AD} có thể phân chia thành $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$.

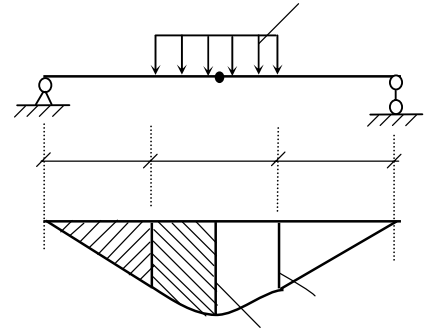
ta suy ra: $\varphi_A - (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) = 0$

$$\varphi_A = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3 = \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x}$$

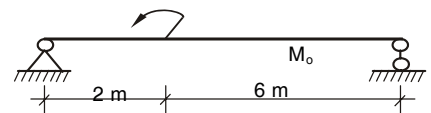
Góc xoay của mặt cắt A thuận chiều kim đồng hồ.

Áp dụng công thức (8.21), ta viết

$$y_D = y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} = 0 + \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EI_x} \times \frac{L}{2} - \left(\frac{-(1)}{z_C} \bar{S}_1 + \frac{-(2)}{z_C} \bar{S}_2 + \frac{-(3)}{z_C} \bar{S}_3 \right) = \frac{77}{11664} \times \frac{qL^2}{EI_x}$$



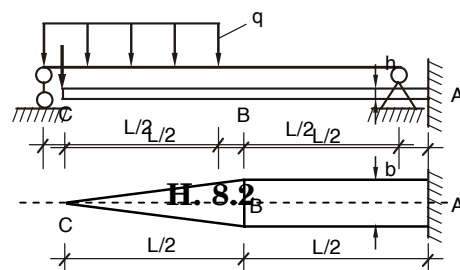
BÀI TẬP CHƯƠNG 8



8.1 Xác định đường đàn hồi dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, biết $M_0 = 20 \text{ kNm}$, EJ không đổi. H.8.1.

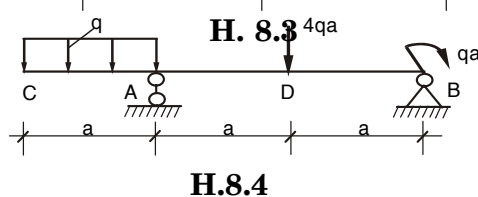
8.2 Xác định góc xoay ở hai đầu dầm và độ võng tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn, EJ không đổi. H.8.2.

8.3 Dầm mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như H.8.3. Tính độ võng tại dầm tự do và góc xoay tại mặt cắt ngang giữa dầm.

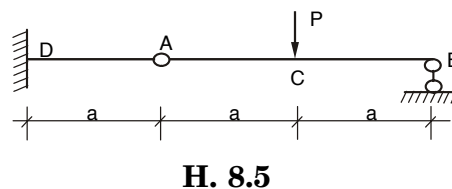


8.4 Dầm có độ cứng không đổi như H.8.4. Xác định:

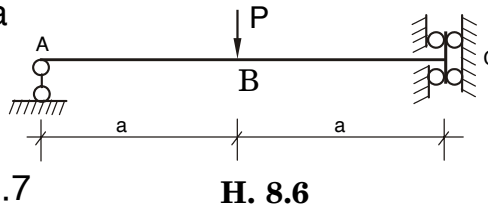
- Độ võng và góc xoay tại C
- Góc xoay tại A và B
- Độ võng tại mặt cắt D



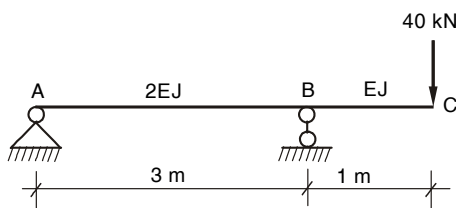
8.5 Tìm độ võng tại mặt cắt C, góc xoay bên trái và phải khớp A của dầm như H.8.5, biết độ cứng $EJ = \text{hằng}$.



