Môn học

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN NÂNG CAO

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn Điều Khiển Tự Động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TP.HCM
Email: hthoang@hcmut.edu.vn
Homepage: http://www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 2

ĐIỀU KHIỂN PHI TUYẾN

Nội dung chương 2

- ✶ Giới thiệu
- ✶ Phương pháp hàm mô tả
- ✶ Lý thuyết ổn định Lyapunov
- ✶ Tuyến tính hóa hồi tiếp
- ✶ Điều khiển trượt
- ✶ Ứng dụng

Tài liệu tham khảo

- ★ Applied Nonlinear Control, E.Slotine and W.Li
- ★ Nonlinear Control System, Isidori
- ★ Nonlinear Systems, Khalil

Khái niệm

Khái niệm về hệ phi tuyến

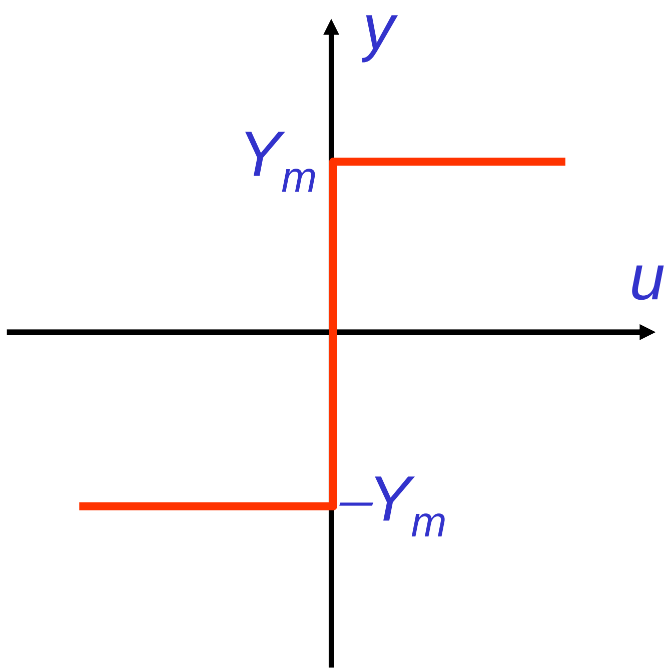
- Hệ phi tuyến là HT trong đó quan hệ vào–ra không thể mô tả bằng phương trình vi phân/sai phân tuyến tính.
- Phần lớn các đối tượng thực tế mang tính phi tuyến.
  - Hệ thống thủy khí (TD: bồn chứa chất lỏng,…),
  - Hệ thống nhiệt động học (TD: lò nhiệt,…),
  - Hệ thống cơ khí (TD: cánh tay máy,….),
  - Hệ thống điện – từ (TD: động cơ, mạch khuếch đại,…)
  - Hệ thống vật lý có cấu trúc hỗn hợp,…
- Tùy theo dạng tín hiệu trong hệ thống mà hệ phi tuyến có thể chia làm hai loại:
  - Hệ phi tuyến liên tục
  - Hệ phi tuyến rời rạc.
- Nội dung môn học chỉ đề cập đến hệ phi tuyến liên tục.

Tính chất của hệ phi tuyến

- Hệ phi tuyến không thỏa mãn nguyên lý xếp chồng.
- Tính ổn định của hệ phi tuyến không chỉ phụ thuộc vào cấu trúc, thông số của hệ thống mà còn phụ thuộc vào tín hiệu vào.
- Nếu tín hiệu vào hệ phi tuyến là tín hiệu hình sin thì tín hiệu ra ngoài thành phần tần số cơ bản (bằng tần số tín hiệu vào) còn có các thành phần hài bậc cao (là bội số của tần số tín hiệu vào).
- Hệ phi tuyến có thể xảy ra hiện tượng dao động tự kích.

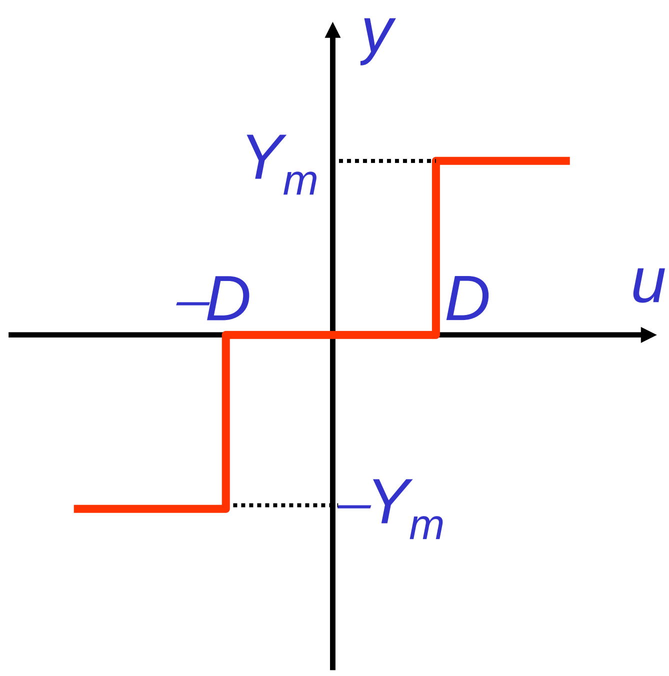
Các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu relay 2 vị trí



$$y = Y_m \operatorname{sgn}(u)$$

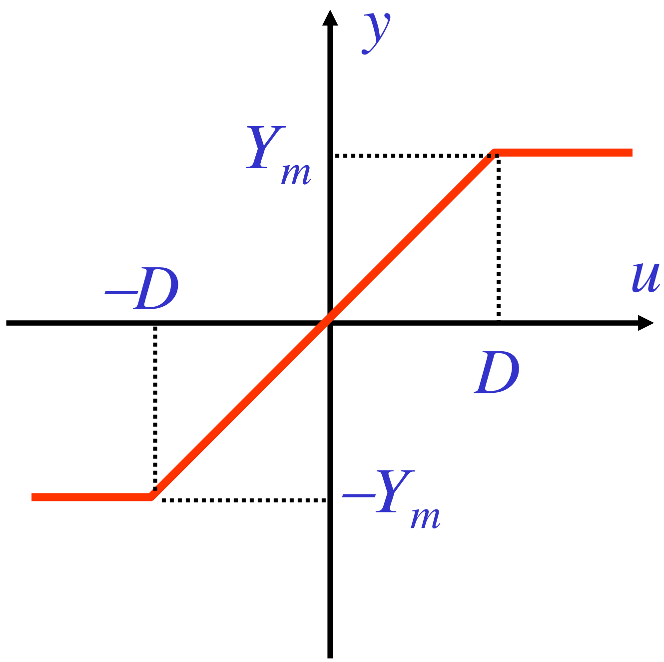
Khâu relay 3 vị trí



$$y = \begin{cases} Y_m \operatorname{sgn}(u) & (\text{nếu } |u| \geq D) \\ 0 & (\text{nếu } |u| < D) \end{cases}$$

Các khâu phi tuyến cơ bản

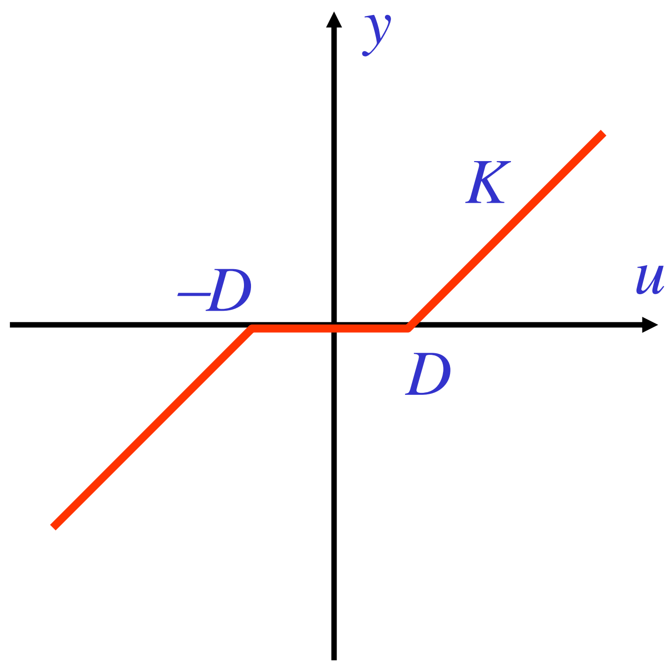
Khâu khuếch đại bão hòa



$$y = \begin{cases} Y_m \operatorname{sgn}(u) & (\text{nếu } |u| > D) \\ Ku & (\text{nếu } |u| \le D) \end{cases}$$

$$(K = Y_m / D)$$

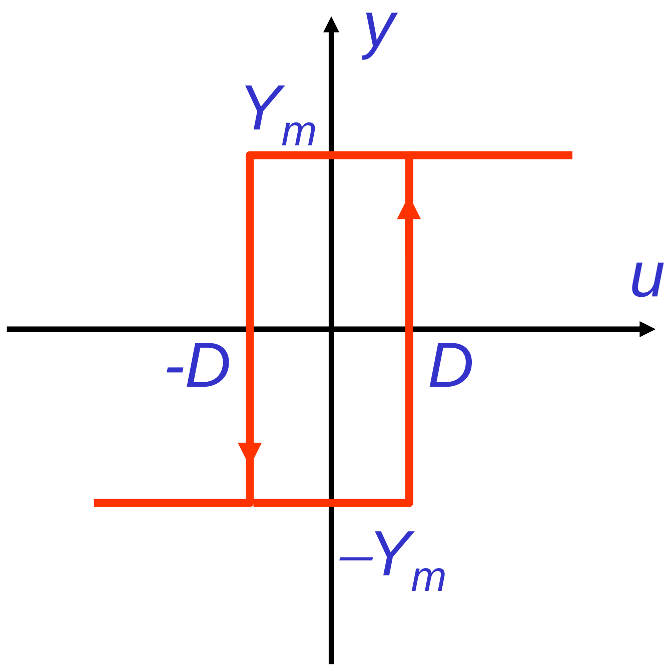
Khâu khuếch đại có miền chết



$$y = \begin{cases} K(u - D\operatorname{sgn}(u)) & (\text{nếu } |u| \ge D) \\ 0 & (\text{nếu } |u| < D) \end{cases}$$

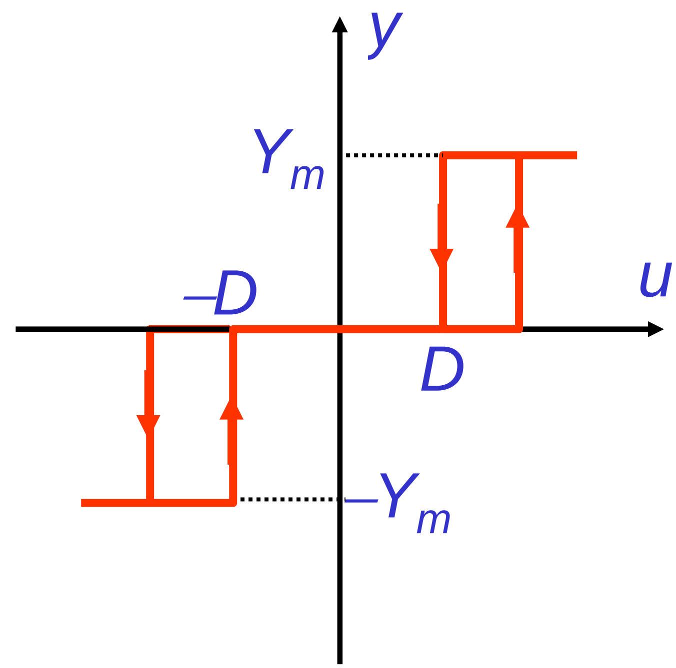
Các khâu phi tuyến cơ bản

Khâu relay 2 vị trí có trễ

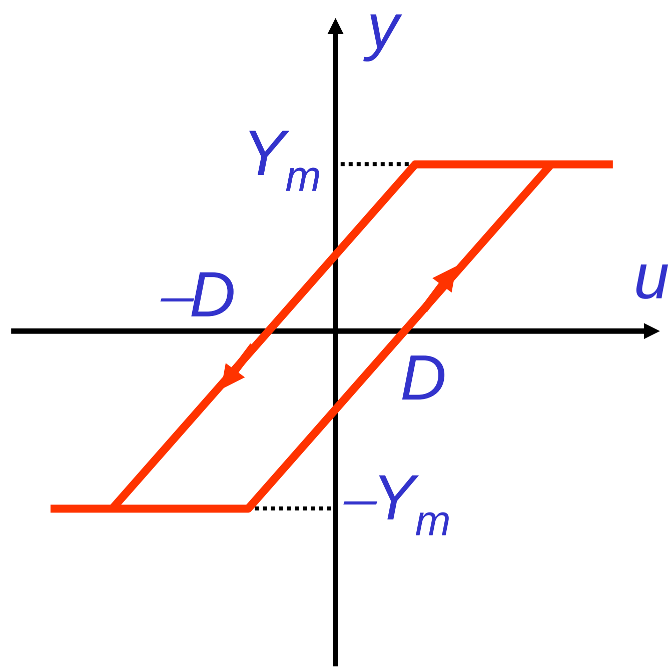


$$y = \begin{cases} Y_m \,\mathrm{sgn}(u) & (\text{nếu} \,|\,u\,| \geq D) \\ -Y_m \,\mathrm{sgn}(\dot{u}) & (\text{nếu} \,|\,u\,| < D) \end{cases}$$

Khâu relay 3 vị trí có trễ



Khâu khuếch đại bão hòa có trễ



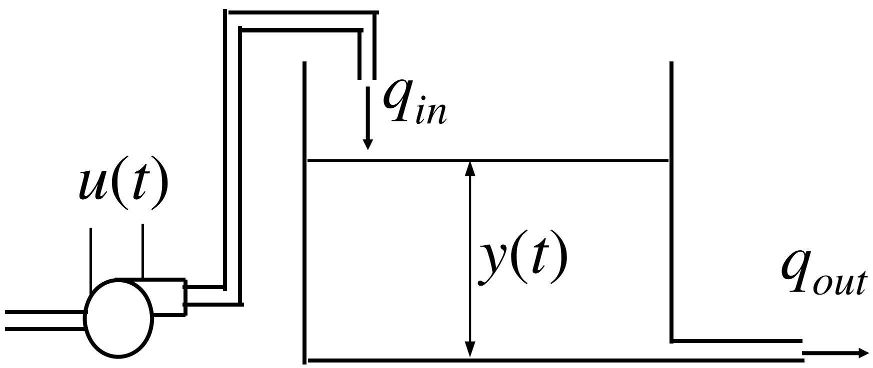
Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng PTVP

- Quan hệ vào ra của hệ phi tuyến liên tục có thể biểu diễn dưới dạng phương trình vi phân vi tuyến bậc *n*:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = g\left(\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}},\dots,\frac{dy(t)}{dt},y(t),\frac{d^m u(t)}{dt^m},\dots,\frac{du(t)}{dt},u(t)\right)$$

trong đó: $u(t)$ là tín hiệu vào,
$y(t)$ là tín hiệu ra,
$g(.)$ là hàm phi tuyến

Mô tả hệ phi tuyến dùng PTVP – Thí dụ 1



a: tiết diện van xả
A: tiết diện ngang của bồn
g: gia tốc trọng trường
k: hệ số tỉ lệ với công suất bơm
C_D: hệ số xả

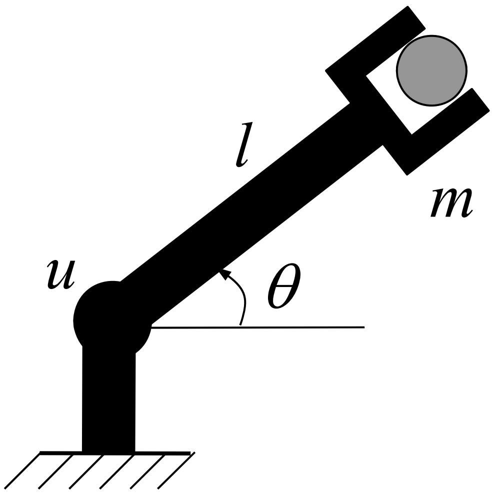
★ Phương trình cân bằng: $A\dot{y}(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t)$

trong đó: $q_{in}(t) = ku(t)$

$$q_{out}(t) = aC_D\sqrt{2gy(t)}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y}(t) = \frac{1}{A}\left(ku(t) - aC_D\sqrt{2gy(t)}\right)$$ (hệ phi tuyến bậc 1)

Mô tả hệ phi tuyến dùng phương trình vi phân – Thí dụ 2



J: moment quán tính của cánh tay máy

M: khối lượng của cánh tay máy

m: khối lượng vật nặng; *l*: chiều dài cánh tay máy

l_C : khoảng cách từ trọng tâm tay máy đến trục quay

B: hệ số ma sát nhớt; *g*: gia tốc trọng trường

$u(t)$: moment tác động lên trục quay của cánh tay máy

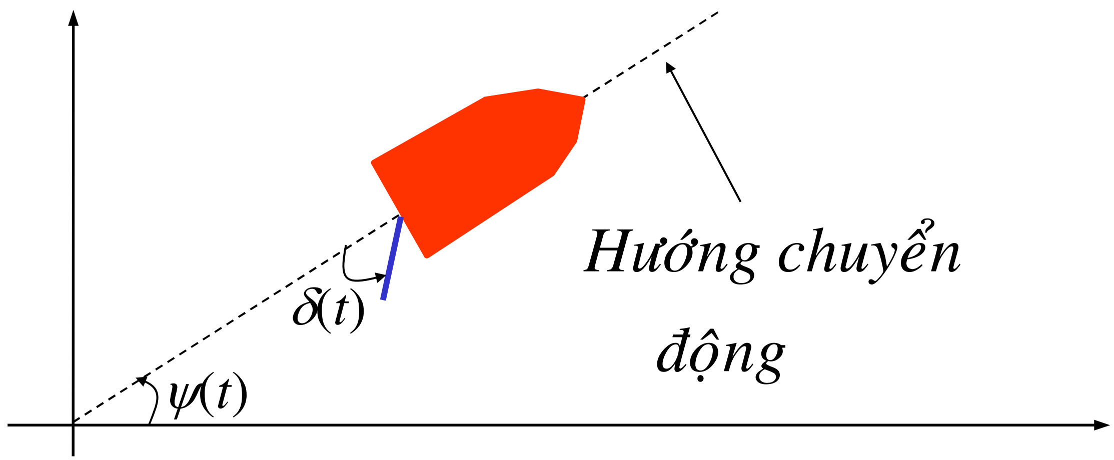
$\theta(t)$: góc quay (vị trí) của cánh tay máy

★ Theo định luật Newton

$$(J + ml^2)\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + (ml + Ml_C)g\cos\theta = u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta}(t) = -\frac{B}{(J + ml^2)}\dot{\theta}(t) - \frac{(ml + Ml_C)}{(J + ml^2)}g\cos\theta + \frac{1}{(J + ml^2)}u(t)$$

Mô tả hệ phi tuyến dùng PTVP – Thí dụ 3



δ: góc bánh lái
ψ: hướng chuyển động của tàu
k: hệ số
τ_i: hệ số

★ PTVP mô tả đặc tính động học hệ thống lái tàu

$$\dddot{\psi}(t) = -\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)\ddot{\psi}(t) - \left(\frac{1}{\tau_1\tau_2}\right)\left(\dot{\psi}^3(t) + \dot{\psi}(t)\right) + \left(\frac{k}{\tau_1\tau_2}\right)\left(\tau_3\dot{\delta}(t) + \delta(t)\right)$$

(hệ phi tuyến bậc 3)

Mô tả toán học hệ phi tuyến dùng PTTT

★ Hệ phi tuyến liên tục có thể mô tả bằng PTTT:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

trong đó: $u(t)$ là tín hiệu vào,

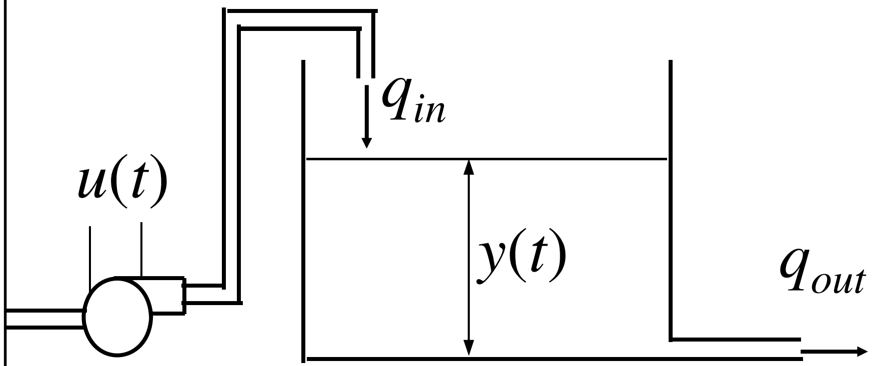
$y(t)$ là tín hiệu ra,

$\boldsymbol{x}(t)$ là vector trạng thái,

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$$

$\boldsymbol{f}(.)$, $h(.)$ là các hàm phi tuyến

Mô tả hệ phi tuyến dùng PTTT– Thí dụ 1



★ PTVP:

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{A}\left(ku(t) - aC_D\sqrt{2gy(t)}\right)$$

★ Đặt biến trạng thái:

$$x_1(t) = y(t)$$

★ PTTT:

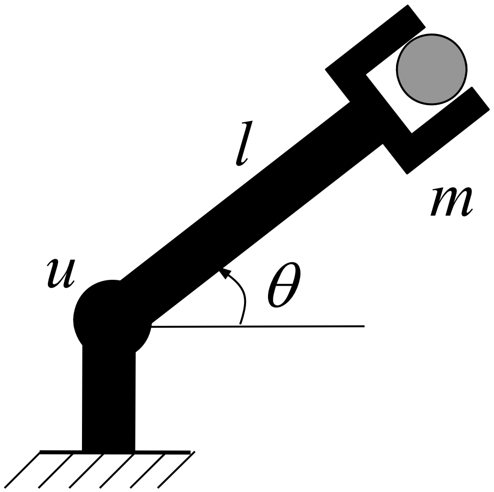
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$$

trong đó:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = -\frac{aC_D\sqrt{2gx_1(t)}}{A} + \frac{k}{A}u(t)$$

$$h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) = x_1(t)$$

Mô tả hệ phi tuyến dùng phương trình trạng thái – Thí dụ 2



★ PTVP:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{B}{(J+ml^2)}\dot{\theta}(t) - \frac{(ml+Ml_C)}{(J+ml^2)}g\cos\theta + \frac{1}{(J+ml^2)}u(t)$$

★ Đặt biến trạng thái: $\begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$

★ PTTT: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \\ y(t) = h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) \end{cases}$

trong đó:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{(ml+Ml_C)g}{(J+ml^2)}\cos x_1(t) - \frac{B}{(J+ml^2)}x_2(t) + \frac{1}{(J+ml^2)}u(t) \end{bmatrix}$$

$$h(\boldsymbol{x}(t), u(t)) = x_1(t)$$

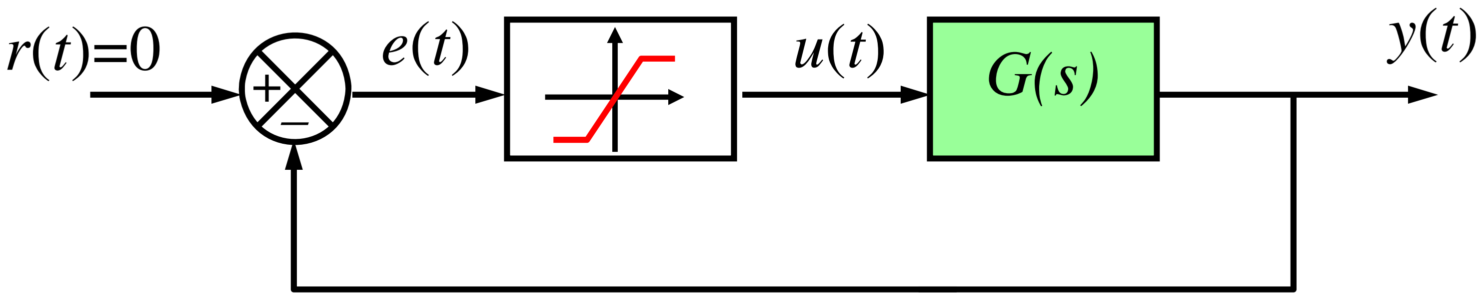
Các phương pháp khảo sát hệ phi tuyến

- Không có phương pháp nào có thể áp dụng hiệu quả cho mọi hệ phi tuyến.
- Một số phương pháp thường dùng để phân tích và thiết kế hệ phi tuyến:
  - Phương pháp tuyến tính hóa (đã học ở môn Cơ sở tự động)
  - Phương pháp hàm mô tả
  - Phương pháp Lyapunov
  - Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa
  - Điều khiển trượt

Phương pháp hàm mô tả
(Phương pháp tuyến tính hóa điều hòa)

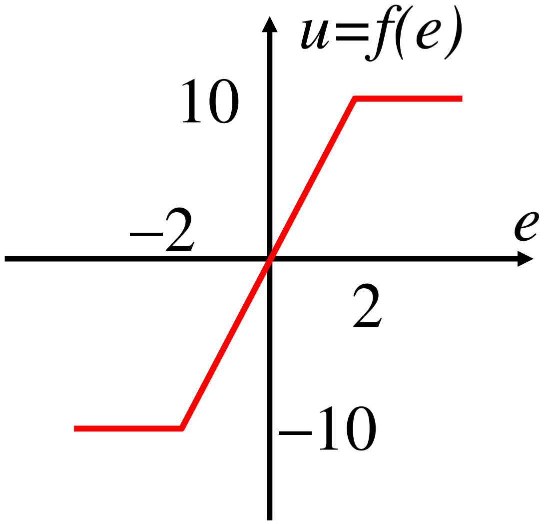
Thí dụ hệ thống điều khiển có khâu bão hòa

★ Xét hệ thống điều khiển như sau:



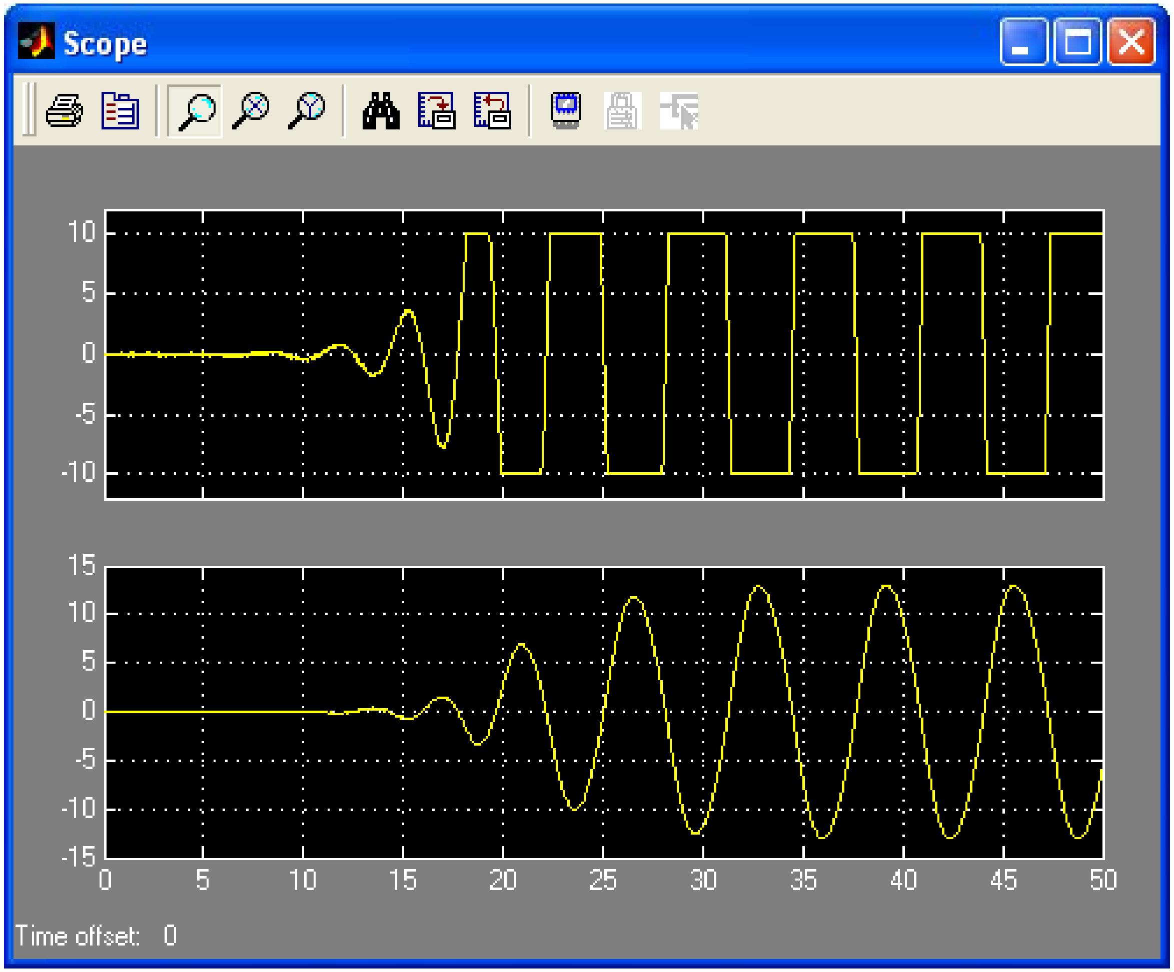
Hàm truyền của đối tượng: $G(s) = \dfrac{2}{s(s+1)^2}$

Khâu khuếch đại bão hòa:



Thí dụ hệ thống điều khiển có khâu bão hòa

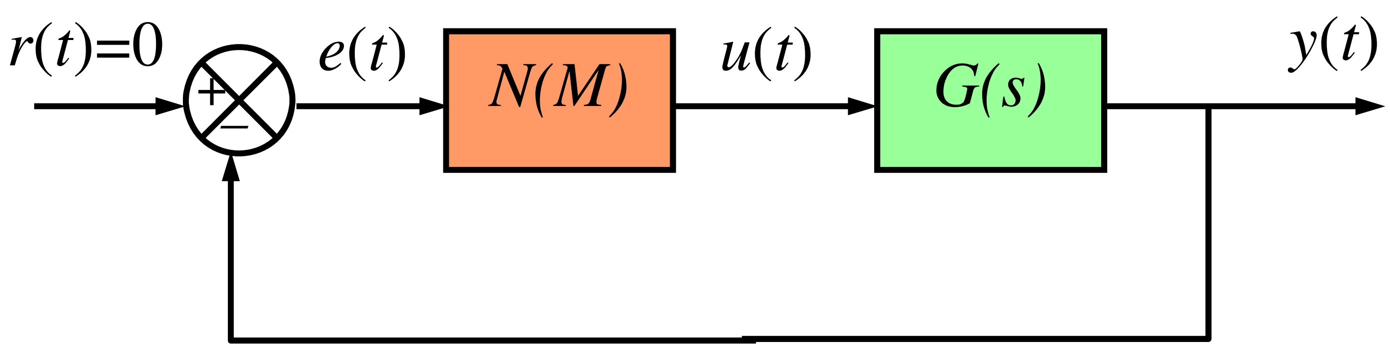
- ✶ Hệ thống có dao động tự kích



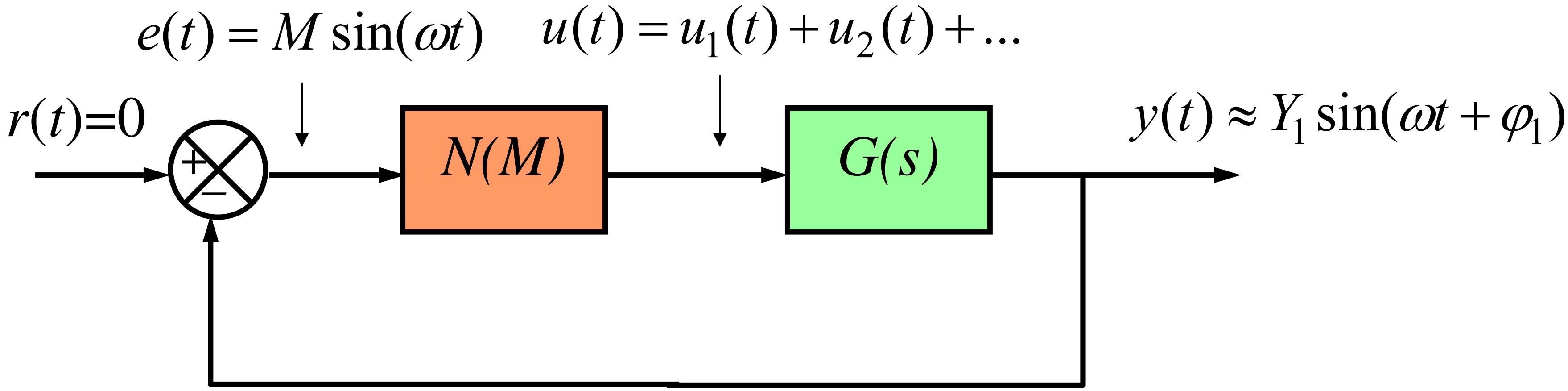
- ✶ Làm thế nào dự báo sự xuất hiện của dao động tự kích này?

