Môn học

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN NÂNG CAO

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn Điều Khiển Tự Động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TP.HCM
Email: hthoang@hcmut.edu.vn
Homepage: http://www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 3

ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Nội dung chương 3

- Giới thiệu
- Tối ưu hóa tĩnh
- Tối ưu hóa động và phương pháp biến phân
- Điều khiển tối ưu liên tục dùng phương pháp biến phân
- Phương pháp qui hoạch động Bellman
- Điều khiển tối ưu toàn phương tuyến tính LQR
- Ước lượng trạng thái tối ưu (lọc Kalman)
- Điều khiển tối ưu LQG

GIỚI THIỆU

Giới thiệu

- Điều khiển tối ưu : xác định luật ĐK cho hệ thống động cho trước sao cho tối thiểu hóa một chỉ tiêu chất lượng.
- ĐK tối ưu được phát triển trên cơ sở toán học: phương pháp biến phân (Bernoulli, Euler, Lagrange, Weiertrass,…)
- Từ những năm 1950, ĐK tối ưu phát triển mạnh mẽ và trở thành một lĩnh vực độc lập.
  - Phương pháp quy hoạch động do Richard Bellman đưa ra trong thập niên1950.
  - Nguyên lý cực tiểu Pontryagin do Lev Pontryagin và các đồng sự đưa ra trong thập niên 1950.
  - Bài toán điều chỉnh toàn phương tuyến tính và lọc Kalman do Rudolf Kalman đưa ra trong những năm1960.

Phân loại bài toán điều khiển tối ưu

- Có nhiều bài toán điều khiển tối ưu, tùy theo:
  - Loại đối tượng điều khiển
  - Miền thời gian liên tục hay rời rạc
  - Chỉ tiêu chất lượng
  - Bài toán tối ưu có ràng buộc hay không
- ĐK tối ưu tĩnh: chỉ tiêu chất lượng không phụ thuộc thời gian
- ĐK tối ưu động: chỉ tiêu chất lượng phụ thuộc thời gian
  - Bài toán chỉnh toàn phương tuyến tính (Linear Quadractic Regulator – LQR)
  - Bài toán điều khiển tối ưu H_2
  - …

Ứng dụng

- Trước khi máy tính số ra đời, chỉ có thể giải được một số ít bài toán điều khiển tối ưu đơn giản
- Máy tính số ra đời cho phép ứng dụng lý thuyết điều khiển tối ưu vào nhiều bài toán phức tạp.
- Ngày nay, điều khiển tối ưu được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực:
  - Không gian (aerospace)
  - Điều khiển quá trình (proccess control)
  - Robot
  - Kỹ thuật sinh học (bioengineering)
  - Kinh tế
  - Tài chính
  - …

TỐI ƯU HÓA TĨNH

Tối ưu hóa tĩnh không ràng buộc

- Bài toán tối ưu tĩnh không ràng buộc: tìm m thông số thực (hay phức) $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sao cho hàm $L(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ đạt cực tiểu:

$$L(\boldsymbol{u}) = L(u_1, u_2, \ldots, u_m) \rightarrow \min$$

trong đó $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$

- Điểm $\boldsymbol{u}^*$ được gọi là điểm cực tiểu cục bộ nếu $L(\boldsymbol{u}) \geq L(\boldsymbol{u}^*)$ với mọi $\boldsymbol{u}$ nằm trong lân cận ε của $\boldsymbol{u}^*$.

- Điểm $\boldsymbol{u}^*$ được gọi là điểm cực tiểu toàn cục nếu $L(\boldsymbol{u}) \geq L(\boldsymbol{u}^*)$ với mọi $\boldsymbol{u}$

Điều kiện cực trị không ràng buộc

- Giả sử *L*(***u***) khả đạo hàm theo ***u***, thì điều kiện cần và đủ để $\boldsymbol{u}^*$ là điểm cực tiểu cục bộ là:

$$\begin{cases} L_u(\boldsymbol{u}^*) = 0 \\ L_{uu}(\boldsymbol{u}^*) > 0 \end{cases}$$

trong đó:

$$L_u = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \partial L / \partial u_1 \\ \partial L / \partial u_2 \\ \vdots \\ \partial L / \partial u_m \end{bmatrix}$$

$$L_{uu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{u}^2} = \begin{bmatrix} \partial^2 L / \partial u_1 u_1 & \partial^2 L / \partial u_1 u_2 & \cdots & \partial^2 L / \partial u_1 u_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial^2 L / \partial u_m u_1 & \partial^2 L / \partial u_m u_2 & \cdots & \partial^2 L / \partial u_m u_m \end{bmatrix}$$

Tìm cực trị không ràng buộc – Thí dụ 1

- Tìm cực trị hàm: $L(\boldsymbol{u}) = 5u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1u_2 + 8u_1 + 3u_2$
- ***Giải:***
- Điều kiện cần có cực trị:

$$L_u = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_2} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 10u_1 + 2u_2 + 8 = 0 \\ 2u_1 + 4u_2 + 3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} u_1^* = -0.7222 \\ u_2^* = -0.3889 \end{cases}$$