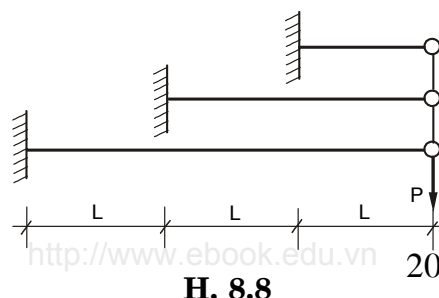
8.6 Tìm độ võng tại B, góc xoay tại A của dầm như H.8.6, biết $EJ = \text{hằng}$.



8.7 Xác định độ võng và góc xoay tại C. H.8.7

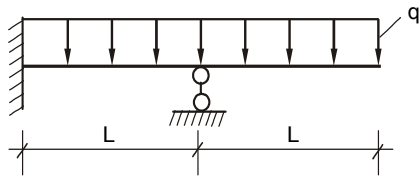


8.8 Một hệ thống gồm ba công xon, đầu tự do được liên kết với nhau bằng những giằng cứng như H.8.8. Tính ứng suất cực đại ở mỗi dầm khi có lực treo ở

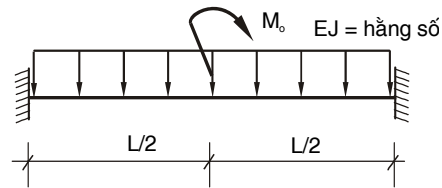


dầm, biết độ cứng EJ là hằng số.

8.9 Vẽ biểu đồ nội lực của dầm siêu tĩnh như H.8.9. Viết phương trình đường đàn hồi, biết độ cứng EJ là hằng số.



H. 8.9



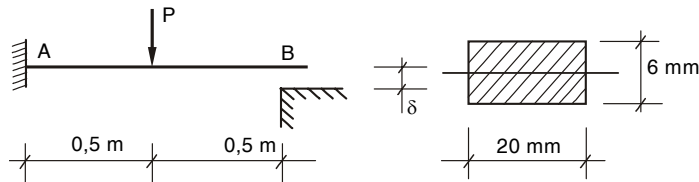
H. 8.10

8.10. Xác định phản lực của dầm siêu tĩnh như H.8.10.

8.11. Thanh thép dài 1 m, mặt cắt chữ nhật 2036 mm, ngàm ở đầu A, chịu lực $P = 30$ N đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm.

Biết $[\sigma] = 16$ kN/cm². Ở đầu B có khe hở $\delta = 20$ mm.

Cho $E = 2 \cdot 10^4$ kN/cm².

