TẠP CHÍ KHOA HỌC
Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Số 8(3/2017) tr. 31 - 41

BÀI TOÁN HỖN HỢP THỨ BA VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÔNG THUẦN NHẤT ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC CẤP HAI TRÊN MIỀN LÙI

Nguyễn Thành Chung[1], Trần Công Sinh[2]
[1]Trường Đại học Kỹ thuật hậu cần Công an nhân dân
[2] Trường THPT Nguyễn Thị Lợi, Sầm Sơn, Thanh Hóa

Tóm tắt: *Trong bài báo này chúng tôi đi nghiên cứu bài toán hỗn hợp thứ ba đối với phương trình parabolic trên miền lùi. Sự tồn tại, cũng như tính trơn theo biến thời gian của nghiệm bài toán đã được thiết lập, với một số điều kiện cụ thể của hàm đã cho trên biên. Một ví dụ minh họa cho kết quả đạt được cũng được đưa ra.*

Từ khóa: *Bài toán hỗn hợp thứ ba, parabolic, tính trơn, miền lùi.*

1. Giới thiệu

Phương trình đạo hàm riêng (PTĐHR) không chỉ là phương diện giải tích của các mô hình trong vật lý, sinh học, kinh tế, hóa học,... mà nó còn là công cụ thiết yếu của nhiều ngành toán học khác. Sang thế kỷ XX, lý thuyết PTĐHR phát triển vô cùng mạnh mẽ nhờ công cụ giải tích hàm, đặc biệt là từ khi xuất hiện một hệ thống công cụ quan trọng được xây dựng bởi S.L. Sobolev: Không gian Sobolev và các tính chất quan trọng của nó.

Khi đi nghiên cứu sự tồn tại, cũng như tính chính qui của nghiệm yếu của các bài toán biên đối với PTĐHR trên miền bị chặn, cấu trúc học của biên miền đó đóng vai trò quyết định.

Trong các bài toán biên đối với phương trình, hệ phương trình đạo hàm riêng trong miền không trơn được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu ở nhiều khía cạnh khác nhau. Đối với phương trình, hệ phương trình elliptic một lượng lớn các kết quả sâu sắc đã được thiết lập (xem [1, 4, 7, 8, 9] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Nghiên cứu bài toán giá trị biên Robin cho các phương trình elliptic bậc hai ở những miền không trơn được khởi đầu bằng các công trình [3, 5, 10]. Các tài liệu đã đề cập nghiên cứu về bài toán giá trị biên Robin đối với phương trình elliptic cho các miền Lipschitz. Như chúng ta đã biết rằng toán tử nhúng I_2: $H^1(G) \to L_2(G)$ là compact đối với các miền Lipschitz [10] và theo [5] toán tử nhúng I_2: $H^1(G) \to L_2(\partial G)$ cũng compact. Do đó bài toán giá trị biên Robin đối với phương trình elliptic là loại Fredholm cho loại các miền này (xem [5]).

Đối với các miền có các điểm kỳ dị loại miền lùi (không là miền Lipschitz), toán tử nhúng thứ hai I_2: $H^1(G) \to L_2(G)$ chưa chắc đã tồn tại, do vết của các hàm số thuộc $H^1(D)$ không nhất thiết thuộc về không gian $L_2(\partial G)$. Điều này có nghĩa là việc thiết lập bài toán biên Robin cho những miền này phụ thuộc vào các thuộc tính của không gian vết đối với các hàm thuộc $H^1(G)$. Một trong các mô tả có thể về các không gian vết cho các miền bị chặn với biên trơn ngoại trừ các điểm kỳ dị cô lập của loại lùi đã được đưa ra trong [12, 13, 14] bởi M. JU.

Ngày nhận bài: 15/11/2016. Ngày nhận đăng: 20/3/2017
Liên lạc: Nguyễn Thành Chung, e - mail: nguyenthanhchungk7b@gmail.com

Vasiltchik. Đối với những miền như thế, không gian vết của các hàm thuộc $H^1(G)$ không nhất thiết trùng với $L_2(G)$ và nó có thể được mô tả với sự giúp đỡ của trọng số φ tương ứng, trọng số này phụ thuộc vào các loại điểm kỳ dị. Những kết quả này cho phép thiết lập tính giải được cho bài toán giá trị biên Robin với sự giúp đỡ của trọng số φ.