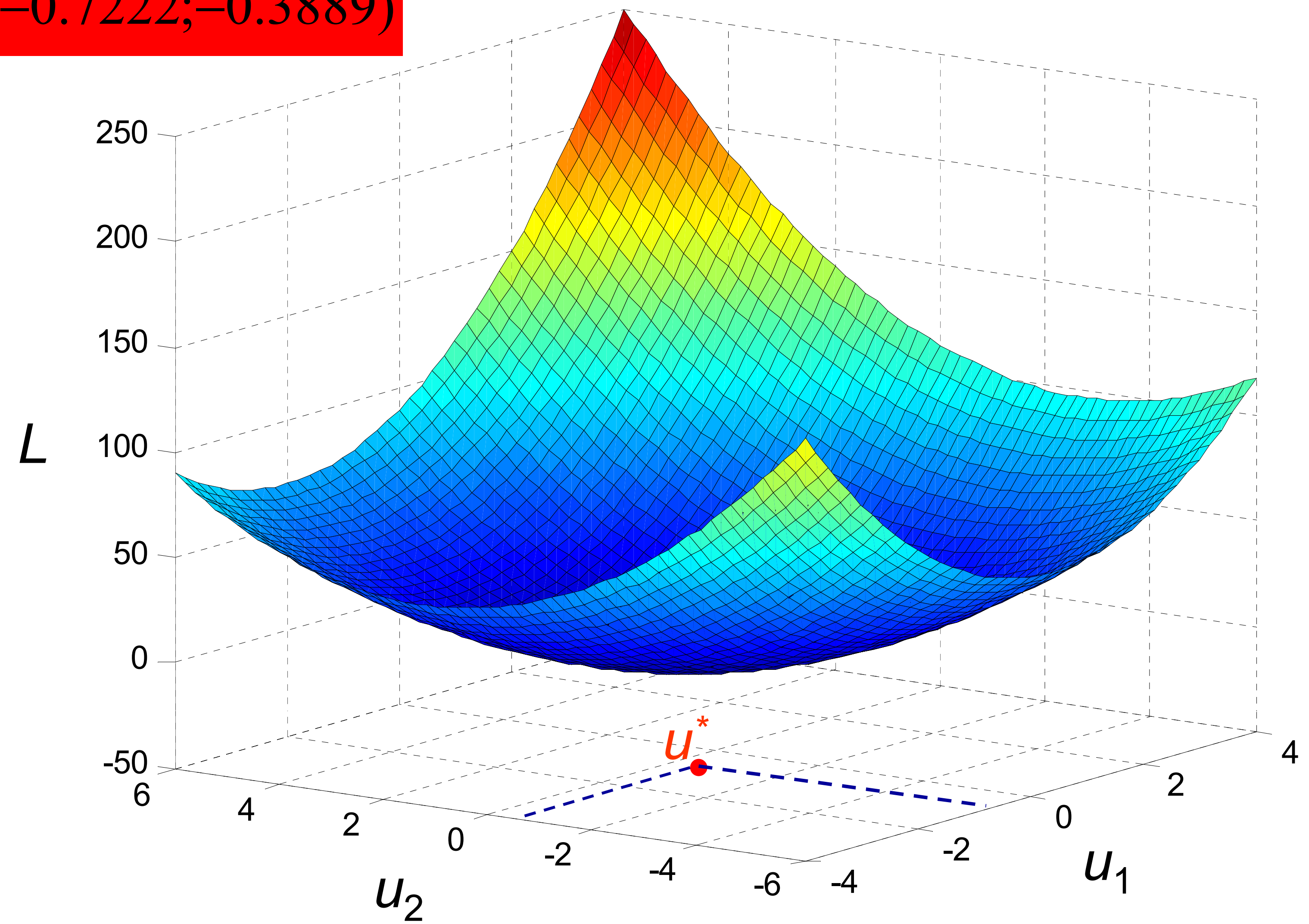
- Xét vi phân bậc hai:

$$L_{uu} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_1 \partial u_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial u_2^2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad L_{uu} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad L_{uu} > 0$$

$\Rightarrow (u_1^*, u_2^*) = (-0.7222; -0.3889)$ là điểm cực tiểu.

Tìm cực trị không ràng buộc – Thí dụ 1

$$u^* = (-0.7222; -0.3889)$$



Tối ưu hóa tĩnh có ràng buộc

- Bài toán tối ưu tĩnh có ràng buộc: tìm vector thông số $\boldsymbol{u}$ sao cho hàm $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ đạt cực tiểu, đồng thời thỏa điều kiện $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0$

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \rightarrow \min$$

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0$$

trong đó $\boldsymbol{x}=[x_1, x_2,\ldots, x_n]^T$

$\boldsymbol{u}=[u_1, u_2,\ldots, u_m]^T$

$L:\Re^n \times \Re^m \rightarrow \Re$: hàm đánh giá

$f:\Re^n \times \Re^m \rightarrow \Re^p$: điều kiện ràng buộc

Hàm Hamilton

- Định nghĩa hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$$

trong đó $\boldsymbol{\lambda} \in \Re^p$ là vector hằng số, gọi là thừa số Larrange

Do ràng buộc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0$ nên cực tiểu của $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ cũng chính là cực tiểu của $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$.

$\Rightarrow$ Biến đổi bài toán tìm cực tiểu hàm $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ với ràng buộc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0$ thành bài toán tìm cực tiểu không ràng buộc hàm Hamilton $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$

- Vi phân hàm Hamilton:

$$dH(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \frac{\partial H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} + \frac{\partial H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u}$$

Thừa số Lagrange

★ Do ta cần tìm cực trị theo ***u*** nên có thể tự do chọn thừa số Lagrange sao cho:

$$H_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \frac{\partial H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\lambda}^T = -\left[\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^{-1}$$

Viết gọn lại: $\boldsymbol{\lambda}^T = -L_x\left[\boldsymbol{f}_x\right]^{-1}$

Độ dốc của hàm mục tiêu với điều kiện ràng buộc

- Vi phân hàm mục tiêu: $$dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} + \frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u}$$
- Do ***f***(***x***,***u***) = 0 nên: $$d\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} + \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u} = 0$$

$$\Rightarrow \quad d\boldsymbol{x} = -\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u}$$

- Thay (2) vào (1), ta được:

$$dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = -\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\left[\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u} + \frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u}$$

$$\Rightarrow \; dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \left[\boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} + \frac{\partial L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}\right] d\boldsymbol{u} \quad \Rightarrow \; dL(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \frac{\partial H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} d\boldsymbol{u}$$

$\Rightarrow$ Với ĐK ***f***(***x***,***u***)=0, độ dốc của *L*(***x***,***u***) theo ***u*** chính bằng H_u(***x***,***u***)

$\Rightarrow$ Điều kiện để *L*(***x***,***u***) đạt cực trị với ràng buộc ***f***(***x***,***u***)=0 là:

$$H_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0$$

Điều kiện cần cực trị có ràng buộc

★ Kết hợp với điều kiện xác định hằng số Lagrange, điều kiện cần để $L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ đạt cực trị có ràng buộc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=0$ là:

$$\begin{cases} H_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = L_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}_x(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0 \\ H_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = L_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}_u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0 \\ H_\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = 0 \end{cases}$$

trong đó: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \lambda^T f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$

