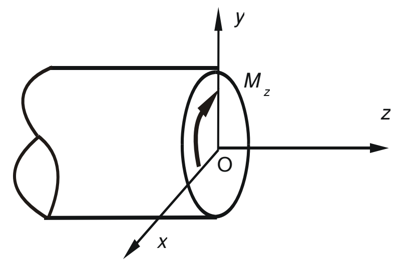
Chương 9
XOẮN THUẦN TÚY

I. KHÁI NIỆM

1- Định nghĩa: Thanh chịu xoắn thuần túy khi trên các mặt cắt ngang chỉ có một thành phần **nội lực là mômen xoắn M_z** (H.9.1).



H. 9.1

Dấu của M_z : $M_z > 0$ khi từ ngoài mặt cắt nhìn vào thấy M_z quay thuận kim đồng hồ

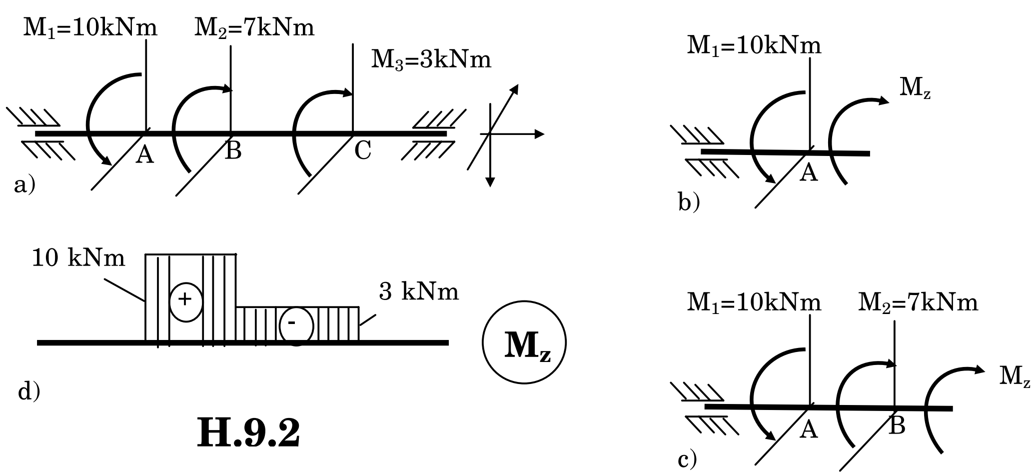
Ngoại lực: Gồm các ngẫu lực, mômen xoắn M_z, nằm trong mặt phẳng vuông góc trục thanh.

Thực tế: trục truyền động, thanh chịu lực không gian, dầm đỡ ôvăng...

2- Biểu đồ nội lực mômen xoắn M_z

Biểu đồ mômen xoắn được vẽ bằng cách xác định nội lực theo phương pháp mặt cắt và điều kiện cân bằng tĩnh học: $\sum M/_{OZ} = 0$.

Thí dụ 1: Vẽ biểu đồ M_z cho trục truyền động chịu tác dụng của ba ngẫu lực xoắn (mômen xoắn) (H.9.2.a).



H.9.2

Giải: Thực hiện một mặt cắt ngang trong đoạn AB, xét cân bằng phần trái (H.9.2.b), dễ thấy rằng để cân bằng ngoại lực là ngẫu lực xoắn M_1 , trên tiết diện đang xét phải có nội lực là mômen xoắn M_z :

$$\Sigma M /z = 0 \Rightarrow \ M_z - 10 = 0 \Rightarrow M_z = 10\text{kNm}$$

Tương tự, cắt qua đoạn BC, xét phần trái (H.9.2.c):

$$\Sigma M /z = 0 \Rightarrow \quad M_z + 7 - 10 = 0 \Rightarrow M_z = 3$$

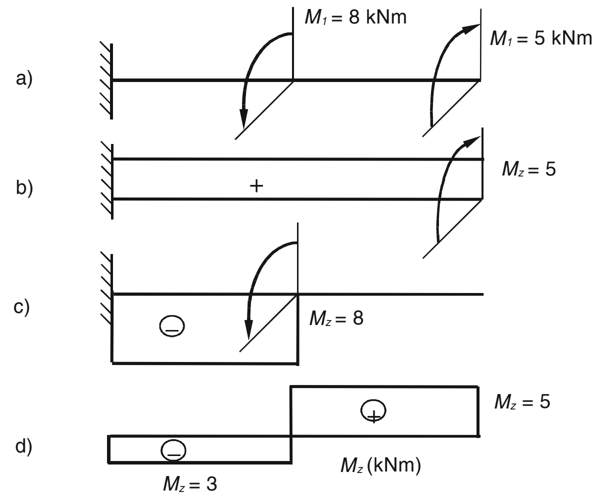
Mômen tại các tiết diện của hai đoạn đầu thanh bằng không, biểu đồ nội lực vẽ ở H.9.2.d.

Thí dụ 2: Vẽ biểu đồ mômen xoắn M_z (H.9.3.a)

Giải: Phân tích thành tổng của hai trường hợp tác dụng riêng lẻ (H.9.3b và H.9.3c).

Trong mỗi trường hợp, ngoại lực là một ngẫu lực gây xoắn, do đó nội lực trong thanh cũng là mômen xoắn. Biểu đồ nội lực của từng thanh vẽ ngay trên H.9.3.b,c.

Biểu đồ M_z của thanh là tổng đại số hai biểu đồ trên (H.9.3.d).



H.9.3

Nhận xét: Dấu của nội lực là dương khi từ ngoài nhìn vào đầu thanh thấy ngoại lực quay thuận chiều kim đồng hồ và ngược lại.

3- Công thức chuyển đổi công suất động cơ ra ngẫu lực xoắn (mômen xoắn ngoại lực) trên trục

Khi tính toán các trục truyền động, thường ta chỉ biết công suất truyền của môtơ tính bằng mã lực hay kilôóat và tốc độ trục quay bằng vòng/phút, do đó cần chuyển đổi công suất truyền ra ngẫu lực xoắn tác dụng lên trục.

Giả sử có một ngẫu lực xoắn M_o (đơn vị là N.m) tác dụng làm trục quay một góc α (radian) trong thời gian t, công sinh ra là:

$$A = M_o.\alpha \qquad \text{(i)}$$

công suất là: $$W = \frac{A}{t} = \frac{M_o\alpha}{t} = M_o\frac{\alpha}{t} = M_o\omega \qquad \text{(ii)}$$

trong đó: ω - là vận tốc góc (rad/s), đơn vị của công suất là N.m/s.