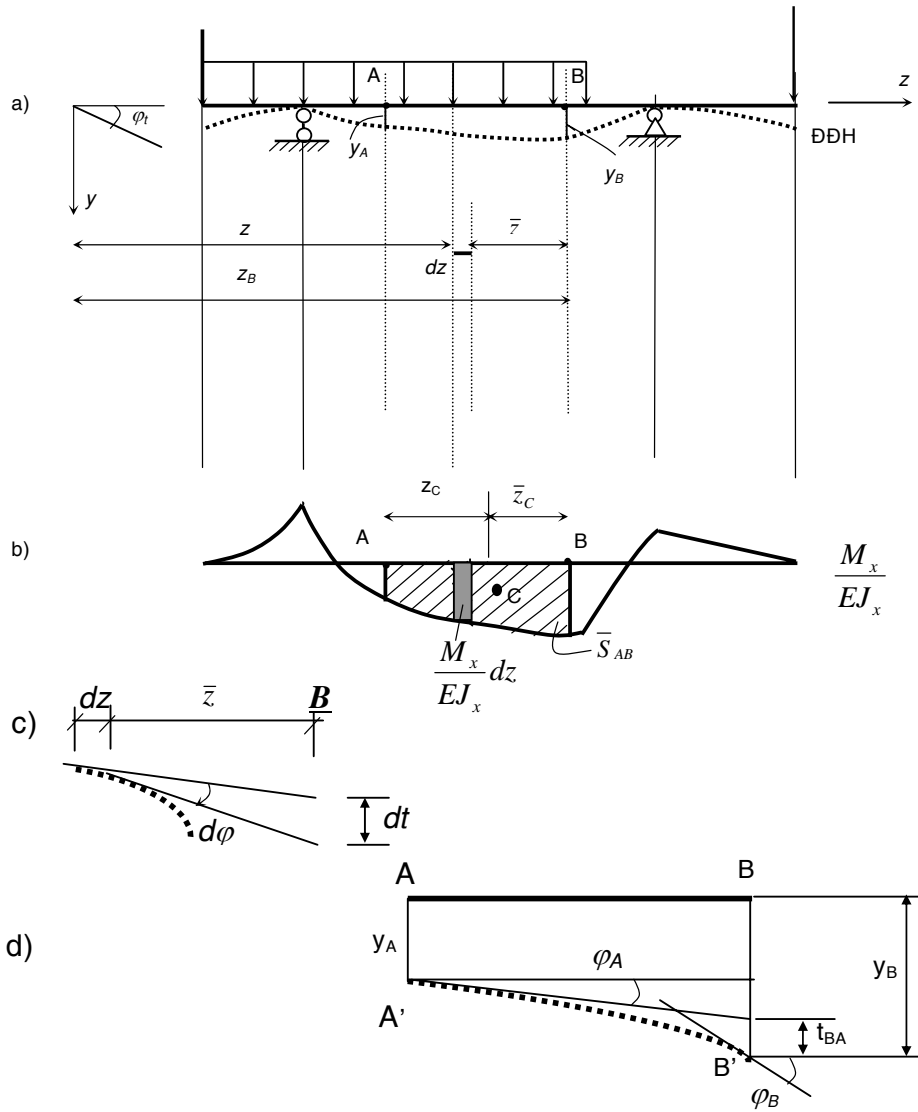


H. 8.11

8.5. PHƯƠNG PHÁP DIỆN TÍCH MÔMEN (DTMM)

1. Nội dung phương pháp

Xét dầm chịu uốn có biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ như H.8.13b, đường đàn hồi (nét đứt) như H.8.13a.



H.8.13

♦ Xét đoạn dầm AB, ta đã có:

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x} \Leftrightarrow \frac{dy'}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{M_x}{EJ_x} \Rightarrow d\varphi = -\frac{M_x}{EJ_x} dz$$

$$\Rightarrow \int_{z_A}^{z_B} d\varphi = \int_{z_A}^{z_B} -\frac{M_x}{EJ_x} dz$$

$$\varphi_B - \varphi_A = \varphi_{AB} = -\bar{S}_{AB} \quad (8.4)$$

với \bar{S}_{AB} là diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ gồm giữa hai mặt cắt A và B.

Định lý 1. Độ thay đổi góc xoay giữa hai mặt cắt của một dầm (thí dụ giữa A và B) thì bằng dấu trừ diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ giữa hai mặt cắt ấy.

♦ Từ H.8.13c ta có thể viết:

$$dt = \bar{z} d\varphi = -\bar{z} \frac{M_x}{EJ_x} dz$$

suy ra:
$$t_{BA} = \int_{z_A}^{z_B} dt = \int_{z_A}^{z_B} -\bar{z} \frac{M_x}{EJ_x} dz = -\bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

\bar{z}_C là khoảng cách từ trọng tâm của diện tích \bar{S}_{AB} đến B

Định lý 2. Độ sai lệch giữa tiếp tuyến ở một điểm B trên đường đàn hồi với một tiếp tuyến ở một điểm A khác cũng trên đường đàn hồi bằng với dấu trừ mômen tĩnh của diện tích của biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ đối với đường thẳng đứng đi qua B.

Từ H.8.13d ta có:

$$\begin{aligned} y_B &= y_A + \varphi_A L_{AB} + t_{BA} \\ &= y_A + \varphi_A L_{AB} - \bar{z}_C \bar{S}_{AB} \end{aligned} \quad (8.5)$$

(8.5) chính là công thức dùng để xác định độ võng của điểm B nếu biết độ võng của một điểm A ($z_B > z_A$) và biểu đồ $\frac{M_x}{EJ_x}$ giữa hai điểm này.