Phương pháp hàm mô tả

- ✶ Phương pháp hàm mô tả mở rộng gần đúng hàm truyền đạt của hệ tuyến tính sang hệ phi tuyến.
- ✶ PP hàm mô tả là phương pháp khảo sát trong miền tần số có thể áp dụng cho các hệ phi tuyến bậc cao (n>2) do dễ thực hiện và tương đối giống tiêu chuẩn Nyquist.
- ✶ Áp dụng để khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến có thể biến đổi về dạng gồm có khâu phi tuyến nối tiếp với khâu tuyến tính theo sơ đồ khối như sau:



Đáp ứng của hệ phi tuyến khi tín hiệu vào hình sin



- ✶ Để khảo khả năng tồn tại dao động tuần hoàn không tắt trong hệ, ở đầu vào khâu phi tuyến ta cho tác động sóng điều hòa: $e(t) = M\sin(\omega t)$

- ✶ Tín hiệu ra khâu phi tuyến không phải là tín hiệu hình sin. Phân tích Fourier ta thấy $u(t)$ chứa thành phần tần số cơ bản ω và các thành phần hài bậc cao 2ω, 3ω...

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \sin(k\omega t) + B_k \cos(k\omega t)]$$

Đáp ứng của hệ phi tuyến khi tín hiệu vào hình sin

Các hệ số Fourier xác định theo các công thức sau:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,d(\omega t)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(k\omega t)\,d(\omega t)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(k\omega t)\,d(\omega t)$$

- Giả thiết $G(s)$ là bộ lọc thông thấp, các thành phần hài bậc cao ở ngõ ra của khâu tuyến tính không đáng kể so với thành phần tần số cơ bản, khi đó tín hiệu ra của khâu tuyến tính gần đúng bằng: $y(t) \approx Y_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$

Khái niệm hàm mô tả

★ Xét khâu phi tuyến :

$$e(t) = M\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{N(M)} \longrightarrow u(t)$$

★ Do khi t/hiệu vào của khâu phi tuyến là tín hiệu hình sin: $e(t) = M\sin(\omega t)$ t/hiệu ra $u(t)$ xấp xỉ thành phần tần số cơ bản (do ta bỏ qua các thành phần hài bậc cao):

$$u(t) \approx u_1(t) = A_1\sin(\omega t) + B_1\cos(\omega t)$$

nên ta có thể coi khâu phi tuyến như là một khâu khuếch đại có hệ số khuếch đại là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M}$$

★ Tổng quát $N(M)$ là một hàm phức nên ta gọi là hệ số khuếch đại phức của khâu phi tuyến. $N(M)$ còn được gọi là hàm mô tả của khâu phi tuyến.

Định nghĩa hàm mô tả

- Hàm mô tả (hay còn gọi là hệ số khuếch đại phức) là tỉ số giữa thành phần sóng hài cơ bản của tín hiệu ra của khâu phi tuyến và tín hiệu vào hình sin.

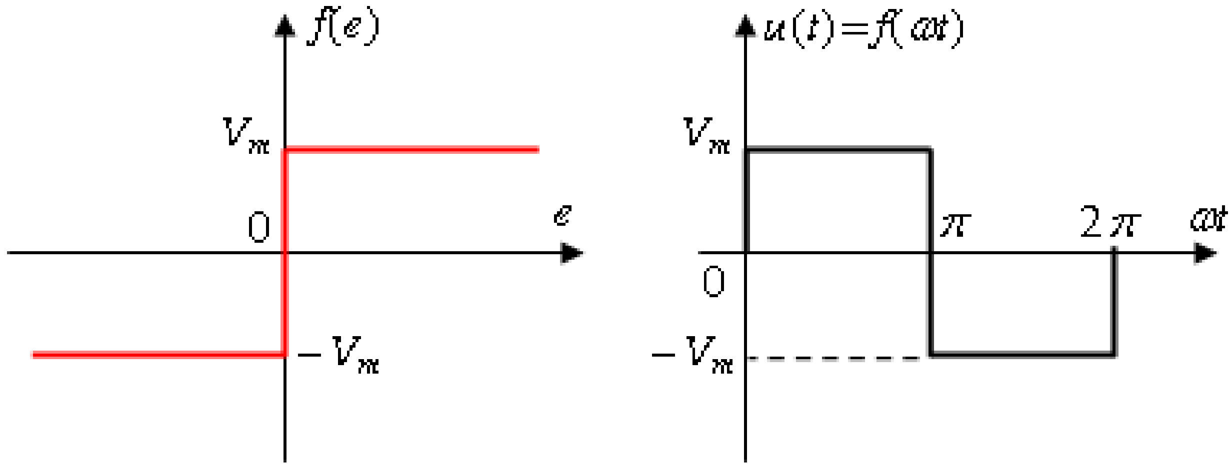
$$\boxed{N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M}}$$

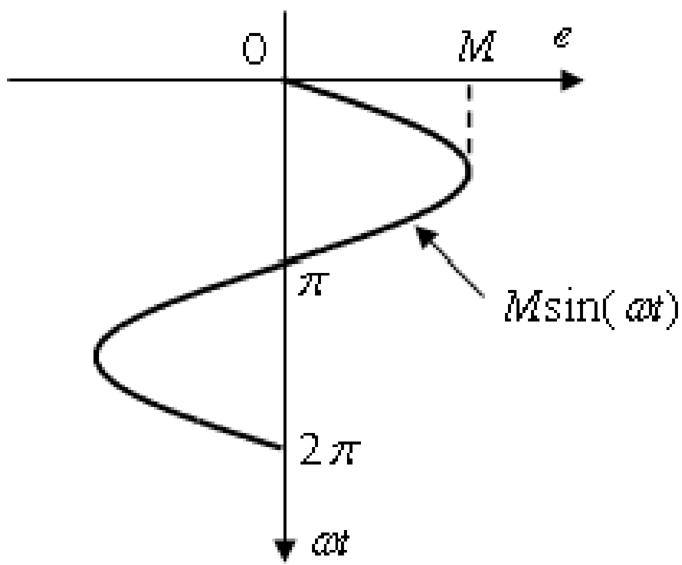
$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \qquad B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\cos(\omega t)d(\omega t)$$

- Trong các công thức trên $u(t)$ là tín hiệu ra của khâu phi tuyến khi tín hiệu vào là $M\sin(\omega t)$. Nếu $u(t)$ là hàm lẻ thì:

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \qquad B_1 = 0$$

Khâu relay 2 vị trí



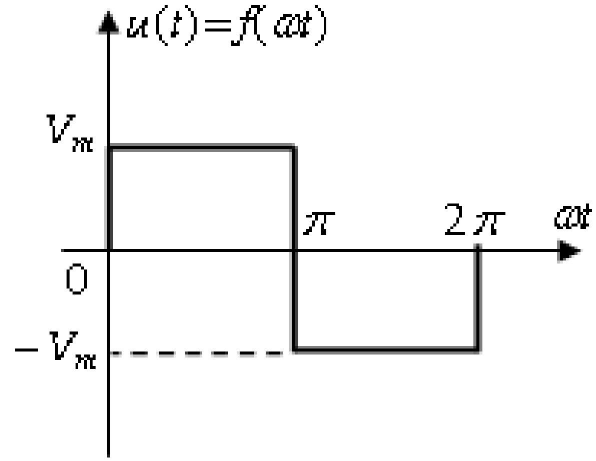


Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}$$

Khâu relay 2 vị trí (tt)

Do $u(t)$ là hàm lẻ nên: $B_1 = 0$



$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

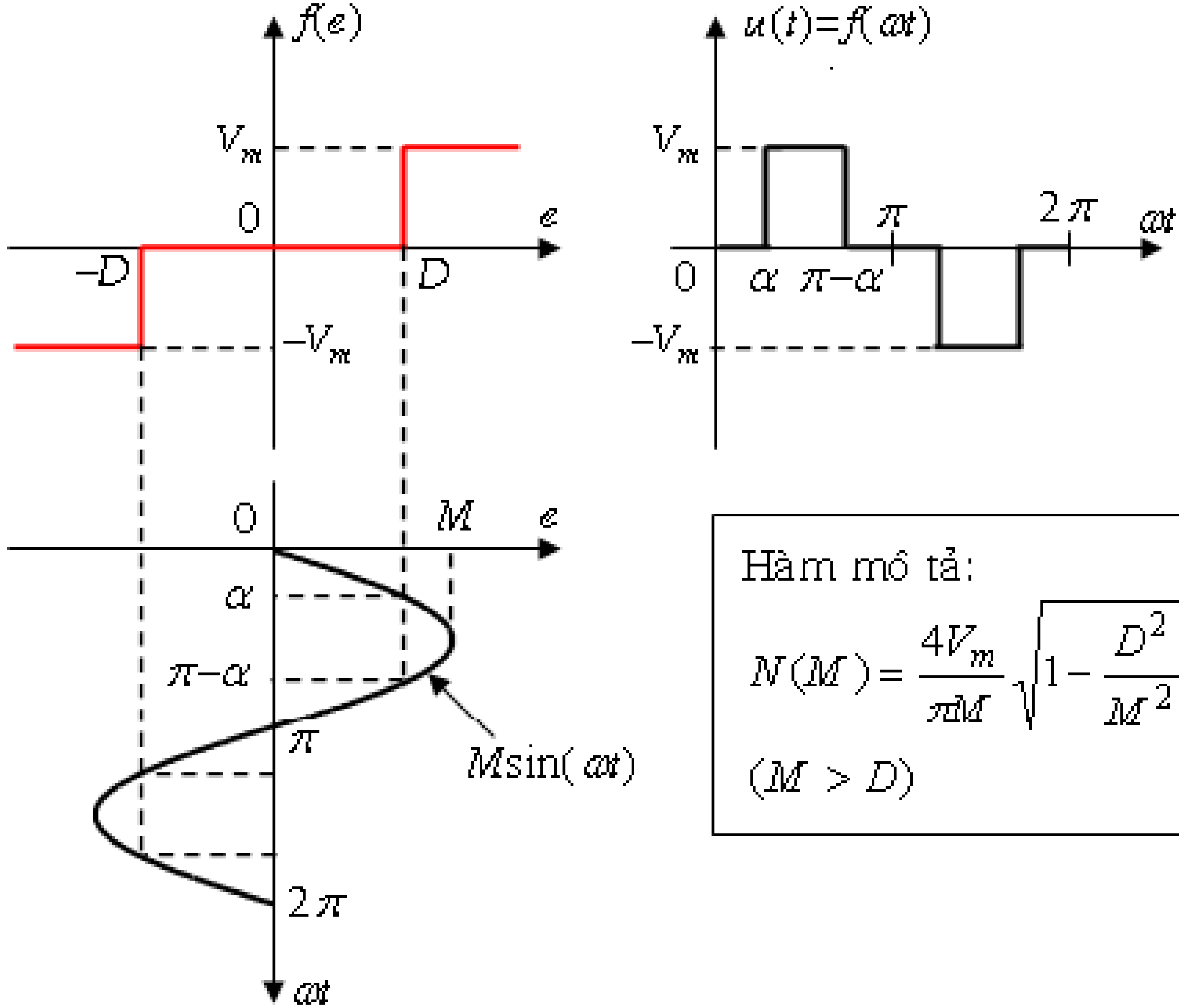
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} V_m \sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= -\frac{2V_m}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_{\omega t=0}^{\pi} = \frac{4V_m}{\pi}$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}$$

Khâu relay 3 vị trí

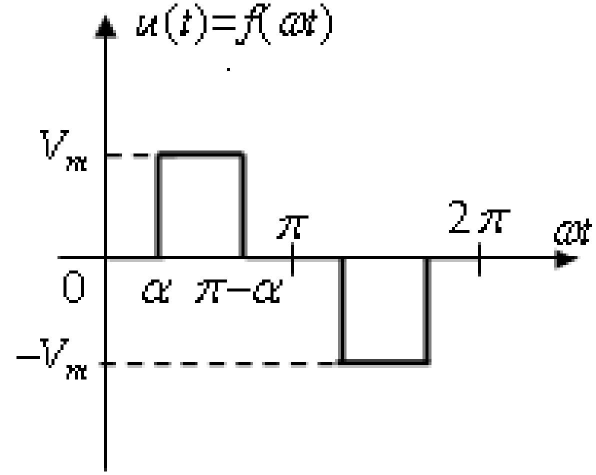


Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

$(M > D)$

Khâu relay 3 vị trí



Do u(t) là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} V_m \sin(\omega t)d(\omega t) = -\frac{2V_m}{\pi}\cos(\omega t)\Big|_{\omega t=\alpha}^{\pi-\alpha} = \frac{4V_m}{\pi}\cos\alpha$$

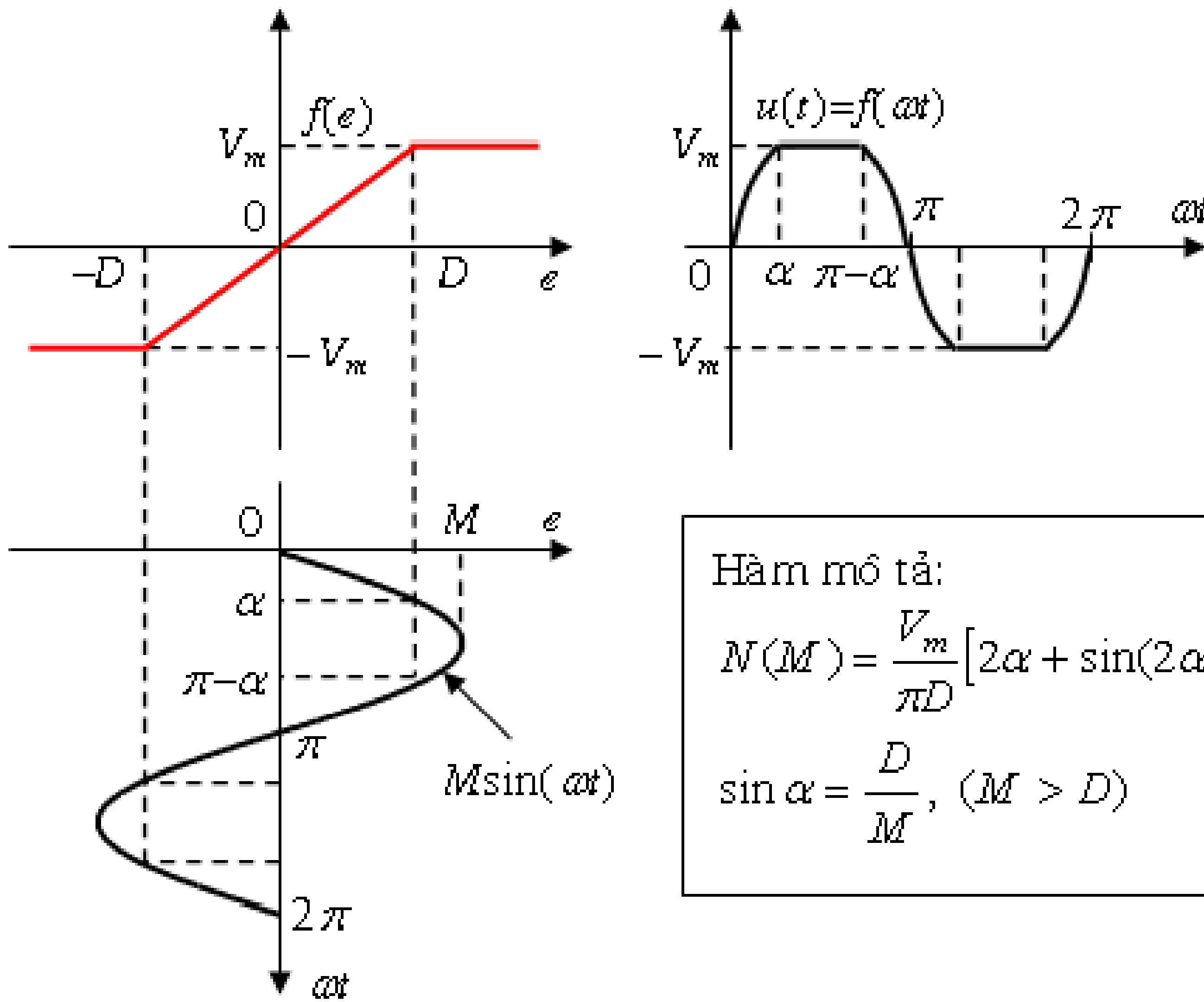
Theo đồ thị ta có: $D = M\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{D}{M} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\dfrac{D^2}{M^2}}$

$\Rightarrow$
$$A_1 = \frac{4V_m}{\pi}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 3 vị trí là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}$$

Khâu khuếch đại bão hòa



Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{V_m}{\pi D}\left[2\alpha + \sin(2\alpha)\right]$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M}, \quad (M > D)$$

Khâu khuếch đại bão hòa (tt)

Do $u(t)$ là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t)$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\alpha}\frac{V_m M}{D}\sin^2(\omega t)d(\omega t) + \int_{\alpha}^{\pi/2} V_m\sin(\omega t)d(\omega t)\right]$$

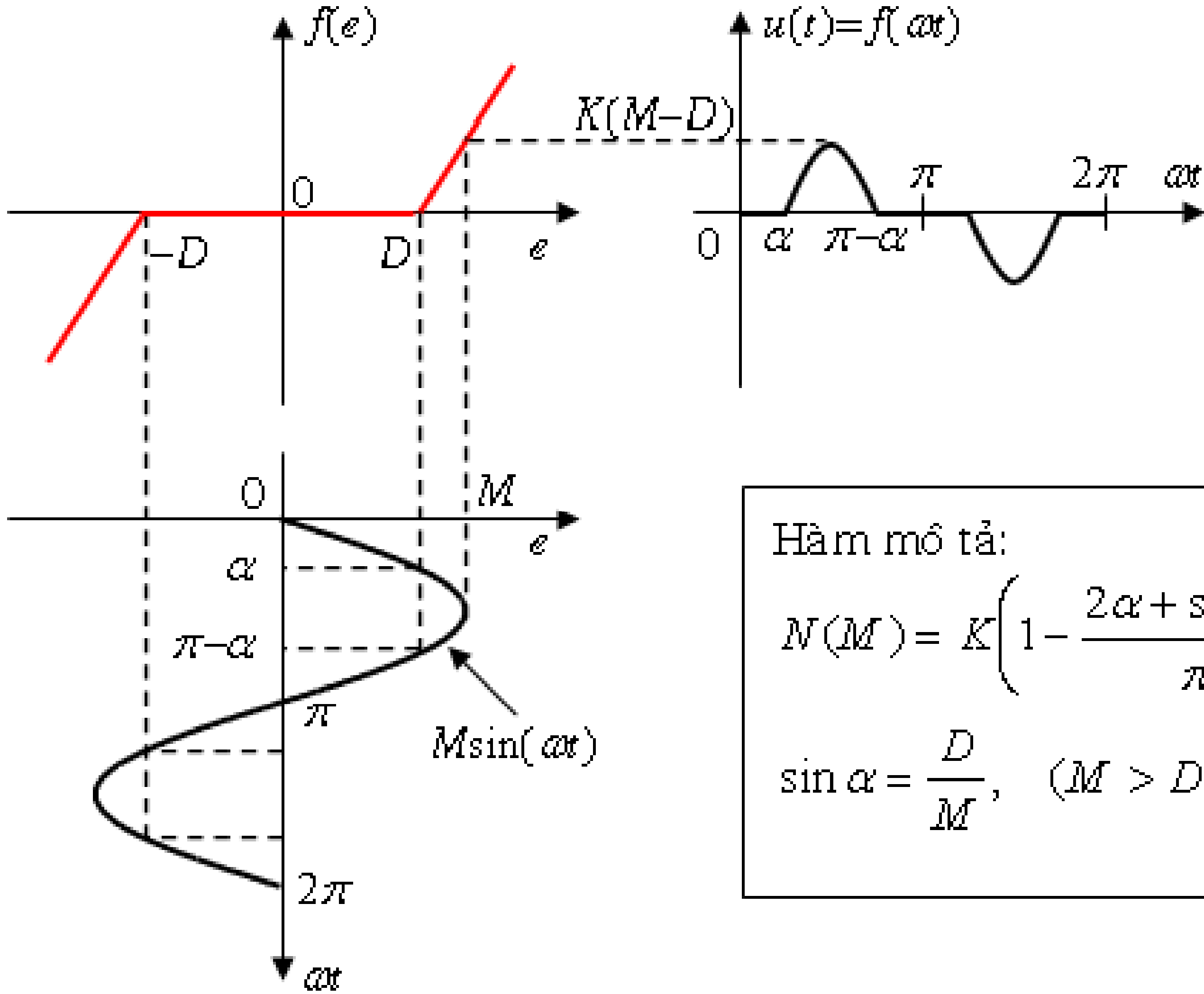
$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{V_m M}{2D}\left(\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}\right)\Bigg|_{\omega t=0}^{\alpha} - V_m\cos(\omega t)d(\omega t)\Bigg|_{\omega t=\alpha}^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{V_m M}{2D}\left(\alpha - \frac{\sin(2\alpha)}{2}\right) + V_m\cos\alpha\right] = \frac{M}{\pi}\left[\frac{V_m}{D}\big(2\alpha + \sin(2\alpha)\big)\right]$$

Do đó hàm mô tả của khâu khuếch đại bão hòa là:

$$N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{V_m}{\pi D}\left[2\alpha + \sin(2\alpha)\right] \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Khâu khuếch đại có vùng chết



Hàm mô tả:

$$N(M) = K\left(1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}\right)$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M}, \quad (M > D)$$

Khâu khuếch đại có vùng chết (tt)

Do $u(t)$ là hàm lẻ nên $B_1 = 0$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi/2} K[M\sin(\omega t) - D]\sin(\omega t)d(\omega t)$$

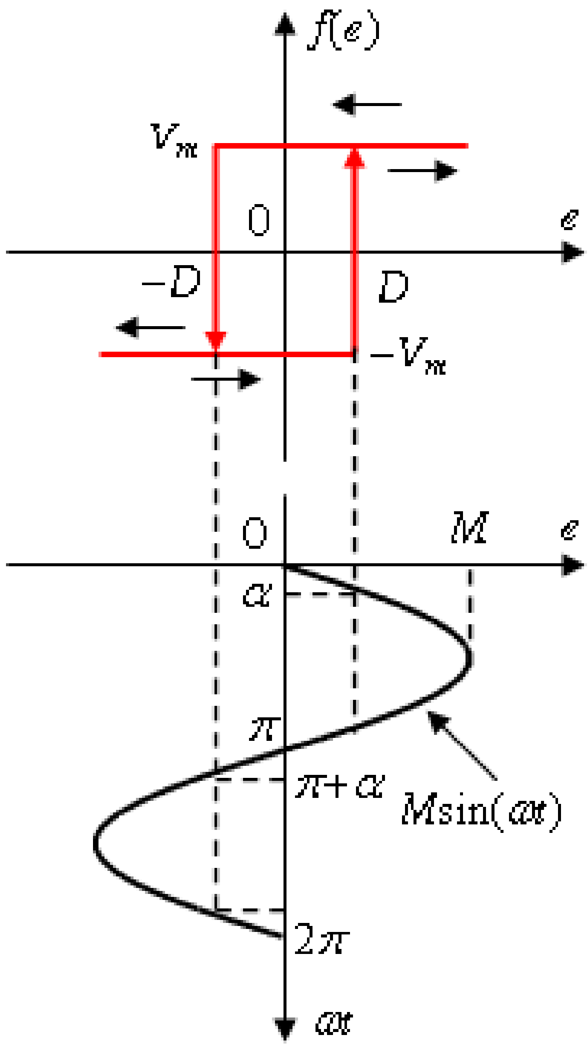
$$= \frac{4KM}{\pi}\left[\left(\omega t - \frac{\sin(2\omega t)}{2}\right) + \frac{D}{M}\cos(\omega t)\right]_{\alpha}^{\pi/2}$$

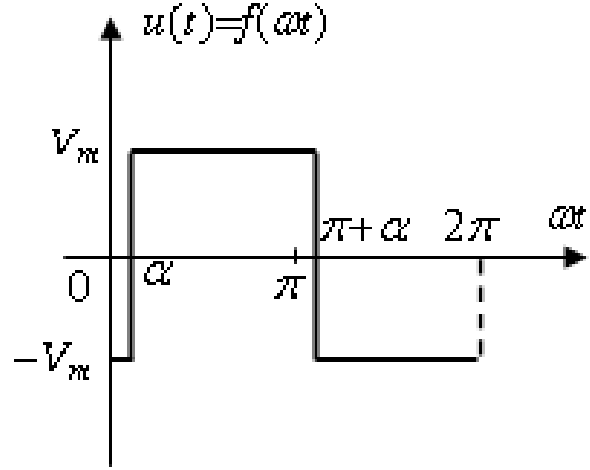
$$= KM\left(1 - \frac{2\alpha + \sin(2\alpha)}{\pi}\right)$$

Do đó hàm mô tả của khâu khuếch đại có vùng chết là:

$$\boxed{N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = K\left(1 - \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{\pi}\right)} \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

Khâu relay 2 vị trí có trễ





Hàm mô tả:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha - j\sin\alpha)$$

$$\sin\alpha = \frac{D}{M} \qquad (M > D)$$

Khâu relay 2 vị trí có trễ (tt)