Gọi n là số vòng quay của trục trong một phút (vòng/phút), ta có:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \qquad \text{(iii)}$$

từ (ii) và (iii) $\Rightarrow$

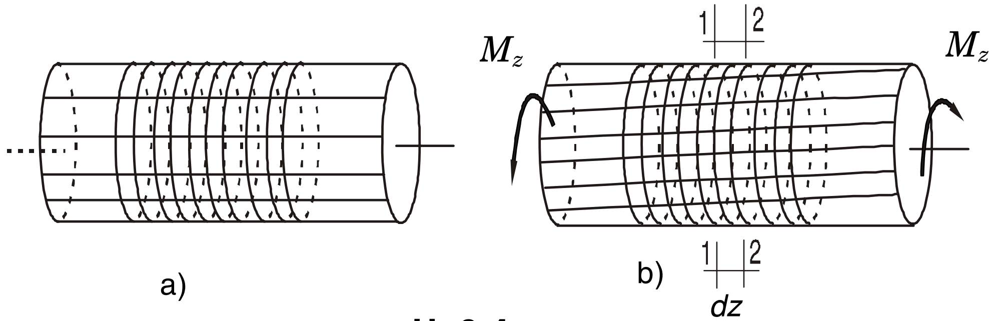
a) Nếu W tính bằng mã lực (CV, HP) ;1mã lực = 750N.m/s = 0,736 kW:

$$M_o = \frac{30W}{\pi n} = \frac{30.750.W}{\pi n} = 7162\frac{W}{n}\,(\text{Nm}) \qquad (9.1)$$

b) Nếu W tính bằng kilôwat (KW), 1 KW $\approx$ 1020 N.m/s:

$$M_o = \frac{30W}{\pi.n} = \frac{30.1020.W}{\pi n} = 9740\frac{W}{n}(\text{Nm}) \qquad (9.2)$$

II. XOẮN THUẦN TUÝ THANH THẲNG TIẾT DIỆN TRÒN



H. 9.4

1- Thí nghiệm - Nhận xét

Lấy một thanh thẳng tiết diện tròn, trên mặt ngoài có vạch những đường song song và những đường tròn thẳng góc với trục, tạo thành lưới ô vuông (H.9.4.a). Tác dụng lên hai đầu thanh hai ngẫu lực xoắn M_z ngược chiều, ta thấy trục thanh vẫn thẳng, chiều dài thanh không đổi, những đường tròn thẳng góc với trục vẫn tròn và thẳng góc với trục, những đường song song với trục thành những đường xoắn ốc, lưới ô vuông thành lưới bình hành (H.9.4.b).

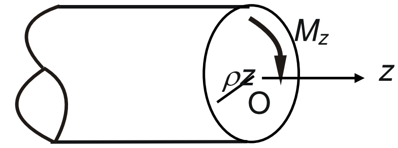
2- Các giả thiết

a) Mặt cắt ngang vẫn phẳng, thẳng góc với trục thanh và khoảng cách không đổi trong quá trình biến dạng,

b) Các bán kính vẫn thẳng và không đổi trong quá trình biến dạng,.

c) các thớ dọc không ép và đẩy lẩn nhau trong quá trình biến dạng.

3- Công thức ứng suất tiếp

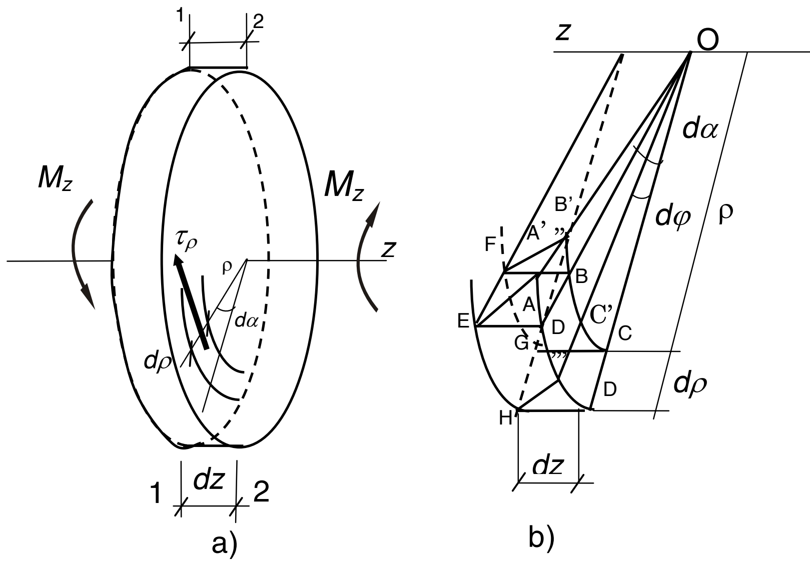


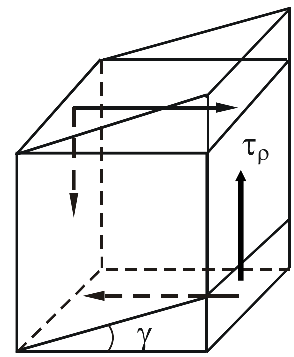
H. 9.1

Ta tính ứng suất tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang có bán kính ρ (H.9.1).

Có thể nhận thấy, theo thí nghiệm trên, biến dạng của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ là sự xoay tương đối giữa các mặt cắt ngang quanh trục.

Để xét biến dạng xoắn của một phân tố tại một điểm bất kỳ bán kính trong thanh, ta tách phân tố bằng ba cặp mặt cắt như sau:





H. 9.6
Phân tố trượt thuần túy

H. 9.5 Biến dạng của phân tố chịu xoắn

- Hai mặt cắt (1-1) và (2-2) thẳng góc với trục cách nhau đoạn *dz* (H.9.5.a).

- Hai mặt cắt chứa trục hợp với nhau một góc $d\alpha$ bé(H.9.5.b).

- Hai mặt cắt hình trụ đồng trục *z* (trục thanh) bán kính ρ và $\rho + d\rho$ (H.9.5.a).

Theo các giả thiết, trong quá trình biến dạng, so với các điểm E, F, G, H thuộc mặt cắt (1-1), các điểm A, B, C, D của phân tố trên mặt cắt (2-2) di chuyển đến A', B', C', D' phải nằm trên cung tròn bán kính ρ và $\rho + d\rho$, đồng thời OA'B' và OC'D' phải thẳng hàng.

Gọi $d\varphi$ là góc giữa hai đường thẳng OAB và OA'B', đó là góc xoay của mặt cắt (2-2) so với mặt cắt (1-1) quanh trục *z*, $d\varphi$ cũng chính là góc xoắn tương đối giữa hai tiết diện lân cận cách nhau *dz*.

Đối với phân tố đang xét, góc A'EA biểu diễn sự thay đổi góc vuông của mặt bên phân tố gọi là biến dạng trượt (góc trượt) γ của phân tố.

Từ (H.9.5.b), ta có:

$$\tan\gamma \approx \gamma = \frac{AA'}{EA} = \rho\frac{d\varphi}{dz} \qquad \text{(a)}$$

Theo giả thiết a) không có biến dạng dài theo phương dọc trục, theo giả thiết c) các thớ dọc không tác dụng với nhau nên không có ứng suất pháp tác dụng lên các mặt của phân tố.