Tìm cực trị có ràng buộc – Thí dụ 1

- Tìm cực trị hàm: $L(\boldsymbol{u}) = 5u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1u_2 + 8u_1 + 3u_2$

  Với điều kiện ràng buộc:

$$f(\boldsymbol{u}) = u_1 + 6u_2 - 2 = 0$$

- ***Giải:***
- Hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{u}) = L(\boldsymbol{u}) + \lambda^T f(\boldsymbol{u})$$

$$\Rightarrow H(\boldsymbol{u}) = 5u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1u_2 + 8u_1 + 3u_2 + \lambda(u_1 + 6u_2 - 2)$$

Tìm cực trị có ràng buộc – Thí dụ 1

★ Điều kiện cần để có cực trị:

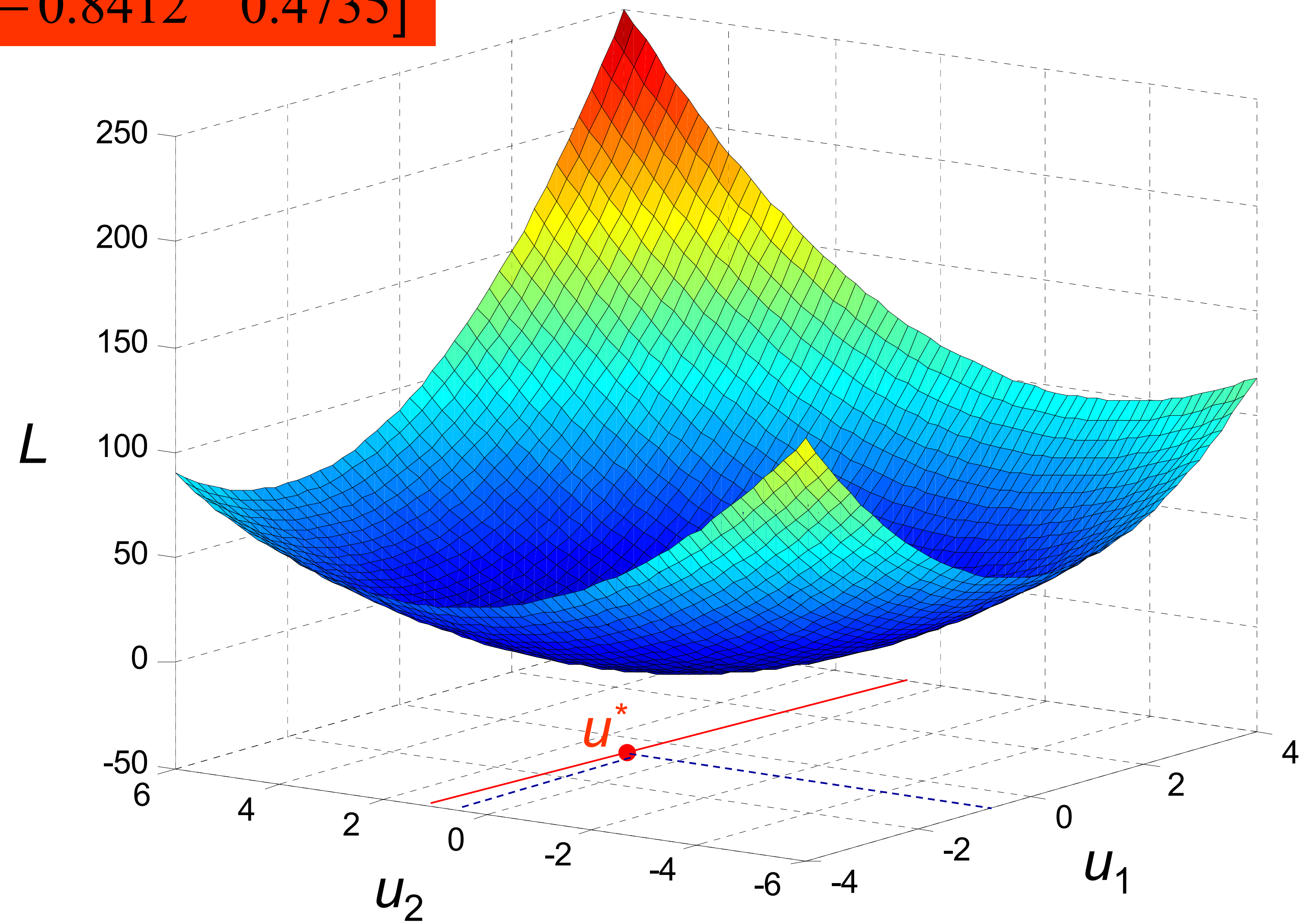
$$\begin{cases} H_x(\boldsymbol{u}) = 0 \\ H_u(\boldsymbol{u}) = 0 \\ f(\boldsymbol{u}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H(\boldsymbol{u})}{\partial u_1} = 10u_1 + 2u_2 + 8 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial H(\boldsymbol{u})}{\partial u_2} = 2u_1 + 4u_2 + 3 + 6\lambda = 0 \\ f(\boldsymbol{u}) = u_1 + 6u_2 - 2 = 0 \end{cases}$$

★ Giải hệ phương trình, ta được:

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{bmatrix} -0.8412 & 0.4735 \end{bmatrix}^T \qquad \lambda = -0.5353$$

Tìm cực trị có ràng buộc – Thí dụ 1

$$\boldsymbol{u}^* = \begin{bmatrix}-0.8412 & 0.4735\end{bmatrix}^T$$



Tìm cực trị có ràng buộc – Thí dụ 2

- Tìm cực trị hàm: $L(x,u) = (x-2)^2 + (u-2)^2$

  Với điều kiện ràng buộc: $u = x^2 + 3x - 6$

- ***Giải:***

- Viết lại điều kiện ràng buộc:

$$u = x^2 + 3x - 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x - 6 - u = 0$$

- Hàm Hamilton:

$$H(x,u) = L(x,u) + \lambda^T f(x,u)$$

$$\Rightarrow \quad H(x,u) = (x-2)^2 + (u-2)^2 + \lambda(x^2 + 3x - 6 - u)$$

Tìm cực trị có ràng buộc – Thí dụ 2

✶ Điều kiện cần để có cực trị:

$$\begin{cases} H_x(x,u)=0 \\ H_u(x,u)=0 \\ f(x,u)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial H(x,u)}{\partial x}=2(x-2)+2\lambda x+3\lambda=0 \\ \dfrac{\partial H(x,u)}{\partial u}=2(u-2)-\lambda=0 \\ f(x,u)=x^2+3x-6-u=0 \end{cases}$$

✶ Giải hệ phương trình, ta được ba nghiệm:

$$(x,u)=(-4.53;0.92),(1.71;2.04),(-1.68;-8.22)$$

✶ Thay 3 nghiệm trên vào $L(\boldsymbol{x},u)=(x-2)^2+(u-2)^2$, ta được các giá trị tương ứng là: 43.78; 0.087; 117.94.