Trong trường hợp phương trình không dừng loại parabolic trên các miền không trơn khác nhau, các bài toán biên ban đầu với điều kiện biên thuần nhất đã được nghiên cứu trong các công trình [5, 6, 7, 11]. Trong bài báo này chúng tôi xét bài toán hỗn hợp với điều kiện biên không thuần nhất đối với phương trình parabolic trên miền lùi. Trong đó, sự tồn tại duy nhất cũng như tính trơn theo biến thời gian của nghiệm được thiết lập.

2. Thiết lập bài toán

Cho G là một miền bị chặn, với biên ∂G là một đa tạp thuộc lớp C^1 trừ ra một điểm. Định nghĩa tiếp theo là mô tả chính thức của các miền lùi ngoài.

Định nghĩa 2.1. Chúng ta gọi miền bị chặn $G \subset \mathbb{R}^n$ là một miền thuộc loại OP_φ nếu:

1) Tồn tại điểm $O \in \partial G$ sao cho $\partial G \setminus O$ là một đa tạp (n-1)-chiều thuộc lớp C^1.

2) Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ là một miền chặn thuộc lớp C^1 và $\varphi \in C^1([0,1])$ là một hàm trơn sao cho $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ và $\varphi'(t) > 0$ với $t \in (0,1)$ Kí hiệu là $x' = (x_1,..., x_{n-1})$. Khi đó tồn tại một lân cận U của O sao cho:

$$U \cap G = \left\{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 < x_n < 1, \frac{x'}{\varphi(x_n)} \in \Omega \right\}$$

với một hệ tọa độ thích hợp của gốc O trong $\mathbb{R}^n$. Ta gọi điểm O ở trên là một điểm lùi ngoài.

Kí hiệu $L^{p,\xi}(\partial G)$ là không gian của các hàm đo được xác định trên ∂G sao cho

$$\int_{\partial G} |f(x)|^p \xi(x) dS_x \equiv \|f\|^p_{p,\xi,\partial G} < \infty.$$

Ở đây $\xi : \partial G \to \mathbb{R}$ là một hàm đo được không âm cố định, được gọi là hàm trọng.

Cho I_1 là toán tử nhúng của $H^1(G)$ vào trong $L_2(G)$ và I_2 làm toán tử nhúng từ $H^1(G)$ vào trong $L^{2,\varphi}(\partial G)$. Theo [15] không gian $L^{2,\varphi}(\partial G)$. chứa các vết của $H^1(G)$ trên ∂G. Sự tồn tại, tính bị chặn và tính nén compact của toán tử I_1 được chứng minh trong [10]. Sự tồn tại và bị chặn của I_2 được chứng minh trong [12]. Tính compact của I_2 được chứng minh trong [2].

Chúng ta ký hiệu $Q_T = G \times (0,T)$, $S_T = \partial G \times (0,T)$. Xét toán tử vi phân tuyến tính cấp hai

$$L(x,t;D) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i\left(a_{ij}(x,t) D_j\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) D_i + c(x,t),$$

ở đó $D_i = \partial_{x_i}$, và a_{ij}, b_i, C là các hàm hệ số xác định trên Q_T.

Chúng ta giả sử toán tử L là toán tử elliptic đều theo $t \in [0, T)$, có nghĩa là, tồn tại một hằng số $C > 0$ sao cho

$$\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\right) \geq C|\xi|^2, \forall (x,t) \in Q_T \qquad (1)$$

với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n$ $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Trong bài báo này chúng ta xét bài toán sau:

$$u_t + L(x,t;D)u = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x,t)u = \mu(x,t), \qquad (x,t) \in S_T \qquad (3)$$

$$u\big|_{t=0} = 0 \qquad \text{trên G} \qquad (4)$$

Ở đó:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\vec{n}, x_i),$$

Trong đó $\vec{n}$ véctơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài tại điểm $x \in \partial G$. Chúng ta giả sử hàm số f và $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, c là các hàm trên Q_T và σ, μ là các hàm xác định trên S_T.

3. Một số giả thiết

Giả sử miền G thuộc lớp OP_φ. Chúng ta giả sử hàm số $f \in L_2(Q_T)$ và $a_{ij} = a_{ji}$, b_i, $c \in L_\infty(Q_T)$. Tiếp theo chúng tôi đi xây dựng các giả thiết cho các hàm σ, μ là khác nhau và phụ thuộc vào hàm φ.