Theo giả thiết a) các góc vuông của mặt CDHG và mặt BAEF không thay đổi nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt A, B, C, D. Do giả thiết b), mọi bán kính vẫn thẳng nên không có ứng suất tiếp hướng tâm trên mặt A, B, E, F.

Như vậy, trên mặt cắt ngang của thanh chịu xoắn thuần túy chỉ tồn tại ứng suất tiếp theo phương vuông góc bán kính, gọi là τ_ρ và phân tố đang xét ở trạng thái trượt thuần túy (H.9.6).

Áp dụng định luật Hooke về trượt cho phân tố này, ta có:

$$\tau_\rho = G\,\gamma \qquad \text{b)}$$

(a) vào (b) $\Rightarrow$

$$\tau_p = G\rho\frac{d\varphi}{dz} \qquad \text{(c)}$$

Gọi dF là một diện tích vô cùng bé bao quanh điểm đang xét, thì $\tau_\rho.dF$ là lực tiếp tuyến tác dụng trên diện tích đó và $\tau_\rho.dF.\rho$ là mômen của lực $\tau_\rho\,dF$ đối với tâm O. Tổng các mômen này phải bằng M_z, nên ta có thể viết:

$$M_z = \int_F \tau_p dF\rho \qquad \text{(d)}$$

(c) vào (d) $\Rightarrow$ $$M_z = \int_F G\rho\frac{d\varphi}{dz}dF\rho \qquad \text{(e)}$$

Vì $G.d\varphi/dz$ là hằng số đối với mọi điểm thuộc mặt cắt F, nên ta có thể đưa ra ngoài dấu tích phân, khi đó tích phân $\int_F \rho^{2}.dF$ chính là mômen quán tính cực J_p của mặt cắt ngang đối với tâm O, ta được:

$$M_z = G\frac{d\varphi}{dz}\int_F \rho^2 dF = G\frac{d\varphi}{dz}J_p \qquad \text{(f)}$$

từ (f) ta có: $$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GJ_\rho} \qquad \text{(g)}$$

Có thể thấy rằng, $d\varphi/dz$ chính là góc xoắn trên một đơn vị chiều dài (còn gọi là **góc xoắn tỉ đối**) (rad/m). Đặt $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$, ta có:

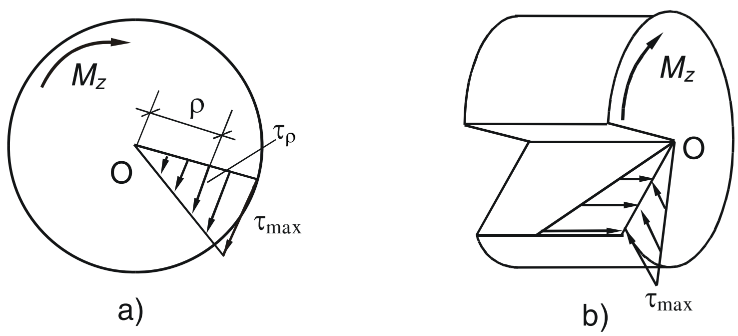
$$\theta = \frac{M_z}{GJ_\rho} \qquad \text{(9-3)}$$

thay (g) vào (c) ta được công thức tính ứng suất tiếp:

$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_\rho}\rho \qquad (9.4)$$

Ứng suất tiếp thay đổi theo quy luật bậc nhất, bằng không tại tâm O và cực đại tại những điểm trên chu vi.

Biểu đồ phân bố ứng suất tiếp tại mọi điểm trên mặt cắt ngang thể hiện trên H.9.7.a. Trên H.9.7.b, thể hiện ứng suất tiếp đối ứng trên các mặt cắt chứa trục.



H.9.7. Phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt
Và ứng suất tiếp đối ứng

Ứng suất tiếp cực đại ở các điểm trên chu vi (ρ = bán kính R)

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_\rho}R$$

đặt: $W_\rho = \frac{J_\rho}{R}$; W_p gọi là **mômen chống xoắn** của mặt cắt ngang

$$\Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_\rho} \qquad (9.5)$$

* Với tiết diện tròn đặc và D là đường kính tiết diện:

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{R} = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0{,}2D^3 \qquad (9.6)$$

* Với tiết diện tròn rỗng:

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{R} = \frac{\pi D^4(1-\eta^4)}{32}\frac{1}{R} = \frac{\pi D^3}{16}(1-\eta^4) \approx 0{,}2D^3(1-\eta^4) \qquad (9.7)$$

trong đó: η là tỷ số giữa đường kính trong và đường kính ngoài ($\eta = d/D$).

4- Công thức tính biến dạng khi xoắn

Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau *dz* là $d\varphi = \frac{M_z}{GJ_\rho}dz$ (g)

$\Rightarrow$ Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một đoạn dài L là:

$$\varphi = \int_o^L d\varphi = \int_o^L \frac{M_z}{GJ_\rho}dz \qquad (9.8)$$

* Khi đoạn thanh có M_z/GJ_p là hằng số $\Rightarrow \varphi = \frac{M_z L}{GJ_p}$ (9.9)

* Khi thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có M_z/GJ_p là hằng số:

$$\varphi = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_\rho}\right)_i \qquad (9.10)$$

Góc xoắn φ được quy ước dương theo chiều dương của M_z .

5- Tính toán thanh tròn chịu xoắn thuần tuý:

Điều kiện bền:

\+ $\tau_{\max} \leq [\tau] = \frac{\tau_o}{n}$ (9.11)

với: τ_o - là ứng suất tiếp nguy hiểm của vật liệu, xác định từ thí nghiệm

n - là hệ số an toàn.

\+ Theo thuyết bền ứng suất tiếp (chương 5):

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \qquad (9.12)$$

\+ Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dạng (chương 5):

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \qquad (9.13)$$

Điều kiện cứng:

$$\theta_{\max} \leq [\theta] \qquad (9.14)$$

$[\theta]$: Góc xoắn tỷ đối cho phép, được cho từ các sổ tay kỹ thuật, đơn vị của $[\theta]$ là (radian/ đơn vị chiều dài)

Ba bài toán cơ bản:

- Kiểm tra bền, cứng (bài toán kiểm tra)
- Xác định tải trọng cho phép
- Xác định đường kính (bài toán thiết kế).