✶ Kết luận: cực trị cần tìm là $(x^*,u^*)=(1.71;2.04)$

Tìm cực trị có ràng buộc – Thí dụ 3

- Tìm cực trị hàm: $L(\boldsymbol{x},u) = x_1^2 + 3x_2^2 + u^2$

  Với các điều kiện ràng buộc:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x},u) \\ f_2(\boldsymbol{x},u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 - 4 \\ x_1 + u + 2 \end{bmatrix} = 0$$

- ***Giải:***
- Hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{x},u) = L(\boldsymbol{x},u) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)$$

$$\Rightarrow H(\boldsymbol{x},u) = x_1^2 + 3x_2^2 + u^2 + \lambda_1(2x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(x_1 + u + 2)$$

Tìm cực trị có ràng buộc – Thí dụ 3

★ ĐK cần để có cực trị:

$$\begin{cases} H_x(\boldsymbol{x},u)=0 \\ H_u(\boldsymbol{x},u)=0 \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial H(\boldsymbol{x},u)/\partial x_1 = 2x_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \partial H(\boldsymbol{x},u)/\partial x_2 = 6x_2 + \lambda_1 = 0 \\ \partial H(\boldsymbol{x},u)/\partial u = 2u + \lambda_2 = 0 \\ f_1(\boldsymbol{x},u) = 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x},u) = x_1 + u + 2 = 0 \end{cases}$$

★ Giải hệ phương trình, ta được:

$$\boldsymbol{x}^* = [1.5714 \quad 0.8514]^T \quad u^* = -3.5714 \quad \lambda = [-5.1429 \quad 7.1429]^T$$

★ Do $L(\boldsymbol{x},u) = x_1^2 + 3x_2^2 + u^2$ là hàm toàn phương nên cực trị tìm được ở trên cũng chính là cực tiểu

TỐI ƯU HÓA ĐỘNG VÀ PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN

Tối ưu hóa động không ràng buộc

★ Bài toán tối ưu động không ràng buộc: tìm vector hàm ***x***(*t*) sao cho phiếm hàm *J*(***x***) đạt cực tiểu:

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt \rightarrow \min$$

trong đó:

$$\boldsymbol{x}(t) = \left[x_1(t) \quad x_2(t) \quad \ldots \quad x_n(t)\right]^T \in \Re^n$$

$$L : \Re^n \times \Re^n \times \Re \rightarrow \Re$$

Chú ý: Phiếm hàm là hàm của hàm

(functional = function of function)

★ Phiếm hàm $J(\boldsymbol{x})$ có cực tiểu cục bộ tại $\boldsymbol{x}^*(t)$ nếu

$$J(\boldsymbol{x}(t)) \geq J(\boldsymbol{x}^*(t))$$

với mọi hàm $\boldsymbol{x}(t)$ nằm trong lân cận ε của $\boldsymbol{x}^*(t)$

$$\left\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^*(t)\right\| \leq \varepsilon$$

Tìm cực trị phiếm hàm?

- Nhắc lại cực trị hàm:
  - Điều kiện cần: đạo hàm bậc 1 của hàm cần tìm cực trị bằng 0

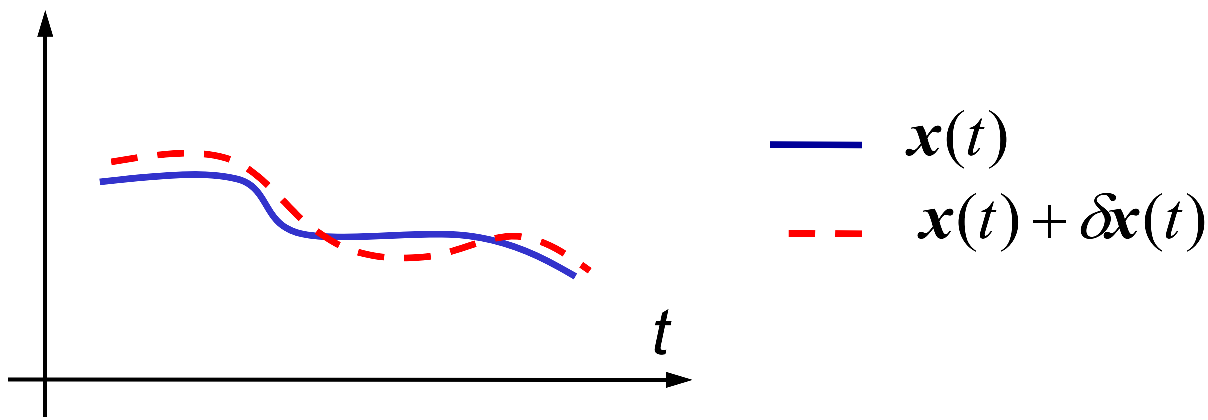
    $\Rightarrow$ điểm dừng
  - Điểm dừng có đạo hàm bậc 2 xác định dương

    $\Rightarrow$ điểm cực tiểu
- Cực trị phiếm hàm?
  - Khái niệm biến phân (variation): có thể hiểu là "đạo hàm của phiếm hàm"
  - Phương pháp biến phân (Calculus of Variation): dựa vào khái niệm biến phân đưa ra điều kiện cực trị của phiếm hàm tương tự như điều kiện cực trị hàm