Các hàm σ, μ: $S_T \to R$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$ess \sup_{(x,t)\in S_T} \frac{|\sigma(x,t)|}{\varphi(x_n)} = M_\sigma < \mu_0, \mu \in L^{2,\frac{1}{\varphi}}(S_T)$$

Ở đây hằng số M_σ chỉ phụ thuộc vào hàm φ mà mô tả kiểu kì dị tại điểm $O \in \partial G$. Điều kiện cho μ là tương đương với $\frac{\mu}{\varphi} \in L^{2,\varphi}(\partial G)$.

Các giả định bổ sung cho σ, μ chỉ phụ thuộc vào các điểm lân cận của các điểm kì dị $O \in \partial G$. Những giả thiết này phải tương quan với mô tả chính xác không gian vết của H^1(I) trên biên ∂G. Lý do cho những giả thiết đó sẽ được làm rõ trong quá trình chứng minh sau này.

4. Nghiệm yếu

Trong mục này, chúng ta ký hiệu $H^{1,*}(QT)$ là không gian các hàm $u\in L_2((0,T); H^1(G))$ có $u_t\in L_2((0,T); H^{-1}(G))$ với chuẩn

$$\|u\|^2_{H^{1,*}(Q)}=\|u\|^2_{L_2\left((0,T);H^1(G)\right)}+\|u_t\|^2_{L_2\left((0,T);H^{-1}(G)\right)}$$

Đặt

$$B(u,v;t)=\int_G\left(\sum_{i,j=1}^n\left(a_{ij}(x,t)D_juD_iv\right)+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)D_iuv+c(x,t)uv\right)dx, u,v\in H^1(G)$$

Trong bài báo này chúng ta giả sử B(.,.;t) thỏa mãn bất đẳng thức sau đây:

$$B(u,v;t)\geq\mu_0\|u\|^2_{H^1(G)} \tag{5}$$

với $u\in H^1(G)$ và $t\in[0,T]$.

Định nghĩa 4.1. Một hàm $u\in H^{1,*}(Q_T)$ được gọi là nghiệm yếu (suy rộng) của Bài toán (2)-(4), nếu và chỉ nếu $u(x,0) = 0$ và đẳng thức:

$$\langle u_t,v\rangle+B(u,v;t)=(f,v)_{L_2(G)}+(\sigma u-\mu,v)_{L_2(\partial G)}, a.e. t\in[0,T] \tag{6}$$

thỏa mãn với mọi $v\in H^1(G)$. Ở đó $(.,.)_{L_2(G)},(.,.)_{L_2(\partial G)}$ lần lượt là tích vô hướng trong $L_2(G)$ và $L_2(\partial G)$

5. Sự tồn tại nghiệm

Trong mục này chúng ta đi chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (2)-(4) với các giả thiết được thiết lập ở mục trước.

Định lí 5.1. Giả sử điều kiện (5) được thỏa mãn và

$$\sup\left\{|a_{ij}|,|a_{ijt}|,|b_i|,|c|: i,j=1,...,n;(x,t)\in\bar{Q}_T\right\}\leq\mu, \mu=const$$

Khi đó bài toán (2)-(4) có duy nhất nghiệm yếu u trong không gian $H^{1,*}(Q_T)$ và thỏa mãn:

$$\|u\|^2_{H^{1,*}(Q_T)}\leq C\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)}+\|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}\right)$$

ở đây C là hằng số độc lập với u, f và μ

Chứng minh:

1) Lấy $\{w_k(x)\}_{k=1}^\infty$ là một cơ sở của $H^1(G)$ và là cơ sở trực chuẩn của $L_2(G)$. Với mỗi số nguyên dương N, chúng ta đặt:

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^N C_k^N(t)w_k(x)$$

ở đó $C_k^N(t), t\in[0,T], k=1,...,N$ là nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\left(u_t^N, w_k\right)_{L_2(G)} + B\left(u^N, w_k; t\right) = \left(f, w_k\right)_{L_2(G)} + \left(\sigma u^N - \mu, w_k\right)_{L_2(\partial G)}, t \in \left(0, T, k = 1, ..., N\right) \quad (7)$$

với điều kiện ban đầu

$$C_k^N\left(0\right) = 0, k = 1, ..., N$$

Nhân phương trình (9) với $C_k^N\left(t\right)$, sau đó lấy tổng theo *k* từ 1 đến *N*, chúng ta nhận được:

$$\left(u_t^N, u^N\right) + B\left(u^N, u^N; t\right) = 2\left(f, u^N\right) - \left(\mu, u^N\right) + \left(\sigma u^N, u^N\right), t \in \left[0, T\right]$$