♦ Từ (8.5) ta cũng có thể tính độ võng của điểm A khi biết độ võng của điểm B ($z_B > z_A$). Thật vậy theo phần trên ta có:

$$\varphi_A = \varphi_B + \bar{S}_{AB}$$

và:
$$y_A = y_B - \varphi_A L_{AB} + \bar{z}_C \bar{S}_{AB}$$

với:
$$\bar{z}_C = L_{AB} - z_C$$

ta viết:
$$y_A = y_B - (\varphi_B + \bar{S}_{AB}) L_{AB} + (L_{AB} - z_C) \bar{S}_{AB}$$

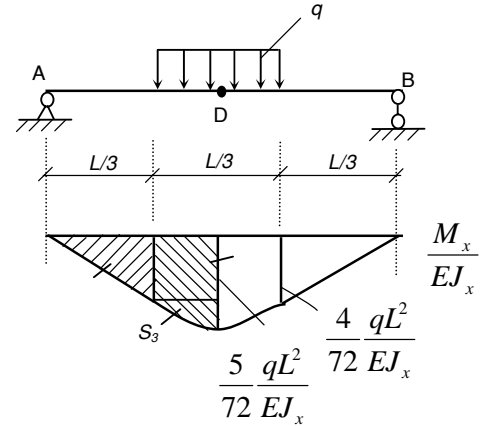
Khai triển và rút gọn, ta được:

$$y_A = y_B - \varphi_B L_{AB} - z_C \bar{S}_{AB} \quad (8.5)'$$

trong đó: z_C - là khoảng cách từ trọng tâm C của \bar{S}_{AB} kể từ A.

- ◆ Dùng phương pháp DTMM cần biết diện tích và trọng tâm của một số hình (bảng 8.2).

Thí dụ 8.7. Dùng phương pháp DTMM xác định góc xoay ở đầu trái A và độ võng ở điểm D giữa dầm (H.8.14). $EJ_x =$ hằng số.



H.8.14

Giải.

+ Theo định lý 1, công thức (8.4), xét hai điểm A ($z = 0$) và D ($z = L/2$) :

$$\varphi_D = \varphi_A - \bar{S}_{AD}$$

Chú ý rằng $\varphi_D = 0$ vì bài toán đối xứng và \bar{S}_{AD} có thể phân chia thành $\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$ (H.8.14).

$$\Rightarrow \varphi_A - (\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3) = 0$$

$$\varphi_A = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \bar{S}_3$$

$$= \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EJ_x} \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{3} + \frac{4}{72} \times \frac{qL^2}{EJ_x} \times \frac{L}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{6} = \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x}$$

Góc xoay của mặt cắt A thuận chiều kim đồng hồ.

+ Áp dụng công thức (8-5), ta viết

$$y_D = y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - z_C \bar{S}_{AD}$$

$$= 0 + \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \left(z_C^{(1)} \bar{S}_1 + z_C^{(2)} \bar{S}_2 + z_C^{(3)} \bar{S}_3 \right)$$

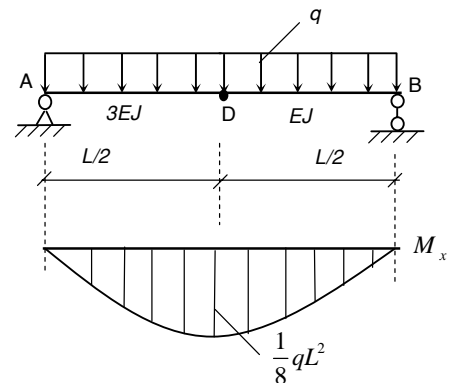
$$= \frac{13}{648} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \left[\left(\frac{L}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{L}{3} \right) \times \frac{1}{2} \times \frac{4qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{L}{6} \times \frac{L}{6} \times \frac{4qL^2}{72EJ_x} + \frac{3}{8} \times \frac{L}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{qL^2}{72EJ_x} \times \frac{L}{6} \right]$$

$$= \frac{77}{11664} \times \frac{qL^2}{EJ_x}$$

Độ võng mặt cắt D hướng xuống dưới.

