Biến đổi năng lượng điện cơ

-Phân tích Hệ thống điện cơ
dùng phương pháp năng lượng

Hệ thống lò xo

- Các yếu tố trong hệ thống cơ khí: khối lượng (động năng), lò xo (thế năng), và bộ giảm xóc (tắt dần). Định luật Newton được dùng cho các phương trình chuyển động.

- Xét một khối lượng M = W/g được treo bởi một lò xo có độ cứng K. Tại điều kiện cân bằng tĩnh, trọng lực W = Mg bằng với lực lò xo Kl, trong đó l là độ giãn của lò xo gây bởi trọng lượng W.

- Nếu vị trí cân bằng được chọn làm gốc, chỉ có lực gây dịch chuyển được xem xét. Xét sơ đồ như hình Fig. 4.35(c).

- Định luật Newton: *Lực gia tốc theo chiều dương của x bằng tổng đại số của tất cả các lực tác động lên vật thể theo chiều dương của x.*

$$M\ddot{x} = -Kx \quad \text{hay} \quad M\ddot{x} + Kx = 0$$

Hệ thống lò xo với yếu tố tổn hao

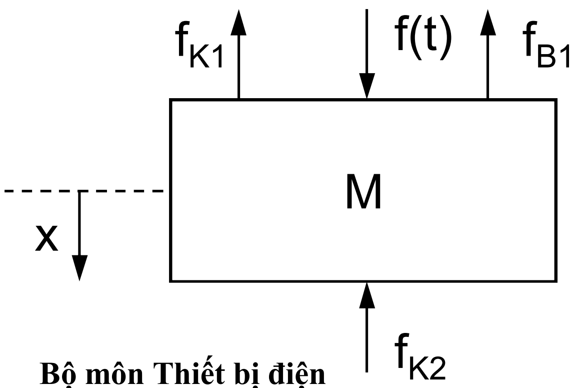
- Nếu vị trí ban đầu được chọn làm gốc (Fig. 4.36), vậy

$$M\ddot{y} = -Ky + Mg \qquad M\ddot{y} + Ky = Mg \qquad M\ddot{y} + K(y - l) = 0$$

- Chú ý $\quad Mg = Kl$

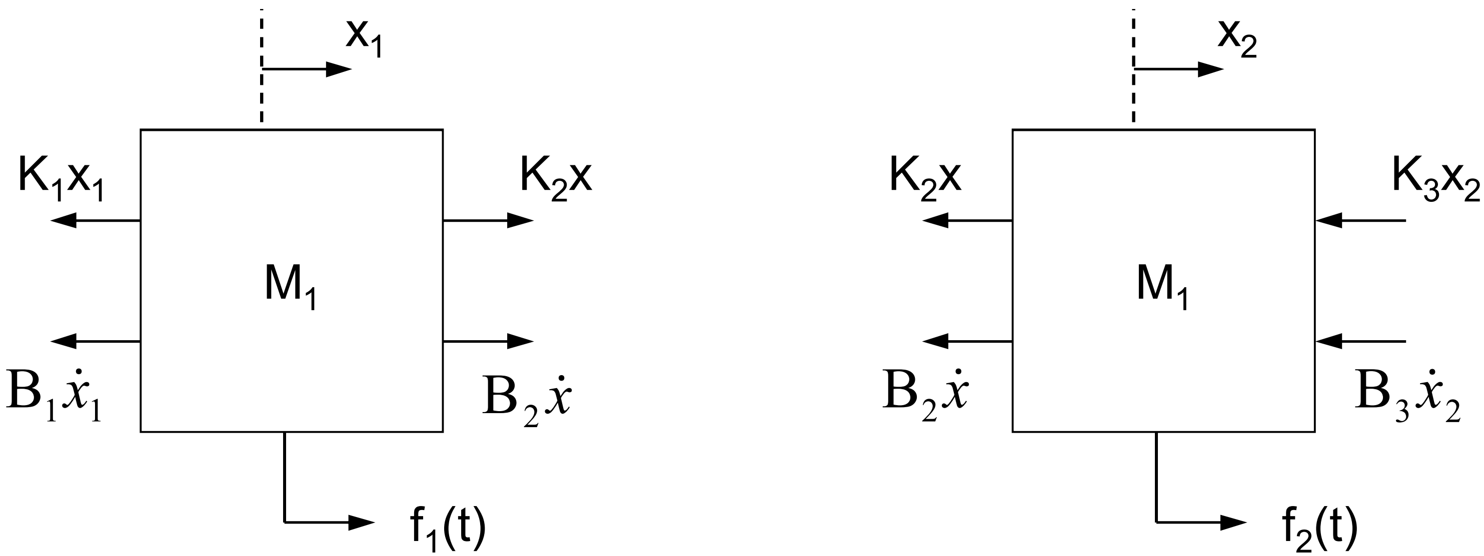
- Xét vật thể M được đặt trên một lò xo (Fig. 4.37), và một bộ giảm xóc. f(t) là lực tác động. x được đo từ vị trí cân bằng tĩnh. Một bộ giảm xóc lí tưởng có lực tỉ lệ với vận tốc giữa 2 điểm, kí hiệu như trên hình Fig. 4.38.