Khái niệm biến phân

* Lượng gia của phiếm hàm: $\Delta J(\boldsymbol{x}) = J(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}) - J(\boldsymbol{x})$

  trong đó $\delta\boldsymbol{x}(t)$ là biến phân của hàm $\boldsymbol{x}(t)$



Minh họa biến phân của hàm $\boldsymbol{x}(t)$

* Biến phân của phiếm hàm:

$$\delta J(\boldsymbol{x}) = \lim_{\|\delta\boldsymbol{x}\|\to 0} \Delta J(\boldsymbol{x}) = \lim_{\|\delta\boldsymbol{x}\|\to 0} [J(\boldsymbol{x}+\delta\boldsymbol{x}) - J(\boldsymbol{x})]$$

Thí dụ tính biến phân phiếm hàm

- Cho phiếm hàm: $J(x)=\int_0^1 x^2(t)dt$
- Biến phân của phiếm hàm được tính như sau:

$$\Delta J[x(t)] = J(x+\delta x) - J(x) = \int_0^1 (x+\delta x)^2 dt - \int_0^1 (x)^2 dt$$

$$= \int_0^1 [x^2 + 2x\delta x + (\delta x)^2]dt - \int_0^1 (x)^2 dt = \int_0^1 [2x\delta x + (\delta x)^2]dt$$

$$\Rightarrow \delta J(x) = \lim_{\|\delta x\|\to 0} \Delta J(x) = \lim_{\|\delta x\|\to 0} \int_0^1 [2x\delta x + (\delta x)^2]dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta J(x) = \int_0^1 [2x\delta x]dt}$$

Công thức tính biến phân phiếm hàm dạng tích phân

★ Cho phiếm hàm dạng tích phân tổng quát:

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x})dt$$

★ Biến phân của phiếm hàm dạng tích phân được tính như sau:

$$\delta J(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial L(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right] \delta \boldsymbol{x} \right\} dt$$

Biến phân phiếm hàm bài toán tối ưu động không ràng buộc

- Phiếm hàm: $J(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt$
- Biến phân phiếm hàm:

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \delta\boldsymbol{x} + \frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \delta\dot{\boldsymbol{x}} \right] dt$$

- Chú ý rằng: $\delta\boldsymbol{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \delta\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)d\tau + \delta\boldsymbol{x}(t_0)$

$$\delta\boldsymbol{x}(t_0) = \delta\boldsymbol{x}(t_f) = 0$$

- Thực hiện biến đổi tích phân, suy ra:

$$\boxed{\delta J = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} \right] \delta\boldsymbol{x} dt}$$

Điều kiện cần để phiếm hàm đạt cực trị cục bộ

★ Điều kiện cần để phiếm hàm $J(\boldsymbol{x})$ đạt cực trị cục bộ tại $\boldsymbol{x}^*(t)$ là biến phân của $J(\boldsymbol{x})$ phải bằng 0 tại $\boldsymbol{x}^*(t)$

$$\delta J(\boldsymbol{x}) = 0\Big|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^*}$$

⇒ ĐK cần để bài toán tối ưu động không ràng buộc có cực trị:

$$\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = 0$$

(phương trình Euler-Lagrange)

★ Trường hợp đặc biệt khi *L* không phụ thuộc tường minh vào *t*, dạng đơn giản của pt Euler-Lagrange là:

$$L - \dot{\boldsymbol{x}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = c \qquad (c \text{ là hằng số})$$

Tối ưu hóa động không ràng buộc – Thí dụ 1

★ Tìm hàm $x(t)$ sao cho : $J(x) = \int_0^{\pi/2} [x^2(t) - \dot{x}^2(t)]dt \to \min$

Với điều kiện biên: $x(0) = 1, x(\pi/2) = 3$

★ ***Giải:***

★ Theo đề bài, ta có: $L = x^2 - \dot{x}^2$

★ Phương trình Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \quad \Rightarrow 2x - \frac{d}{dt}\left(-2\dot{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$$

★ Lời giải tổng quát: $x(t) = C_1 \sin t + C_2 \cos t$

★ Thay điều kiện biên, suy ra: $C_1 = 3, C_2 = 1$

★ Kết luận: $x^*(t) = 3\sin t + \cos t$

Tối ưu hóa động không ràng buộc – Thí dụ 2

★ Tìm hàm $x(t)$ sao cho phiếm hàm dưới đây đạt cực tiểu:

$$J(x)=\int_0^2 \sqrt{1+\dot{x}^2(t)}\,dt \rightarrow \min \quad \text{với ĐK biên: } x(0)=1,\, x(2)=0$$

★ ***Giải:***

★ Phương trình Euler-Lagrange: $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right)=0 \quad \Rightarrow \frac{\ddot{x}\sqrt{1+\dot{x}^2}-\dot{x}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\dot{x}\ddot{x}}{1+\dot{x}^2}=0 \quad \Rightarrow \ddot{x}=0$$

★ Lời giải tổng quát: $x(t)=C_1t+C_2$

★ Thay điều kiện biên, suy ra: $C_1=-\dfrac{1}{2}, C_2=1$

★ Kết luận: $x^*(t)=-\dfrac{1}{2}t+1$

Tối ưu hóa động có ràng buộc

★ Bài toán tối ưu động có ràng buộc: tìm vector hàm $\boldsymbol{x}(t)$ xác định trên đoạn $[t_0, t_f]$ sao cho phiếm hàm $J(\boldsymbol{x})$ đạt cực tiểu:

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt \to \min$$

với điều kiện ràng buộc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = 0$

và điều kiện biên: $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$

trong đó: $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t) \end{bmatrix}^T \in \Re^n$

$$L : \Re^n \times \Re^n \times \Re \to \Re$$

$$\boldsymbol{f} : \Re^n \times \Re^n \times \Re \to \Re^p$$

Hàm Hamilton và điều kiện cần để có cực trị

★ Định nghĩa hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\lambda},t)=L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)+\boldsymbol{\lambda}^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)$$

trong đó $\lambda(t)\in\Re^p$ là vector hàm, gọi là thừa số Larrange

★ Do $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)=0$ nên cực tiểu của $J(\boldsymbol{x})=\int_{t_0}^{t_1}L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},t)dt$

cũng chính là cực tiểu của $\bar{J}(\boldsymbol{x})=\int_{t_0}^{t_1}H(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\lambda},t)dt$

$\Rightarrow$ tìm cực tiểu không ràng buộc phiếm hàm $\bar{J}(\boldsymbol{x})$

★ Điều kiện cần để phiếm hàm $\bar{J}(\boldsymbol{x})$ có cực trị là:

$$\frac{\partial H(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\lambda},t)}{\partial \boldsymbol{x}}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{\lambda},t)}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}=0$$