6- Thế năng biến dạng đàn hồi

Thế năng riêng tích lũy trong một đơn vị thể tích là:

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]$$

Thanh chịu xoắn thuần tuý, TTƯS trượt thuần tuý với ứng suất tiếp τ , nên $\sigma_1 = |\tau|$; $\sigma_2 = 0$ và $\sigma_3 = -|\tau|$, ta được:

$$u = \frac{1+\mu}{E}\tau_\rho^2 \qquad \text{(a)}$$

với: $E = 2G/(1+\mu)$, thay vào (a), ta được:

$$u = \frac{1}{2}\frac{\tau_\rho^2}{G} \qquad \text{(b)}$$

Thế năng tích lũy trong một đoạn dz là:

$$dU = \int_V u dV = \int_F u dF dz \qquad \text{(c)}$$

thay (b) vào (c), ta được:

$$dU = \int_F \frac{1}{2}\frac{\tau_p^2}{G} = \int_F \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{J_p^2}\rho^2\frac{dF.dz}{G} = \frac{1}{2G}\frac{M_z^2}{J_p^2}dz\int_F \rho^2 dF$$

hay:

$$dU = \frac{1}{2}\frac{M_z^2}{GJ_p}dz \qquad \text{(d)}$$

Vậy thế năng trên đoạn thanh có chiều dài *L* là:

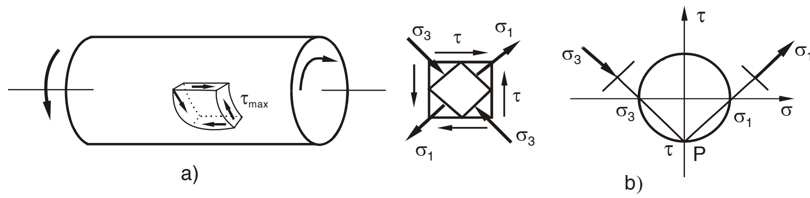
$$U = \frac{1}{2}\int_o^L \frac{M_z^2}{GJ_p}dz \qquad (9.15)$$

+ Khi đoạn thanh có M_z/GJ_p là hằng số $\Rightarrow$ $U = \frac{1}{2}\frac{M_z^2 L}{GJ_p}$ (9.16)

+ Khi thanh gồm nhiều đoạn, mỗi đoạn có M_z/GJ_p là hằng số

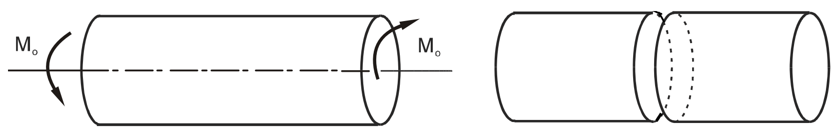
$$U = \frac{1}{2}\sum_i \left(\frac{M_z^2 L}{GJ_p}\right)_i \qquad (9.17)$$

7- Dạng phá hỏng của các vật liệu



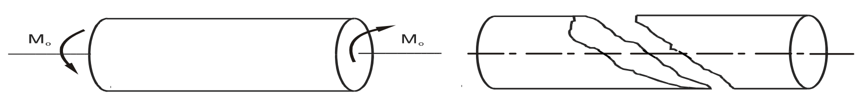
H. 9.8 Trạng thái ứng suất tại một điểm trên mặt ngoài của thanh chịu xoắn

Nghiên cứu trạng thái ứng suất của trục tròn chịu xoắn, ta thấy tại một điểm trên mặt ngoài, phân tố ở trạng thái trượt thuần túy chịu ứng suất tiếp cực đại τ_{max} (H.9.a), ở trạng thái này, theo hai phương nghiêng 45^o so với trục có ứng suất kéo chính và ứng suất nén chính $\sigma_1 = -\sigma_3 = |\tau|$ (H.9.8.b).



H. 9.9 Dạng nứt gãy của vật liệu dẻo

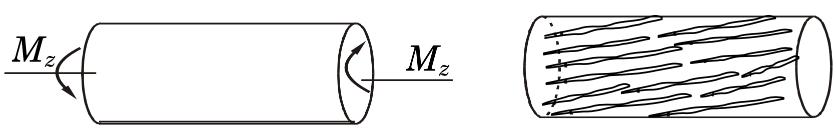
Mặt khác, qua thí nghiệm, ta cũng biết rằng vật liệu dẻo (như thép) chịu kéo, chịu nén tốt như nhau, còn chịu cắt thì kém hơn, do đó, khi một trục thép bị xoắn sẽ bị gãy theo mặt cắt ngang, do ứng suất tiếp τ_{max} trên mặt cắt ngang (H.9.9).



H. 9.10 Dạng nứt gãy của vật liệu dòn

Với vật liệu dòn như gang, chịu nén và chịu cắt rất tốt, còn chịu kéo rất kém nên khi xoắn sẽ bị gãy theo mặt nghiêng 45^o so với trục do ứng suất kéo chính σ_1 (H.9.10).

Với vật liệu có cấu tạo thớ như gỗ, chịu cắt dọc thớ rất kém nên khi xoắn sẽ bị nứt dọc theo đường sinh do ứng suất ứng suất tiếp đối ứng với ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang (H.9.11).



H. 9.11 Dạng nứt gãy của gỗ chịu xoắn

Thí dụ 9.3 Một động cơ công suất 10kW, truyền một mômen xoắn lên một trục tròn đường kính D tại tiết diện A, vận tốc trục n = 1400 vg/phút. Giả sử hiệu suất truyền là 100%. Khi đó tại tiết diện B, C nhận được công suất truyền 3kW và 7kW (H.9.12.a). Định đường kính D, sau đó tính góc xoắn φ_{AC}. Biết: $[\sigma]$ = 16 kN/cm^2 ; $[\theta]$ = 0,25^0/m; a = 50cm; $G = 8.10^3$ kN/cm^2.

Giải.

♦ Gọi ngẫu lực xoắn tác dụng tại A, B, C lần lượt là M_1, M_2, M_3. Áp dụng công thức chuyển đổi, ta được:

M_1 = 9740 x 10 / 1400 = 69,57 N.m = 6957 Ncm

M_2 = 9740 x 3 / 1400 = 20,87 N.m = 2087 Ncm

M_3 = 9740 x 7/ 1400 = 48,70 N.m = 4870 Ncm

Sơ đồ tính của trục ở (H.9.12.b), biểu đồ mômen vẽ ở (H.9.12.c).

♦ **Định đường kính D:**

+ Theo điều kiện bền $\tau_{max} \le [\tau] = \frac{[\sigma]}{2} \Rightarrow \frac{M_z}{W_p} = \frac{M_z}{0{,}2D^3} \le [\tau] \Rightarrow D \ge \sqrt[3]{\frac{M_z}{0{,}2.[\tau]}}$

với: $[\tau] = \frac{[\sigma]}{2}$ = 8 kN/cm^2 ;

M_z = 4870 Ncm

$\Rightarrow D \ge 14{,}49$ cm (a)

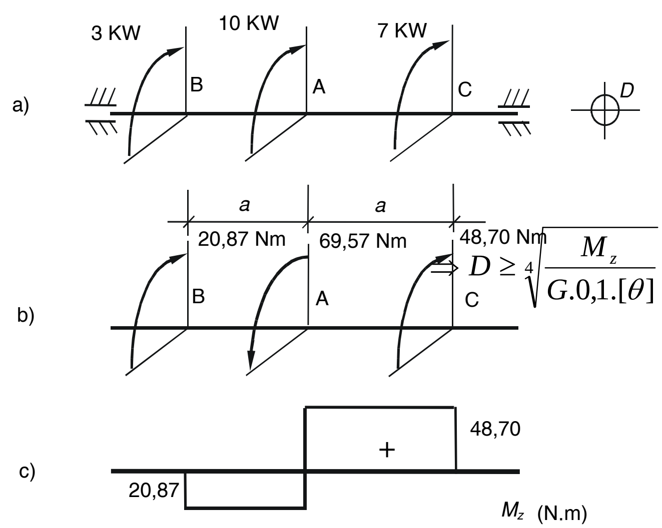
+ Theo điều kiện cứng:

$$\theta_{max} \le [\theta] \Rightarrow \frac{M_z}{GJ_p} = \frac{M_z}{G.0{,}1D^4} \le [\theta]$$

$$\Rightarrow D \ge \sqrt[4]{\frac{M_z}{G.0{,}1.[\theta]}}$$

với: $[\theta]$ = 0,25^0/m

$= \frac{0{,}25 \times \pi}{180 \times 10^{-2}} rad/cm$;