Hay

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u^N\right\|_{L_2(G)}^2\right) + 2B\left(u^N, u^N; t\right) = 2\left(f, u^N\right) - 2\left(\mu, u^N\right) + 2\left(\sigma u^N, u^N\right) \quad (8)$$

Sử dụng (5), chúng ta có

$$B\left(u^N, u^N; t\right) \geq \mu_0 \left\|u^N\right\|_{H^1(G)}^2.$$

Mặt khác, bởi bất đẳng thức Cauchy, với bất kỳ số dương ε đủ bé, ta có

$$2\left|\left(f, u^N\right)\right| \leq 2\|f\|_{L_2(G)}\left\|u^N\right\|_{L_2(G)} \leq \|f\|_{L_2(G)}^2 + \left\|u^N\right\|_{L_2(G)}^2$$

ở đây C = C(ε) là hằng số độc lập với u^N, *f*.

Ta đánh giá số hạng thứ hai ở vế phải của [6] như sau:

$$2\left|\int_{\partial G} \mu u^N dS_x\right| = 2\left|\int_{\partial G} \frac{\mu}{\varphi} \varphi u^N dS_x\right| \leq \|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial G)}\left\|u^N\right\|_{L_{2,\varphi}(\partial G)} \quad (9)$$

Vì $H^1(G)$ được nhúng liên tục vào $L_{2,\varphi}(\partial G)$ nên từ đánh giá trên ta có:

$$2\left|\int_{\partial G} \mu u^N dS_x\right| \leq 2\|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial G)}\left\|u^N\right\|_{H^1(G)} \leq C(\epsilon)\|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial G)}^2 + \epsilon\left\|u^N\right\|_{H^1(G)}^2 \quad (10)$$

Ta đánh giá số hạng thứ ba ở vế phải của (11) như sau:

$$2\left|\int_{\partial G} \sigma(u^N)^2 dS_x\right| \leq 2M_\sigma \left\|u^N\right\|_{L_{2,\varphi}(\partial G)}^2 \leq 2M_\sigma \left\|u^N\right\|_{H^1(G)}^2 \quad (11)$$

Kết hợp các đánh giá ở trên với (11) ta thu được

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\left\|u^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2\right) + 2(\mu_0 - M_\sigma - \epsilon)\left\|u^N(.,t)\right\|_{H^1(G)}^2 \\ &\qquad \leq C\left(\|f(.,t)\|_{L_2(G)}^2 + \|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial G)}^2\right) + \left\|u^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

với hầu khắp $t \in [0, T)$

Đặt: $\eta(t) := \left\|u^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2; \xi(t) := \|f(.,t)\|_{L_2(G)}^2 + \|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial G)}^2, t \in [0, T].$

Từ (12) chọn ϵ đủ bé $(\epsilon < \mu_0 - M_\sigma)$ ta có

$\eta'(t) \le \eta(t) + C\xi(t)$, với hầu khắp $t \in [0,T]$

Từ Bất đẳng thức Gronwall-Belmann ta nhận được

$$(t) \le C\int_0^t \xi(s)ds, t \in [0,T] \quad (13)$$

Do đó từ (13) chúng ta có:

$$\left\|u^N(.,t)\right\|^2_{L_2(G)} \le C\int_0^T \|f\|^2_{L_2(G)} + \|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(\partial G)}\, ds \le C\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}\right).$$

Lấy tích phân hai vế của bất đẳng thức ở trên theo t từ 0 đến T, chúng ta thu được

$$\left\|u^N\right\|^2_{L_2(Q_T)} \le C\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}\right) \quad (14)$$

Chú ý từ (12), chúng ta lấy tích phân theo t từ 0 đến T, chúng ta nhận được

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt}\left\|u^N\right\|^2_{L_2(G)}\right)dt + 2(\mu_0 - M_\sigma - \epsilon)\int_0^T \left\|u^N\right\|^2_{H^1(G)} dt \quad (15)$$

$$\text{£}C\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}\right) + \left\|u^N\right\|^2_{L_2(Q_T)} \quad (16)$$

Vì

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\left\|u^N\right\|^2_{L_2(G)} dt = \left\|u^N(x,T)\right\|^2_{L_2(G)} \ge 0$$

nên từ (15) với cách chọn $\epsilon < \mu_0 - M_\sigma$ kéo theo

$$\int_0^T \left\|u^N\right\|^2_{H^1(G)} dt \text{£} C\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}\right) \quad (17)$$

ở đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào *u, f* và *N*.