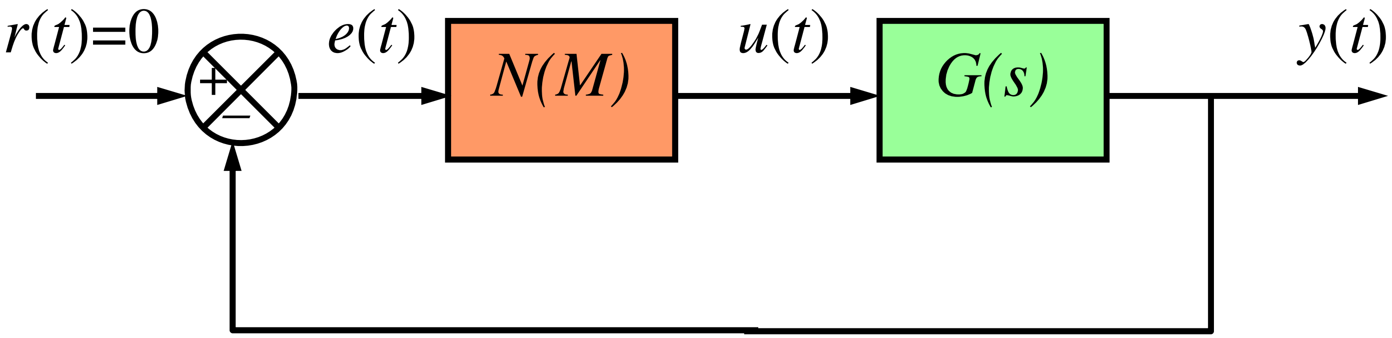
$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} u(t)\sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_m \sin(\omega t)d(\omega t) = \frac{4V_m}{\pi}\cos\alpha$$

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} u(t)\cos(\omega t)d(\omega t) = \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi+\alpha} V_m \cos(\omega t)d(\omega t) = -\frac{4V_m}{\pi}\sin\alpha$$

Do đó hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí có trễ là:

$$\boxed{N(M) = \frac{A_1 + jB_1}{M} = \frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha - j\sin\alpha)} \qquad \left(\sin\alpha = \frac{D}{M}\right)$$

- Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:



- Điều kiện để hệ thống có dao động là:

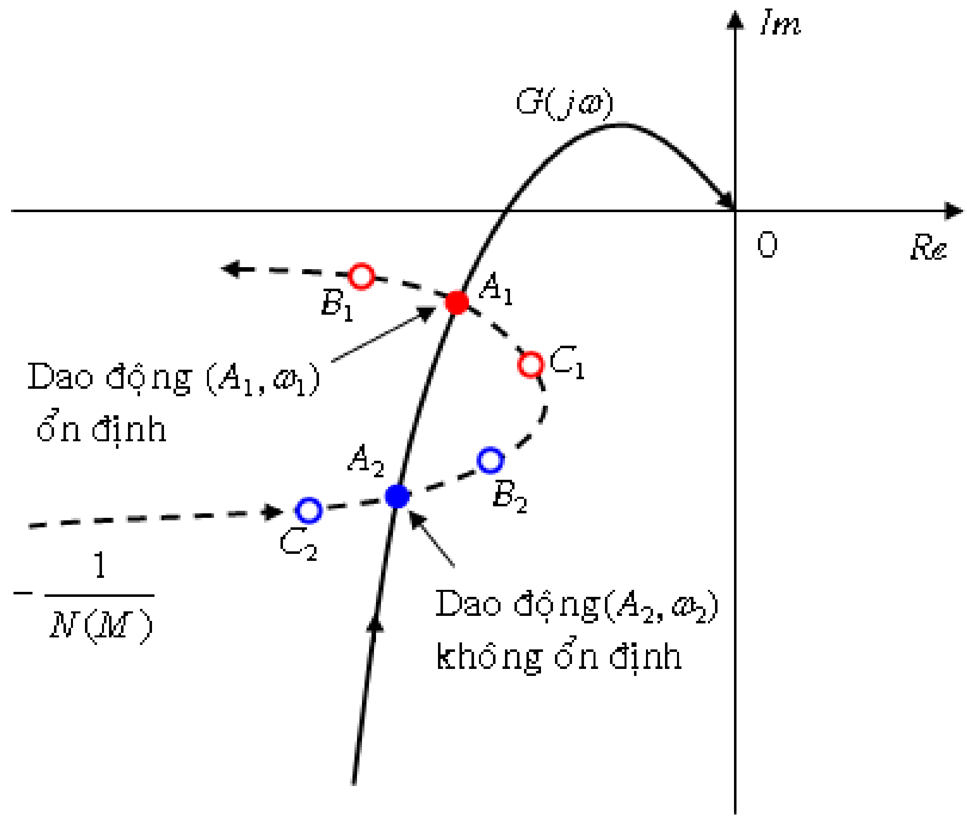
$$1 + N(M)G(j\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G(j\omega) = -\frac{1}{N(M)} \qquad (*)$$

- Phương trình trên được gọi là phương trình cân bằng điều hòa. Phương trình này sẽ được dùng để xác định biên độ và tần số của dao động điều hòa trong hệ phi tuyến.

- Nếu (M^*, ω^*) là nghiệm của phương trình (*) thì trong hệ phi tuyến có dao động với tần số ω^*, biên độ M^*.

- Về mặt hình học, nghiệm (M^*, ω^*) là nghiệm của phương trình (*) chính là giao điểm của đường cong Nyquist $G(j\omega)$ của khâu tuyến tính và đường đặc tính $-1/N(M)$ của khâu phi tuyến.

- Dao động trong hệ phi tuyến là ổn định nếu đi theo chiều tăng của đặc tính $-1/N(M)$ của khâu phi tuyến , chuyển từ vùng không ổn định sang vùng ổn định của khâu tuyến tính $G(j\omega)$.



Trình tự khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến

Bước 1: Xác định hàm mô tả của khâu phi tuyến (nếu khâu phi tuyến không phải là các khâu cơ bản).

Bước 2: Điều kiện tồn tại dao động trong hệ: đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ phải cắt nhau.

Bước 3: Biên độ, tần số dao động (nếu có) là nghiệm của p.trình:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(M)} \qquad (*)$$

Nếu $N(M)$ là hàm thực thì:

- Tần số dao động chính là tần số cắt pha $\omega_{-\pi}$ của khâu tuyến tính $G(j\omega)$.

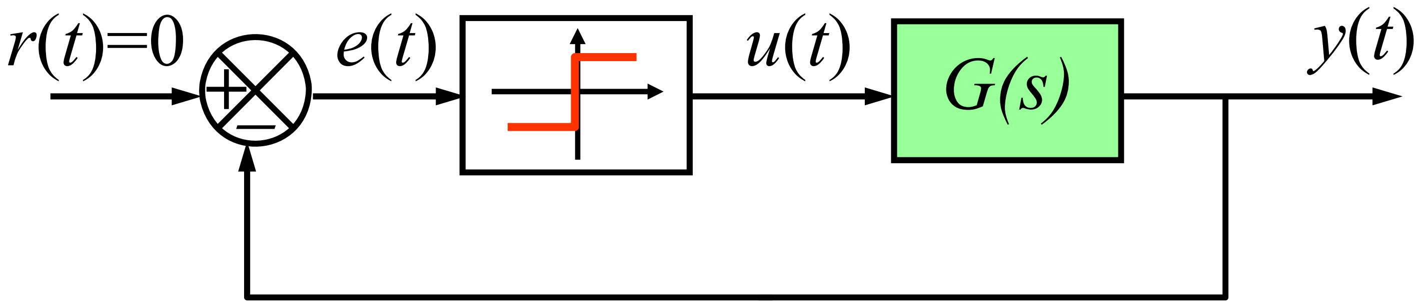
$$\angle G(j\omega_{-\pi}) = -\pi$$

- Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{N(M)} = \left|G(j\omega_{-\pi})\right|$$

Khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến - Thí dụ 1

✶ Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:

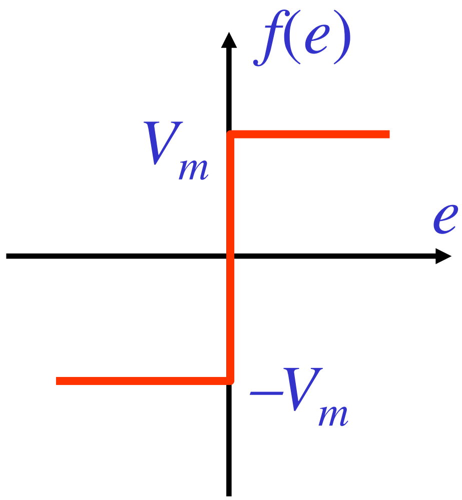


Hàm truyền của khâu tuyến tính là

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(2s+1)}$$

Khâu phi tuyến là khâu relay 2 vị trí có V_m=6.

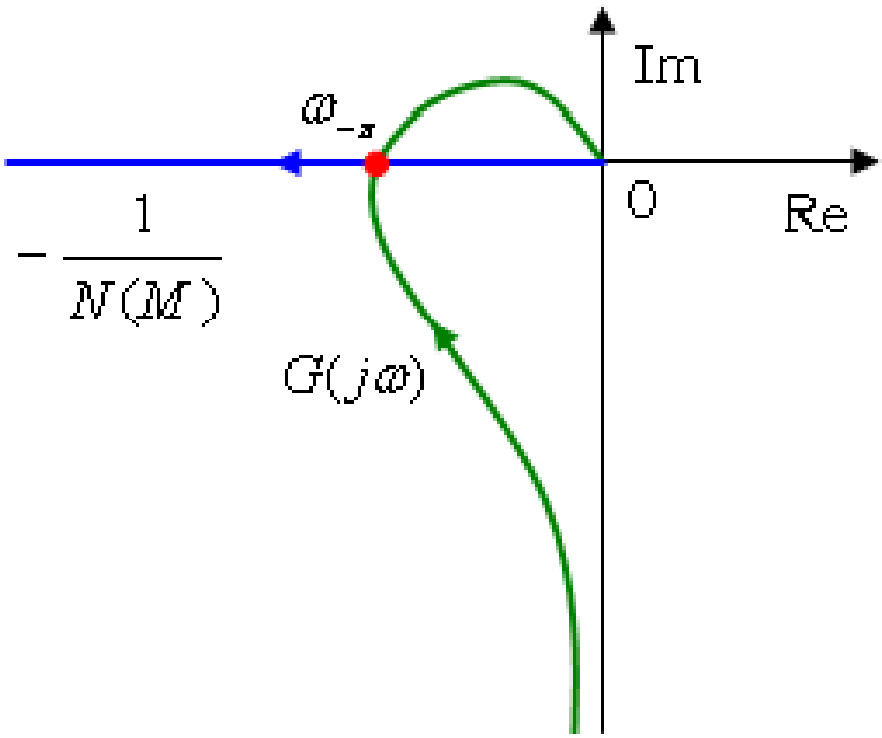
Hãy xác định biên độ và tần số dao động tự kích trong hệ (nếu có).



Lời giải

- Hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí là: $N(M)=\dfrac{4V_m}{\pi M}$

- Do đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ luôn luôn cắt nhau (xem hình vẽ) nên trong hệ phi tuyến luôn luôn có dao động.



Khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến - Thí dụ 1

★ Tần số dao động là tần số cắt pha của $G(j\omega)$:

$$\angle G(j\omega_{-\pi}) = \arg\left[\frac{10}{j\omega_{-\pi}(0.2j\omega_{-\pi}+1)(2j\omega_{-\pi}+1)}\right] = -\pi$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} - \arctan(0.2\omega) - \arctan(2\omega) = -\pi \qquad \Leftrightarrow \arctan(0.2\omega) + \arctan(2\omega) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(0.2\omega_{-\pi}) + (2\omega_{-\pi})}{1-(0.2\omega_{-\pi}).(2\omega_{-\pi})} = \infty \quad \Leftrightarrow 1-(0.2\omega_{-\pi}).(2\omega_{-\pi}) = 0 \quad \Leftrightarrow \omega_{-\pi} = 1.58 \ \ (\text{rad/sec})$$

★ Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

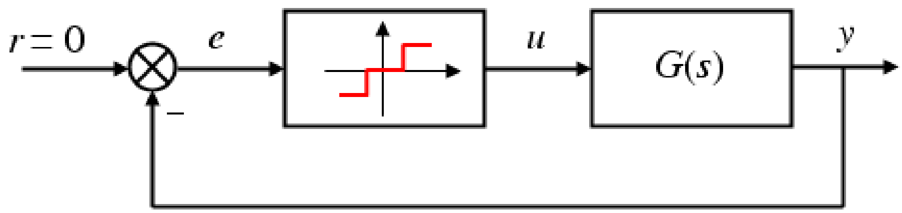
$$\frac{1}{N(M)} = \left|G(j\omega_{-\pi})\right| = \frac{10}{1.58\sqrt{1+(0.2\times 1.58)^2}\sqrt{1+(2\times 1.58)^2}} = 1.82$$

$$\Rightarrow \frac{\pi M}{4V_m} = 1.82 \qquad \Rightarrow M = 13.90$$

★ Kết luận: Trong hệ phi tuyến có dao động $y(t) = 13.90\sin(1.58t)$

Khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến - Thí dụ 2

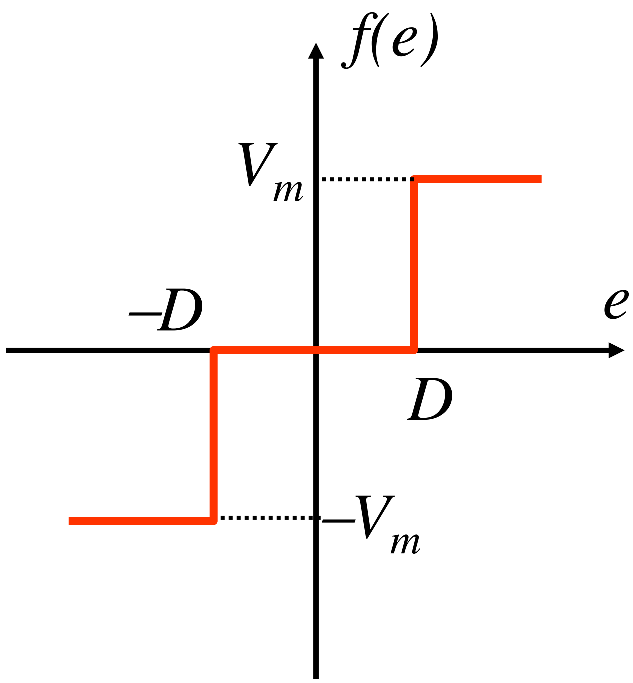
★ Xét hệ phi tuyến có sơ đồ như sau:



Hàm truyền của khâu tuyến tính là

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)(2s+1)}$$

Khâu phi tuyến là khâu relay 3 vị trí.



1. Hãy tìm điều kiện để trong hệ phi tuyến có dao động.

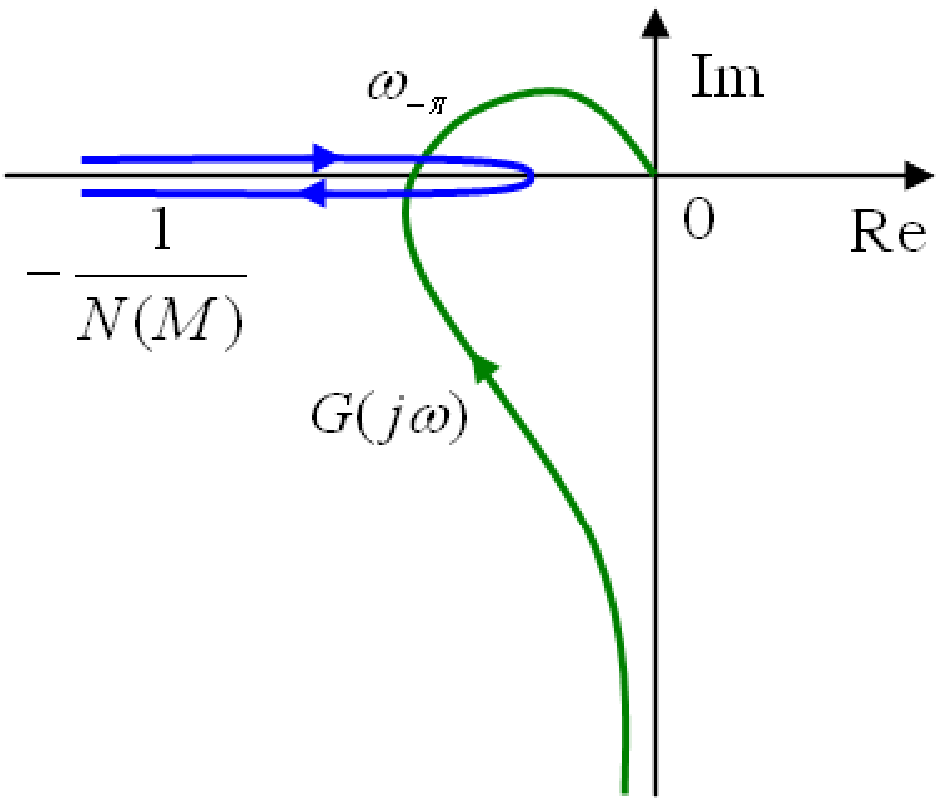
2. Hãy xác định biên độ và tần số dao động khi V_m=6, D=0.1.

Lời giải

- Hàm mô tả của khâu relay 3 vị trí là: $N(M)=\dfrac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\dfrac{D^2}{M^2}}$

- Điều kiện để trong hệ thống có dao động là đường cong Nyquist $G(j\omega)$ và đường đặc tính $-1/N(M)$ phải cắt nhau. Điều này xảy ra khi:

$$\left|-\frac{1}{N(M)}\right| \le \left|G(j\omega_{-\pi})\right|$$



★ Tần số cắt pha của $G(j\omega)$ (xem cách tính ở thí dụ 1)

$$\omega_{-\pi} = 1.58 \ \ (\text{rad/sec})$$

★ Để dao động xảy ra, điều kiện cần và đủ là tồn tại M sao cho:

$$\left| -\frac{1}{N(M)} \right| \le \left| G(j\omega_{-\pi}) \right| = \frac{10}{1.58\sqrt{1+(0.2\times 1.58)^2}\sqrt{1+(2\times 1.58)^2}} = 1.82$$

$$\Rightarrow N(M) \ge 0.55 \qquad (*)$$

★ Theo bất đẳng thức Cauchy

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}} \le \frac{2V_m}{\pi D}\left[\left(\frac{D}{M}\right)^2 + \left(\sqrt{1-\frac{D^2}{M^2}}\right)^2\right] = \frac{2V_m}{\pi D}$$

Khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến - Thí dụ 2

- Do đó điều kiện (*) được thỏa mãn khi:

$$\frac{2V_m}{\pi D} \geq 0.55 \quad \Leftrightarrow \frac{V_m}{D} \geq 0.864$$

- Vậy điều kiện để trong hệ có dao động tự kích là: $\frac{V_m}{D} \geq 0.864$

- Biên độ dao động là nghiệm của phương trình:

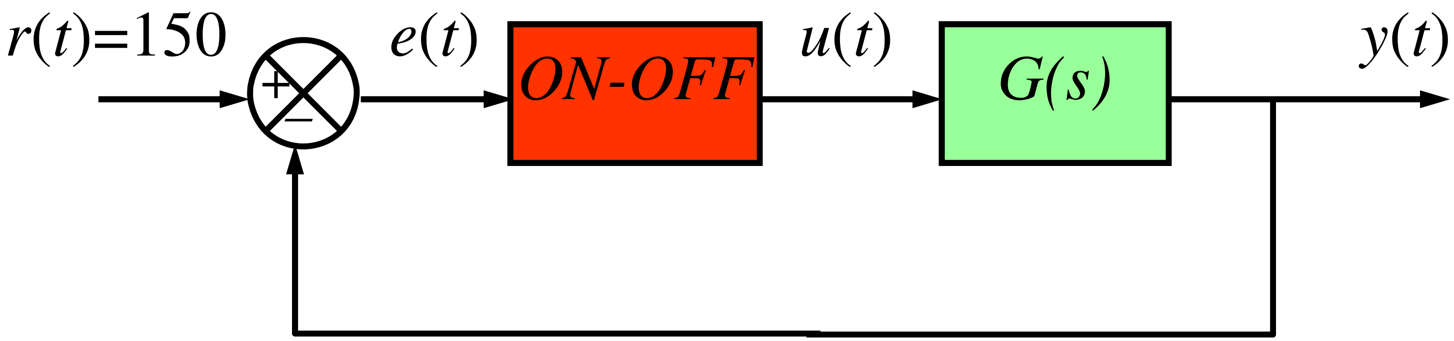
$$\left| -\frac{1}{N(M)} \right| = \left| G(j\omega_{-\pi}) \right| = 1.82 \quad \Leftrightarrow N(M) = 0.55 \quad \Leftrightarrow \frac{4V_m}{\pi M}\sqrt{1 - \frac{D^2}{M^2}} = 0.55$$

- Khi V_m=6, D=0.1, giải phương trình trên ta được: $M = 13.90$

- Vậy dao động trong hệ là: $y(t) = 13.90\sin(1.58t)$

Thí dụ: Khảo sát chế độ dao động trong HTĐK ON-OFF

★ Xét hệ thống điều khiển nhiệt độ ON-OFF như sau:



Hàm truyền của lò nhiệt là: $G(s) = \dfrac{300e^{-3s}}{(10s+1)}$

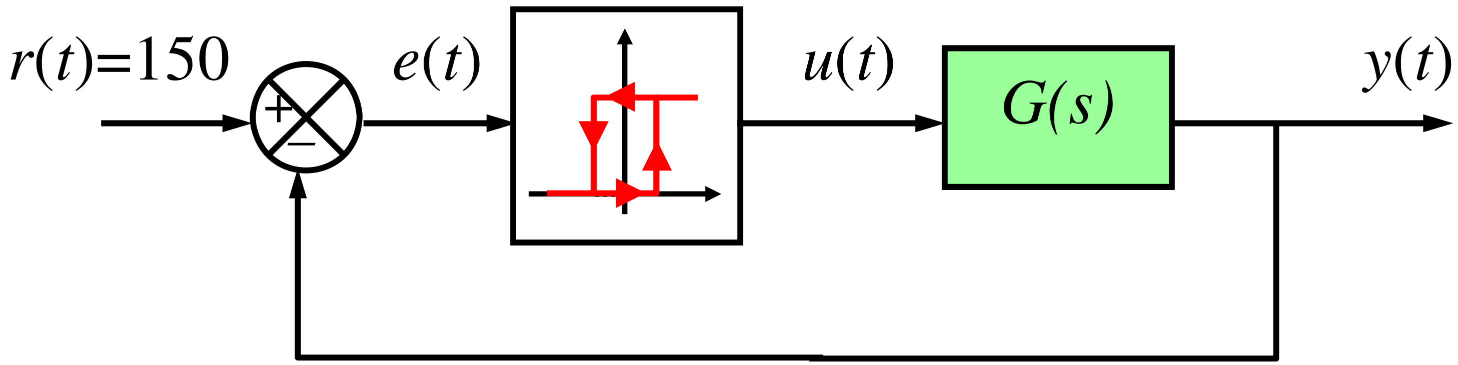
Thuật toán điều khiển ON-OFF như sau:

- Nếu $e(t) > 10^0$C thì $u(t) = 1$ (cấp 100% công suất)
- Nếu $e(t) < -10^0$C thì $u(t) = 0$ (ngưng cấp nguồn)
- Nếu $-10^0\text{C} < e(t) < -10^0$C thì tín hiệu đk không đổi

Hãy khảo sát đáp ứng của hệ thống.

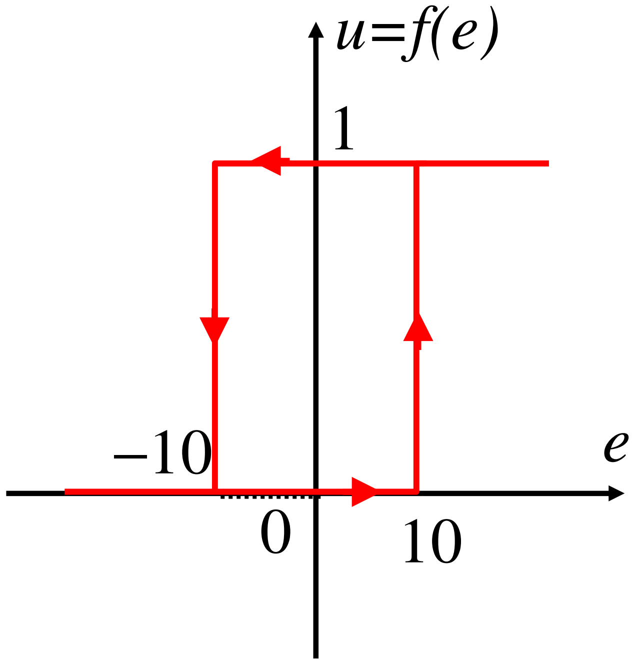
Thí dụ: Khảo sát chế độ dao động trong HTĐK ON-OFF (tt)

✶ Giải: Sơ đồ điều khiển:



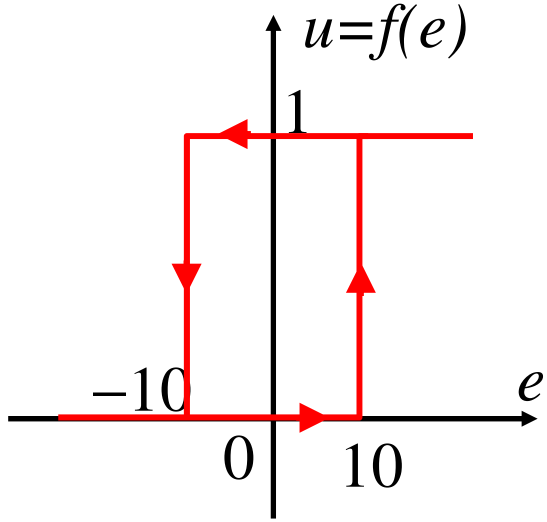
Thuật toán điều khiển ON-OFF có thể mô tả bằng khâu relay 2 vị trí có trễ như sau:

- $e(t) > 10^0C$: $u(t) = 1$
- $e(t) < -10^0C$: $u(t) = 0$
- $|e(t)| < 10^0C$: $u(t)$ không đổi



Thí dụ: Khảo sát chế độ dao động trong HTĐK ON-OFF (tt)

- Hàm mô tả của khâu relay 2 vị trí có trể:



$$N(M)=\frac{A_1+jB_1}{M}=\frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha-j\sin\alpha) \qquad \left(\sin\alpha=\frac{D}{M}\right)$$

- Trong đó: $V_m=0.5; D=10$

Thí dụ: Khảo sát chế độ dao động trong HTĐK ON-OFF

- Đáp ứng của hệ thống ở trạng thái xác lập là dao động quanh giá trị đặt.
- Ta có:

$$N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}(\cos\alpha - j\sin\alpha) \quad \Rightarrow \quad N(M) = \frac{4V_m}{\pi M}e^{-j\alpha}$$

$$G(s) = \frac{300e^{-3s}}{10s+1} \quad \Rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{300e^{-3j\omega}}{10j\omega+1}$$

Thí dụ: Khảo sát chế độ dao động trong HTĐK ON-OFF

★ Biên độ và tần số dao động là nghiệm của phương trình:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(M)} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |G(j\omega)| = \left| -\frac{1}{N(M)} \right| \\ \arg[G(j\omega)] = \arg\left[-\frac{1}{N(M)} \right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{300}{\sqrt{100\omega^2+1}} = \dfrac{\pi M}{4V_m} & (1) \\ -\tan^{-1}(10\omega) - 3\omega = -\pi + \alpha = -\pi + \sin^{-1}\left(\dfrac{D}{M}\right) & (2) \end{cases}$$

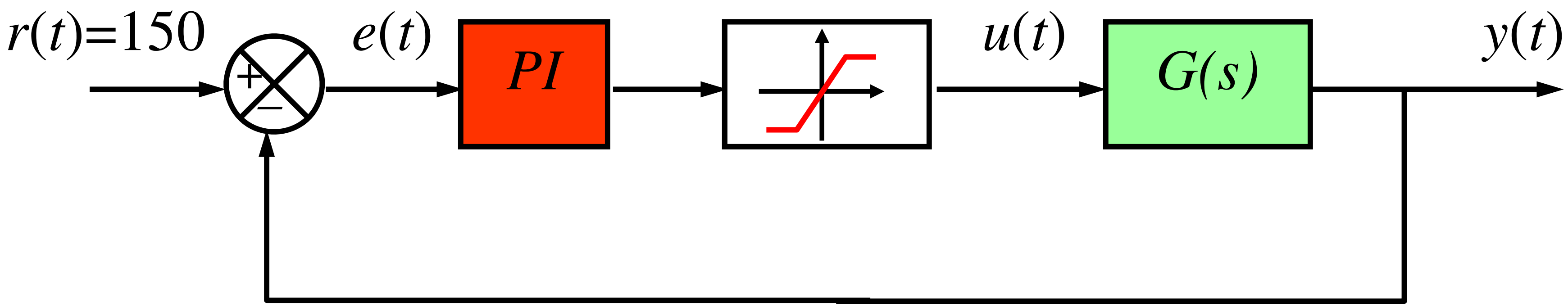
$$(1) \Rightarrow \quad \frac{D}{M} = \frac{\pi D\sqrt{100\omega^2+1}}{300 \times 4V_m} \qquad (3)$$

$$(2)\ \&\ (3) \Rightarrow \quad -\tan^{-1}(10\omega) - 3\omega = -\pi + \sin^{-1}\left(\frac{\pi D\sqrt{100\omega^2+1}}{1200V_m}\right)$$

- Giải phương trình, ta được: $\omega = 0.5(rad/s)$
- Thay vào (1), suy ra: $M = 37.45$
- Vậy ở trạng thái xác lập đáp ứng của hệ thống là dao động với thành phần cơ bản là:

$$y_1(t) = 37.45\sin(0.5t + \alpha)$$

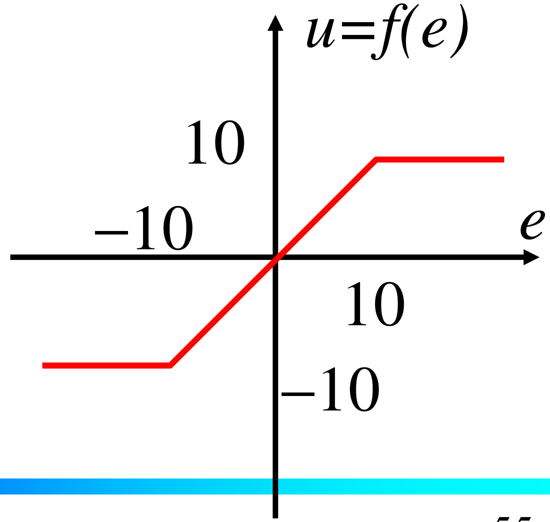
- Xét hệ thống điều khiển như sau:



Hàm truyền của động cơ là: $G(s) = \dfrac{13}{(0.1s+1)(0.01s+1)}$

Khi không có khâu bão hòa, hãy thiết kế bộ điều khiển PI sao cho hệ thống kín có cặp cực phức với ξ=0.8 và ω_n=40.