$$M\ddot{x} = f(t) - f_{K1} - f_{K2} - f_B$$
$$= f(t) - K_1 x - K_2 x - B\frac{dx}{dt}$$



Ví dụ 4.17

- Viết các phương trình cơ học cho hệ thống trong hình Fig. 4.40.



- Đặt $x_2 - x_1 = x$

$$M_1\ddot{x}_1 = f_1(t) + K_2(x_2 - x_1) + B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - B_1\dot{x}_1 - K_1x_1$$

$$M_2\ddot{x}_2 = f_2(t) - B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_2(x_2 - x_1) - B_3\dot{x}_2 - K_3x_2$$

Mô hình trạng thái

➢Động học của hệ thống được mô tả qua việc viết các phương trình điện học và cơ học. Những phương trình này được kết hợp với nhau cho ra một tập hợp các phuơng trình vi phân bậc nhất dùng để phân tích. Đây được coi là mô hình trạng thái của hệ thống.

➢ VDụ. 4.19: Cho hệ thống như hình Fig. 4.43, viết các phương trình điện học và cơ học của chuyển động dưới dạng phương trình trạng thái. Từ thông móc vòng như VD. 4.8,

$$\lambda = \frac{N^2 i}{R_c + R_g(x)} = \frac{N^2 i}{R(x)} \quad \Rightarrow \quad W_m' = \frac{N^2 i^2}{2R(x)}$$

➢ Về mặt điện học,

$$v_s = iR + \frac{N^2}{R(x)}\frac{di}{dt} - \frac{N^2 i}{R^2(x)}\frac{2}{\mu_0 A}\frac{dx}{dt}$$

Mô hình trạng thái (tt)

- Về phía cơ,

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+K(x-l)+B\frac{dx}{dt}=f^e=-\frac{N^2i^2}{\mu_0 AR^2(x)}$$

Trong đó l > 0 là vị trí cân bằng tĩnh của phần chuyển động. Nếu vị trí của phần chuyển động được xác định từ điểm cân bằng thì các phương trình cơ học có biến (x – l). Quan hệ ở trên có được với điều kiện sau,

$$\frac{d^2(x-l)}{dt^2}=\frac{d(x-l)}{dt}=0$$

- Mô hình trạng thái của hệ thống là tập hợp 3 phương trình vi phân bậc nhất. Ba biến trạng thái là x, dx/dt (hay v), và i.

Mô hình trạng thái (tt)

➤ Ba phương trình bậc nhất có được bằng việc lấy vi phân x, v, và i, được biểu diễn dưới dạng đạo hàm

$$\frac{dx}{dt} = v \qquad\qquad \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M}\left[\frac{-N^2 i^2}{\mu_0 A R^2(x)} - K(x-l) - Bv\right] \qquad\qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L(x)}\left[-iR + \frac{N^2 i}{R^2(x)}\frac{2}{\mu_0 A}v + v_s\right] \qquad\qquad \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, u)$$

Trong đó

$$L(x) = \frac{N^2}{R(x)}$$

Điểm cân bằng

- Xét phương trình $\underline{\dot{x}} = f(\underline{x}, \underline{u})$. Nếu ngõ vào u là hằng số, thì bằng việc đặt $\underline{\dot{x}} = 0$, ta nhận được các phương trình đại số $\underline{0} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{\hat{u}})$. Phương trình này có thể có nhiều nghiệm được gọi là các điểm cân bằng tĩnh.

- Trong các hệ thống ít biến, có thể giải bằng hình học. Nếu hệ thống nhiều biến, cần dùng các kĩ năng số học để tìm nghiệm.