H. 9.12

M_z = 4870 Ncm;

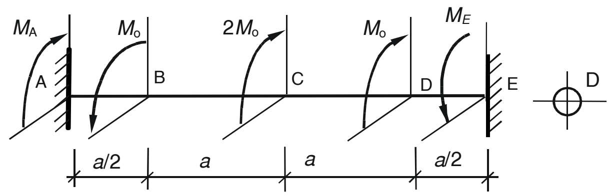
$G = 8.10^3$ kN/cm$^2 \Rightarrow D \ge 11{,}17$cm (b)

Để thỏa cả hai yêu cầu (a), (b), ta chọn D = 15 cm.

♦ **Tính góc xoắn φ_{AC}:** Áp dụng công thức (9.6), ta được:

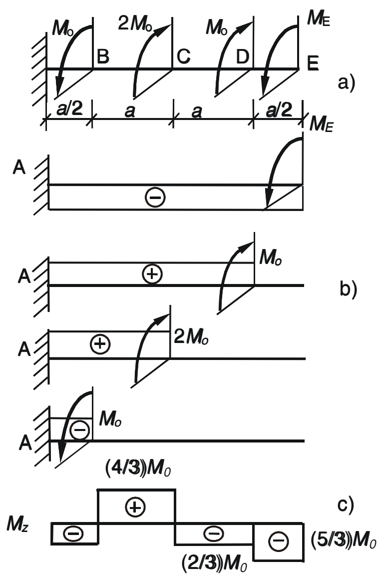
$$\varphi_{AC} = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_p} \right)_i = \frac{4870 \times 50}{8 \times 10^3 \times 0{,}1 \times 15^4} = 0{,}006 \text{ rad}$$

Thí dụ 9.4 Một thanh tiết diện tròn đường kính *D* hai đầu ngàm chịu lực như (H.9.13). Vẽ biểu đồ M_z và định giá trị M_o theo điều kiện bền.



H. 9.13

Giải: Ngoại lực là mômen xoắn trong mặt phẳng thẳng góc với trục thanh thì phản lực phát sinh tại các liên kết ngàm A và E phải là các mômen xoắn M_A, M_E trong các mặt phẳng thẳng góc với trục thanh. Giả sử M_A, M_E có chiều như trên H.9.13.



Hình 9.15

Để xác định mômen phản lực, viết phương trình cân bằng $\Sigma M/z = 0$, ta có:

$$M_A - M_o + 2M_o + M_o - M_E = 0 \qquad \text{(a)}$$

Phương trình (a) không đủ để định được phản lực M_A, M_E : **Bài toán siêu tĩnh.**

Cần bổ sung một (hay nhiều) phương trình thiết lập từ điều kiện biến dạng của bài toán (**phương trình điều kiện biến dạng**).

Thường cách giải như sau:

+Tưởng tượng bỏ ngàm E, thay bằng phản lực tương ứng M_E (H.9.15.a).

+Viết phương trình điều kiện biến dạng: $\varphi_E = 0$ (Tại E liên kết ngàm $\Rightarrow$ do đó góc xoay $\varphi_E = 0$)

+Tính φ_E : Áp dụng nguyên lý cộng tác dụng, biểu đồ mômen xoắn do từng trường hợp tải gây ra được vẽ ở H.9.15.b. Tính φ_E theo (9.10) như sau:

$$\varphi_E = \varphi_{EA} = \sum_i \left(\frac{M_z L}{GJ_p}\right) = -\frac{M_E.3a}{G.J_p} + \frac{M_o}{GJ_p}\frac{5a}{2} + \frac{2M_o}{GJ_p}\frac{3a}{2} - \frac{M_o}{GJ_p}\frac{a}{2}$$

+ Cho $\varphi_E = 0$, ta được : $M_E = \frac{5}{3}M_o$

Kết quả dương, M_E đúng chiều chọn.

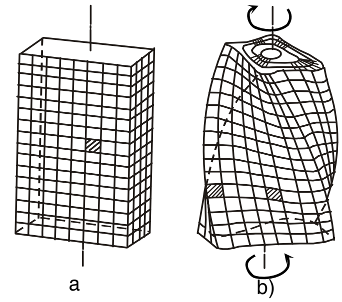
+ Xác định được M_E , ta vẽ được biểu đồ mômen xoắn M_z như H.9.15.c.

Từ biểu đồ nội lực M_z, ta thấy: $M_{z,\max} = (5/3)M_o$.

Từ điều kiện bền, ta có: $\tau_{\max} \le [\tau] \Rightarrow \frac{M_{z\max}}{0{,}2.D^3} \le [\tau]$

$$\Rightarrow \quad \frac{5M_o}{3.0{,}2.D^3} \le [\tau] \Rightarrow M_o \le [\tau]\frac{3.0{,}2.D^3}{5}$$

III. XOẮN THANH THẲNG TIẾT DIỆN CHỮ NHẬT



H. 9.16 Sự vênh của tiết diện chữ nhật khi xoắn

Thí nghiệm xoắn thanh tiết diện chữ nhật, biến dạng của thanh như (H.9.16).

Lý thuyết đàn hồi cho các kết quả như sau:

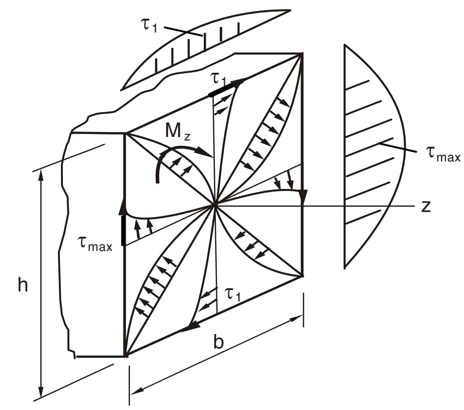
♦**Ứng suất:** Trên mặt cắt ngang chỉ có ứng suất tiếp.

+ Tại tâm và các góc, ứng suất tiếp bằng không.