Khảo sát đáp ứng của hệ thống nếu điện áp điều khiển ở ngõ ra khâu PI bị bão hòa ở mức 10V.



★ Thiết kế bộ điều khiển PI:

★ Phương trình đặc trưng của hệ thống:

$$1+\left(K_P+\frac{K_I}{s}\right)\left(\frac{13}{(0.1s+1)(0.01s+1)}\right)=0$$

$$s^3+110s^2+1000(13K_P+1)s+13000K_I=0$$

★ Cặp cực phức mong muốn: $s_{1,2}^{*}=-32\pm j24$

★ Phương trình đặc trưng phải có nghiệm s^*, suy ra:

$$(-32+j24)^3+110(-32+j24)^2+1000(13K_P+1)(-32+j24)+13000K_I=0$$

$$\Rightarrow \quad 39808-j85056-416000K_P+j312000K_P+13000K_I=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} K_P=0.2726 \\ K_I=5.6615 \end{cases}$$

Phương pháp Lyapunov

Giới thiệu

- ✶ Phương pháp Lyapunov cung cấp điều kiện đủ để đánh giá tính ổn định của hệ phi tuyến.
- ✶ Có thể áp dụng cho hệ phi tuyến bậc cao bất kỳ.
- ✶ Có thể dùng phương pháp Lyapunov để thiết kế các bộ điều khiển phi tuyến.
- ✶ Hiện nay phương pháp Lyapunov là phương pháp được sử dụng rộng rãi nhất để phân tích và thiết kế hệ phi tuyến.

Điểm cân bằng của hệ phi tuyến

- Xét hệ phi tuyến mô tả bởi phương trình trạng thái sau:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)$$

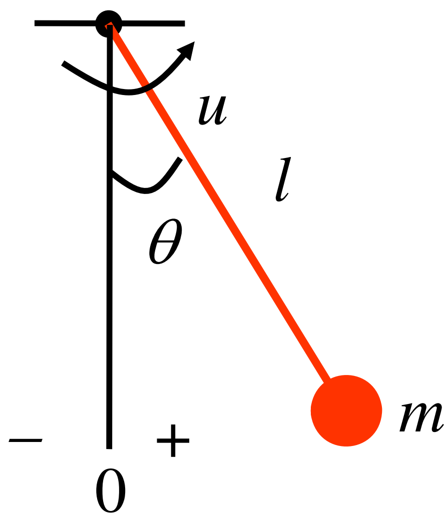
- Một điểm trạng thái $\boldsymbol{x}_e$ được gọi là điểm cân bằng nếu như hệ đang ở trạng thái $\boldsymbol{x}_e$ và không có tác động nào từ bên ngoài thì hệ sẽ nằm nguyên tại đó.

- Dễ thấy điểm cân bằng phải là nghiệm của phương trình:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e, u=0} = \boldsymbol{0}$$

- Hệ phi tuyến có thể có nhiều điểm cân bằng hoặc không có điểm cân bằng nào. Điều này hoàn toàn khác so với hệ tuyến tính , hệ tuyến tính luôn luôn có 1 điểm cân bằng là $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$.

Điểm cân bằng của hệ phi tuyến – Thí dụ



★ Xét hệ con lắc mô tả bởi PTVP:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + mgl\sin\theta = u(t)$$

★ Xác định các điểm cân bằng (nếu có)

★ Thành lập PTTT. Đặt: $\begin{cases} x_1(t) = \theta(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}(t) \end{cases}$

★ PTTT mô tả hệ con lắc là: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t))$

trong đó:

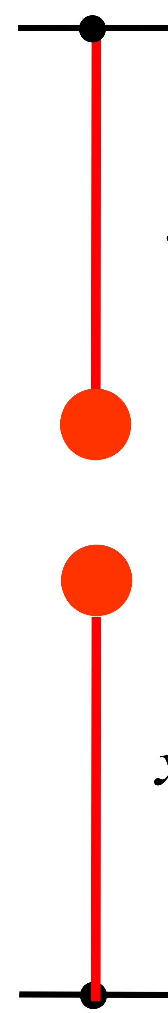
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_1(t) - \dfrac{B}{ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{ml^2}u(t) \end{bmatrix}$$

★ Điểm cân bằng phải là nghiệm của phương trình:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_e,u=0} = \boldsymbol{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_{1e} - \dfrac{B}{ml^2}x_{2e} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ x_{1e} = k\pi \end{cases}$$



$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 2k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} (2k+1)\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ Kết luận: Hệ con lắc có vô số điểm cân bằng:

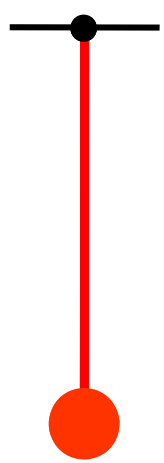
$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ổn định tại điểm cân bằng

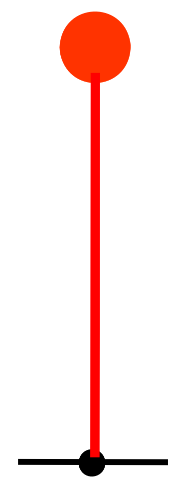
- Định nghĩa: Một hệ thống được gọi là ổn định tại điểm cân bằng x_e nếu như có một tác động tức thời đánh bật hệ ra khỏi x_e và đưa đến điểm được x_0 thuộc lân cận nào đó của x_e thì sau đó hệ có khả năng tự quay được về điểm cân bằng x_e ban đầu.

  Chú ý: tính ổn định của hệ phi tuyến chỉ có nghĩa khi đi cùng với điểm cân bằng. Có thể hệ ổn định tại điểm cân bằng này nhưng không ổn định tại điểm cân bằng khác.

- Thí dụ:



Điểm cân bằng ổn định



Điểm cân bằng không ổn định

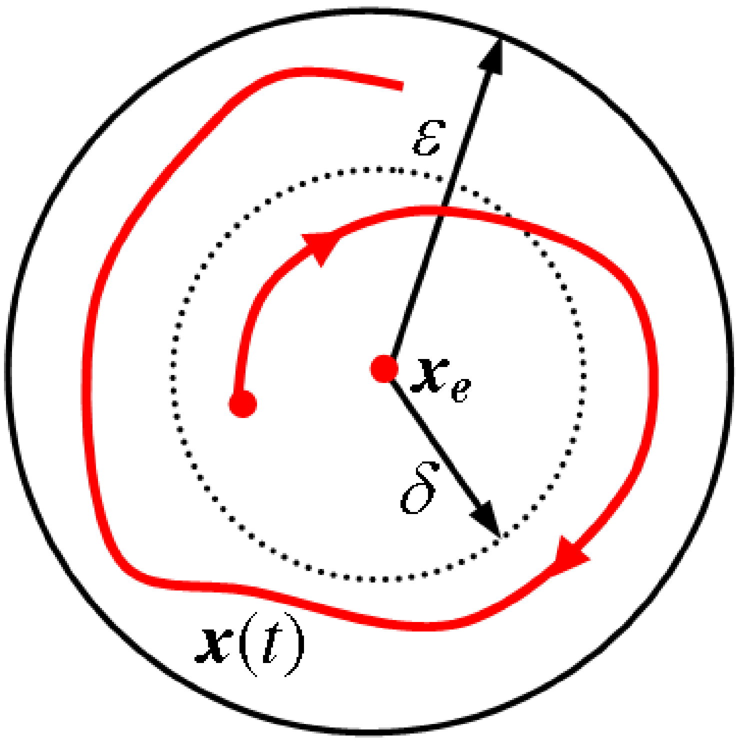
★ Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi PTTT:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\Big|_{u=0} \qquad (1)$$

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$.

★ Hệ thống được gọi là ổn định Lyapunov tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ bao giờ cũng tồn tại δ phụ thuộc ε sao cho nghiệm $\boldsymbol{x}(t)$ của phương trình (1) với điều kiện đầu $\boldsymbol{x}(0)$ thỏa mãn:

$$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$



Ổn định tiệm cận Lyapunov

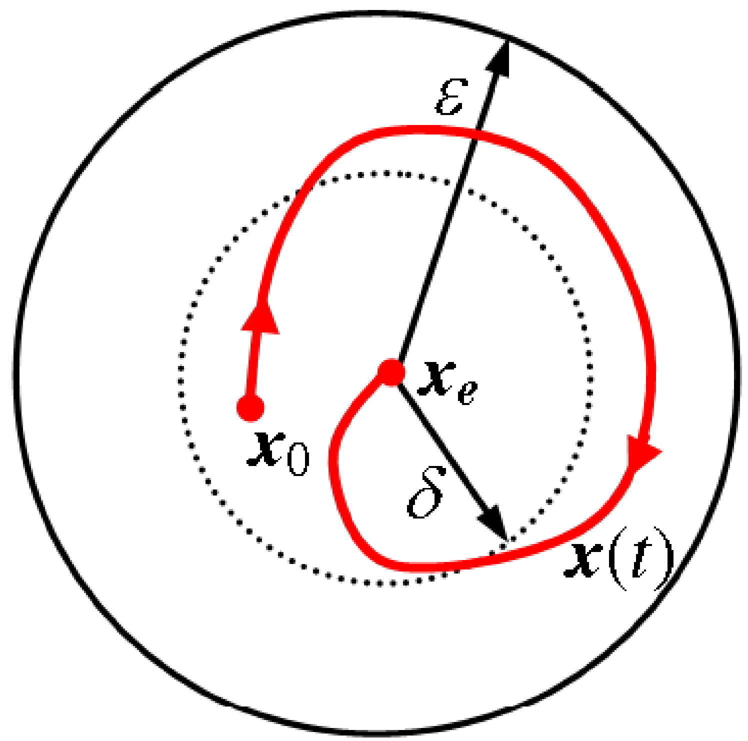
- Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi PTTT:

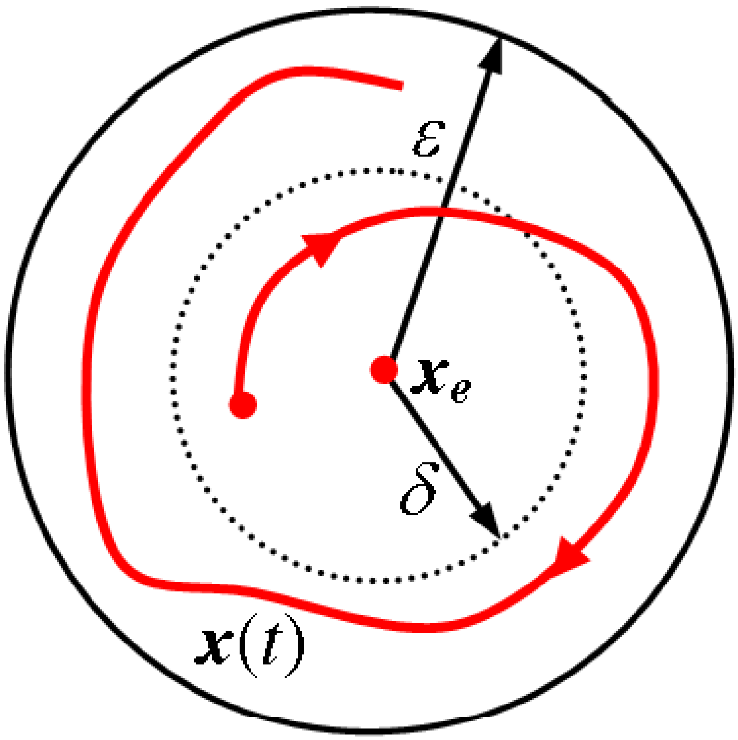
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\big|_{u=0} \qquad (1)$$

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$.

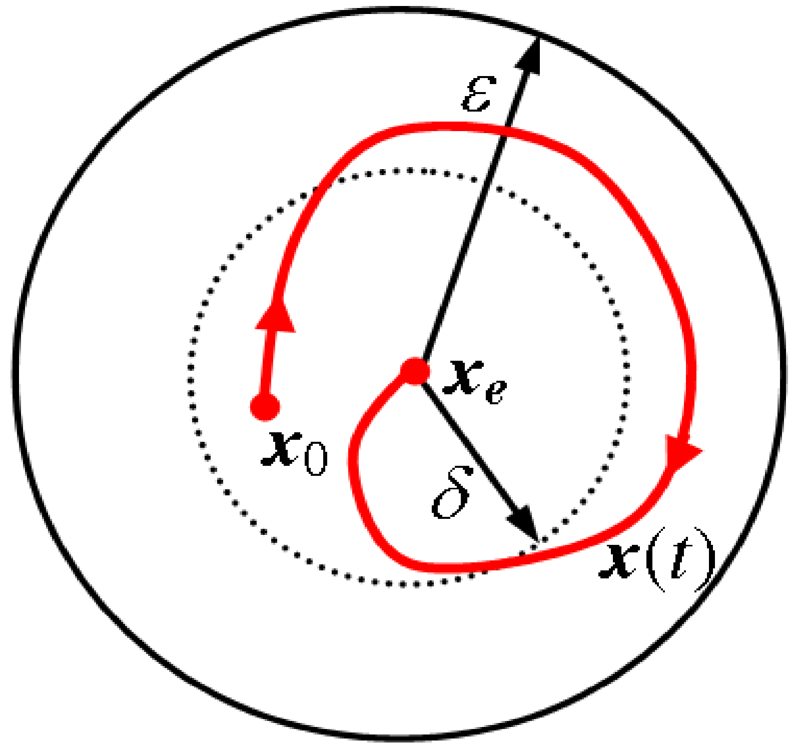
- Hệ thống được gọi là ổn định tiệm cận Lyapunov tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \mathbf{0}$ nếu với $\varepsilon > 0$ bất kỳ bao giờ cũng tồn tại δ phụ thuộc ε sao cho nghiệm $\boldsymbol{x}(t)$ của phương trình (1) với điều kiện đầu $\boldsymbol{x}(0)$ thỏa mãn:

$$\|\boldsymbol{x}(0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = 0$$





Ổn định Lyapunov



Ổn định tiệm cận Lyapunov

★ Cho hệ phi tuyến phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) \tag{1}$$

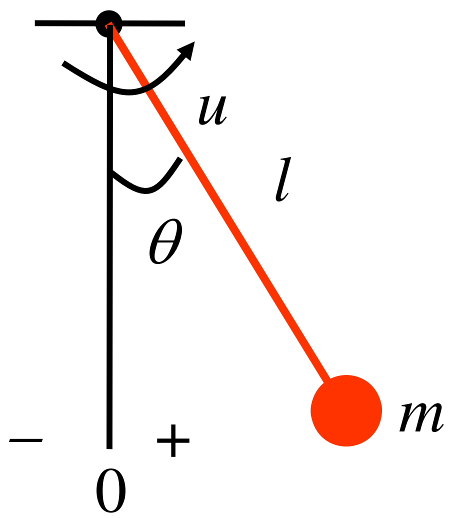
Giả sử xung quanh điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e$, hệ thống (1) có thể tuyến tính hóa về dạng:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\tilde{u} \tag{2}$$

★ Định lý:

- Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) ổn định thì hệ phi tuyến (1) ổn định tiệm cận tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e$.
- Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) không ổn định thì hệ phi tuyến (1) không ổn định tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e$.
- Nếu hệ thống tuyến tính hóa (2) ở biên giới ổn định thì không kết luận được gì về tính ổn định của hệ phi tuyến tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e$.

Phương pháp tuyến tính hóa Lyapunov – Thí dụ



★ Xét hệ con lắc mô tả bởi PTTT:

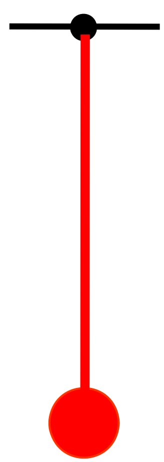
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t))$$

trong đó:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_1(t) - \dfrac{B}{ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{ml^2}u(t) \end{bmatrix}$$

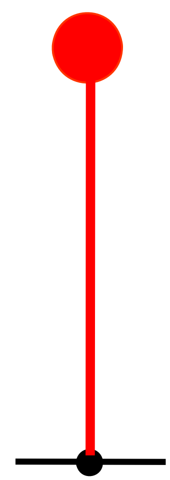
★ Xét tính ổn định của hệ thống tại điểm cân bằng:

(a)



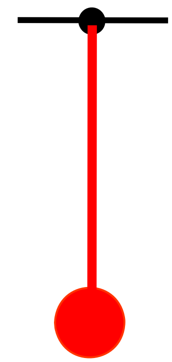
$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)



$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

✶ Mô hình tuyến tính quanh điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$



$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\tilde{u}$$

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, u=0)} = 0 \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}, \bar{u}=0)} = 1$$

$$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, u=0)} = -\frac{g}{l}\cos x_1(t)\Big|_{(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, u=0)} = -\frac{g}{l} \qquad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, u=0)} = -\frac{B}{ml^2}$$

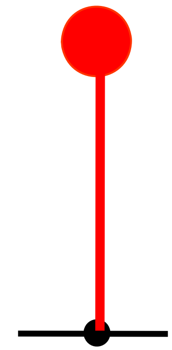
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l} & -\dfrac{B}{ml^2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ PTĐT $\quad \det(sI - \boldsymbol{A}) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ \dfrac{g}{l} & s + \dfrac{B}{ml^2} \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 + \dfrac{B}{ml^2}s + \dfrac{g}{l} = 0$

Kết luận: Hệ thống ổn định (theo hệ quả tiêu chuẩn Hurwitz)

Phương pháp tuyến tính hóa Lyapunov – Thí dụ (tt)

★ Mô hình tuyến tính quanh điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix}\pi & 0\end{bmatrix}^T$



$$\boxed{\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\tilde{u}}$$

$$a_{11} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = 0 \qquad a_{12} = \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = 1$$

$$a_{21} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = -\frac{g}{l}\cos x_1(t)\Big|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = \frac{g}{l} \qquad a_{22} = \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{\left(\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\pi\\0\end{bmatrix}, u=0\right)} = -\frac{B}{ml^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{B}{ml^2} \end{bmatrix}}$$

$\Rightarrow$ PTĐT $\quad \det(sI - \boldsymbol{A}) = \det\begin{bmatrix} s & -1 \\ -\dfrac{g}{l} & s + \dfrac{B}{ml^2} \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{s^2 + \dfrac{B}{ml^2}s - \dfrac{g}{l} = 0}$

Kết luận: Hệ thống <u>không</u> ổn định (PTĐT không thỏa điều kiện cần)

Phương pháp trực tiếp Lyapunov – Định lý ổn định

- Định lý ổn định Lyapunov: Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\Big|_{u=0} \qquad (1)$$

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$.

Nếu tồn tại hàm $V(\boldsymbol{x})$ sao cho trong miền $\mathcal{D} \subset \Re^n$ chứa điểm cân bằng $V(\boldsymbol{x})$ thỏa:

i) $V(\boldsymbol{x}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$

ii) $V(0) = 0$

iii) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \le 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$

Thì hệ thống (1) ổn định Lyapunov tại điểm 0.

(Nếu $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \neq 0$ HT ổn định tiệm cận Lyapunov tại điểm 0)

- Chú ý: Hàm $V(\boldsymbol{x})$ thường được chọn là hàm toàn phương theo biến trạng thái.

★ Định lý ổn định Lyapunov: Cho hệ phi tuyến không kích thích mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)\big|_{u=0} \qquad (1)$$

Giả sử hệ thống có điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$.

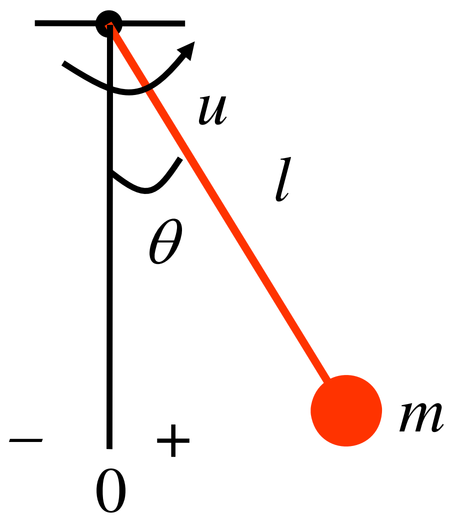
Nếu tồn tại hàm $V(\boldsymbol{x})$ sao cho trong miền $\mathcal{D} \subset \Re^n$ chứa điểm cân bằng $V(\boldsymbol{x})$ thỏa:

i) $V(\boldsymbol{x}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$

ii) $V(0) = 0$

iii) $\dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$

Thì hệ thống (1) không ổn định Lyapunov tại điểm 0.



★ Xét hệ con lắc mô tả bởi PTTT:

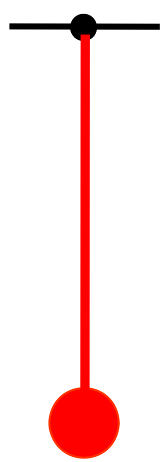
$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t))$$

trong đó:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\dfrac{g}{l}\sin x_1(t) - \dfrac{B}{ml^2}x_2(t) + \dfrac{1}{ml^2}u(t) \end{bmatrix}$$

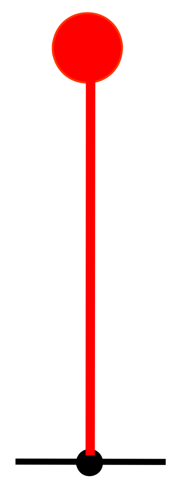
★ Xét tính ổn định của hệ thống tại điểm cân bằng $u(t)=0$:

(a)



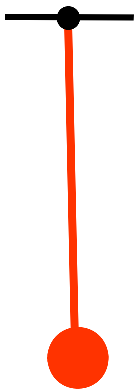
$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b)



$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

(a)



$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ Chọn hàm Lyapunov

$$V(\boldsymbol{x}) = 2[\sin(0.5x_1)]^2 + \frac{l}{2g}x_2^2$$

★ Rõ ràng:

$$V(\boldsymbol{x}) \geq 0, \forall \boldsymbol{x}$$

$$V(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ khi } \boldsymbol{x} = 0$$

★ Xét $\dot{V}(\boldsymbol{x})$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2\dot{x}_1 \sin(0.5x_1)\cos(0.5x_1) + \frac{l}{g}x_2\dot{x}_2$$

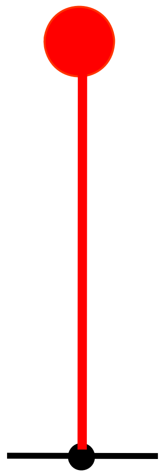
$$= x_2\sin(x_1) + \frac{l}{g}x_2\left[-\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{B}{ml^2}x_2\right]$$

$$\Rightarrow \quad \dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\frac{B}{mgl}x_2^2 \leq 0, \forall \boldsymbol{x}$$

★ Kết luận: Hệ thống ổn định Lyapunov tại điểm cân bằng $\boldsymbol{x}_e = [0 \quad 0]^T$

Phương pháp trực tiếp Lyapunov– Thí dụ

(b)



$$\boldsymbol{x}_e = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ Chọn hàm Lyapunov chứng tỏ rằng hệ thống không ổn định (SV tự làm)

Thí dụ 2:

- Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

- Xác định trạng thái cân bằng của hệ thống và đánh giá tính ổn định của hệ thống tại trạng thái cân bằng.

- Giải:

- Trạng thái cân bằng là nghiệm phương trình:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$$

Thí dụ 2 (tt)

- Đánh giá tính ổn định: Chọn hàm Lyapunov:

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

- Ta có:

$$V(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$
$$= x_1[-x_1 + x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2)] + x_2[-x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)]$$
$$= -x_1^2 - x_2^2$$

$\Rightarrow$ $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$

$\Rightarrow$ Hệ thống ổn định tiệm cận Lyapunov tại điểm cân bằng

Thí dụ 3:

- Cho hệ thống mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4) \end{cases}$$

- Xác định trạng thái cân bằng của hệ thống và đánh giá tính ổn định của hệ thống tại trạng thái cân bằng.

- Giải:

- Trạng thái cân bằng là nghiệm phương trình:

$$\begin{cases} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4) = 0 \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1e} = 0 \\ x_{2e} = 0 \end{cases}$$

Thí dụ 3 (tt)

★ Đánh giá tính ổn định: Chọn hàm Lyapunov:

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

★ Ta có:

$$V(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$$

$$V(0) = 0$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\boldsymbol{x}) &= x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 \\ &= x_1[x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^4)] + x_2[-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^4)] \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^4)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\dot{V}(\boldsymbol{x}) > 0, \forall \boldsymbol{x} \neq 0$

$\Rightarrow$ Hệ thống không ổn định tại điểm cân bằng

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa
(Feedback linearization control)

Đặt bài toán

✶ Xét đối tượng phi tuyến SISO bậc n mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u & (1) \\ y = h(\boldsymbol{x}) & (2) \end{cases}$$

Trong đó:

$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T \in \Re^n$ là vector trạng thái của hệ thống

$u \in \Re$ là tín hiệu vào

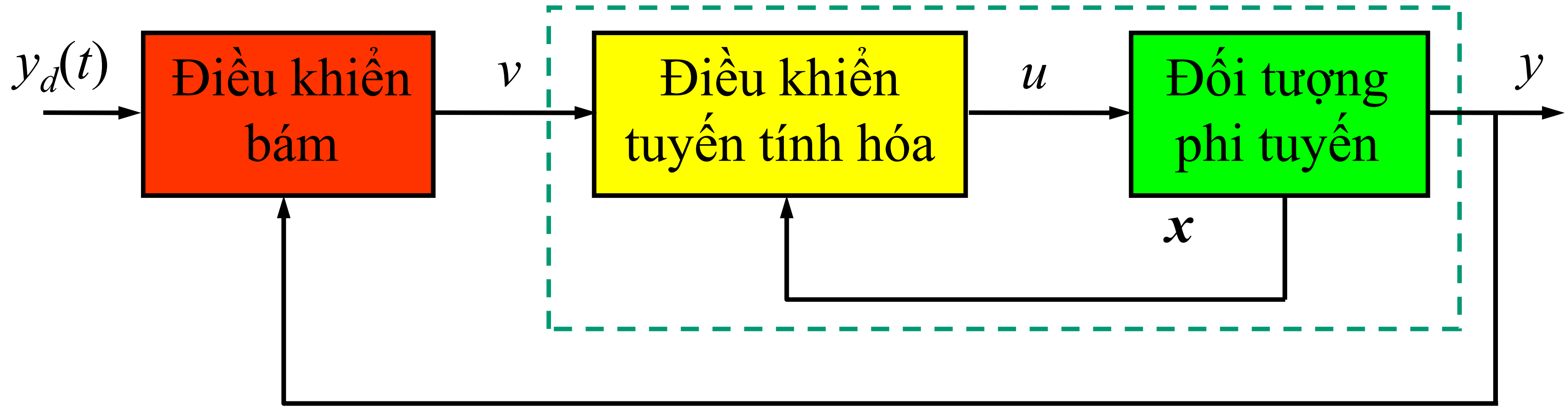
$y \in \Re$ là tín hiệu ra

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \Re^n$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \Re^n$ là các vector hàm trơn mô tả động học của hệ thống

$h(\boldsymbol{x}) \in \Re$ là hàm trơn mô tả quan hệ giữa biến trạng thái và tín hiệu ra

✶ Bài toán đặt ra là điều khiển tín hiệu ra $y(t)$ bám theo tín hiệu đặt $y_d(t)$

Ý tưởng thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa



- Hai vòng điều khiển
  - Vòng điều khiển trong: Bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa, biến đổi hệ phi tuyến thành hệ tuyến tính.
  - Vòng điều khiển ngoài: Bộ điều khiển bám, thiết kế dựa vào lý thuyết điều khiển tuyến tính thông thường.