Lấy bất kỳ $v \in H^1(\Omega)$ với $\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \le 1$ và $v = v^1 + v^2$ với $v^1 \in span\{\omega_k\}_{k=1}^N$ và $\left(v^2, \omega_k\right) = 0, k = 1,...,N, \left(v^2 \in span\{\omega_k\}_{k=1}^{N\perp}\right)$. Do cách chọn trên ta có $\left\|v^1\right\|_{H^1(\Omega)} \le \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1.$ Sử dụng (7), chúng ta có

$\left(u_t^N, v^1\right) + B\left(u^N, v^1; t\right) = \left(f, v^1\right) + \left(\sigma u^N - \mu, v^1\right)$, với mọi $t \in T$.

Từ $u^N(x,t) = \sum_{k=1}^N C_k^N(t)\omega_k$, chúng ta thấy rằng

$$\left(u_t^N, v\right) = \left(u_t^N, v^1\right) = \left(f, v^1\right) - B\left(u^N, v^1; t\right) + \left(\sigma u^N - \mu, v^1\right).$$

Hệ quả là:

$$\left|\left(u_t^N, v\right)\right| \le \left(C\|f\|_{L_2(\Omega)} + M_\sigma\left\|u^N\right\|_{H^1(\Omega)} + \|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial\Omega)}\right)$$

Vì bất đẳng thức trên thỏa mãn với mọi $v \in H^1(\Omega), \|v\|_{H^1(\Omega)} \le 1$, do đó nó kéo theo

$$\|u_t^N\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \le C\left(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u^N\|_{H^1(\Omega)} + \|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial\Omega)}\right) \tag{18}$$

Lấy tích phân (18) theo t từ 0 tới T, và sử dụng (17), ta thu được

$$\int_0^T \|u_t^N\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt \le C\left(\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial\Omega)}^2\right) \tag{19}$$

Kết hợp (17) và (19), chúng ta nhận được

$$\|u^N\|_{H^{1,*}(Q_T)}^2 \le C\left(\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mu\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial\Omega)}^2\right) \tag{20}$$

ở đó C là hằng số không phụ thuộc N.

2) Từ đánh giá (20), ta thấy dãy $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$ bị chặn đều trong $L_2(0,T;H^1(\Omega))$ và dãy $\{u_t^N\}_{N=1}^{\infty}$ bị chặn đều trong $L_2(0,T;H^1(\Omega))$.

Hệ quả là tồn tại các dãy con, để thuận tiện ta vẫn ký hiệu như cũ, và hàm $u \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ với $u_t \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ sao cho:

$$\begin{cases} u^N \rightharpoonup u \text{ trong } L_2(0,T;H^1(\Omega)) \\ u_t^N \rightharpoonup u_t \text{ trong } L_2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \end{cases} \tag{21}$$

Tiếp theo với mỗi m ta chọn một hàm $v \in C^1\left([0,T];H^1(\Omega)\right)$ có dạng

$$v(t) = \sum_{k=1}^{m} d^k(t) w_k \tag{22}$$

ở đó d^k là các hàm trơn. Chọn $N \ge m$ nhân (7) với d^k, sau đó lấy tổng theo $k = 1,2,...,m$, và tích phân theo T ta được

$$\int_0^T \left(u_t^N, v\right) + B\left(u^N, v; t\right) dt = \int_0^T \left(f, v\right) - \left(\mu, v\right) + \left(\sigma u^N, v\right) dt \tag{23}$$

Cho qua giới hạn đẳng thức trên và sử dụng (21) ta thấy

$$\int_0^T \left(u_t, v\right) + B\left(u, v; t\right) dt = \int_0^T \left(f, v\right) - \left(\mu, v\right) + \left(\sigma u, v\right) dt \tag{24}$$

Đẳng thức trên thỏa mãn với mọi $v \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$, vì các hàm có dạng (22) là trù mật trong $L_2(0,T;H^1(\Omega))$. Bởi vậy, trong trường hợp đặc biệt u thỏa mãn (6).

Từ $u \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ với $u_t \in L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ ta nhận được $u \in C([0,T];L_2(\Omega))$.