- Với VDụ. 4.19, đặt các đạo hàm bằng 0, ta được

$$v^e = 0 \qquad i^e = v_s / R \qquad -K(x-l) = \frac{N^2 (i^e)^2}{\mu_0 A R^2(x)} = -f^e(i^e, x)$$

x^e có thể tìm được bằng hình học, bằng cách tìm điểm giao nhau của $-K(x-l)$ và $f^e(i^e, x)$.

Phép tích phân số

- Hai phương pháp: ẩn và hiện. Phương pháp Euler là phương pháp hiện, dễ dàng thiết lập hơn cho các hệ thống nhỏ. Với các hệ thống lớn, phương pháp ẩn tốt hơn cho sự ổn định số học.

- Xét phương trình $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x},\underline{u}) \qquad \underline{x}(0) = \underline{x}_0$

Trong đó $\underline{x}$, $\underline{f}$, và $\underline{u}$ là các vector.

- Thời gian tích phân sẽ được chia thành các bước đều nhau Δt (Fig. 4.45). Trong một bước từ t_n tới t_{n+1}, hàm lấy tích phân được giả sử là hằng số tại giá trị tương ứng với thời điểm t_n. Vì vậy,

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\underline{x}}(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \underline{f}(\underline{x},\underline{u})dt$$

$$\underline{x}(t_{n+1}) - \underline{x}(t_n) = (t_{n+1} - t_n)\underline{f}(\underline{x}(t_n),\underline{u}(t_n)) = \Delta t\left[\underline{f}(\underline{x}(t_n),\underline{u}(t_n))\right]$$

Ví dụ 4.21

- Tính x(t) tại t = 0.1, 0.2, và 0.3 seconds.

$$\dot{x} = -(t+2)x^2 \qquad x(0) = 1$$

- Chọn Δt = 0.1 s. Công thức tổng quát để tính $x^{(n+1)}$ là

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t\left[f\left(x^{(n)}, t_n\right)\right] \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

- Tại t_0 $\quad x^{(0)} = 1 \qquad f\left(x^{(0)}, t_0\right) = -(0+2)1^2 = -2$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta t\left[f\left(x^{(0)}, t_0\right)\right] = 1 + 0.1\times(-2) = 0.8$$

- Tại t_1 = 0.1 s $\quad x^{(1)} = 0.8 \qquad f\left(x^{(1)}, t_1\right) = -(0.1+2)0.8^2 = -1.344$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \Delta t\left[f\left(x^{(1)}, t_1\right)\right] = 0.8 + 0.1\times(-1.344) = 0.6656$$

- tương tự, $\quad x^{(3)} = 0.5681 \qquad x^{(4)} = 0.4939$

Ví dụ 4.22

- Tìm i(t) bằng phương pháp Euler. R = (1 + 3i²) Ω, L = 1 H, và v(t) = 10t V.

$$L\frac{di}{dt} + iR = v(t) \qquad \frac{di}{dt} + i\left(1+3i^2\right) = v(t) \qquad i(0) = 0$$

- Đặt i = x, và v(t) = u

$$\frac{dx}{dt} = -\left(1+3x^2\right)x + u(t) = f(x,u,t) \qquad x(0) = 0 = x^{(0)}$$

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta t f\left(x^{(n)}, u^{(n)}, t_n\right) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$$x^{(0)} = 0 \qquad u^{(0)} = 0 \qquad f\left(x^{(0)}, u^{(0)}, t_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^{(1)} = 0$$

$$x^{(1)} = 0 \qquad u^{(1)} = 0.25 \qquad f\left(x^{(1)}, u^{(1)}, t_1\right) = -\left(1+0^2\right)0 + 0.25 = 0.25$$

$$\Rightarrow \qquad x^{(2)} = x^{(1)} + (0.025)(0.25) = 0.00625$$

Ổn định của hệ thống điện cơ – Giới thiệu

- Mô hình động học của hệ thống điện học được mô tả bằng các phương trình vi phân. Sự ổn định của hệ thống phi tuyến rất được quan tâm. Một vài công cụ để phân tích sự ổn định sẽ được giới thiệu.

- Nghiệm thời gian của hệ thống động nhận được bằng việc lấy tích phân và các điểm cân bằng được tính bằng hình học. Với các hệ thống bậc cao, các kĩ thuật số học được dùng để tìm các điểm cân bằng.