Thí dụ 8.8

Xác định góc xoay ở A,B và độ võng ở D của dầm cho như H.8.15



$$\bar{S}_1 = \frac{1}{72} \frac{qL^3}{EJ_x} \quad \bar{S}_2 = \frac{1}{24} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

$$\frac{1}{24} \frac{qL^2}{EJ_x} \quad \frac{1}{8} \frac{qL^2}{EJ_x}$$

H.8.15

Giải

+ Biểu đồ mô men uốn M_x và $\frac{M_x}{EJ}$

vẽ như H.8.15

+ Theo công thức 8.5, ta có:

$$y_B = y_A + \varphi_A L - \bar{z}_C \times \bar{S}_{AB}$$

$$0 = 0 + \varphi_A L - \bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 - \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2$$

$$\Rightarrow \varphi_A = \frac{1}{L} (\bar{z}_C^{(1)} \times \bar{S}_1 + \bar{z}_C^{(2)} \times \bar{S}_2)$$

\Rightarrow

$$= \frac{1}{L} \left[\left(\frac{3L}{8} + \frac{L}{2} \right) \times \frac{qL^3}{72EJ_x} + \frac{5L}{8} \times \frac{qL^3}{24EJ_x} \right] = \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EJ_x}$$

+ Bây giờ áp dụng định lý 1, công thức (8.4)

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \varphi_A - \bar{S}_{AB} = \varphi_A - \bar{S}_1 - \bar{S}_2 \\ &= \frac{13}{576} \frac{qL^3}{EJ_x} - \frac{qL^3}{72EJ_x} - \frac{qL^3}{24EJ_x} = -\frac{19}{576} \frac{qL^3}{EJ_x} \end{aligned}$$

Góc xoay mặt cắt B ngược chiều kim đồng hồ.

+ Cuối cùng xác định độ võng ở D bằng công thức 8.5 áp dụng cho hai điểm A và D

$$\begin{aligned} y_D &= y_A + \varphi_A \frac{L}{2} - \bar{z}_C \bar{S}_{AD} \\ &= 0 + \frac{13}{576} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \times \frac{L}{2} - \frac{3}{8} \times \frac{L}{2} \times \frac{qL^3}{72EJ_x} = \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EJ_x} \end{aligned}$$

+ Ta có thể kiểm tra lại kết quả của y_D bằng cách khảo sát đoạn DB, áp dụng (8.5)'

$$\begin{aligned} y_D &= y_B - \varphi_B \frac{L}{2} - Z_C \bar{S}_{BD} \\ &= 0 - \left(-\frac{19}{576} \times \frac{qL^3}{EJ_x} \right) \times \frac{L}{2} - \frac{3}{8} \times \frac{L}{2} \times \frac{qL^3}{24EJ_x} = \frac{5}{576} \times \frac{qL^4}{EJ_x} \end{aligned}$$