Hơn nữa từ (20) ta nhận được (29).

Trong yêu cầu chỉ ra $u(0) = 0$ trước tiên từ (24) ta thấy rằng :

$$\int_0^T -(v_t, u) + B\left(u, v; t\right) dt = \int_0^T \left(f, v\right) - \left(\mu, v\right) + \left(\sigma u, v\right) dt + \left(u(0), v(0)\right) \tag{25}$$

cho mỗi $C^1\left([0,T];H^1(\Omega)\right)$ với $v(T) = 0$. Tương tự như vậy từ (23) ta cũng có:

$$\int_0^T -\left(v_t, u^N\right) + B\left(u^n, v; t\right) dt = \int_0^T \left(f, v\right) - \left(\mu, v\right) + \left(\sigma u^N, v\right) dt \tag{26}$$

vì $v(0)$ bất kỳ nên cho $N \to \infty$ trong (26) và so sánh với (25) ta có $u(0) = 0$

Do vậy u là nghiệm yếu của bài toán (2)-(4).

3) Cuối cùng, chúng ta đi chứng minh tính duy nhất của nghiệm yếu. Điều này tương đương với việc chứng minh bài toán (2)-(4) với f, μ, $\sigma \equiv 0$ chỉ có nghiệm

$$u \equiv 0 \tag{27}$$

Bằng cách lấy $v = u(.,t)$ trong (6) (với f, μ, $\sigma \equiv 0$) ta nhận được:

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u(.,t)\right\|^2\right) + B\left(u, u; t\right) = 0.$$

Từ (5), chúng ta có:

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) + \mu_0 \left\|u\right\|^2_{H^1(\Omega)} \le 0, a.e. t \in [0, T].$$

Từ bất đẳng thức này sử dụng bất đẳng thức Gronwall-Belmann, kéo theo (27).

6. Tính trơn theo biến thời gian

Để đơn giản trong mục này ta giả thiết $\sigma = \sigma(x)$ không phụ thuộc vào t, và giả thiết các hàm $\sigma, \mu : S_T \to R$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$ess \sup_{(x)\in\partial G} \frac{|\sigma(x)|}{\varphi(x_n)} = M_\sigma < \mu_0, \mu, \mu_t \in L^{2,\frac{1}{\varphi}}(S_T). \tag{28}$$

Định lí 6.1. Giả sử điều kiện (28) được thỏa mãn và

$$\sup\{|a_{ijt^k}|, |b_{it^k}|, |c_{t^k}| : i, j = 1, \ldots, n; (x,t) \in \bar{Q}_T\} \le \mu, \mu = \text{const}, k = 0, 1.$$

Khi đó u trong không gian $H^{1,*}(Q_T)$ là nghiệm yếu của Bài toán (2)-(4). Thì:

$$u_t \in L_2(0,T; H^1(G)) \cap L_2(0,T; L_2(G))$$

và

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L_2(0,T;H^1(G))} + \|u_t\|^2_{L_2(0,T;L_2(G))} + \|u_t\|^2_{L_2(0,T;H^1(G))} \\ &\qquad \le C\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|f_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)} + \|\mu_t\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

ở đây C là hằng số độc lập với u, f và μ.

Chứng minh. Cố định $N \ge 1$ và đạo hàm hai vế của phương trình (7) theo t, chúng ta nhận được:

$$\begin{aligned} &(\tilde{u}^N_t, w_k)_{L_2(G)} + B(\tilde{u}^N, w_k; t) + B_t(u^N, w_k; t) = \\ &(f_t, w_k)_{L_2(G)} + (\sigma\tilde{u}^N - \mu_t, w_k)_{L_2(\partial G)}, t \in (0,T), k = 1, ..., N, \end{aligned} \tag{29}$$

ở đây $\tilde{u}^N := u_t^N$.

Nhân (30) với C_{kt}^N và lấy tổng theo k từ 1 đến *N*:

$$\begin{aligned}&(\tilde{u}_t^N, \tilde{u}^N)_{L_2(G)} + B(\tilde{u}^N, \tilde{u}^N; t) + B_t(u^N, \tilde{u}^N; t) = \\ &(f_t, \tilde{u}^N)_{L_2(G)} + (\sigma\tilde{u}^N - \mu_t, \tilde{u}^N)_{L_2(\partial G)}, t \in (0,T)\end{aligned} \tag{30}$$

Sử dụng những đánh giá như phần trước ta nhận được từ đẳng thức trên đánh giá sau:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2\right) + 2(\mu_0 - M_\sigma - \epsilon)\left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{H^1(G)}^2 \\ &\quad \le C\left(\left\| f_t(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2 + \left\|\mu_t\right\|_{L_{2,1/\varphi}(\partial G)}^2\right) + \left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2 + C\left\|u^N(.,t)\right\|_{H^1(G)}^2\end{aligned} \tag{31}$$

với hầu khắp $t \in [0,T]$.