Quan hệ vào ra của đối tượng phi tuyến

★ Nếu đối tượng có bậc tương đối bằng *n*, bằng cách lấy đạo hàm của phương trình (2) *n* lần, có thể biểu diễn quan hệ vào ra của đối tượng dưới dạng:

$$y^{(n)} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u$$

Trong đó: $a(\boldsymbol{x}) = L_f^n h(\boldsymbol{x})$ $\qquad b(\boldsymbol{x}) = L_g L_f^{n-1} h(\boldsymbol{x}) \neq 0$

với: $$L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}.\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right]\left[f_1(\boldsymbol{x}), \dots f_n(\boldsymbol{x})\right]^T$$

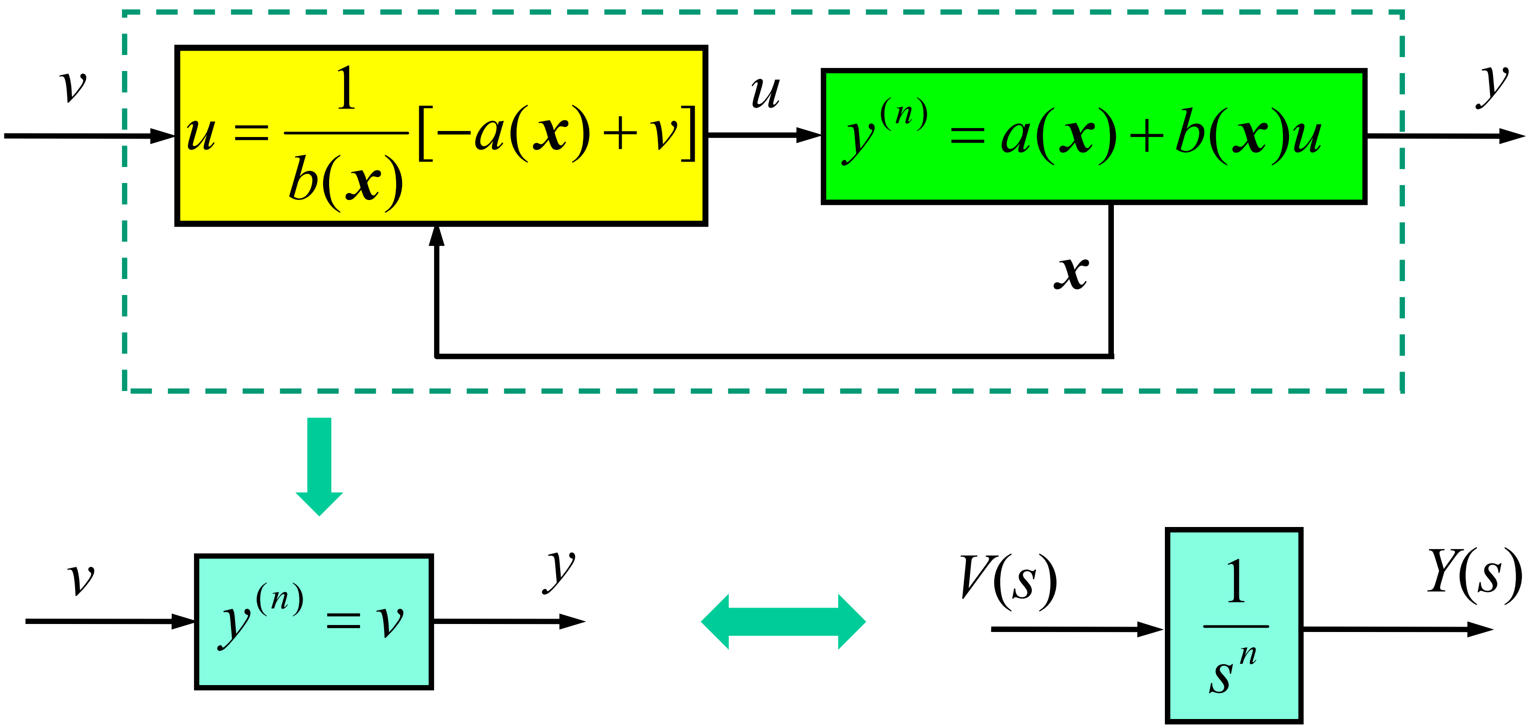
(Đạo hàm Lie của hàm $h(\boldsymbol{x})$ dọc theo vector $f(\boldsymbol{x})$)

$$L_f^k h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}.\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$L_g L_f^k h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial L_f^k h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}.\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Luật điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa

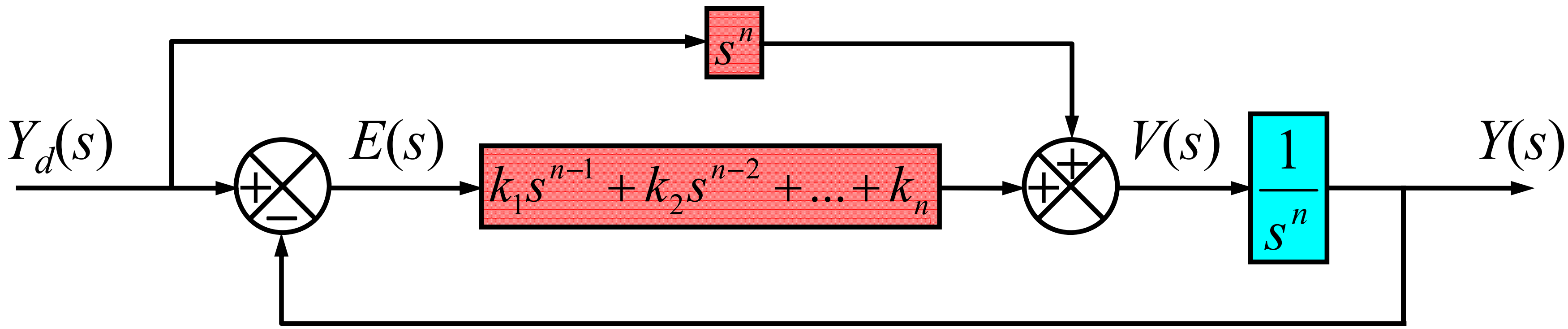
✶ Luật điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa: $u(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{b(\boldsymbol{x})}\left[-a(\boldsymbol{x}) + v(t)\right]$



$\Rightarrow$ Đối tượng phi tuyến với tín hiệu vào $u(t)$ được biến đổi thành đối tượng tuyến tính với tín hiệu vào là $v(t)$

$\Rightarrow$ Thiết kế bộ điều khiển tuyến tính cho đối tượng đã tuyến tính hóa

Bộ điều khiển bám cho đối tượng đã được tuyến tính hóa



- Sai số: $e = y_d - y$
- Bộ điều khiển bám: $v = y_d^{(n)} + [k_1 e^{(n-1)} + k_2 e^{(n-2)} + \ldots + k_n e]$

  Giả thiết: Tín hiệu chuẩn (tín hiệu đặt) khả vi bị chặn đến bậc n
- Đặc tính động học sai số: $(s^n + k_1 s^{n-1} + k_2 s^{n-2} + \ldots + k_n)E(s) = 0$
- Đa thức đặc trưng: $\Delta(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + k_2 s^{n-2} + \ldots + k_n$
- Chọn k_i (i=1,n) sao cho $\Delta(s)$ là đa thức Hurwitz, tức là tất cả các nghiệm của phương trình $\Delta(s) = 0$ đều nằm bên trái mặt phẳng phức.

$\Rightarrow$ Hệ thống kín ổn định và $e(t)\to 0$ khi $t\to\infty$. Chú ý vị trí cực của $\Delta(s)=0$ quyết định đáp ứng quá độ trong quá trình tiến về 0 của $e(t)$.

Chú ý

- Thuật toán điều khiển bám $v(t)$ đòi hỏi tín hiệu đặt $y_d(t)$ phải khả vi bị chặn đến bậc n.
- Tín hiệu đặt có dạng xung: đạo hàm tại thời điểm tín hiệu đặt chuyển trạng thái là vô cùng lớn làm cho tín hiệu điều khiển vô cùng lớn. Trong trường hợp này cần phải cho tín hiệu đặt $r(t)$ qua bộ lọc thông thấp bậc n để được tín hiệu đặt mới khả vi hữu hạn. Tuy nhiên việc thêm bộ lọc ở đầu vào có thể làm chậm đáp ứng của hệ thống.
- Kết quả điều khiển không tốt, thậm chí hệ thống không ổn định nếu mô hình dùng để thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa không mô tả chính xác đặc tính động học của đối tượng

Trình tự thiết kế hệ thống điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa

- ***Bước 1:*** Biểu diễn quan hệ vào ra của đối tượng phi tuyến dưới dạng

$$y^{(n)} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u$$

- ***Bước 2:*** Viết biểu thức bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa:

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}\left[-a(\boldsymbol{x}) + v(t)\right]$$

- ***Bước 3:*** Viết biểu thức bộ điều khiển bám:

$$v = y_d^{(n)} + [k_1 e^{(n-1)} + k_2 e^{(n-2)} + \ldots + k_n e]$$

với: $e = y_d - y$

- ***Bước 4:*** Chọn các thông số của bộ điều khiển bám sao cho

$$\Delta(s) = s^n + k_1 s^{n-1} + k_2 s^{n-2} + \ldots + k_n$$

là đa thức Hurwitz, đồng thời thỏa mãn yêu cầu về chất lượng quá độ

- ***Bước 5:*** Thiết kế bộ lọc thông thấp tín hiệu vào để đảm bảo tín hiệu chuẩn $y_d(t)$ khả vi bị chặn đến bậc n.

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 1

- Cho đối tượng phi tuyến mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + \sin(x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_2\cos(x_1) + u\cos(2x_1) \end{cases}$$

$$y = x_1$$

- Hãy thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa sao cho hệ kín có cặp cực phức tại $-3 \pm j3$
- ***Giải:***
- Bước 1: Tính đạo hàm của tín hiệu ra

$$\dot{y} = \dot{x}_1$$

$$\Rightarrow \quad \dot{y} = -2x_1 + 3x_2 + \sin(x_1)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2 + \dot{x}_1\cos(x_1) = (-2 + \cos(x_1))\dot{x}_1 + 3\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = (-2 + \cos(x_1))(-2x_1 + 3x_2 + \sin(x_1)) - 3x_2\cos(x_1) + 3u\cos(2x_1)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = 4x_1 - 6x_2 - 2\sin(x_1) - 2x_1\cos(x_1) + \sin(x_1)\cos(x_1) + 3u\cos(2x_1)$$

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 1

$\Rightarrow$ $$\ddot{y} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}).u \qquad (1)$$

với $a(\boldsymbol{x}) = 4x_1 - 6x_2 - 2\sin(x_1) - 2x_1\cos(x_1) + \sin(x_1)\cos(x_1)$

$b(\boldsymbol{x}) = 3\cos(2x_1)$

★ Bước 2: Viết biểu thức bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa

$$u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}(-a(\boldsymbol{x}) + v) \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được hệ tuyến tính:

$$\ddot{y} = v \qquad (3)$$

★ Bước 3: Viết biểu thức bộ điều khiển bám tuyến tính

$$v = \ddot{y}_d + (k_1\dot{e} + k_2 e) \qquad (4)$$

với $e = y_d - y$

★ Bước 4: Tính thông số bộ điều khiển bám

Thay (4) vào (3), ta được đặc tính động học sai số:

$$\ddot{y} = \ddot{y}_d + (k_1\dot{e} + k_2 e)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e = 0$$

Phương trình đặc trưng động học sai số:

$$s^2 + k_1 s + k_2 = 0 \qquad (5)$$

Phương trình đặc trưng động học sai số mong muốn:

$$(s+3-j3)(s+3+3j) = 0$$

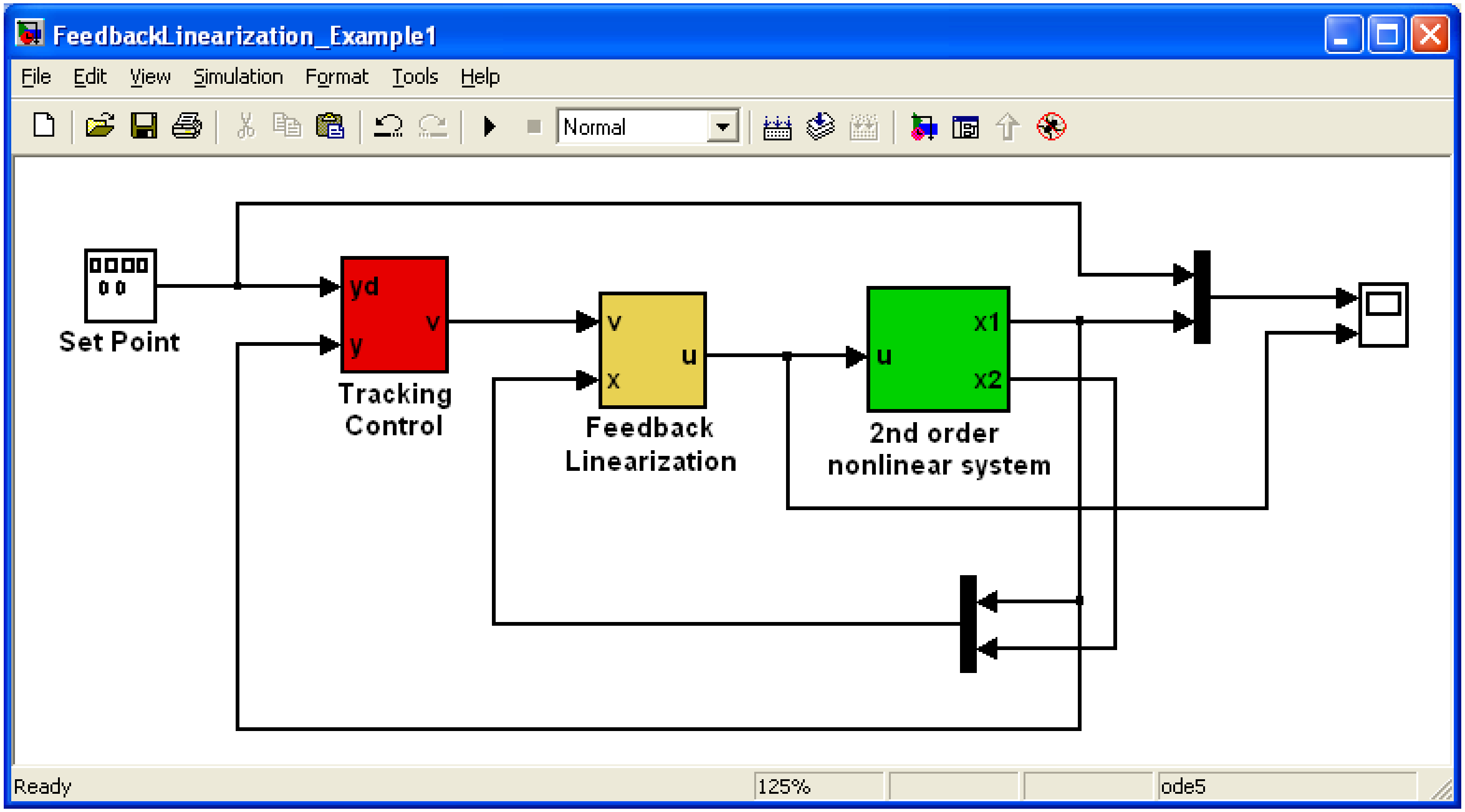
$$\Rightarrow \quad s^2 + 6s + 18 = 0 \qquad (6)$$

Cân bằng (5) và (6), ta được:

$$k_1 = 6$$

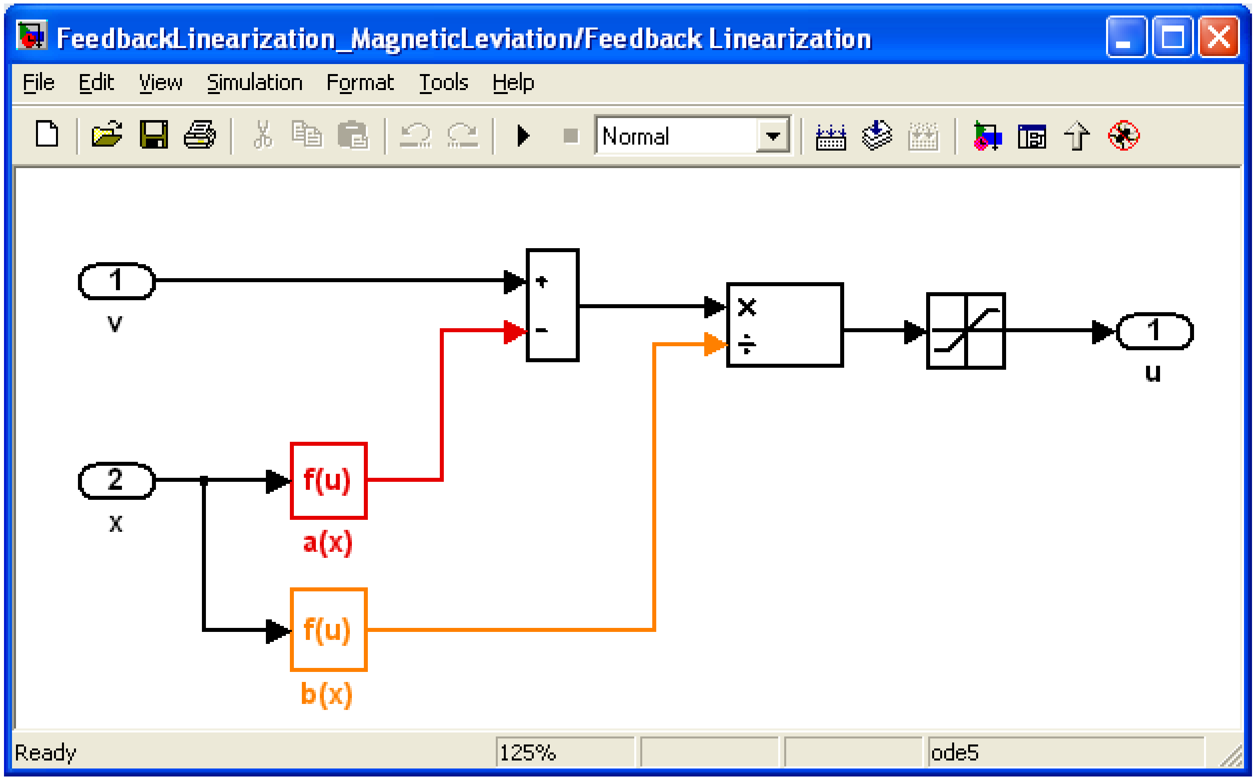
$$k_2 = 18$$

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 1



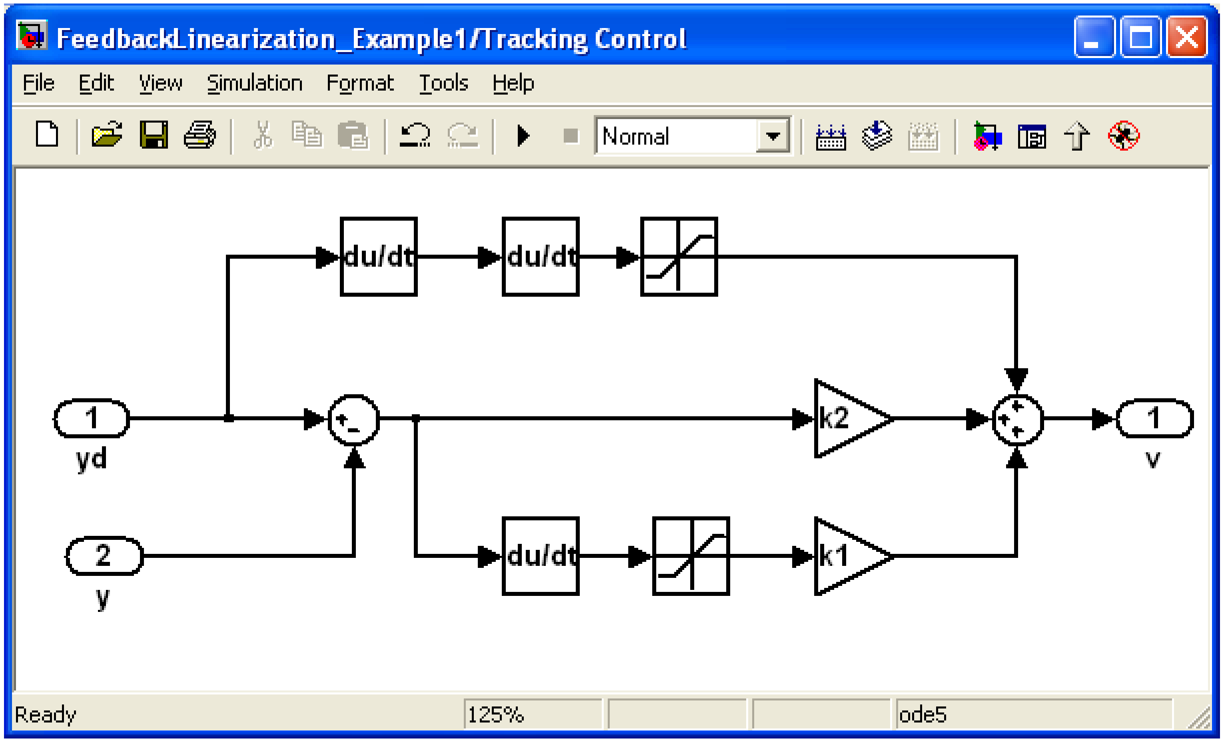
Mô phỏng hệ thống điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 1



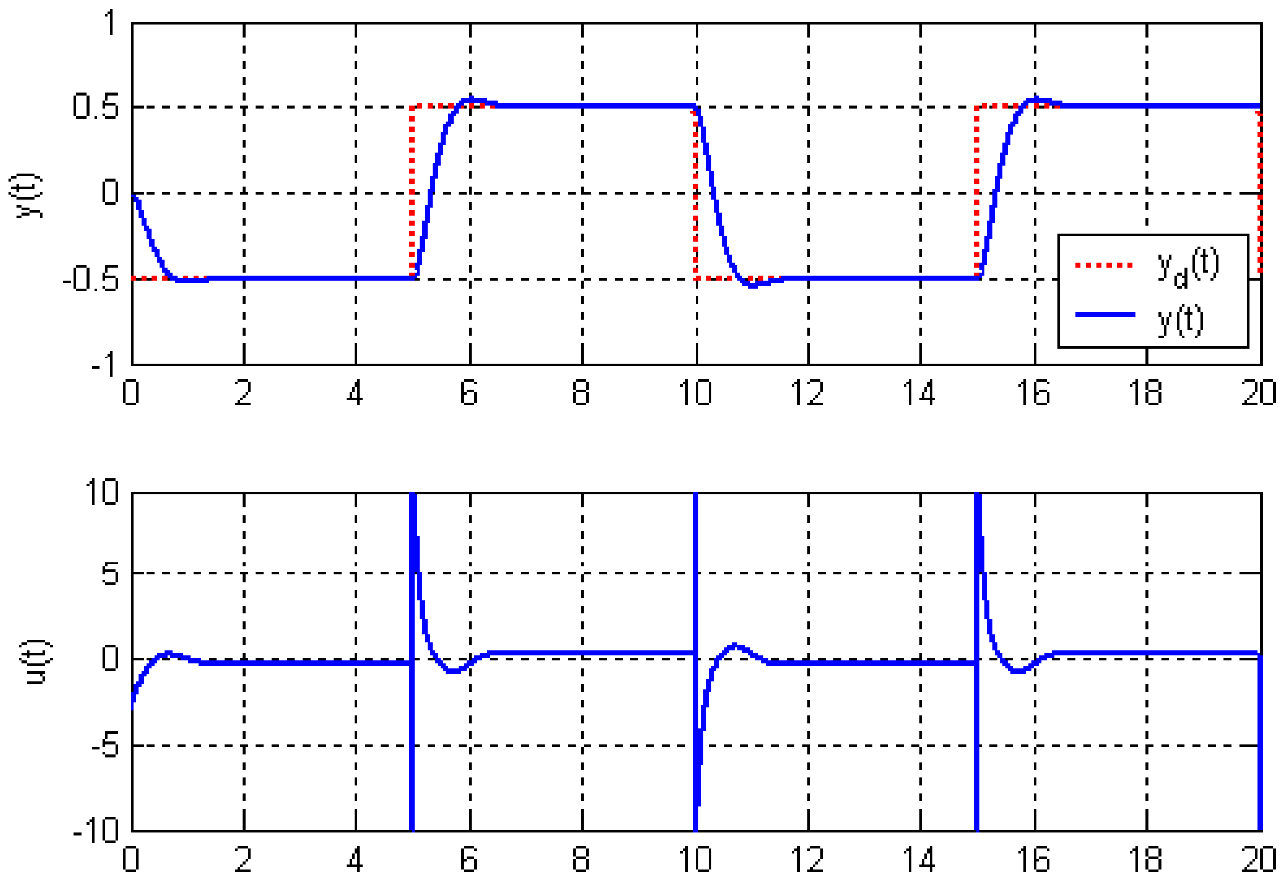
Mô phỏng khối hồi tiếp tuyến tính hóa

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 1



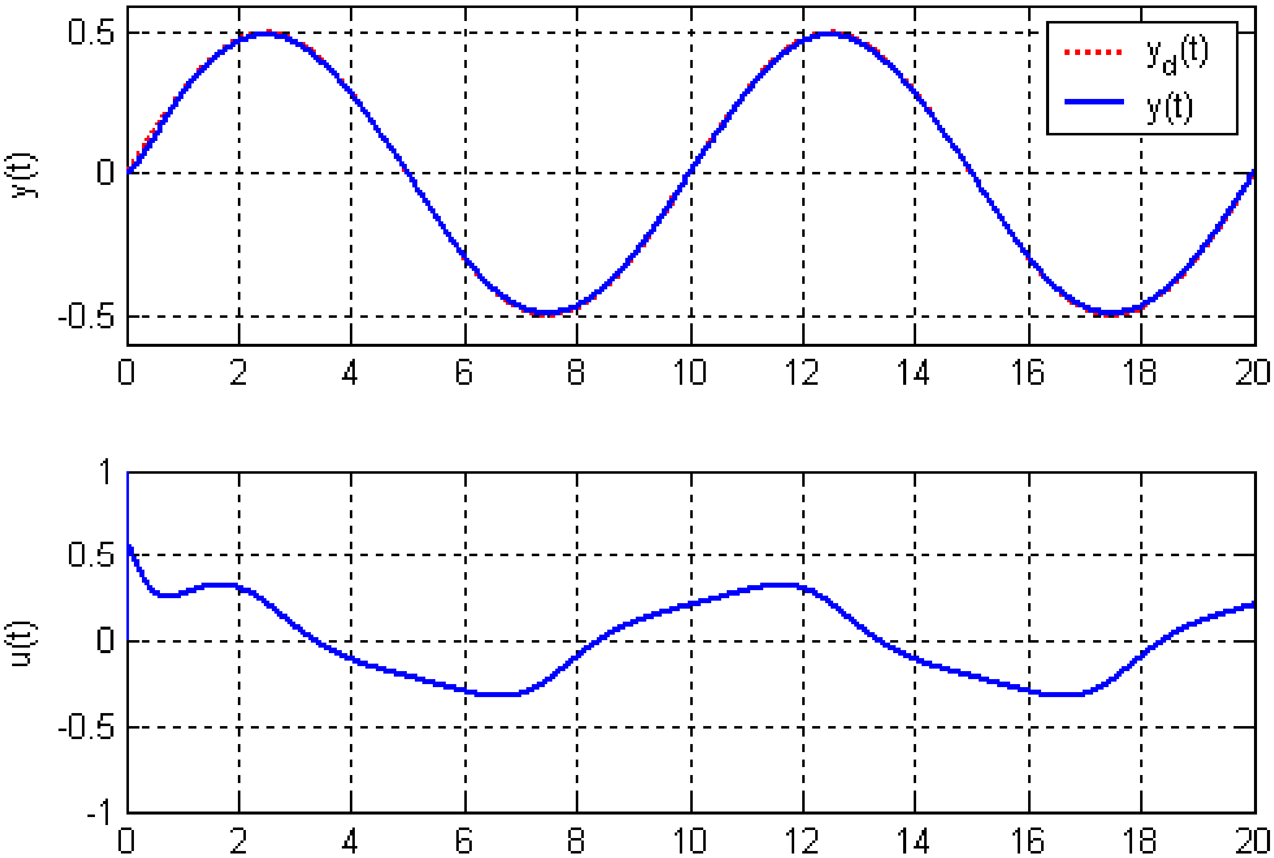
Mô phỏng khối điều khiển bám

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 1



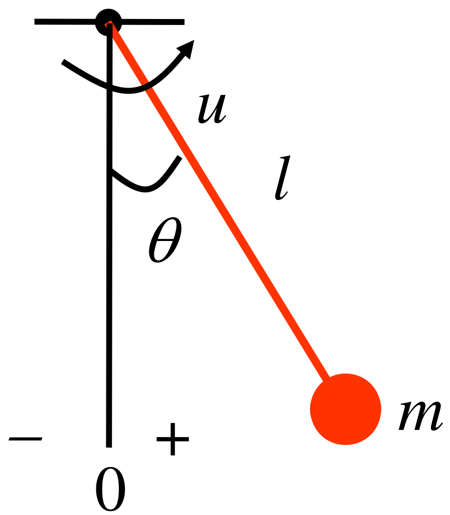
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu đặt là xung vuông

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 1



Kết quả mô phỏng khi tín hiệu đặt hình sin

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 2



★ Xét hệ con lắc mô tả bởi PTVP:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + mgl\sin\theta = u(t)$$