+ Tại điểm giữa cạnh dài, ứng suất tiếp đạt giá trị lớn nhất : $\tau_{\max} = \dfrac{M_z}{\alpha h b^2}$ (9.18)

+ Tại điểm giữa cạnh ngắn, ứng suất τ_1 bé hơn: $\tau_1 = \gamma \tau_{\max}$ (9.19)

+Phân bố ứng suất tiếp tại các điểm trên các trục đối xứng, các cạnh tiết diện và các đường chéo được biểu diễn ở H.9.17.



H. 9.17 Phân bố ứng suất tiếp trên tiết diện chữ nhật

♦ **Góc xoắn tương đối***:*

$$\theta = \frac{M_z}{\beta h b^3} \qquad (9.20)$$

trong đó: α, γ, β là các hệ số phụ thuộc tỷ số (cạnh dài h /cạnh ngắn b) được cho trong bảng 1.

Bảng 9.1 *Giá trị* α, γ, β

$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,203	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

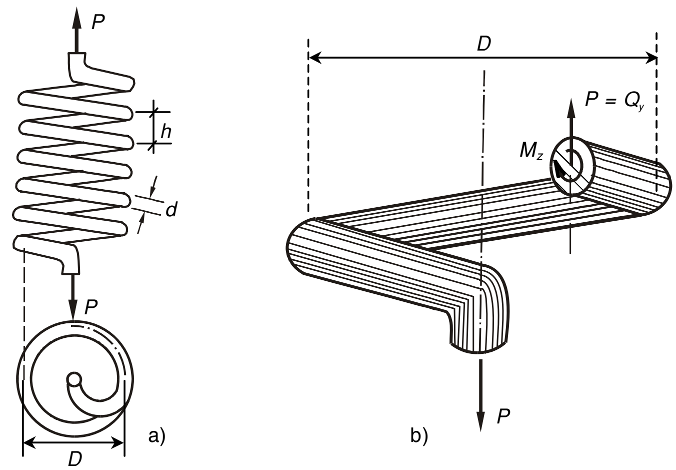
IV. TÍNH LÒ XO HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN CHỊU LỰC DỌC TRỤC

Lò xo là một bộ phận được dùng rộng rãi trong kỹ thuật, được lắp đặt tại những chỗ cần giảm chấn do tải trọng động như đế móng thang máy, hệ thống nhún trong ôtô, đế mô tơ công suất lớn...

Lò xo hình trụ được cấu tạo bằng cách quấn một sợi dây thép tiết diện vuông, chữ nhật hoặc tròn quanh một lõi hình trụ, ta chỉ tính lò xo chịu lực theo phương trục của hình trụ này; trục của hình trụ cũng là trục của lò xo, ngoài ra chỉ xét lò xo có các vòng gần nhau gọi là lò xo hình trụ bước ngắn (H.9.18.a).

1- Các đặc trưng của lò xo:

+ d: Đường kính dây lò xo.
+ D: Đường kính trung bình lò xo.
+ n: Số vòng làm việc của lò xo.
+ G: Mô đun đàn hồi trượt của vật liệu làm lò xo.



H. 9.18. a) Các đặc trưng của lò xo
b) Nội lực trên tiết diện dây lò xo

2- Ứng suất trong dây lò xo: Dùng một mặt cắt chứa trục của lõi hình trụ cắt qua một sợi dây lò xo, tách lò xo làm hai phần, xét điều kiện cân bằng của một phần lò xo như trên H.9.18.b, ta được:

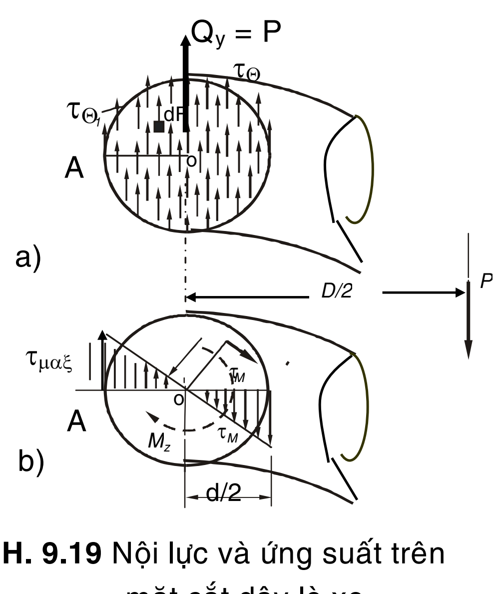
$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow Q_y = P$$

$$\Sigma M / o = 0 \Rightarrow M_z = P.\frac{D}{2}$$

Trên mặt cắt đang xét (xem như mặt cắt ngang của dây lò xo) có lực cắt Q_y và mômen xoắn M_z, chúng đều gây ứng suất tiếp:

$$\tau = \tau_M + \tau_Q$$

Tại một điểm bất kỳ trên mặt cắt ngang, các thành phần ứng suất được biểu diễn như (H.9.19). Bỏ qua độ nghiêng của dây lò xo, coi tiết diện đang xét là tròn, có thể thấy



H. 9.19 Nội lực và ứng suất trên mặt cắt dây lò xo rằng, tại mép trong của mặt cắt dây lò xo, điểm A trên H.9.19, ứng suất tiếp đạt giá trị cực đại, dù lực *P* là tác dụng kéo hay nén lò xo.

Một cách gần đúng, ứng suất tiếp tại điểm nguy hiểm có thể tính như sau:

$$\tau_{\max} = \tau_Q + \tau_M = \frac{Q_y}{F} + \frac{M_z}{W_p} = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} + \frac{P\frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}}$$

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(\frac{d}{2D} + 1\right) \approx \frac{8PD}{\pi d^3} \qquad (9.21)$$

Thực chất τ_Q không phân bố đều, còn công thức tính τ_M như trên không chính xác vì tiết diện không tròn do độ nghiêng của dây lò xo cũng như sợi dây lò xo không là thanh thẳng, cho nên trong tính toán thực hành, kể đến kết quả do thực nghiệm, ta có thể lấy:

$$\tau_{\max} = k\frac{P\frac{D}{2}}{\frac{\pi . d^3}{16}} = k\frac{8PD}{\pi . d^3} \quad \text{với} \quad k = \frac{\frac{D}{d} + 0{,}25}{\frac{D}{d} - 1} \qquad (9.22)$$

2- Biến dạng của lò xo: Tính độ co, dãn λ của lò xo khi chịu lực dọc trục.