(PT Euler-Lagrange của bài toán tối ưu động có ràng buộc)

Tối ưu hóa động có ràng buộc dạng tích phân

- ★ Bài toán tối ưu động có ràng buộc: tìm vector hàm $\boldsymbol{x}(t)$ xác định trên đoạn $[t_0, t_f]$ sao cho phiếm hàm $J(\boldsymbol{x})$ đạt cực tiểu:

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt \rightarrow \min$$

  với điều kiện ràng buộc $\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt = \boldsymbol{q}$

  và điều kiện biên: $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$

- ★ Hàm Hamilton và phương trình Euler-Lagrange trong trường hợp ràng buộc tích phân như sau:
  - ➢ Hàm Hamilton: $H(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$
  - ➢ Phương trình Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{\partial H(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}, t)}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = 0}$$

Trình tự giải bài toán tối ưu động có ràng buộc

★ ***Bước 1:*** Xác định hàm mục tiêu, đ.kiện ràng buộc và điều kiện biên:

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt$$

Đ.kiện ràng buộc $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = 0$ hoặc $\int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)dt = \boldsymbol{q}$

Điều kiện biên $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ và $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$

★ ***Bước 2:*** Thành lập hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}, t) = L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$$

★ ***Bước 3:*** Viết phương trình Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial H(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\lambda}, t)}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}} = 0$$

★ ***Bước 4:*** Tìm nghiệm PT Euler-Lagrange thỏa điều kiện ràng buộc và điều kiện biên

Tối ưu hóa động có ràng buộc – Thí dụ 1

★ Tìm hàm $x(t)$ sao cho phiếm hàm dưới đây đạt cực tiểu:

$$J(x) = \int_0^4 \dot{x}^2(t)dt \to \min$$

với điều kiện ràng buộc: $\int_0^4 x(t)dt = 3$

và điều kiện biên: $x(0) = 0, x(4) = 0$

★ ***Giải:***

★ Hàm Hamilton:

$$H(x,\dot{x},\lambda,t) = L(x,\dot{x},t) + \lambda f(x,\dot{x},t)$$

$$\Rightarrow H(x,\dot{x},\lambda,t) = \dot{x}^2(t) + \lambda x(t)$$

Tối ưu hóa động có ràng buộc – Thí dụ 1

★ Phương trình Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial H(x,\dot{x},\lambda,t)}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H(x,\dot{x},\lambda,t)}{\partial \dot{x}}=0$$

$$\Rightarrow \lambda-\frac{d}{dt}\{2\dot{x}(t)\}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda-2\ddot{x}(t)=0 \qquad (1)$$

★ Tìm nghiệm phương trình Euler-Lagrange:

$$(1) \Rightarrow \ddot{x}(t)=\frac{\lambda}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}(t)=\frac{\lambda}{2}t+c_1$$

$$\Rightarrow x(t)=\frac{\lambda}{4}t^2+c_1t+c_2$$

Tối ưu hóa động có ràng buộc – Thí dụ 1

★ Xác định các hằng số dựa vào điều kiện ràng buộc và điều kiện biên:

$$x(0) = \frac{\lambda}{4}.0 + c_1.0 + c_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} & x(4) = 4\lambda + 4c_1 = 0 \\ & \int_0^4 x(t)dt = \left[\frac{\lambda}{12}t^3 + \frac{c_1}{2}t^2\right]_0^4 = \frac{16\lambda}{3} + 8c_1 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{9}{8} \\ \lambda = -\dfrac{9}{8} \end{cases}$$

★ Kết luận: $\boxed{x^*(t) = -\dfrac{9}{32}t^2 + \dfrac{9}{8}t}$

Tối ưu hóa động có ràng buộc – Thí dụ 2

- Tìm vector hàm $\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$ sao cho phiếm hàm dưới đây đạt cực tiểu:

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_0^2 \left[5(x_1 - 1)^2 + x_2^2\right] dt \to \min$$

với điều kiện ràng buộc: $f(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2 = 0$

và điều kiện biên: $x_1(0) = 0; x_1(2) = 1$

- ***Giải:***

- Hàm Hamilton:

$$H(x, \dot{x}, \lambda, t) = L(x, \dot{x}, t) + \lambda f(x, \dot{x}, t)$$

$$\Rightarrow H(x, \dot{x}, \lambda, t) = [5(x_1 - 1)^2 + x_2^2] + \lambda(\dot{x}_1 + 2x_1 - x_2)$$

Tối ưu hóa động có ràng buộc – Thí dụ 2

★ Phương trình Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_1} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 10(x_1 - 1) + 2\lambda - \dot{\lambda} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_2 - \lambda = 0 \qquad (2)$$

★ Tìm nghiệm phương trình Euler-Lagrange thỏa điều kiện ràng buộc:

$$(2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 2x_2 \\ \dot{\lambda} = 2\dot{x}_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Thay (3) vào (1): $\quad 10(x_1 - 1) + 4x_2 - 2\dot{x}_2 = 0 \qquad (4)$

Từ điều kiện ràng buộc, suy ra: $\begin{cases} x_2 = \dot{x}_1 + 2x_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 \end{cases} \qquad (5)$

Thay (5) vào (4): $10(x_1 - 1) + 4(\dot{x}_1 + 2x_1) - 2(\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1) = 0$

$$\Rightarrow \quad 2\ddot{x}_1 - 18x_1 + 10 = 0 \qquad (6)$$

Tối ưu hóa động có ràng buộc – Thí dụ 2

Nghiệm tổng quát của phương trình (6)

$$x_1(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t} + 0.556$$

Thay điều kiện biên $x_1(0) = 0; x_1(2) = 1$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 0.556 = 0 \\ 0.0025C_1 + 403.42C_2 + 0.556 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0.5549 \\ C_2 = 0.0011 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = 0.5549e^{-3t} + 0.0011e^{3t} + 0.556 \qquad (7)$$

Thay (7) vào (5):

$$x_2 = \dot{x}_1 + 2x_1$$

$$\Rightarrow x_2(t) = -0.5549e^{-3t} + 0.0055e^{3t} + 1.112$$

ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU LIÊN TỤC DÙNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN PHÂN

Bài toán điều khiển tối ưu liên tục

- Cho đối tượng: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t))$ (*)

  trong đó: $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$: vector trạng thái

  $\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)]^T$: vector tín hiệu ĐK

  Trạng thái đầu: $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, trạng thái cuối: $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$

- Bài toán điều khiển tối ưu: tìm tín hiệu ĐK $\boldsymbol{u}(t)$ sao cho:

$$J(\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,dt \rightarrow \min$$

- Nghiệm $\boldsymbol{x}^*(t)$ của phương trình vi phân (*) ứng với tín hiệu điều khiển tối ưu $\boldsymbol{u}^*(t)$ gọi là quỹ đạo trạng thái tối ưu.