8.5 BÀI TOÁN SIÊU TĨNH (BTST)

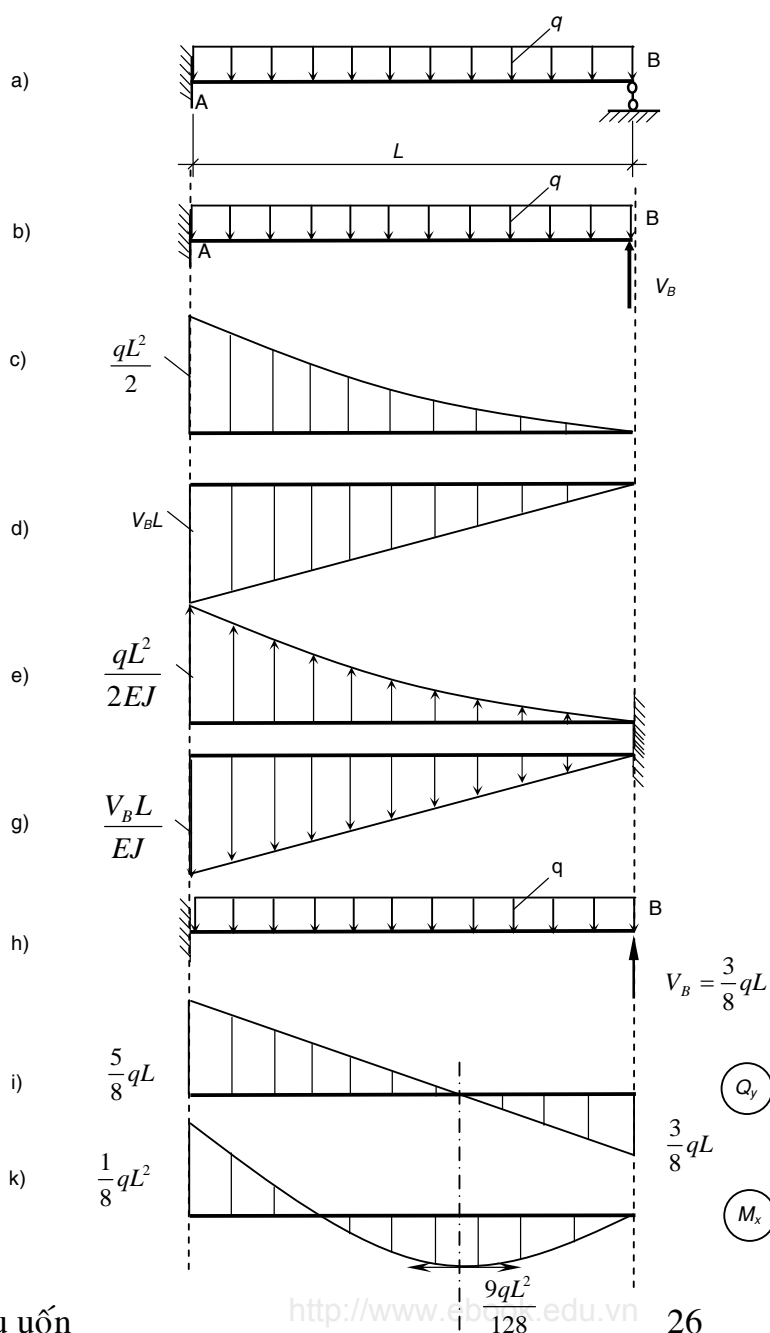
Tương tự các bài toán về thanh chịu kéo, nén đúng tâm, ta còn có các BTST về uốn.

Đó là các bài toán mà ta không thể xác định toàn bộ nội lực hoặc phản lực chỉ với các phương trình cân bằng tĩnh học, vì số ẩn số phải tìm của bài toán lớn hơn số phương trình cân bằng tĩnh học có được.

Để giải được các BTST, cần tìm thêm một số phương trình phụ dựa vào điều kiện biến dạng của dầm.

Xét cụ thể thí dụ sau:

Thí dụ 8.10. Vẽ biểu đồ nội lực cho dầm như H.8.16a.



Biết $EJ = \text{const.}$

Giải

Giải.

+ Dầm đã cho có 4 phản lực cần tìm (ba ở ngàm A và một ở gối tựa B). Ta chỉ có 3 phương trình cân bằng tĩnh học, nên cần tìm thêm 1 phương trình phụ về điều kiện biến dạng của dầm.

+ Tưởng tượng bỏ gối tựa ở đầu B và thay vào đó một phản lực V_B (H.8.12b), ta được một hệ mới. Hệ này chỉ có thể làm việc giống như hệ trên khi V_B phải có trị số và chiều thế nào để độ võng tại B, do tải trọng q và V_B sinh ra, phải bằng không

⇔ Điều kiện biến dạng (chuyển vị): $y_B(q, V_B) = 0$

+ Ta tính độ võng tại B bằng phương pháp tải trọng giả tạo (hay một phương pháp khác).

Biểu đồ mômen uốn của dầm ở H.8.16b do tải trọng q và phản lực V_B gây ra vẽ như H.8.16c,d, DGT và q_{gt} như H.8.16 e, g. Ta có:

Độ võng y_B của hệ 8.16b chính là Mômen giả tạo tại B của DGT

$$y_B = M_{gt}^B = \frac{1}{3}L \frac{qL^2}{2EJ} \times \frac{3}{4}L - \frac{1}{2}L \frac{V_B L}{EJ} \times \frac{2}{3}L$$

Điều kiện độ võng $y_B = 0, \Rightarrow V_B = \frac{3}{8}qL$

Sau khi tìm được V_B , dễ dàng vẽ được các biểu đồ nội lực của dầm đã cho như H.8.16 i, k.