- Việc biết các điểm cân bằng tĩnh ổn định hay không là cần thiết. Nếu trạng thái $\underline{x}$ hay ngõ vào $\underline{u}$ có nhiều nhiễu, thì cần phải mô phỏng trong miền thời gian. Nếu xung quanh các điểm cân bằng có các nhiễu loạn nhỏ, thì chỉ cần dùng phép phân tích tuyến tính để xác định điểm cân bằng ổn định hay không. Đôi khi, các hàm năng lượng có thể được dùng để đánh giá sự ổn định của hệ thống trong trường hợp nhiều nhiễu, mà không cần phải mô phỏng trong miền thời gian.

Tuyến tính hóa

- Điểm cân bằng đại diện cho trạng thái xác lập hiện tại của hệ thống, ví dụ xét một hệ thống điện. Hệ thống vật lý có thể tùy thuộc vào nhiễu loạn nhỏ (vdụ những thay đổi của tải), mà dẫn tới các dao động và thậm chí mất điện, hay các nhiễu loạn lớn (vdụ làm hỏng hay phóng điện).

- Trường hợp vô hướng, mô hình hệ thống là

$$\dot{x} = f(x,u)$$

- Mở rộng f(x, u) thành chuỗi Taylor quanh điểm cân bằng x^e và ngõ vào hằng số $\hat{u}$,

$$f(x,u) = f(x^e,\hat{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 (x - x^e) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 (u - \hat{u}) = f(x^e,\hat{u}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 \Delta u$$

hay

$$\Delta\dot{x} = f(x,u) - f(x^e,\hat{u}) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 \Delta u$$

Tuyến tính hóa hệ thống bậc 2

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u)$$

- Cho $\Delta x_1 = x_1 - x_1^e$, $\Delta x_2 = x_2 - x_2^e$, và $\Delta u = u - \hat{u}$. Tuyến tính hóa hệ thống quanh điểm cân bằng ta được

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_0 \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_0 & \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_0 \end{bmatrix}}_{\text{A}} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial u}\right|_0 \\ \left.\dfrac{\partial f_2}{\partial u}\right|_0 \end{bmatrix} \Delta u$$

- Các định trị của A nhận được bằng việc giải phương trình $\det(A - \lambda I) = 0$. Hệ thống ổn định nếu tất cả định trị nằm ở mặt phẳng bên trái (phần thực < 0).

Sự ổn định của hệ thống bậc 2

- Xét mô hình của một hệ thống bậc 2

$$M\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}=f(x,u)$$

Có dạng tuyến tính

$$\frac{d^2\Delta x}{dt^2}+\frac{B}{M}\frac{d}{dt}\Delta x=\frac{1}{M}\left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_0\Delta x=-\omega_0^2\Delta x$$

- Đặt $\Delta x=\Delta x_1$ và $\Delta\dot{x}=\Delta x_2$, dạng phương trình trạng thái là

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega_0^2 & -B/M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{bmatrix}$$

- Phương trình đặc tính,

$$\begin{bmatrix}-\lambda & 1\\ -\omega_0^2 & -B/M-\lambda\end{bmatrix}=0 \qquad \lambda^2+\frac{B}{M}\lambda+\omega_0^2=0$$

Sự ổn định của hệ thống bậc 2 (tt)

- Các nghiệm của phương trình đặc tính

$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{B}{2M} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4M^2} - \omega_0^2}$$

- Trường hợp I (B > 0, M > 0, $\omega_0^2 > 0$)

$$\frac{B^2}{4M^2} > \omega_0^2 \qquad \frac{B^2}{4M^2} = \omega_0^2 \qquad \frac{B^2}{4M^2} < \omega_0^2$$

- Cả 3 trường hợp hệ thống đều ổn định.

- Trường hợp II (B > 0, M > 0, $\omega_0^2 < 0$)

- Trường hợp đặc biệt (B = 0, M > 0): hệ thống không ổn định nếu $\omega_0^2 < 0$, hoặc *cận ổn định* nếu $\omega_0^2 > 0$.

- VDụ. 5.1.

Các phương pháp hàm năng lượng cho hệ thống phi tuyến

- Khi có các nhiễu lớn, việc phân tích sự ổn định của các hệ thống phi tuyến có thể cần các kĩ thuật số học phức tạp. Trong nhiều trường hợp, thông tin có ích có thể nhận được bằng cách trực tiếp, để tránh phép tích phân. Kĩ thuật này dựa trên các hàm năng lượng, và được biết dưới tên gọi là phương pháp Lyapunov. Có thể nhận được các nghiệm tốt với các hệ thống bảo toàn.