Phân loại bài toán điều khiển tối ưu

- Khoảng thời gian xảy ra quá trình tối ưu là t_f, có thể phân loại:
  - Bài toán tối ưu có t_f cố định, ví dụ:
    - Điều khiển đoàn tàu hỏa giữa 2 ga với lịch trình xác định sao cho năng lượng đoàn tàu tiêu thụ là thấp nhất;
    - Điều khiển quá trình chuyển đổi hóa học trong thời gian cho trước với chi phí thấp nhất
  - Bài toán tối ưu có t_f không cố định, ví dụ:
    - Điều khiển tên lửa lên độ cao xác định với thời gian nhanh nhất
    - Điều khiển tàu biển đi được xa nhất với một nguồn năng lượng cố định cho trước

Phân loại bài toán điều khiển tối ưu (tt)

- Các bài toán điều khiển tối ưu động có trạng thái đầu $\boldsymbol{x}_0$ cho trước. Trạng thái cuối quá trình tối ưu là $\boldsymbol{x}_f=\boldsymbol{x}(t_f)$, có thể phân loại:
  - Điểm cuối tự do, ví dụ:
    - Điều khiển tên lửa lên độ cao lớn nhất;
    - Điều khiển tàu biển đi được xa nhất với một nguồn năng lượng cố định cho trước
  - Điểm cuối bị ràng buộc, ví dụ:
    - Điều khiển tên lửa vào quỹ đạo với thời gian nhanh nhất.
  - Điểm cuối cố định cho trước, ví dụ:
    - Điều khiển ghép nối các con tàu
    - Điều khiển hệ thống về trạng thái cân bằng

Giải bài toán ĐK toán tối ưu dùng PP biến phân

- Bài toán ĐK tối ưu liên tục có thể phát biểu lại như sau:

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} J(\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,dt$$

  với điều kiện $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$

  trong đó t_0, t_f, và $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ cho trước

- Kết hợp điều kiện ràng buộc vào hàm mục tiêu dùng hàm Lagrange:

$$\bar{J}(\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_0^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) + \lambda^T(t)\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) - \dot{\boldsymbol{x}}(t)\right]dt$$

Giải bài toán ĐK toán tối ưu dùng PP biến phân

★ Định nghĩa hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t,\lambda) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \lambda^T(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

$$\Rightarrow \quad \bar{J}(\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} [H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t,\lambda) - \lambda^T(t)\dot{\boldsymbol{x}}]dt$$

$\Rightarrow$ Cần tìm $\boldsymbol{u}^*(t)$ sao cho: $\delta\bar{J}(\boldsymbol{u}) = 0\Big|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*}$

★ Biến phân của phiếm hàm mục tiêu:

$$\delta\bar{J} = \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T\right)\delta\boldsymbol{x}\right]_{t=t_f} + \left[\boldsymbol{\lambda}^T\delta\boldsymbol{x}\right]_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t)\right)\delta\boldsymbol{x} + \frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{u}}\delta\boldsymbol{u}\right]dt$$

Điều kiện cần để có lời giải bài toán điều khiển tối ưu

★ Chú ý là $\delta \boldsymbol{x}(t_0) = 0$ do điều kiện đầu cố định; $\delta \boldsymbol{x}(t_f) = 0$ nếu điểm cuối ràng buộc, $\delta \boldsymbol{x}(t_f) \neq 0$ nếu điểm cuối tự do

★ Để $\delta \bar{J}(\boldsymbol{u}) = 0$ với mọi $\delta \boldsymbol{u}$ cần có các điều kiện:

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = 0 \qquad \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} \qquad \lambda(t_f) = \frac{\partial \phi(t_f)}{\partial \boldsymbol{x}}$$

★ ***Lưu ý:***

- Điều kiện $\lambda(t_f) = \dfrac{\partial \phi(t_f)}{\partial \boldsymbol{x}}$ chỉ cần đối với bài toán điểm cuối tự do.
- $\boldsymbol{\lambda}(t)$ được gọi là đồng trạng thái của hệ thống
- $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$ được gọi là phương trình đồng trạng thái

Trình tự giải bài toán điều khiển tối ưu

★ ***Bước 1:*** Viết PTTT mô tả đối tượng: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$

★ ***Bước 2:*** Viết hàm mục tiêu và ĐK biên từ yêu cầu thiết kế

- Bài toán điểm cuối tự do:

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} J(\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt$$

Điều kiện đầu: $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

- Bài toán <u>điểm cuối ràng buộc</u>:

$$\min_{\boldsymbol{u}(t)} J(\boldsymbol{u}) = \int_{t_0}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt$$

Điều kiện đầu $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ và <u>điều kiện cuối</u> $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$

Trình tự giải bài toán điều khiển tối ưu

- ***Bước 3:*** Thành lập hàm Hamilton: $H(t) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$
- ***Bước 4:*** Viết điều kiện cần để có lời giải tối ưu:

PT trạng thái: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)$

PT đồng trạng thái: $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}$

Điều kiện dừng: $\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = 0$

Điều kiện đầu: $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

Điều kiện cuối: $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$ (Bài toán điểm cuối cố định)

hoặc $\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \dfrac{\partial \phi(t_f)}{\partial \boldsymbol{x}}$ (Bài toán điểm cuối tự do)

- ***Bước 5:*** Giải hệ phương trình ở trên sẽ tìm được $\boldsymbol{u}^*(t)$ và $\boldsymbol{x}^*(t)$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 1

- Đặc tính động học nhiệt độ lò sấy cho bởi phương trình:

$$\dot{y}(t) = -2(y(t) - y_a) + u(t)$$

trong đó $y(t)$ là nhiệt độ lò sấy và $y_a = 25^0$C là nhiệt độ môi trường; $u(t)$ là cường độ dòng nhiệt cấp lò sấy và t là thời gian (giờ)

- ***Yêu cầu:*** Thiết kế luật điều khiển $u(t)$ điều khiển nhiệt độ nhiệt độ lò sấy sao cho sau một giờ đạt đến càng gần nhiệt độ đặt $y_d = 75^0$C càng tốt và tối thiểu năng lượng tiêu tốn.