Dùng nguyên lý bảo toàn năng lượng, bỏ qua các mất mát năng lượng, **công ngoại lực *T* hoàn toàn biến thành thế năng biến dạng đàn hồi *U*.** Ta có:

+ Công của ngoại lực *P* trên độ co, dãn λ của lò xo là: $T = \frac{1}{2}P\lambda$ (a)

+ Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong lò xo (bỏ qua thế năng do Q_y):

$$U = \frac{1}{2}\sum\frac{M_z^2 L}{GJ_p}$$

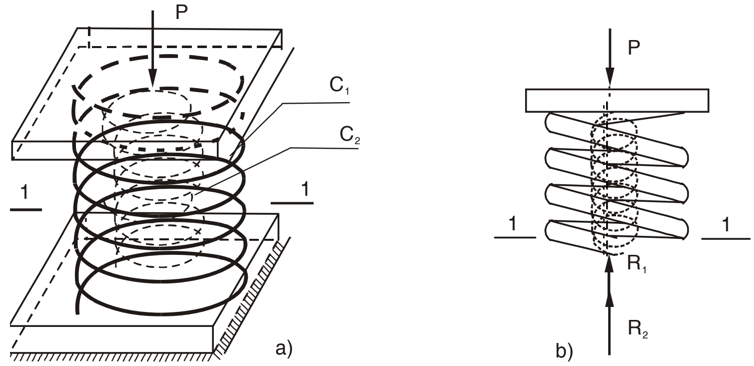
$$U = \frac{1}{2}\frac{P^2D^2}{4}\frac{\pi Dn}{G\pi d^4/32} = \frac{1}{2}\frac{8P^2D^3n}{Gd^4} \qquad (b)$$

về giá trị, $T = U$, $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{P}{C}$ (9.24)

với: $C = \frac{Gd^4}{8D^3n}$ (9.25)

trong đó: *C* - là độ cứng của lò xo

Thí dụ 9.5 Hai lò xo có độ cứng C_1 = 8 kN/cm và C_2 = 5 kN/cm cùng chiều cao H, được ghép đồng trục , cùng chịu lực P = 50 kN (H.9.20.a). Tính lực tác dụng trên từng lò xo, tính chuyển vị của điểm đặt lực.



H. 9.20 a) Hai lò xo ghép đồng trục
b) Nội lực trong lò xo

Giải.

Cắt 2 lò xo bằng mặt cắt (1-1), xét cân bằng phần trên, gọi nội lực của lò xo là R_1 , R_2, (H.9.20.b),

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \quad R_1 + R_2 = P \qquad \text{(a)}$$

Một phương trình chứa hai ẩn số, ta gặp **bài toán siêu tĩnh**.

Điều kiện biến dạng: độ co ngắn của lò xo 1 phải bằng lò xo 2:

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{R_1}{C_1} = \frac{R_1}{C_2} \Rightarrow R_1 = \frac{C_1}{C_2} R_2 \qquad \text{(c)}$$

(c) và (a) $\Rightarrow$

$$R_2 = \frac{P}{1 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} P$$

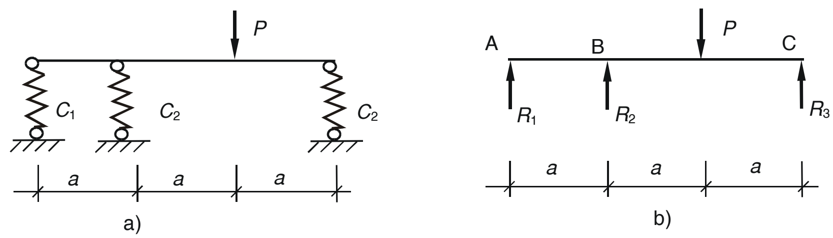
$$R_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} P \qquad \text{(d)}$$

thay giá trị P, C_1, C_2 vào (d): R_1 = 30,77 kN; R_2 = 19,23 kN

Chuyển vị của điểm đặt lực chính là độ co của lò xo 1 hoặc lò xo 2

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = R_1 / C_1 = 30{,}77/8 = 3{,}85\text{cm}.$$

Thí dụ 9.6 Một thanh có *EJ* rất lớn được xem là bằng ∞, được đặt trên ba lò xo có độ cứng lần lượt là C_1 = 5 kN/cm, $C_3 = C_2$ = 10 kN/cm chịu tác dụng của lực P = 50 kN như trên H.9.21.a. Tìm lực tác dụng trên các lò xo, tính góc nghiêng của thanh ABC. Cho a = 50cm.



H. 9.21 a) Thanh ABC tuyệt đối cứng đặt trên ba lò xo
b) Ngoại lực và các phản lực của các lò xo

Giải.

Gọi phản lực của các lò xo lần lượt là R_1, R_2, R_3 (H.9.21.b).

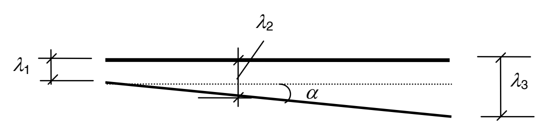
Điều kiện cân bằng:

$$\sum Y = 0 \quad \Rightarrow R_1 + R_2 + R_3 = P \qquad \text{(a)}$$

$$\sum M/A = 0 \;\Rightarrow\; -R_2.a - R_3.3a + P.2a = 0$$

hay: $$R_2 + 3R_3 = 2P \qquad \text{(b)}$$

Điều kiện biến dạng: giả sử, dưới tác dụng của ngoại lực, thanh ABC có vị trí mới như ở (H.9.22):



H. 9.22 Sơ đồ chuyển vị của thanh ABC và biến dạng của các lò xo

Ta có: $\lambda_2 = \frac{2}{3}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_3 \qquad \Rightarrow \frac{R_2}{C_2} = \frac{2}{3}\frac{R_1}{C_1} + \frac{1}{3}\frac{R_3}{C_3}$ (c)

Giải hệ (a), (b), (c), ta được phản lực của các lò xo, cũng chính là lực tác dụng lên các lò xo: $R_1 = \frac{P}{9}$; $R_2 = \frac{1}{3}P$; $R_3 = \frac{5}{9}P$

Từ đó, ta tính được biến dạng của các lò xo:

$$\lambda_1 = 1{,}11\text{cm};\; \lambda_2 = 1{,}67\text{cm};\; \lambda_3 = 2{,}78\text{cm}$$

Góc nghiêng của thanh ABC là:

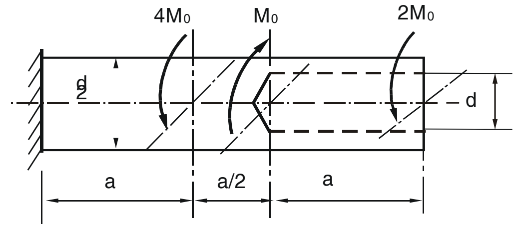
$$\tan\alpha \approx \alpha = (\lambda_3 - \lambda_1)/3a = 0{,}0111 \text{ rad}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 9

9.1 Vẽ biểu đồ mômen xoắn, tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại đầu tự do của thanh tiết diện tròn có khoan lỗ dọc trục như H.9.1. Cho:

$M_o = 360$ Nm; a=50 cm;

$G = 8.10^6$ N/cm^2, d = 3 cm.