Lấy tích phân hai vế theo t trên $[0,\tau], \tau \le T,$ và sử dụng (17) ta có:

$$\begin{aligned}&\left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2 + 2(\mu_0 - M_\sigma - \epsilon)\int_0^\tau \left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{H^1(G)}^2 dt \\ &\quad \le C\sum_{k=0}^{1}\left(\left\| f_{t^k}(.,t)\right\|_{L_2(Q_T)}^2 + \left\|\mu_{t^k}\right\|_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}^2\right) + \int_0^\tau (\left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2 dt\end{aligned} \tag{32}$$

Từ Bất đẳng thức Gronwall-Belmann ta nhận được:

$$\int_0^T \left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2 dt \le C\sum_{k=0}^{1}\left(\left\| f_{t^k}(.,t)\right\|_{L_2(Q_T)}^2 + \left\|\mu_{t^k}\right\|_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}^2\right) \tag{33}$$

Từ đánh giá trên kết hợp với (33) với cách chọn $\epsilon < \mu_0 - M_\sigma$ kéo theo:

$$\int_0^T \left\|\tilde{u}^N\right\|_{H^1(G)}^2 dt \le C\sum_{k=0}^{1}\left(\left\| f_{t^k}(.,t)\right\|_{L_2(Q_T)}^2 + \left\|\mu_{t^k}\right\|_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}^2\right) \tag{34}$$

Kết hợp (34) và (35) dẫn đến:

$$\int_0^T \left\|\tilde{u}^N(.,t)\right\|_{L_2(G)}^2 + \left\|\tilde{u}^N\right\|_{H^1(G)}^2 dt \le C\sum_{k=0}^{1}\left(\left\| f_{t^k}(.,t)\right\|_{L_2(Q_T)}^2 + \left\|\mu_{t^k}\right\|_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}^2\right)$$

ở đó C là hằng số dương không phụ thuộc vào u, f và N. Qua giới hạn khi $N \to \infty$ ta được điều phải chứng minh.

Từ chứng minh của các định lý ở trên ta thấy nếu $\sigma \equiv 0$ thì ta được kết quả tương tự cho bài toán biên ban đầu thứ hai như sau.

Định lí 6.2. Giả sử $\mu, \mu_t \in L_{2,1/\varphi}(S_T)$ và

$$\sup\{|a_{ijt^k}|, |b_{it^k}|, |c_{t^k}| : i, j = 1, \ldots, n; (x,t) \in \overline{Q}_T\} \le \mu, \mu = \text{const}, k = 0,1.$$

Khi đó Bài toán biên ban đầu thứ hai đối với phương trình (2) có duy nhất nghiệm yếu u trong không gian $H^{1,*}(Q_T)$ và $u_t \in L_2(0,T; H^1(G)) \cap L_2(0,T; L_2(G))$ thỏa mãn:

$$\|u\|^2_{L_2(0,T;H^1(G))} + \|u_t\|^2_{L_2(0,T;L_2(G))} + \|u_t\|^2_{L_2(0,T;H^1(G))}$$
$$\leq C\left(\|f\|^2_{L_2(Q_T)} + \|f\|^2_{t L_2(Q_T)} + \|\mu\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)} + \|\mu_t\|^2_{L_{2,1/\varphi}(S_T)}\right) \tag{35}$$

ở đây C là hằng số độc lập với u, f và μ.