- Trong hệ thống bảo toàn, tổng năng lượng được giữ không đổi, điều này được dùng trong việc phân tích sự ổn định của hệ thống. Xén một con lắc như hình Fig. 5.2, bao gồm 1 vật thể khối lượng M được nối với một trục quay (không có ma sát) qua một thanh cứng.

- Cho $V(\theta) = 0$ tại $\theta = 0$, tại mọi vị trí θ, thế năng được tính bằng

$$V(\theta) = Mgl(1 - \cos(\theta))$$

Các hệ thống bảo toàn

- Không có lực nào ngoài trọng lực, và hệ thống được bảo tòan, nên

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mg\left(l\sin(\theta)\right)$$

- Vế phải biểu diễn dưới dạng đạo hàm âm của hàm vô hướng thế năng. Khi đó,

$$-Mgl\sin(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left[Mgl\left(1-\cos(\theta)\right)\right] = -\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}$$

Dẫn tới

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}$$

- Các điểm cân bằng là nghiệm của $-\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta} = -Mgl\sin(\theta) = 0$

- Trong khoảng $-\pi$ tới $+\pi$, $\theta^e = \pm\pi, 0$

Năng lượng

- Xét

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}=0$$

- Nhân với dθ/dt ta được

$$J\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}=0$$

- Tích phân theo t, ta được

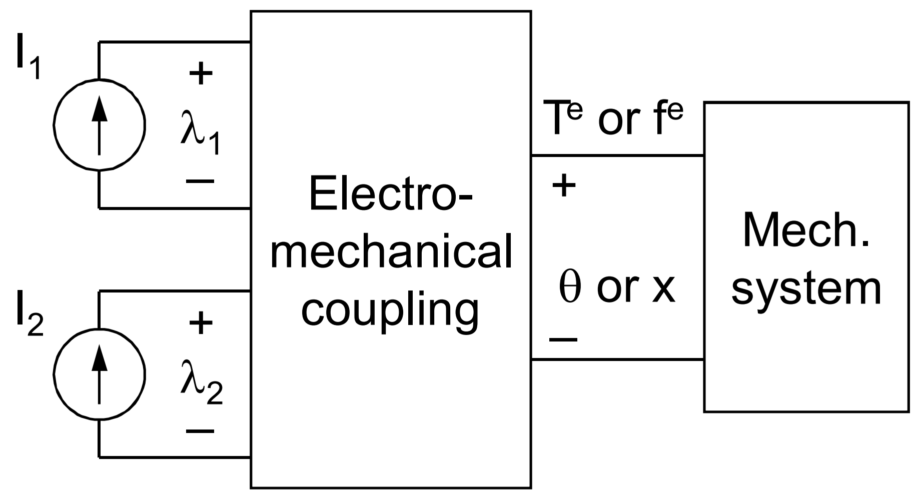
$$\underbrace{\frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{\text{Kinetic energy}}+\underbrace{V(\theta)}_{\text{Potential energy}}=E$$

- Phân tích ổn định có thể thực hiện cho 3 trường hợp khác nhau (xem sách)

Hàm năng lượng trong hệ thống điện cơ

- Xét hệ thống dưới, giả sử cả hệ thống điện và cơ đều không chứa các yếu tố gây tổn hao.

- Nếu λ hoặc i tại mỗi cổng được giữ không đổi, một sự di động không đổi có thể xảy ra ở hệ thống điện cơ. Không có năng lượng hay đồng năng lượng chảy vào cổng điện. Ở phía hệ thống cơ, không có các yếu tố gây tổn hao



$$T^{m} = -\frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta}$$ (lực cơ)

- Thế năng tổng quát:

$$V(\theta) = U(\theta) - W_m^{'}(I_1, I_2, \theta)$$ (hằng số i_1 và i_2)

$$V(\theta) = U(\theta) + W_m(\Lambda_1, \Lambda_2, \theta)$$ (hằng số λ_1 và λ_2)

Quan hệ giữa ổn định tuyến tính và thế năng

- Phương trình moment $$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}=0$$

- Các điểm cân bằng nhận được bằng cách giải $$\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta}=0$$

- Tuyến tính hóa quanh điểm cân bằng θ^e ta được

$$J\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2}+\left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta^e}\Delta\theta=0$$

- θ^e ổn định nếu $\left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta^e}>0$, θ^e không ổn định nếu $\left.\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta^e}<0$

- VDụ 5.3 và 5.4