★ Hãy thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa sao cho đáp ứng của hệ thống có POT<10%, $t_{qd} < 0.3$ sec khi tín hiệu vào là hàm nấc

★ ***Giải:***

★ Đặt các biến trạng thái là $x_1 = \theta; x_2 = \dot{\theta}$, tín hiệu ra là $y = \theta = x_1$

★ Bước 1: Tính đạo hàm của tín hiệu ra

$$\dot{y} = \dot{x}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y} = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{B}{ml^2}x_2 + \frac{1}{ml^2}u$$

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 2

$\Rightarrow$ $\ddot{y} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}).u$ (1)

với $a(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{g}{l}\sin(x_1) - \dfrac{B}{ml^2}x_2$ $b(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{ml^2}$

★ Bước 2: Viết biểu thức bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa

$$u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}(-a(\boldsymbol{x}) + v) \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được hệ tuyến tính:

$$\ddot{y} = v \quad (3)$$

★ Bước 3: Viết biểu thức bộ điều khiển bám tuyến tính

$$v = \ddot{y}_d + (k_1\dot{e} + k_2 e) \quad (4)$$

với $e = y_d - y$

★ Bước 4: Tính thông số bộ điều khiển bám

Thay (4) vào (3), ta được đặc tính động học sai số:

$$\ddot{y} = \ddot{y}_d + (k_1\dot{e} + k_2 e)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e = 0$$

Phương trình đặc trưng động học sai số:

$$s^2 + k_1 s + k_2 = 0 \qquad (5)$$

Theo yêu cầu thiết kế:

$$POT = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) < 0.1 \quad \Rightarrow \xi > 0.59 \quad \Rightarrow \text{ Chọn } \xi = 0.7$$

$$t_{qd} = \frac{4}{\xi\omega_n} < 0.3 \quad \Rightarrow \omega_n < 19.05 \quad \Rightarrow \text{ Chọn } \omega_n < 25$$

Phương trình đặc trưng động học sai số mong muốn:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad s^2 + 35s + 625 = 0 \qquad (6)$$

Cân bằng (5) và (6), ta được:

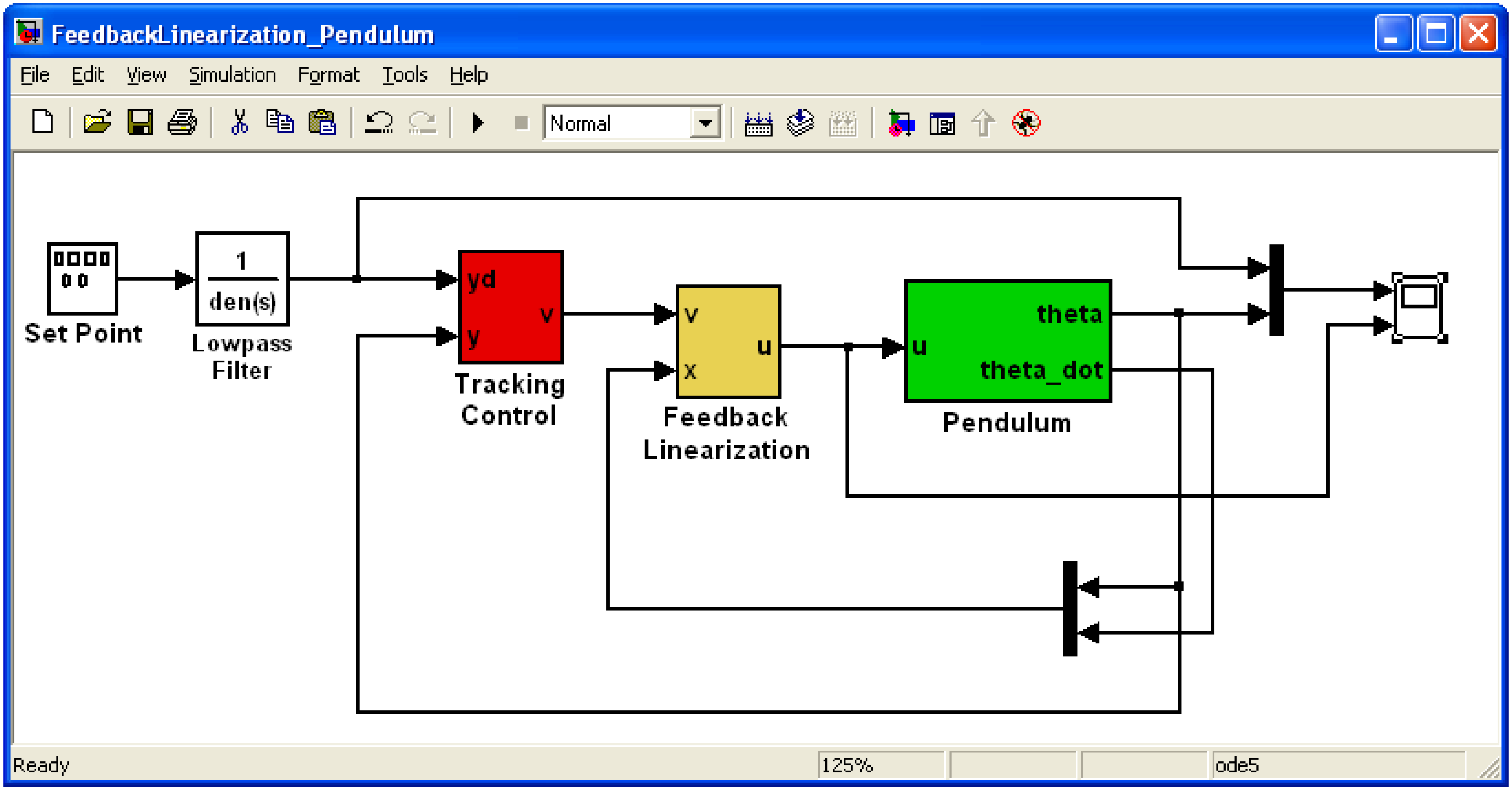
$$k_1 = 35$$
$$k_2 = 625$$

✶ Bước 5: Thiết kế bộ lọc tín hiệu vào

Chọn bộ lọc thông thấp bậc 2 để tín hiệu $y_d(t)$ khả vi bị chặn đến đạo hàm bậc 2. Hàm truyền của bộ lọc là:

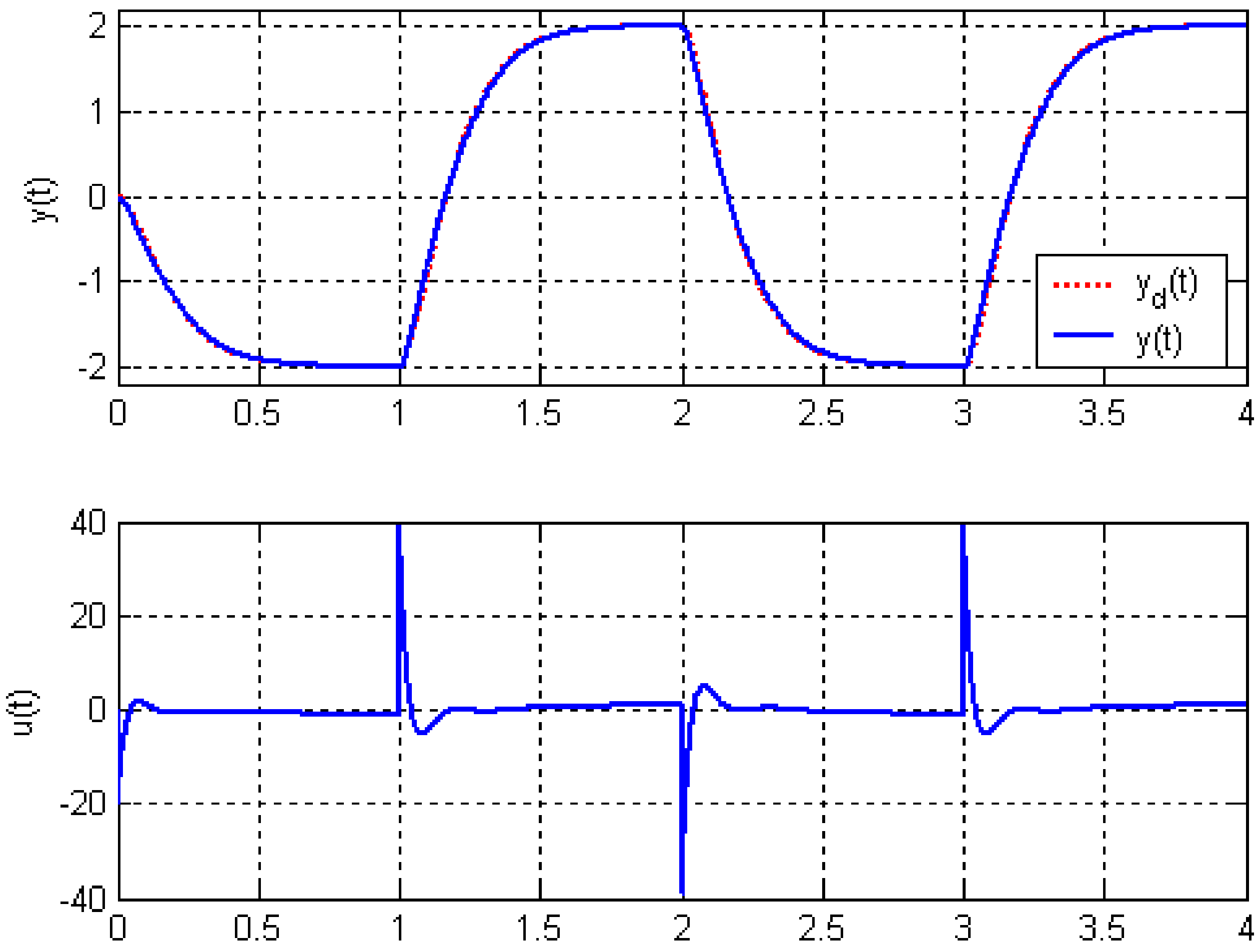
$$G_{LF}(s) = \frac{1}{(0.1s+1)^2}$$

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 2



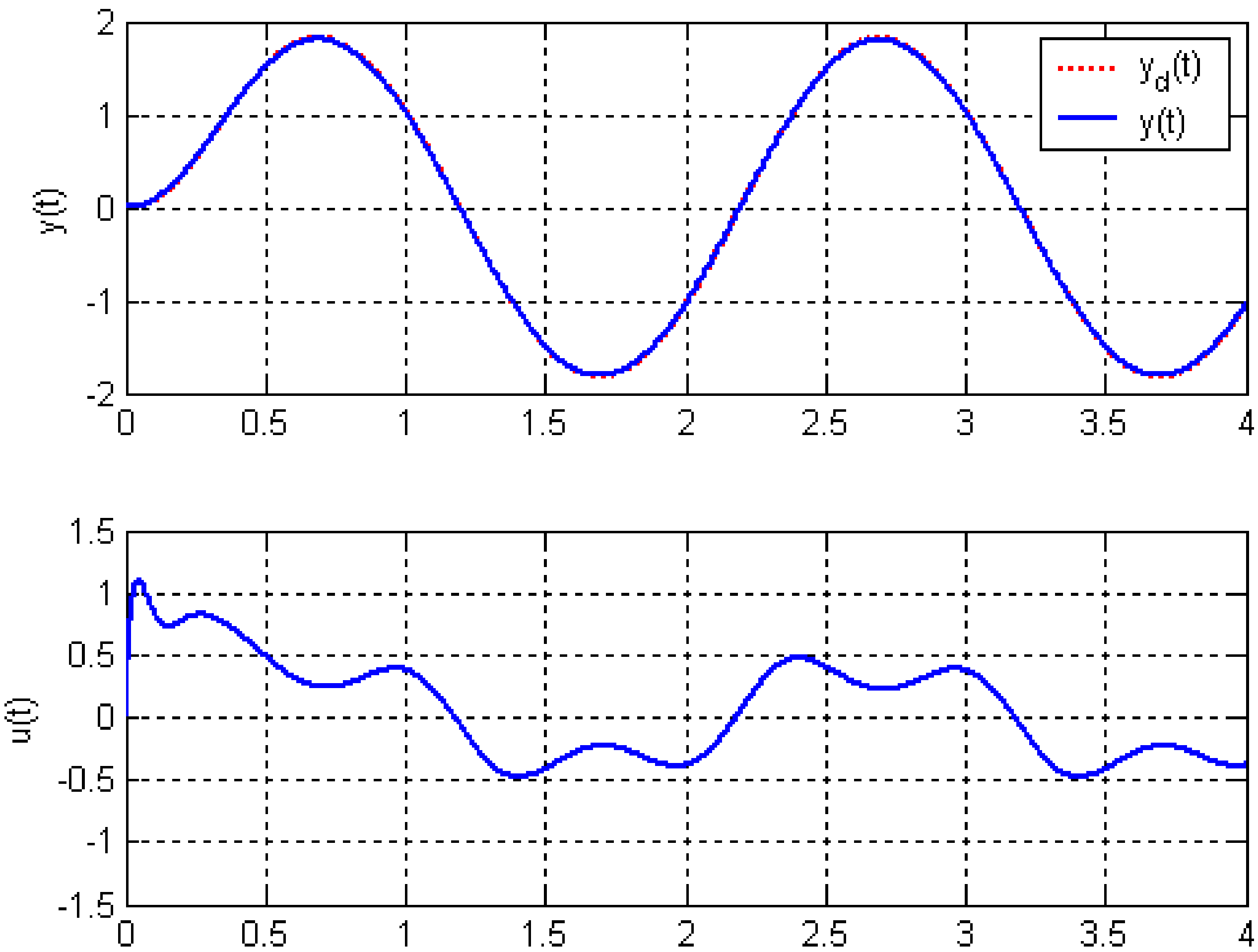
Mô phỏng hệ thống điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 2



Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông

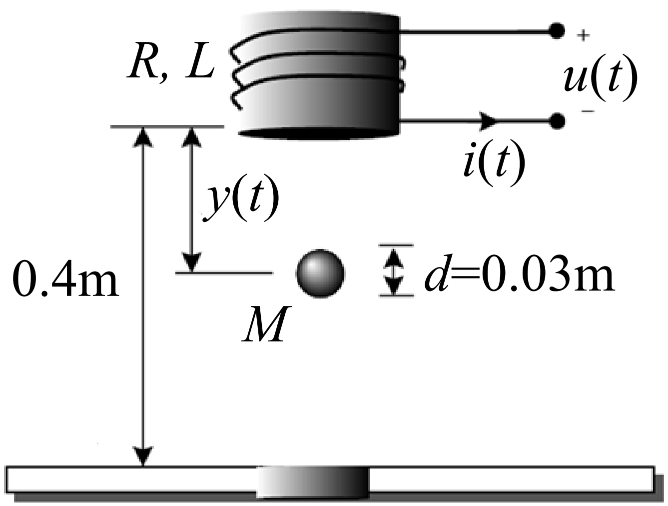
Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 2



Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là tín hiệu hình sin

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3

Hệ nâng bi trong từ trường



$u(t)$ là điện áp cấp cho cuộn dây [V] (tín hiệu vào)

$y(t)$ là vị trí viên bi [m] (tín hiệu ra)

$i(t)$ là dòng điện qua cuộn dây [A]

$M = 0.01$ kg là khối lượng viên bi

$g = 9.8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường

$R = 30\ \Omega$ là điện trở cuộn dây

$L = 0.1$ H là điện cảm cuộn dây

- PT vi phân mô tả đặc tính động học hệ nâng bi trong từ trường:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - \dfrac{i^2(t)}{y(t)} \\ L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \end{cases}$$

- Yêu cầu: Thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa để điều khiển vị trí viên bi bám theo tín hiệu đặt có dạng xung vuông hoặc hình sin

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3

★ Giải:

★ Đặt biến trạng thái: $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t), x_3(t) = i(t)$

$\Rightarrow$ Phương trình trạng thái:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \dfrac{x_3^2}{Mx_1} \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{R}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}u(t) \end{cases}$$

★ Bước 1: Lấy đạo hàm tín hiệu ra, ta được

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t) = g - \frac{x_3^2}{Mx_1}$$

$$\dddot{y}(t) = \frac{-2x_3\dot{x}_3x_1 + x_3^2\dot{x}_1}{Mx_1^2} = \frac{-2x_3\left(-\dfrac{R}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}u(t)\right)x_1 + x_3^2x_2}{Mx_1^2}$$

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3

$\Rightarrow$ $$\dddot{y} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}).u \qquad (1)$$

với $a(\boldsymbol{x}) = \dfrac{x_3^2(2Rx_1 + Lx_2)}{MLx_1^2}$ $\qquad b(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{2x_3}{MLx_1}$

✶ Bước 2: Viết biểu thức bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa

$$u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}(-a(\boldsymbol{x}) + v) \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được hệ tuyến tính:

$$\dddot{y} = v \qquad (3)$$

✶ Bước 3: Viết biểu thức bộ điều khiển bám tuyến tính

$$v = \dddot{y}_d + (k_1\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_3 e) \qquad (4)$$

với $e = y_d - y$

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3

- Bước 4: Tính thông số bộ điều khiển bám

Thay (4) vào (3), ta được đặc tính động học sai số:

$$\dddot{y} = \dddot{y}_d + (k_1\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_3 e)$$

$$\Rightarrow \quad \dddot{e} + k_1\ddot{e} + k_2\dot{e} + k_3 e = 0$$

Phương trình đặc trưng động học sai số:

$$s^3 + k_1 s^2 + k_2 s + k_3 = 0 \qquad (5)$$

Chọn các thông số của bộ điều khiển bám sao cho cả 3 nghiệm của phương trình đặc trưng của hệ kín là –20:

$$(s+20)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad s^3 + 60s^2 + 1200s + 8000 = 0 \qquad (6)$$

Cân bằng (5) và (6), ta được:

$$k_1 = 60, k_2 = 1200, k_3 = 8000$$

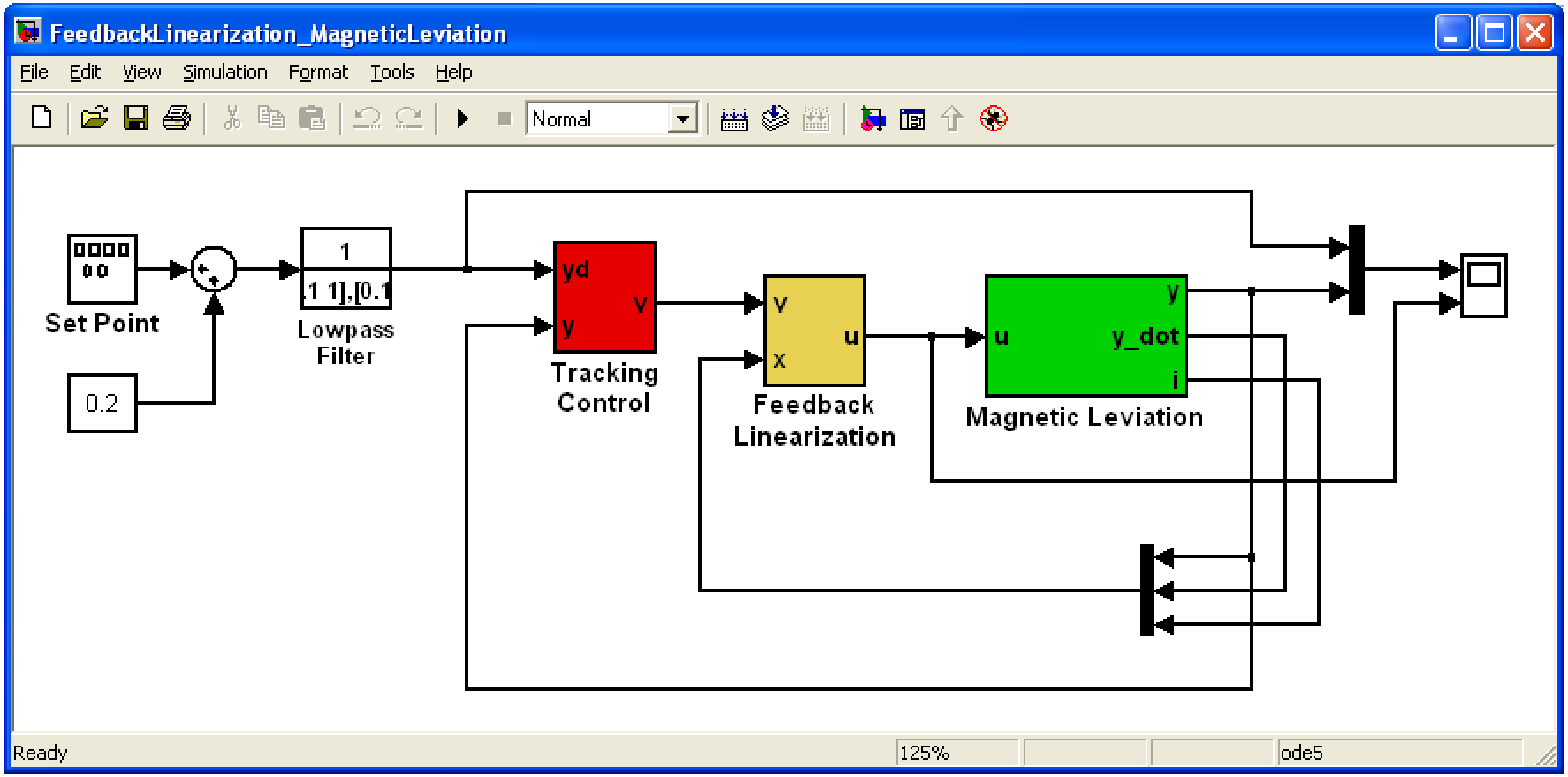
Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3

- Bước 5: Thiết kế bộ lọc tín hiệu vào

Chọn bộ lọc thông thấp bậc 3 để tín hiệu $y_d(t)$ khả vi bị chặn đến đạo hàm bậc 3. Hàm truyền của bộ lọc là:

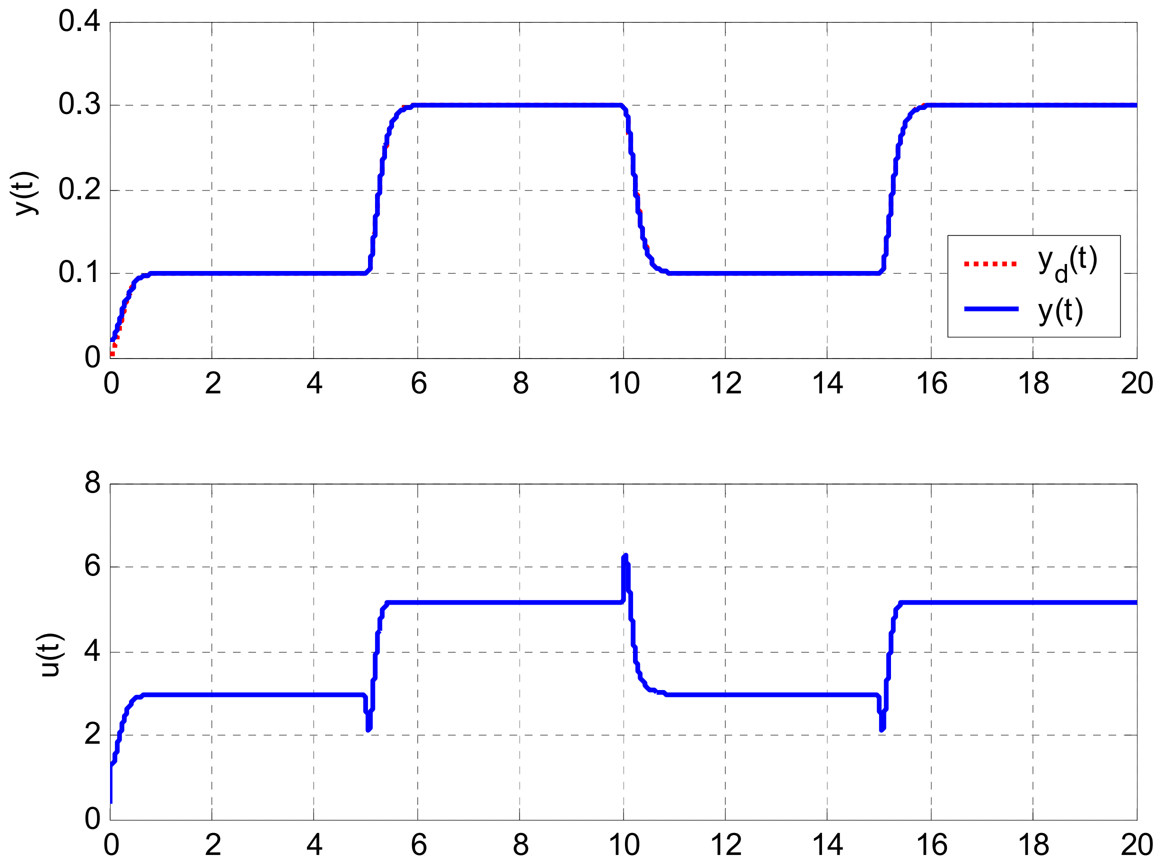
$$G_{LF}(s) = \frac{1}{(0.1s+1)^3}$$

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3



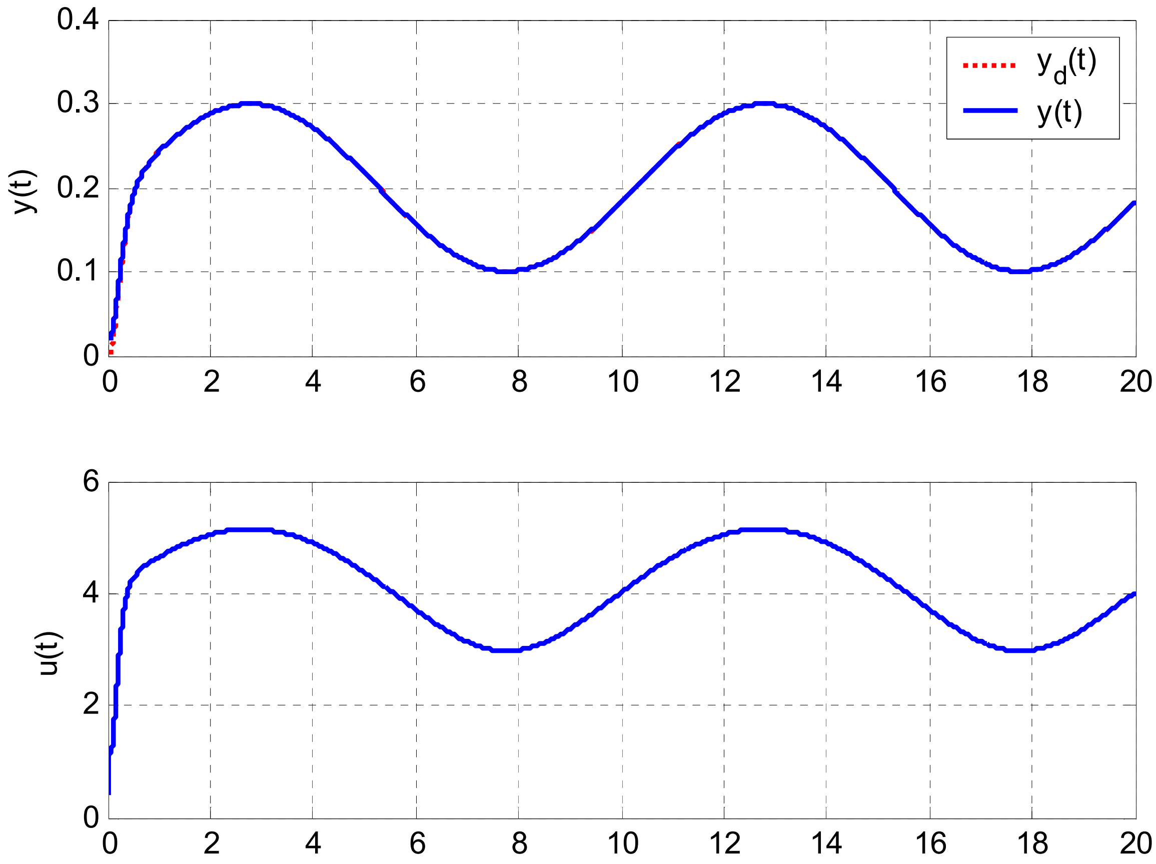
Mô phỏng HTĐK hồi tiếp tuyến tính hóa hệ nâng bi trong từ trường

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3



Kết quả mô phỏng điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa, vị trí viên bi bám rất tốt theo tín hiệu chuẩn là xung vuông

Điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa – Thí dụ 3



Kết quả mô phỏng điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa, vị trí viên bi bám rất tốt theo tín hiệu chuẩn là tín hiệu hình sin

Điều khiển trượt
(Sliding Mode Control)

Đặt bài toán

* Xét đối tượng phi tuyến SISO bậc n mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})u & (1) \\ y = h(\boldsymbol{x}) & (2) \end{cases}$$

Trong đó:

$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]^T \in \Re^n$ là vector trạng thái của hệ thống

$u \in \Re$ là tín hiệu vào

$y \in \Re$ là tín hiệu ra

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \Re^n$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \Re^n$ là các vector hàm trơn mô tả động học của hệ thống

$h(\boldsymbol{x}) \in \Re$ là hàm trơn mô tả quan hệ giữa biến trạng thái và tín hiệu ra

* Bài toán đặt ra là điều khiển tín hiệu ra $y(t)$ bám theo tín hiệu đặt $y_d(t)$