Thí dụ 8.11. Tính phản lực V_B của dầm siêu tĩnh như H.8.17a.

Cho biết : $EJ_x = \text{hằng}$

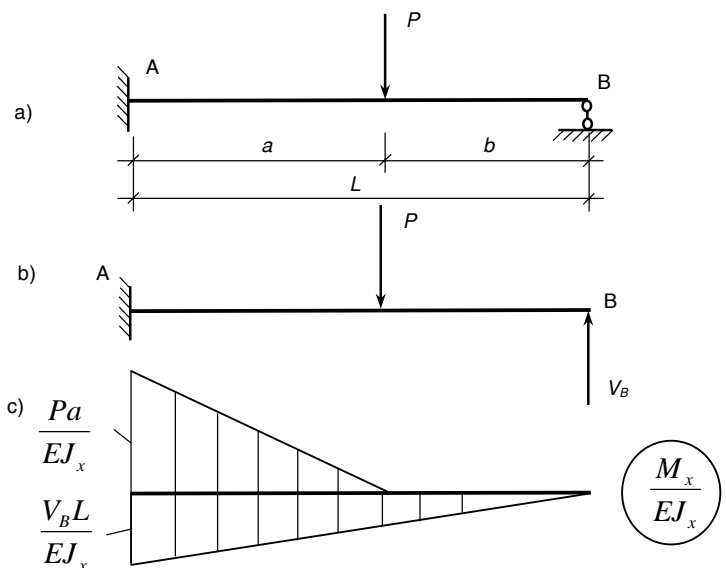
Giải.

Tương tự thí dụ trên, cũng có điều kiện $y_B = 0$

Tính y_B bằng phương pháp diện tích mô men

Biểu đồ M_x/EJ_x do tải trọng P và phản lực V_B được vẽ H.8.17c

Áp dụng công thức (8.5), ta



H.8.17

có:

$$y_A = y_B - \varphi_A L + \bar{z} \bar{s}_{AB}$$

$$0 = y_B - 0 \times L + \left[-\left(L - \frac{a}{3}\right) \frac{1}{2} a \frac{Pa}{EJ} + \frac{2}{3} L \frac{1}{2} L \frac{V_B L}{EJ} \right]$$

$$y_A = -\frac{Pa^2}{2EJ} \left(\frac{3L-a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EJ}$$