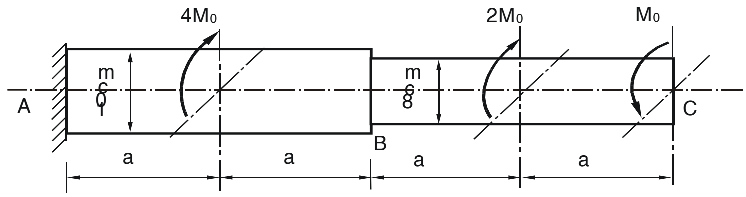


H. 9.1

9.2 Vẽ biểu đồ nội lực, kiểm tra độ bền và độ cứng của trục tròn(H.9.2).Biết: a =40 cm

$[\tau]$=3000N/cm^2; $[\theta]$ = 0,5^o/m; G=8.10^6 N/cm^2; M_o = 1 kNm;

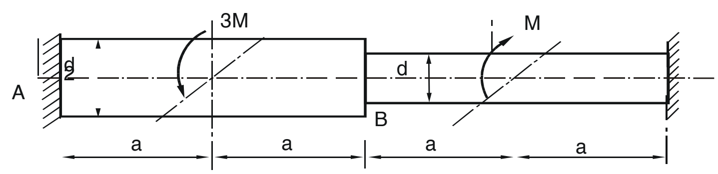
Tính góc xoắn tại B và C.



H. 9.2

9.3Vẽ biểu đồ mômen xoắn và tính ứng suất tiếp lớn nhất trên các mặt cắt ngang nguy hiểm của trục tròn như trên H.9.3.

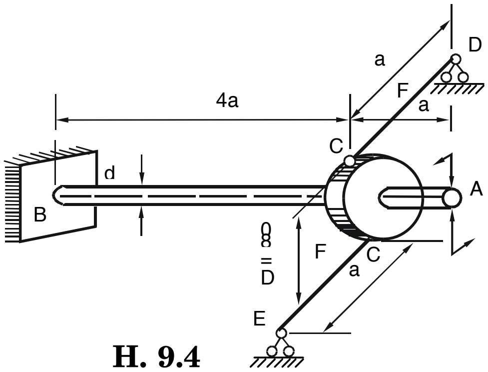
Cho: G = hằng số.



H. 9.3

9.3 Một trục chịu xoắn như H.9.4. Xác định ứng suất tiếp τ_{max} của trục AB, góc xoắn φ_{AB} , nội lực trong hai thanh CD và CE.Cho: E=2.10^{7}N/cm^2, G = 8.10^6 N/cm^2;

M = 2kNm; a =2cm; F=4 m^2; d=6 cm. Xem puli tại C là tuyệt đối cứng.

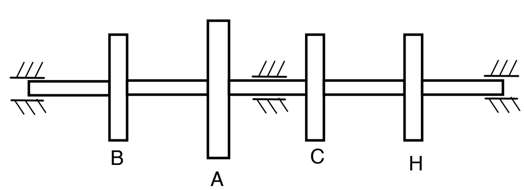


H. 9.4

9.5 Một trục truyền động tiết diện tròn, đường kính d. Tại puli A, trục nhận được công suất truyền 15 kW. Giả sử hiệu suất truyền là 1, khi đó tại các puli B, C, H trục truyền đi các công suất lần lượt là 4kW, 8kW và 3kW (H.9.5). Tính d theo điều kiện bền và điều kiện cứng.

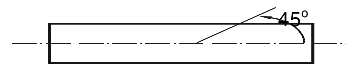
Cho:$[\tau]$=2kN/cm^2;$[\theta]$=0,4^0/m;

G=8.10^{3}kN/cm^2; tốc độ môtơ n = 150 vg/ph.



H. 9.5

9.6 Trên mặt ngoài của một trục tròn chịu xoắn thuần túy, người ta dùng tấm điện trở và đo được biến dạng dài tương đối theo phương 45^o so với trục là $\varepsilon = 30.10^{-5}$ (H. 9.6)

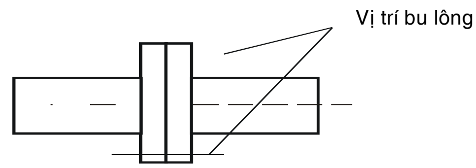


H. 9.6

Tính mômen xoắn tác dụng lên trục.

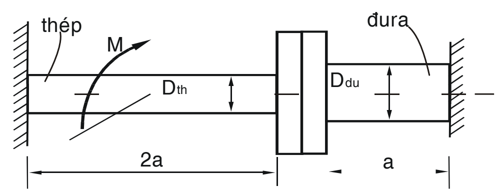
Cho: $E = 2.10^4$ kN/cm^2; $\mu = 0,3$.

9.7 Người ta nối hai trục cùng đường kính D = 8 cm bằng mặt bích và bốn bu lông ϕ 20 bố trí đối xứng trên đường tròn đường kính 20cm (H.9.7). Tính mômen xoắn lớn nhất có thể tác dụng lên trục theo điều kiện bền của trục và bu lông. Cho: $[\tau]_{tr} = 4$ kN/cm^2; $[\tau]_{bl} = 2$ kN/cm^2.



H. 9.7

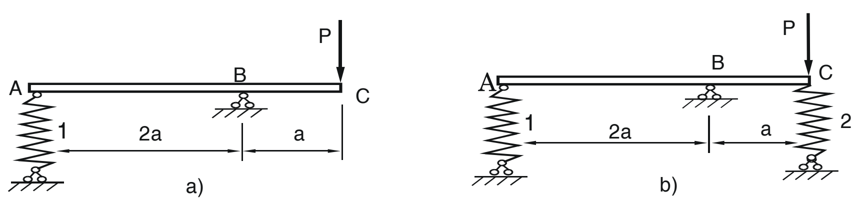
9.8 Hai trục tròn bằng thép và đura được nối với nhau bằng mặt bích và bu lông chịu một mômen xoắn M như (H.9.8). Tính mômen xoắn nội lực tác dụng lên hai trục. Cho: $G_{th} = 2G_{đura}$; $D_{đura} = 1,5D_{th}$.



H. 9.8

9.9 Hệ chịu lực như ở H.9.9.a,b

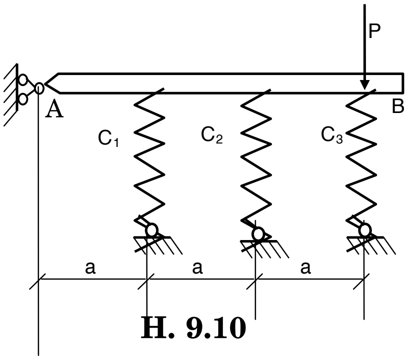
Tính ứng suất trong lò xo 1 và 2.Tính chuyển vị đứng tại C, xem thanh ABC là tuyệt đối cứng. Biết : D_1 =6cm; d_1=1cm;n_1=10; D_2=5cm; d_2=0,8cm; n_2= 8 P=1kN ; $G_1=G_2 =8.10^3$kN/cm^2



H. 9.9

9.10 Một thanh tuyệt đối cứng AB được đặt trên ba lò xo có cùng số vòng và chịu một lực P đặt ở đầu B như trên H.9.10. Tính lực tác dụng lên các lò xo. Tính chuyển vị đứng tại B. Cho:

$C_3 = 2C_2 = 2C_1 = 2$kN/cm; P = kN; a = 1m.



H. 9.10