Quan hệ vào ra của đối tượng phi tuyến

- Nếu đối tượng có bậc tương đối bằng *n*, bằng cách lấy đạo hàm của phương trình (2) *n* lần, có thể biểu diễn quan hệ vào ra của đối tượng dưới dạng:

$$y^{(n)} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u$$

Trong đó:

$$a(\boldsymbol{x}) = L_f^n h(\boldsymbol{x})$$

$$b(\boldsymbol{x}) = L_g L_f^{n-1} h(\boldsymbol{x}) \neq 0$$

với:

$$L_f h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}.\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right] [f_1(\boldsymbol{x}), \dots f_n(\boldsymbol{x})]^T$$

$$L_f^k h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial L_f^{k-1} h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}.\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$L_g L_f^k h(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial L_f^k h(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}.\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$$

Định nghĩa mặt trượt

- ✶ Sai số: $e(t) = y_d(t) - y(t)$

- ✶ Đặt: $\sigma = e^{(n-1)} + k_1 e^{(n-2)} + \ldots + k_{n-2}\dot{e} + k_{n-1}e$

  Trong đó k_i được chọn sao cho $\Delta(s) = s^{n-1} + k_1 s^{n-2} + \ldots + k_{n-2}s + k_{n-1}$ là đa thức Hurwitz; vị trí nghiệm của $\Delta(s) = 0$ quyết định đặc tính quá độ quá trình $e(t) \to 0$ khi $\sigma = 0$

  σ =0 gọi là mặt trượt,

  Δ(s) gọi là đa thức đặc trưng của mặt trượt

$$\sigma(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{s^{n-1} + k_1 s^{n-2} + \ldots + k_{n-2}s + k_{n-1}}} \longrightarrow E(s)$$

- ✶ Bài toán điều khiển tín hiệu ra $y(t)$ bám theo tín hiệu đặt $y_d(t)$ được chuyển thành bài toán tìm tín hiệu điều khiển $u(t)$ sao cho $\sigma \to 0$

Hàm Lyapunov

- Chọn hàm Lyapunov: $V = \frac{1}{2}\sigma^2$

- Đạo hàm hàm Lyapunov: $\dot{V} = \sigma\dot{\sigma}$

- Để $\sigma \to 0$ cần chọn tín hiệu điều khiển $u(t)$ sao cho $\dot{V} < 0$

- Do $\sigma = e^{(n-1)} + k_1 e^{(n-2)} + \ldots + k_{n-2}\dot{e} + k_{n-1}e$

  nên $\dot{\sigma} = e^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \ldots + k_{n-2}\ddot{e} + k_{n-1}\dot{e}$

  $\Rightarrow \quad \dot{\sigma} = y_d^{(n)} - y^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \ldots + k_{n-2}\ddot{e} + k_{n-1}\dot{e}$

- Chú ý rằng: $y^{(n)} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u$

  $\Rightarrow \quad \dot{\sigma} = y_d^{(n)} - a(\boldsymbol{x}) - b(\boldsymbol{x})u + k_1 e^{(n-1)} + \ldots + k_{n-2}\ddot{e} + k_{n-1}\dot{e}$

Luật điều khiển trượt

- Chọn $u(t)$ sao cho: $\dot{\sigma} = -K\text{sign}(\sigma)$ $(K>0)$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}\left[-a(\boldsymbol{x}) + y_d^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \ldots + k_{n-2}\ddot{e} + k_{n-1}\dot{e} + K\text{sign}(\sigma)\right]$$

- Với luật điều khiển trên, ta có:

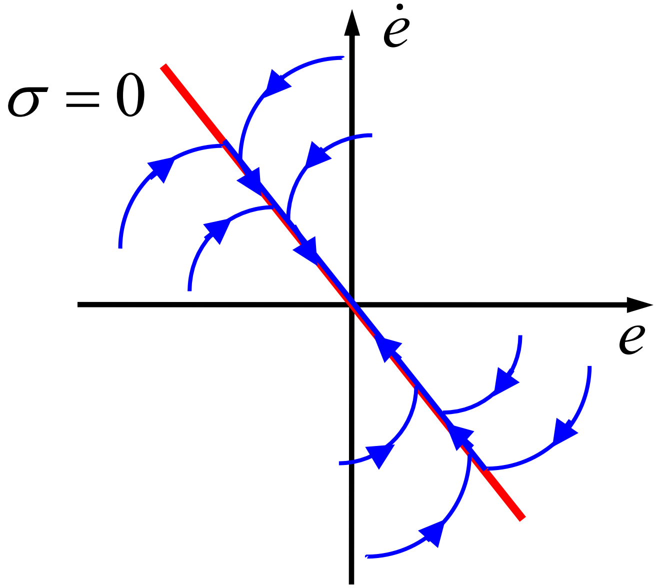
$$\dot{V} = \sigma\dot{\sigma} = -K\sigma\text{sign}(\sigma) = -K|\sigma|$$

$$\Rightarrow \dot{V} < 0 \quad \forall \sigma \neq 0$$

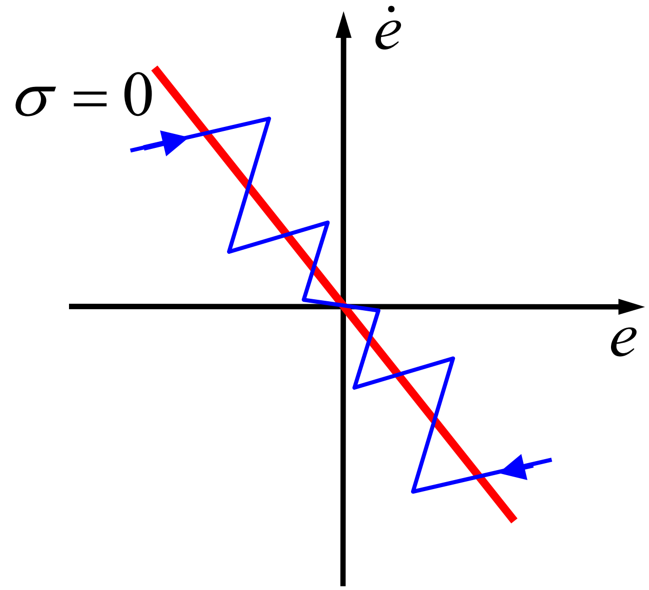
$$\Rightarrow \sigma \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow e \rightarrow 0$$

Quỹ đạo pha của hệ thống điều khiển trượt



Quỹ đạo pha lý tưởng của hệ bậc 2 chuyển động trên mặt trượt về gốc tọa độ



Quỹ đạo pha thực tế dao động quanh mặt trượt về gốc tọa độ, gây nên hiện tượng chattering

Trình tự thiết kế bộ điều khiển trượt bám quỹ đạo

★ ***Bước 1:*** Biểu diễn quan hệ vào ra của đối tượng phi tuyến dưới dạng

$$y^{(n)} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x})u$$

★ ***Bước 2:*** Chọn mặt trượt $\sigma = e^{(n-1)} + k_1 e^{(n-2)} + \ldots + k_{n-2}\dot{e} + k_{n-1}e$

Trong đó k_i được chọn sao cho $\Delta(s) = s^{n=1} + k_1 s^{n-2} + \ldots + k_{n-2}s + k_{n-1}$ là đa thức Hurwitz; nghiệm của $\Delta(s) = 0$ càng nằm xa trục ảo thì $e(t) \rightarrow 0$ càng nhanh khi $\sigma = 0$

★ ***Bước 3:*** Viết biểu thức bộ điều khiển trượt:

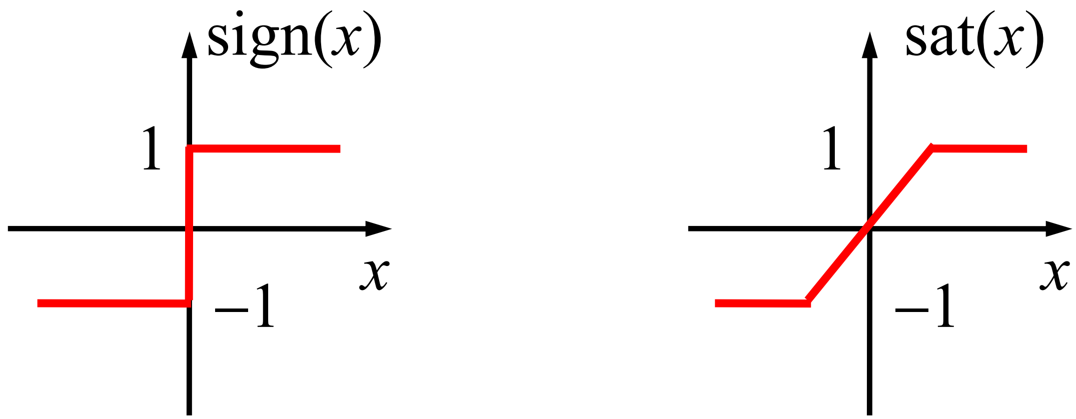
$$u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}\left[-a(\boldsymbol{x}) + y_d^{(n)} + k_1 e^{(n-1)} + \ldots + k_{n-2}\ddot{e} + k_{n-1}\dot{e} + K\text{sign}(\sigma)\right]$$

trong đó $K>0$. K càng lớn thì $\sigma \rightarrow 0$ càng nhanh.

★ ***Bước 4:*** Thiết kế bộ lọc thông thấp tín hiệu vào để đảm bảo tín hiệu chuẩn $y_d(t)$ khả vi bị chặn đến bậc n.

Chú ý

★ Có thể thay hàm sign() bằng hàm sat() hoặc các hàm trơn để giảm hiện tượng chattering

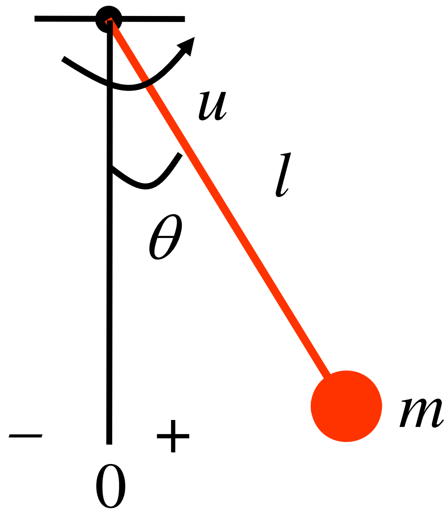


★ Có nhiều phiên bản điều khiển trượt khác nhau tùy theo mô tả toán học của đối tượng phi tuyến và yêu cầu điều khiển.

★ Nguyên tắc cơ bản khi thiết kế luật điều khiển trượt là:

- Định nghĩa tín hiệu trượt là hàm của sai số bám hoặc trạng thái của hệ thống.
- Chọn hàm Lyapunov là hàm toàn phương của mặt trượt
- Chọn tín hiệu ĐK sao cho đạo hàm của hàm Lyapunov luôn âm

Điều khiển trượt – Thí dụ 1



- Xét hệ con lắc mô tả bởi PTVP:

$$ml^2\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + mgl\sin\theta = u(t)$$

- Cho $m = 0.1(\text{kg})$ $l = 1(\text{m})$ $B = 0.01(\text{N.m.s/rad})$
- Hãy thiết kế bộ điều khiển trượt để điều khiển góc lệch của con lắc bám theo tín hiệu đặt.

- ***Giải:***
- Đặt các biến trạng thái là $x_1 = \theta; x_2 = \dot{\theta}$, tín hiệu ra là $y = \theta = x_1$
- Bước 1: Tính đạo hàm của tín hiệu ra

$$\dot{y} = \dot{x}_1$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} = -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{B}{ml^2}x_2 + \frac{1}{ml^2}u$$

Điều khiển trượt – Thí dụ 1

$\Rightarrow$ $\ddot{y} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}).u$ (1)

với $a(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{g}{l}\sin(x_1) - \dfrac{B}{ml^2}x_2$ $b(\boldsymbol{x}) = \dfrac{1}{ml^2}$

★ Bước 2: Biểu thức mặt trượt: $\sigma = \dot{e} + k_1 e$

với $e = y_d - y$

Đa thức đặc trưng của mặt trượt: $s + k_1 = 0$

Chọn cực của mặt trượt tại -500, suy ra: $k_1 = 500$

★ Bước 3: Viết biểu thức bộ điều khiển trượt

$$u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}\left[-a(\boldsymbol{x}) + \ddot{y}_d + k_1\dot{e} + K\mathrm{sign}(\sigma)\right]$$

Chọn: $K = 1000$

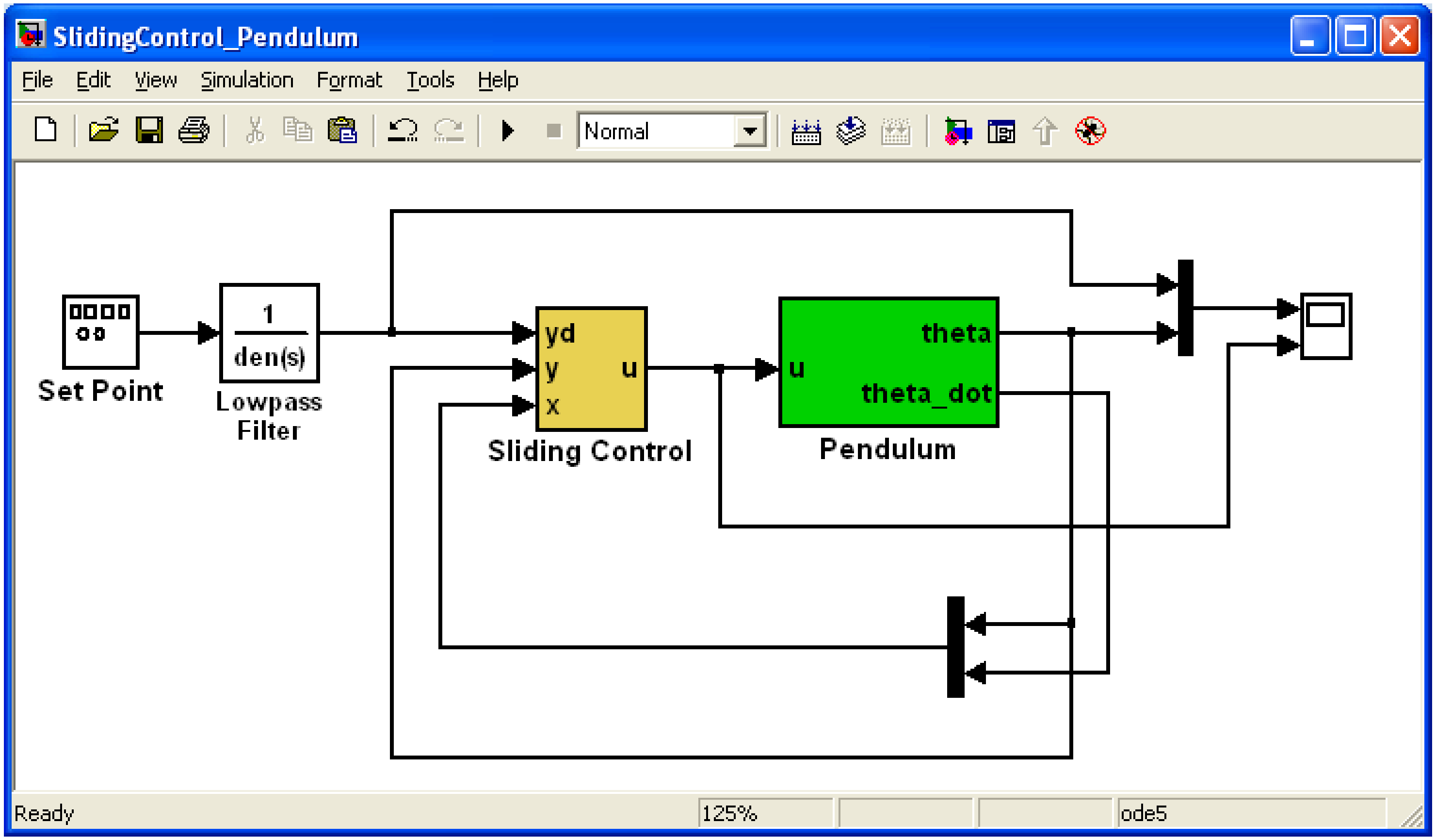
Điều khiển trượt – Thí dụ 1

- Bước 4: Thiết kế bộ lọc tín hiệu vào

Chọn bộ lọc thông thấp bậc 2 để tín hiệu $y_d(t)$ khả vi bị chặn đến đạo hàm bậc 2. Hàm truyền của bộ lọc là:

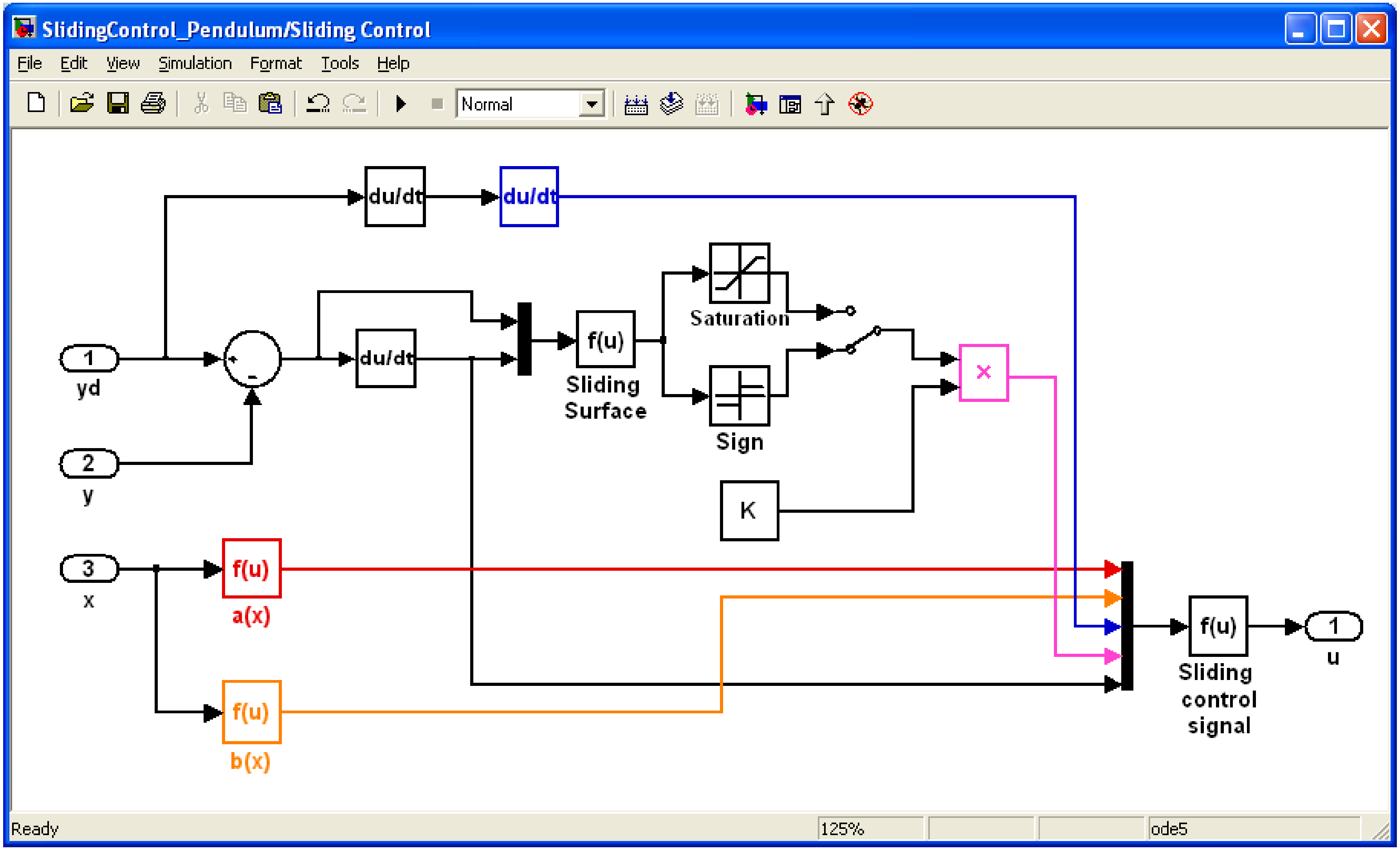
$$G_{LF}(s) = \frac{1}{(0.03s + 1)^2}$$

Điều khiển trượt – Thí dụ 1



Mô phỏng hệ thống điều khiển trượt

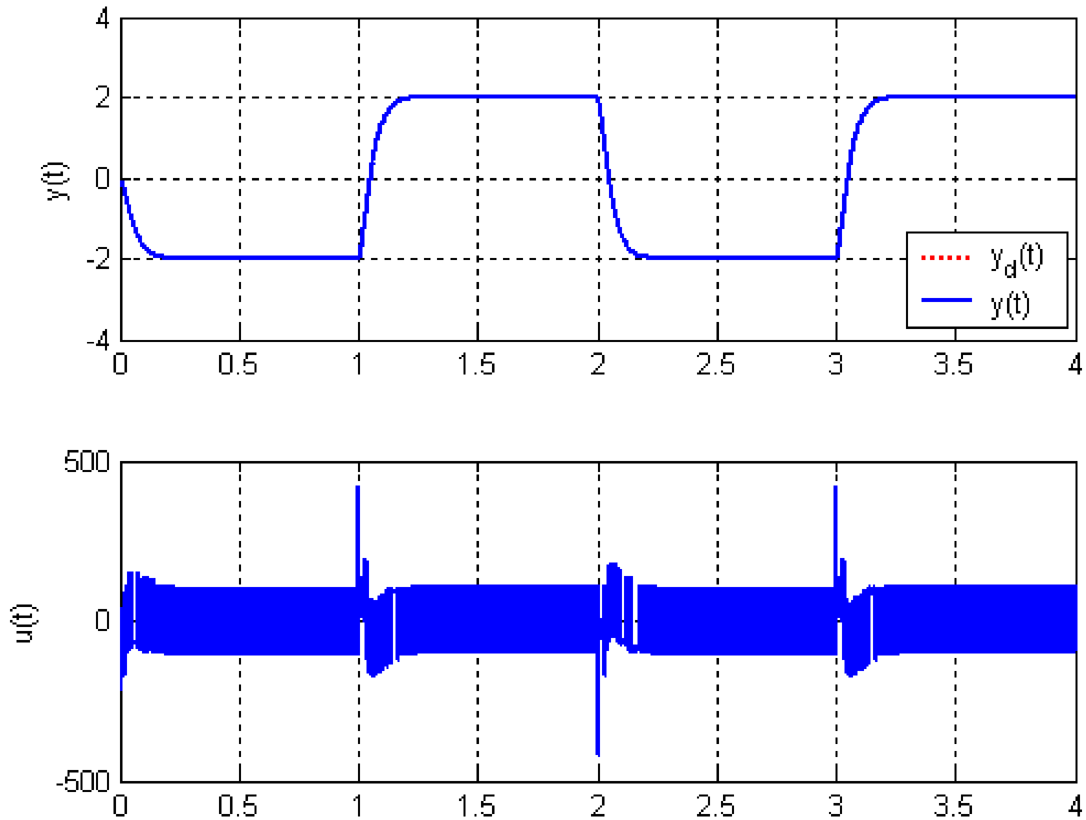
Điều khiển trượt – Thí dụ 1



Mô phỏng khối điều khiển trượt

Điều khiển trượt – Thí dụ 1

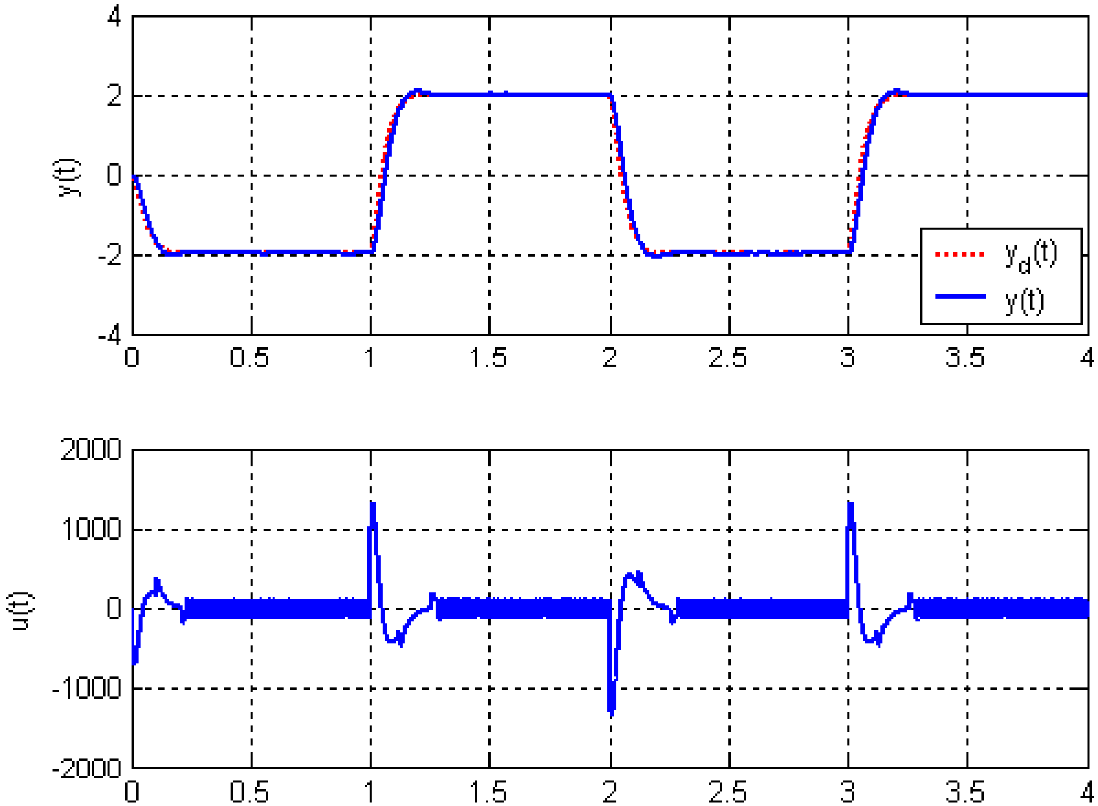
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông



★ Tín hiệu ra của đối tượng bám theo tín hiệu chuẩn $r(t)$ rất tốt

Điều khiển trượt – Thí dụ 1

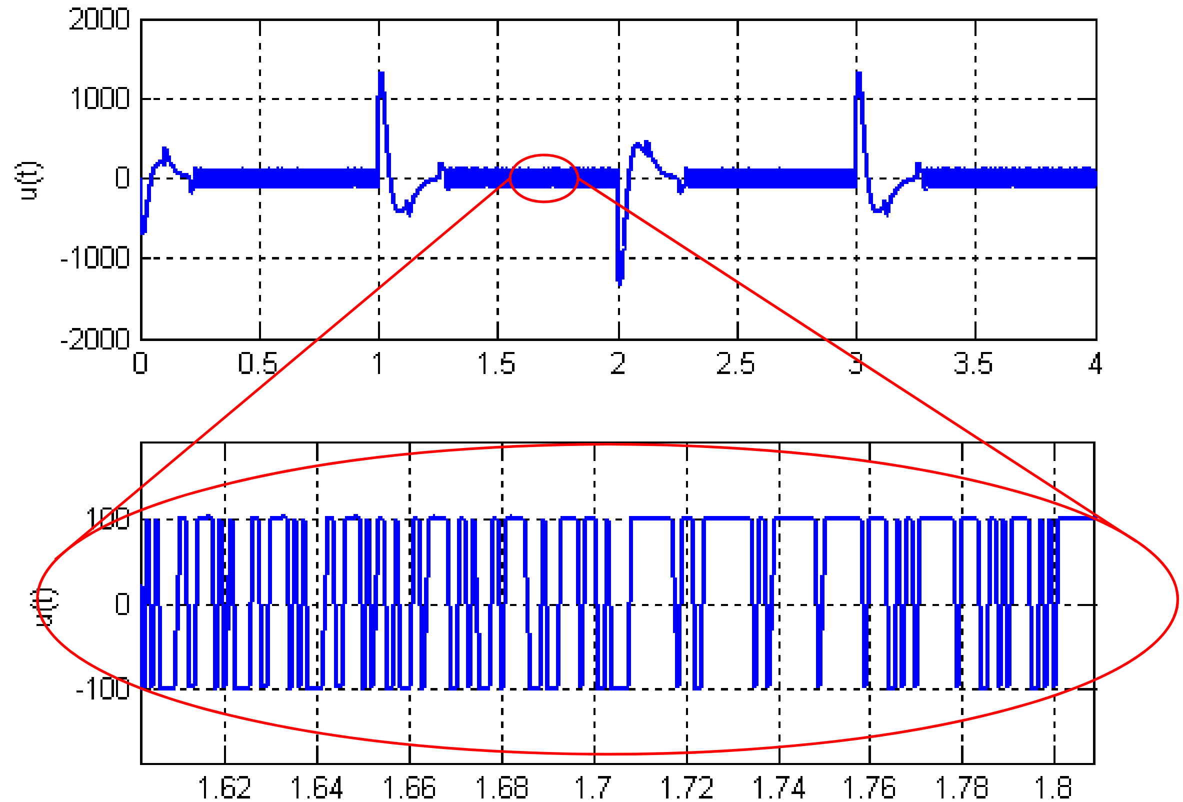
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông



★ Bộ điều khiển trượt rất bền vững với sai số mô hình. Khi khối lượng vật nặng tăng 10 lần (=1kg) chất lượng điều khiển gần như không bị ảnh hưởng

Điều khiển trượt – Thí dụ 1

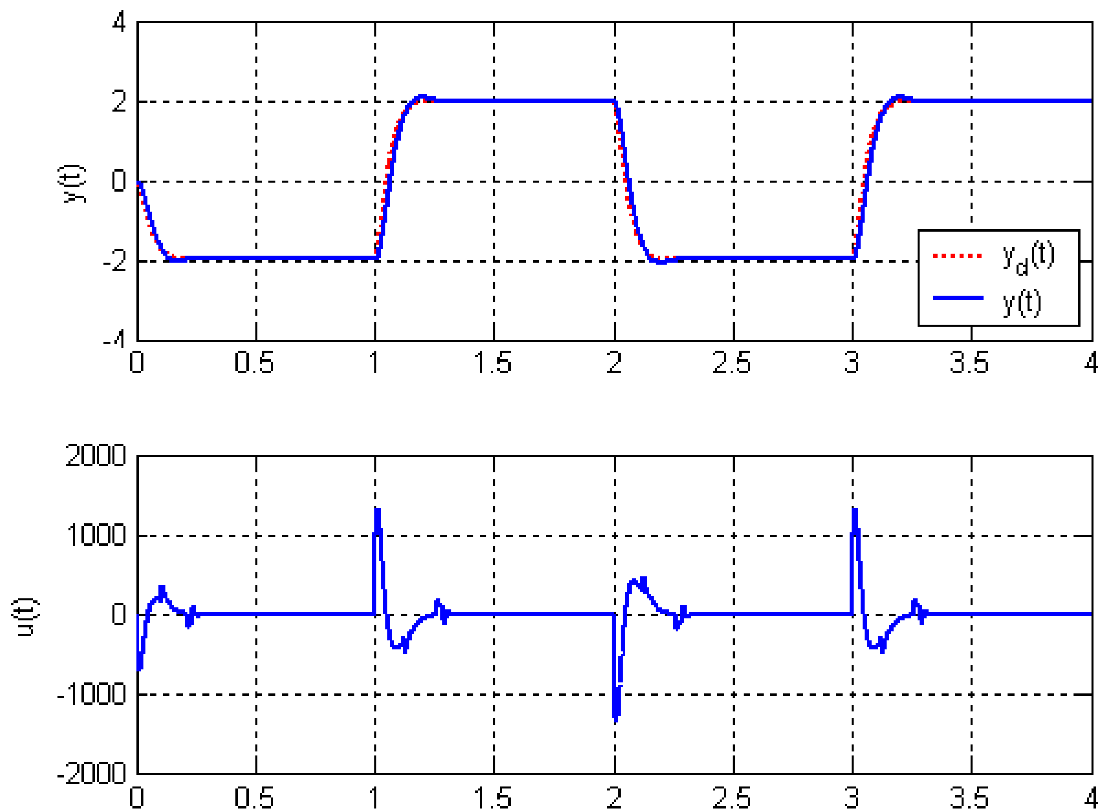
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông



★ Khuyết điểm của bộ điều khiển trượt là hiện tượng "chattering" (= tín hiệu điều khiển dao động với tần số cao). Hiện tượng này có thể làm giảm tuổi thọ các cơ cấu cơ khí

Điều khiển trượt – Thí dụ 1

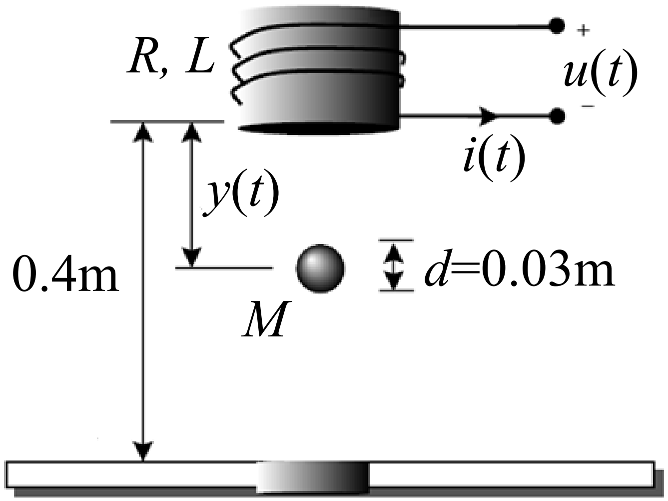
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông



★ Khi thay thế hàm sign() bằng hàm sat(), hiện tượng chattering bị loại bỏ hoàn toàn, trong khi đó tính bền vững và chất lượng điều khiển của hệ thống điều khiển trượt vẫn đảm bảo

Điều khiển trượt – Thí dụ 2

Hệ nâng bi trong từ trường



$u(t)$ là điện áp cấp cho cuộn dây [V] (tín hiệu vào)

$y(t)$ là vị trí viên bi [m] (tín hiệu ra)

$i(t)$ là dòng điện qua cuộn dây [A]

$M = 0.01$ kg là khối lượng viên bi

$g = 9.8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường

$R = 30\ \Omega$ là điện trở cuộn dây

$L = 0.1$ H là điện cảm cuộn dây

- PT vi phân mô tả đặc tính động học hệ nâng bi trong từ trường:

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = Mg - \dfrac{i^2(t)}{y(t)} \\ L\dfrac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t) \end{cases}$$

- Yêu cầu: Thiết kế bộ điều khiển trượt để điều khiển vị trí viên bi bám theo tín hiệu đặt có dạng hình sin hoặc xung vuông

Điều khiển trượt – Thí dụ 2

- Giải:
- Đặt biến trạng thái: $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t), x_3(t) = i(t)$

$\Rightarrow$ Phương trình trạng thái: $$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \dfrac{x_3^2}{Mx_1} \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{R}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}u(t) \end{cases}$$

- Bước 1: Lấy đạo hàm tín hiệu ra, ta được

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t) = g - \frac{x_3^2}{Mx_1}$$

$$\dddot{y}(t) = \frac{-2x_3\dot{x}_3x_1 + x_3^2\dot{x}_1}{Mx_1^2} = \frac{-2x_3\left(-\dfrac{R}{L}x_3 + \dfrac{1}{L}u(t)\right)x_1 + x_3^2x_2}{Mx_1^2}$$

Điều khiển trượt – Thí dụ 2

$\Rightarrow$ $\ddot{y} = a(\boldsymbol{x}) + b(\boldsymbol{x}).u$ (1)

với $a(\boldsymbol{x}) = \dfrac{x_3^2(2Rx_1 + Lx_2)}{MLx_1^2}$ $b(\boldsymbol{x}) = -\dfrac{2x_3}{MLx_1}$

✶ Bước 2: Biểu thức mặt trượt $\sigma = \ddot{e} + k_1\dot{e} + k_2 e$

với $e = y_d - y$

Đa thức đặc trưng của mặt trượt: $s^2 + k_1 s + k_2 = 0$

Chọn cặp cực của đa thức đặc trưng là –10, –10

$\Rightarrow k_1 = 20, k_2 = 100$

✶ Bước 3: Viết biểu thức bộ điều khiển trượt

$$u = \frac{1}{b(\boldsymbol{x})}\left[-a(\boldsymbol{x}) + \ddot{y}_d + k_1\ddot{e} + k_2\dot{e} + K\mathrm{sign}(\sigma)\right]$$

Chọn: $K = 50$

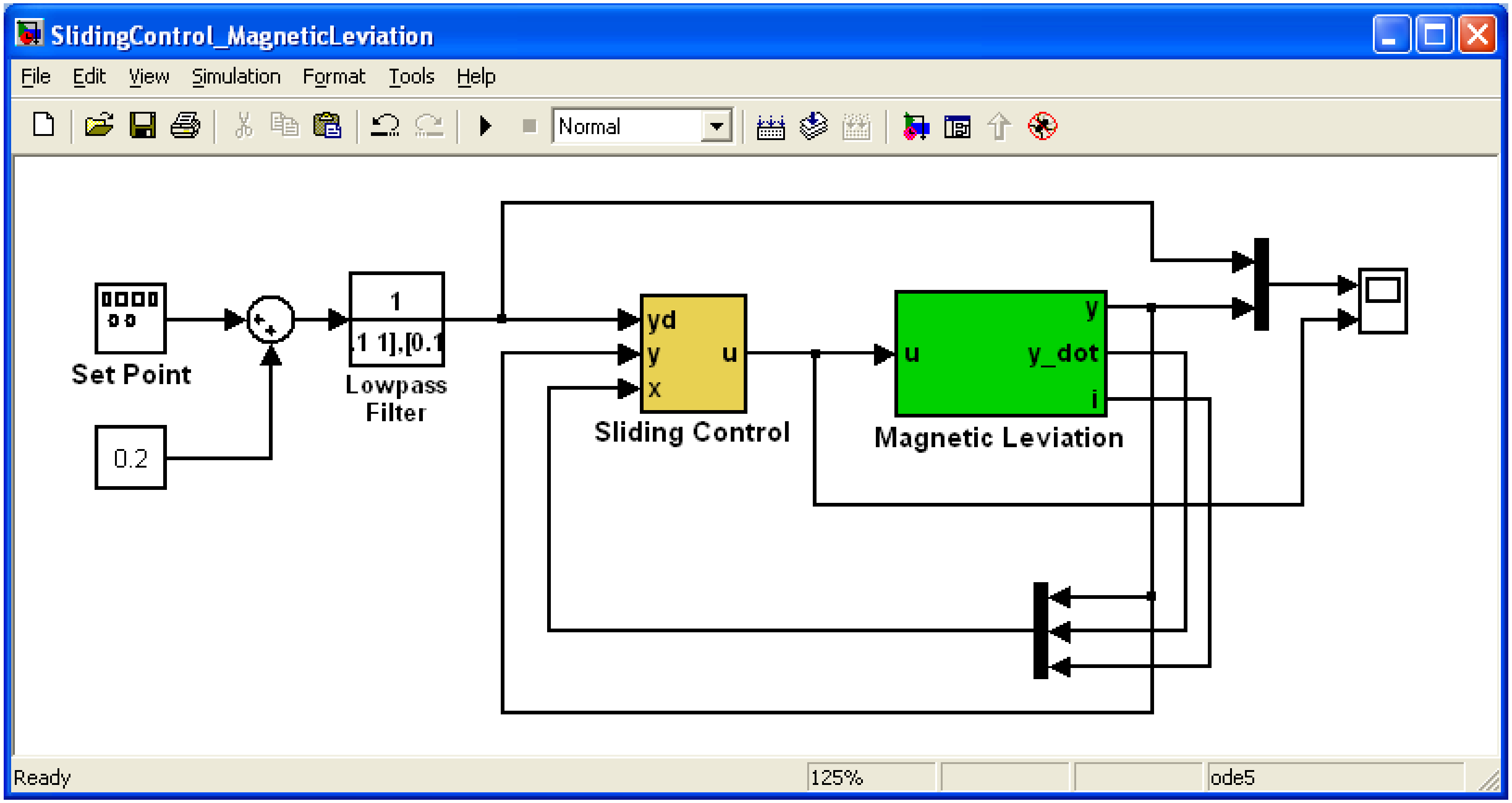
Điều khiển trượt – Thí dụ 2

- Bước 4: Thiết kế bộ lọc tín hiệu vào

Chọn bộ lọc thông thấp bậc 3 để tín hiệu $y_d(t)$ khả vi bị chặn đến đạo hàm bậc 3. Hàm truyền của bộ lọc là:

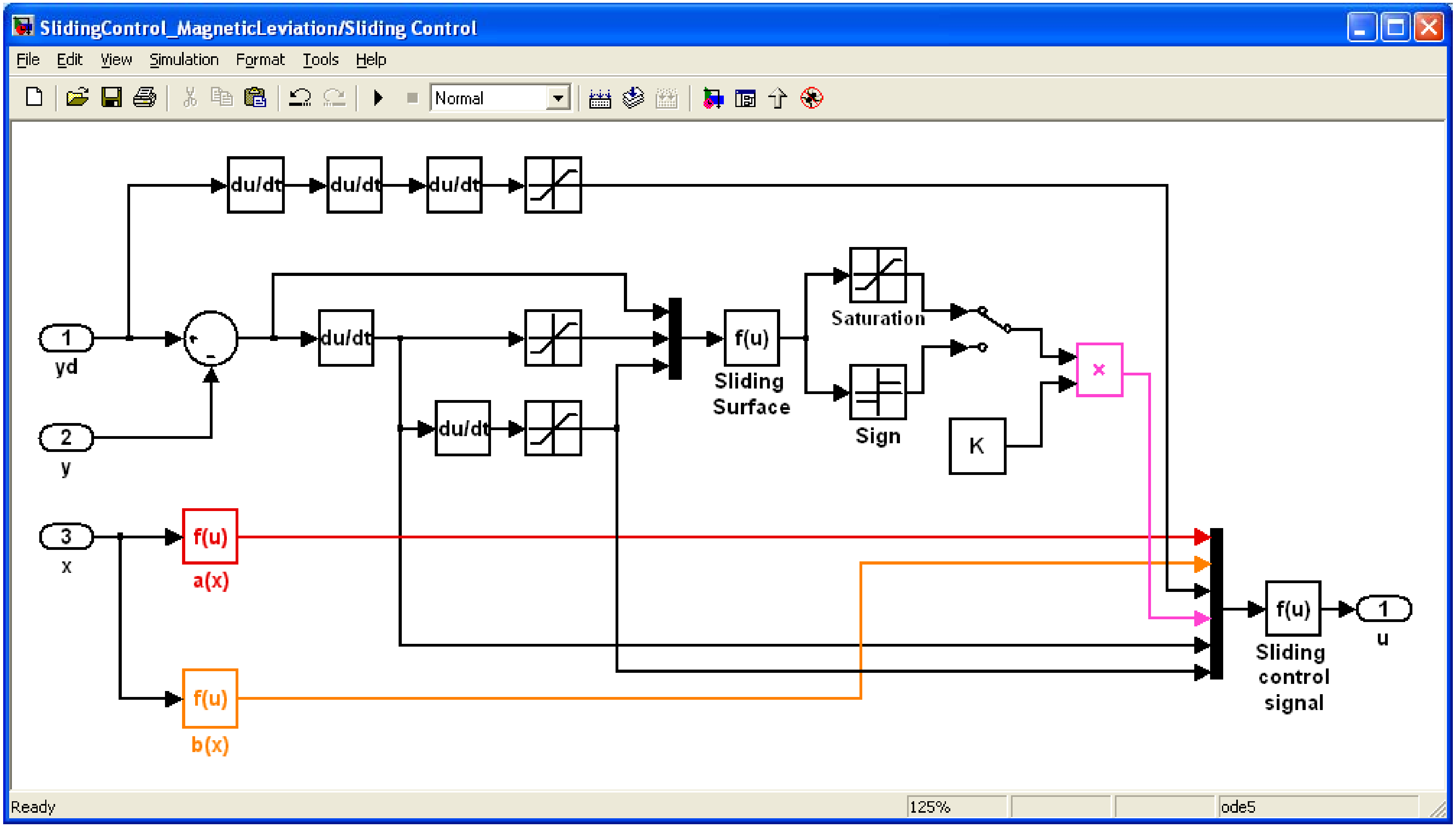
$$G_{LF}(s) = \frac{1}{(0.1s+1)^3}$$

Điều khiển trượt – Thí dụ 2



Mô phỏng hệ thống điều khiển trượt hệ nâng vật trong từ trường

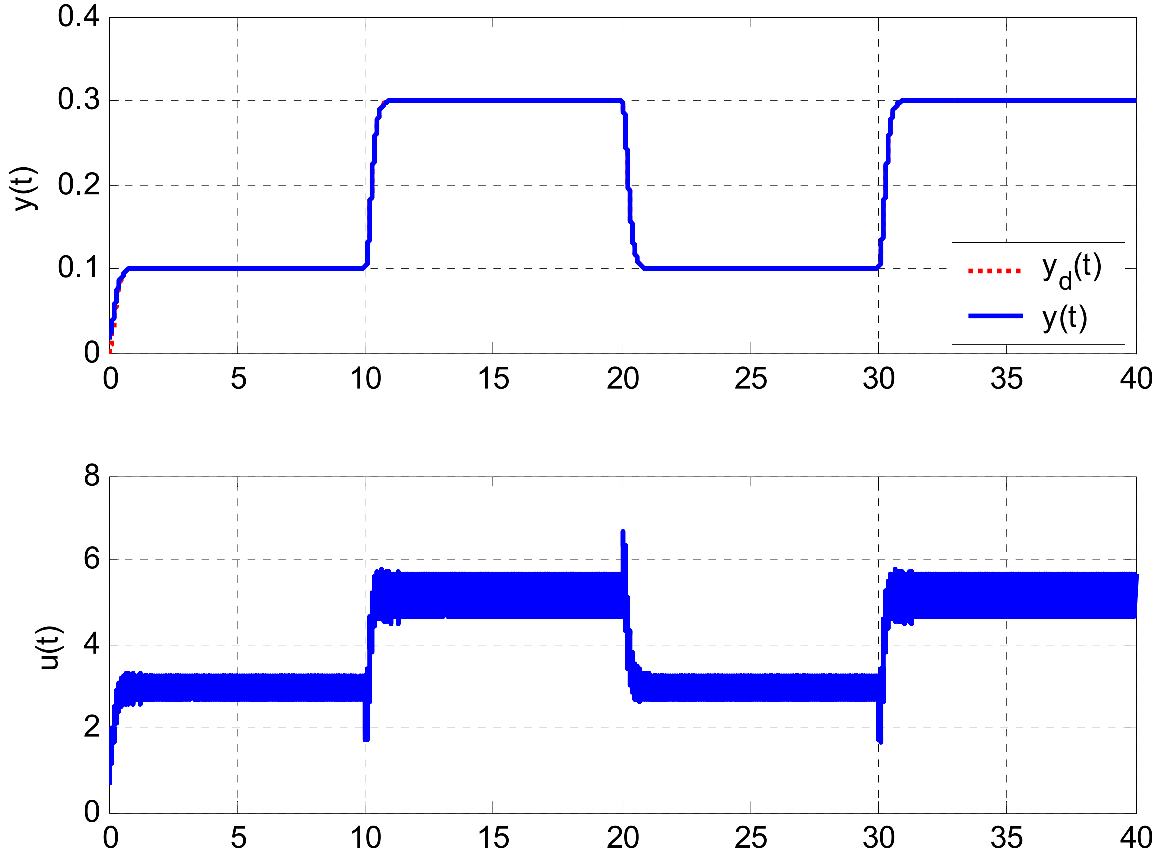
Điều khiển trượt – Thí dụ 2



Mô phỏng khối điều khiển trượt

Điều khiển trượt – Thí dụ 2

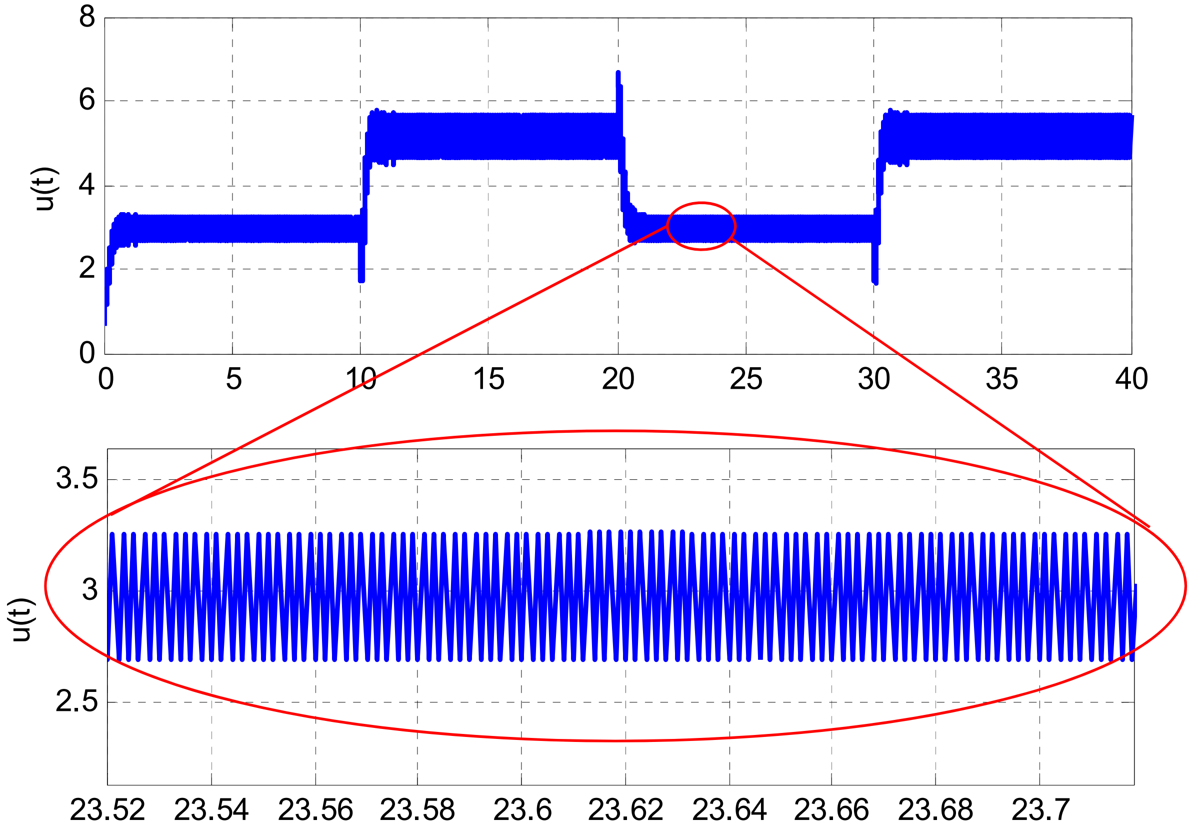
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông



✶ Vị trí viên bi bám theo tín hiệu chuẩn $y_d(t)$ rất tốt

Điều khiển trượt – Thí dụ 2

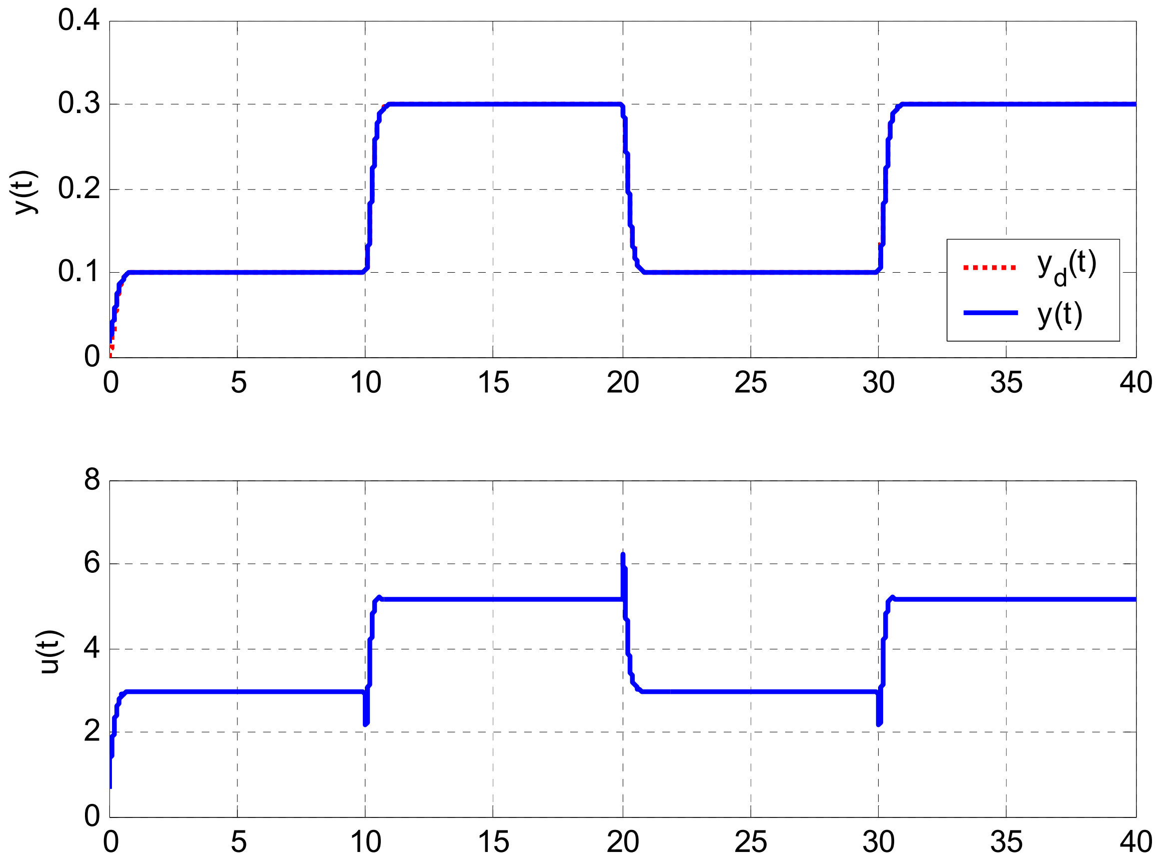
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông



★ Khuyết điểm của bộ điều khiển trượt là hiện tượng “chattering” (= tín hiệu điều khiển dao động với tần số cao).

Điều khiển trượt – Thí dụ 2

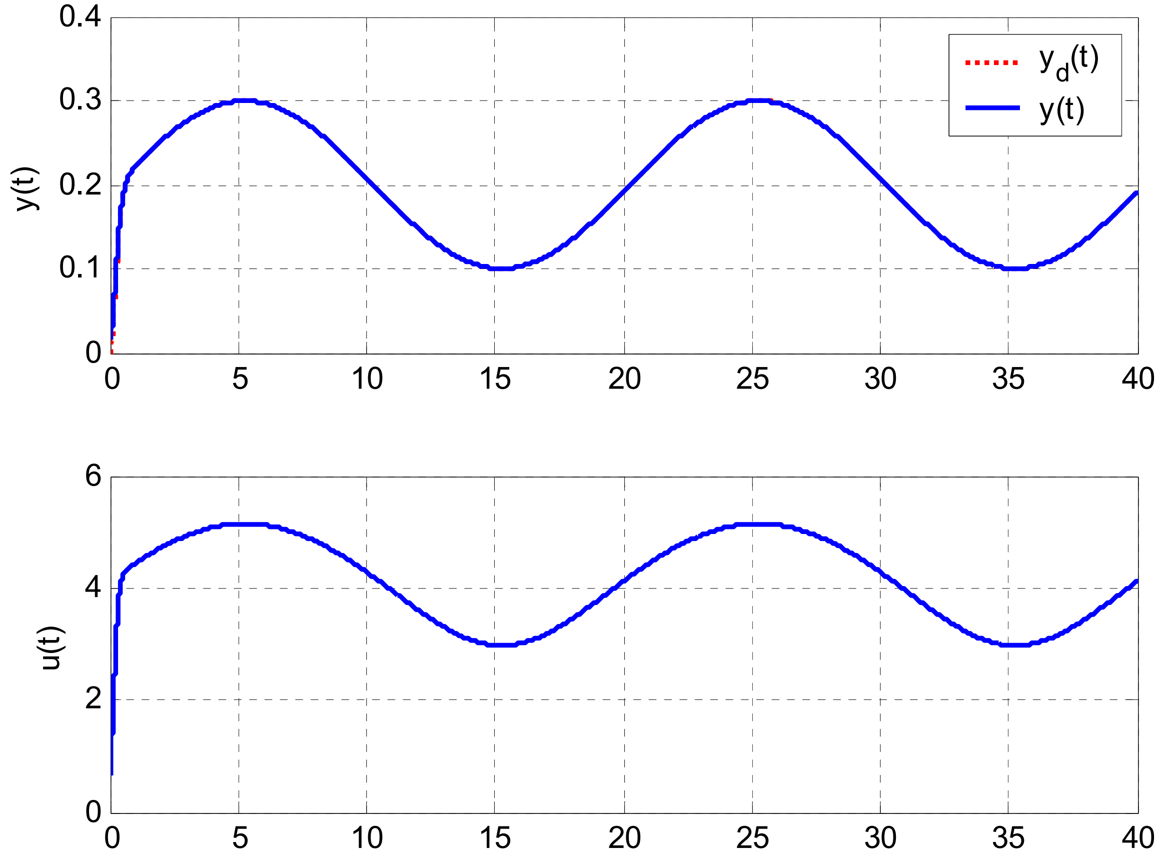
Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn là xung vuông



- Khi thay thế hàm sign() bằng hàm sat(), hiện tượng chattering bị loại bỏ hoàn toàn, trong khi đó tính bền vững và chất lượng điều khiển của hệ thống điều khiển trượt vẫn đảm bảo

Điều khiển trượt – Thí dụ 2

Kết quả mô phỏng khi tín hiệu chuẩn hình sin



- Vị trí viên bi bám theo tín hiệu chuẩn $y_d(t)$ rất tốt, không có hiện tượng chattering khi sử dụng hàm sat() thay thế hàm sign()

Tổng kết chương

Sau khi học xong chương 2, sinh viên phải có khả năng:

- ✶ Khảo sát chế độ dao động trong hệ phi tuyến
- ✶ Khảo sát tính ổn định của hệ phi tuyến dùng định lý Lyapunov
- ✶ Thiết kế bộ điều khiển hồi tiếp tuyến tính hóa
- ✶ Thiết kế bộ điều khiển trượt