Để minh chứng cho kết quả thu được ta xét bài toán sau:

$$u_t - \Delta u + u = f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q_T \tag{36}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma(x,y)u = \mu(x,y,t), (x,y,t) \in S_T \tag{37}$$

$$u|_{t=0} = 0, \ G \tag{38}$$

Ở đó *v* là vector pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài của S_T, và miền bị chặn $G \subset \mathbb{R}^2$ là một miền thuộc loại OP_φ sao cho

$$B(0,1) \cap G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, |x| \leq y^2\right\}$$

Trong trường hợp này:

$$B(u,u;t) = \|u\|^2_{H^1(G)},$$

ta có thể chọn $\mu_0 = 1$ và các giả thiết cho các hàm σ, μ như sau

$$ess \sup_{(x,y)\in \partial G} y^{-2}\sigma(x,y) = M_\sigma < 1, \mu, \mu_t \in L_{2,y^{-2}}(S_T).$$

Khi đó các định lý ở trên đúng cho bài toán (37)-(38).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] D. Gilbarg, N. Trudinger (2001). Elliptic partial differential equations of second order, Springer, Berlin, MR1814364 (2001k: 35004).

[2] V. M. Gol'dshtein, M. Ju. Vasiltchik (2010). Embedding theorems and boundary-value problems for cusp domains, Trans. Amer. Math. Soc., 362(4): 1963 - 1979.

[3] V. M. Gol'dshtein, Yu. G. Reshetuyak (1990). Quasiconformal Mappings and Sobolev Spaces, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, MR1136035 (92h:46040).

[4] P. Grisvard (1985). Elliptic problems in nonsmooth domains, Pitman, Boston, MA, 1985, MR775683 (86m:35044), 410p.

[5] V. Goldshtein, A. G. Ramm (2001). Compactness of the embedding operators for rough domains, Math. Inequal. and Applications, MR1809846 (2001m:46075), 4(1): 127 - 141.

[6] N. M. Hung and N. T. Anh (2008). Regularity of solutions of initial-boundary value problems for parabolic equations in domains with conical points, Journal of Differential Equations, 245(7): 1801 - 1818.

[7] N.M. Hung, P.T. Duong (2004). On the smoothness of generalized solution for parabolic systems in domains with conical points on boundary, Ukrainian Math. J. 56(6): 854 - 864.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, N. N Ural'tseva (1968). Linear and quasilinnear elliptic equations, Academic Press, New York, MR0244627, 39: 5941.

[9] V. T. Luong, N. M. Hung, D. V. Loi (2013). Asymptotic to sulution of the Dirichlet - Cauchy problem for second-order parabolic equations in domains with edges, Annales Polonici Mathematici, doi:10-4064/ap109-2-2, 109(2): 121 - 136.

[10] V. Maz'ya (1985). Sobolev Spaces, Springer Berlin, MR817985 (87g:46056).

[11] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and J. Rossmann (1997). Elliptic boundary problems in domains with point singularities. Mathematical Surveys and Monographs 52, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[12] V. Maz'ya and J. Rossmann (2010). Elliptic Equations in Polyhedral Domains, Mathematical Surveys and Monographs. Amer. Math.Soc., Providence, Rhode Island, 162.

[13] A. G. Ramm (2004). Inverse problems, Springer, New York.

[14] V. A. Solonnikov (1983). On the solvability of classical initial-boundary value problem for the heat equation in a dihedral angle. Zap. Nachn. Sem. Leningr. Otd. Math. Inst., 127: 7 - 48.

[15] M. Ju.Vasiltchik (1989). Traces of functions from Sobolev space W_p^1 for domains with non Lipschitz boundaries. In: Modern problems of geometry and analysis, Novosibirsk, Nauka, pp. 9 - 45.

[16] M. Ju. Vasiltchik (1992). Necessary and sufficient conditions on traces of functions from Sobolev spaces for a plane domain with non Lipschitz boundaries, In: Studies on mathematical analysis and Riemannian geometry. Novosibirsk, Nauka, pp. 5 - 29.

[17] M. Ju.Vasiltchik, V.M.Gol'dshtein (2005). About solvability of third bonndary-value problem for domains with peak, (Russian) Matematicheskie zametki, MR2227517, 78(3): 466 - 468.

THE THIRD MIXED PROBLEM WITH BORDER CONDITIONS INHOMOGENEOUS FOR SECONDARY PARABOLIC EQUATIONS IN BACKWARD DOMAIN

Nguyen Thanh Chung[1], Tran Cong Sinh[2]

[1]University of Logistics Techniques of Public Security

[2]Nguyen Thi Loi High School, Sam Son,Thanh Hoa

Abstract: *In this paper we study the third mixed problem for parabolic equation in backward domain. The existence as well as the smoothness according to time variable of the problem have been set up with some specific conditions for the function on the boundary. An example illustrating the obtained results are also given.*

Keywords: *the third mixed problem, parabolic, backward domain*.