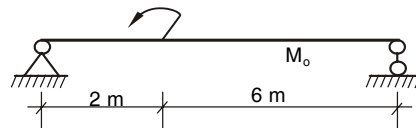
Điều kiện $y_B = 0$ cho ta

$$0 = -\frac{Pa^2}{2EJ} \left(\frac{3L-a}{3} \right) + \frac{V_B L^3}{3EJ}$$

suy ra $V_B = \frac{Pa^2}{2L^3} (3L-a)$

BÀI TẬP CHƯƠNG 8

8.1. Xác định đường đàn hồi dầm bằng phương pháp tích phân không định

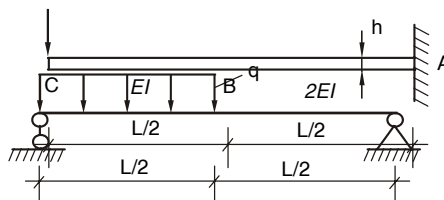


H.8.19

hạn, biết $M_o = 20 \text{ kNm}$

8.2. Xác định góc xoay ở hai đầu dầm và độ võng tại giữa dầm bằng phương pháp tích phân không định hạn

8.3. Dầm mặt cắt ngang thay đổi và chịu lực như H.8.21. Tính độ võng tại dầm tự do và góc tại mặt cắt ngang giữa dầm.

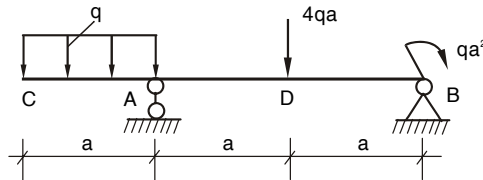


H.8.20

H.8.21

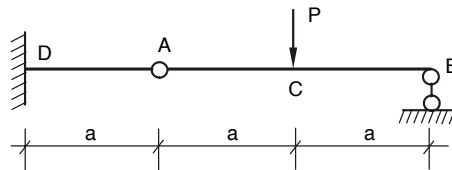
8.4. Dầm có độ cứng không đổi. Xác định:

- Độ võng và góc xoay tại C
- Góc xoay tại A và B
- Độ võng tại mặt cắt D



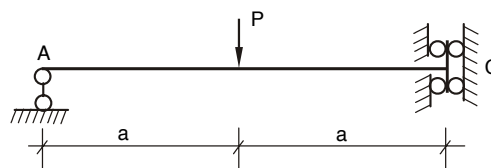
H.8.22

8.5. Tìm độ võng tại mặt cắt C, góc xoay bên trái và phải khớp A của dầm



như H.8.23.

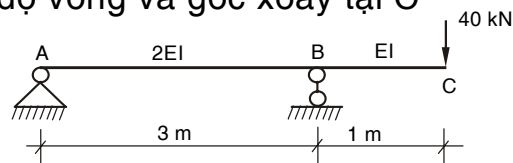
H.8.23



8.6. Tìm độ võng tại B, góc xoay tại A của dầm như H.8.24.

H.8.24

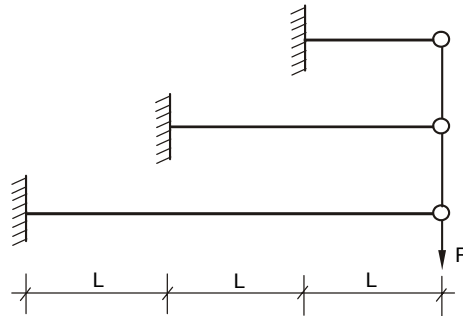
8.7. Xác định độ võng và góc xoay tại C



H.8.25

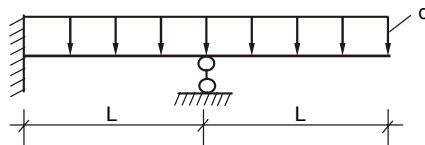
8.8. Một hệ thống gồm ba công xon, Dầm tự do được liên kết với nhau

bằng những găng cứng. Tính ứng suất cực đại ở mỗi dầm khi có lực P treo ở dầm



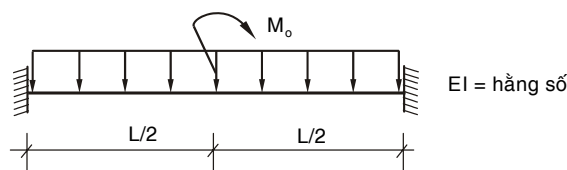
H.8.26

8.9. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm siêu tĩnh như H.8.27. Viết phương trình đường đàn hồi.



H.8.27

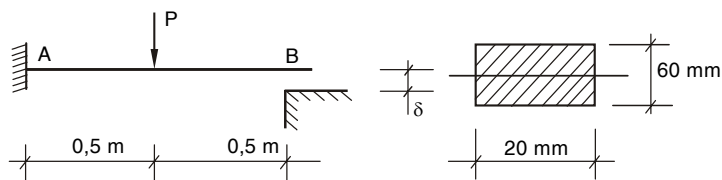
8.10. Xác định phản lực của dầm siêu tĩnh như H.8.28.



H.8.28

8.11. Thanh thép dài 1 m, mặt cắt chữ nhật 2036 mm, ngàm ở dầm A, chịu lực $P = 30$ N đặt ở giữa nhịp. Kiểm tra độ bền của dầm.

Biết $[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2$. Ở dầm B có khe hở $\delta = 20 \text{ mm}$, cho $E = 2.10^5$



MN/m²

H.8.29