- ***Giải:***

- Bước 1: Thành lập phương trình trạng thái:

Đặt biến trạng thái: $x(t) = y(t) - y_a$

$\Rightarrow$ Phương trình trạng thái của lò sấy là: $\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$

$\Rightarrow$ Trạng thái cuối mong muốn: $x_f = x(1) = y(1) - y_a = y_d - y_a = 50$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 1 (tt)

✶ Bước 2: Xác định hàm mục tiêu và điều kiện biên:

Theo yêu cầu thiết kế là trạng thái cuối $x(t_f)$ càng gần x_f =50 càng tốt, đồng thời tối thiểu năng lượng tiêu tốn, suy ra hàm mục tiêu:

$$J(u) = \frac{1}{2}\rho[x(t_f) - x_f]^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2(t)dt \rightarrow \min$$

(Đây là bài toán tối ưu điểm cuối tự do)

trong đó ρ là trọng số tùy chọn (muốn trạng thái cuối càng gần x_f thì chọn ρ càng lớn)

Điều kiện đầu: $x_0 = 0; t_f = 1$

✶ Bước 3: Định nghĩa hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda,t) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \lambda(t) f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

$$\Rightarrow \quad H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda,t) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda(t)[-2x(t) + u(t)]$$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 1 (tt)

★ Bước 4: Điều kiện cần để có nghiệm tối ưu

PT trạng thái: $\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$ (1)

PT đồng trạng thái: $\dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}(t) = 2\lambda(t)$ (2)

Điều kiện dừng: $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) + \lambda(t) = 0$ (3)

Điều kiện đầu: $x(t_0) = x_0 = 0$ (4)

Điều kiện cuối: $\lambda(t_f) = \dfrac{\partial \phi(t_f)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \lambda(1) = \rho(x(1) - 50)$ (5)

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 1 (tt)

- Bước 5: Giải phương trình vi phân
  - Nghiệm phương trình (2):

$$\lambda(t) = C_1 e^{2t} \tag{6}$$

  - Thay (6) vào (3):

$$u(t) = -C_1 e^{2t} \tag{7}$$

  - Thay (7) vào (1), ta được:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) - C_1 e^{2t} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{C_1}{4} e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 1 (tt)

- Xác định các hằng số dựa vào điều kiện biên:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \lambda(1) = \rho\big(x(1) - 50\big) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{C_1}{4} + C_2 = 0 \\ C_1 e^2 = \rho\left(-\dfrac{C_1}{4} e^2 + C_2 e^{-2} - 50\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{50\rho}{-e^2 + \rho(-e^2 + e^{-2})/4} \\ C_2 = \dfrac{12.5\rho}{-e^2 + \rho(-e^2 + e^{-2})/4} \end{cases}$$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 1 (tt)

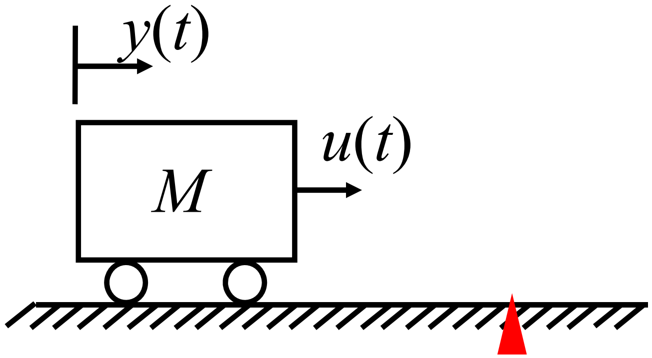
- Kết luận: Tín hiệu điều khiển và quỹ đạo trạng thái tối ưu là:

$$u(t) = -C_1 e^{2t}$$

$$x(t) = -\frac{C_1}{4} e^{2t} + C_2 e^{-2t}$$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 2

- Cho hệ thống xe như hình vẽ. Quan hệ vào ra của hệ thống mô tả bởi phương trình vi phân:



$$M\ddot{y}(t) = u(t)$$

trong đó $u(t)$ là tín hiệu vào (lực điều khiển); $y(t)$ là tín hiệu ra (vị trí xe); $m = 0.5$kg là khối lượng xe

- Bài toán đặt ra là thiết kế luật điều khiển $u(t)$ để điều khiển xe từ trạng thái đứng yên tại gốc tọa độ đến trạng thái đứng yên tại vị trí cách gốc tọa độ 10cm trong khoảng thời gian 1 giây, đồng thời tối thiểu năng lượng tiêu tốn.

- ***Yêu cầu:***
  - Hãy thành lập bài toán tối ưu cho yêu cầu thiết kế trên.
  - Giải bài toán tìm tín hiệu điều khiển tối ưu

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 2

★ ***Giải:***

★ Bước 1: Viết phương trình trạng thái của đối tượng

➢ Đặt các biến trạng thái $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$

➢ Phương trình trạng thái mô tả đối tượng

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{1}{M} u(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2u(t) \end{cases}$$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 2

- Bước 2: Xác định hàm mục tiêu và điều kiện biên:
  - Yêu cầu thiết kế là trạng thái xe tại thời điểm $t_f = 1$ đứng yên tại vị trí 10cm (điểm cuối ràng buộc) đồng thời tối thiểu năng lượng tiêu tốn, suy ra hàm mục tiêu:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt \to \min$$

(Bài toán tối ưu điểm cuối ràng buộc)

  - Từ dữ kiện của đề bài, có thể xác định được điều kiện biên:

Điều kiện đầu: $x_1(0) = y(0) = 0, x_2(0) = \dot{y}(0) = 0$

Điều kiện cuối: $x_1(1) = y(1) = 10, x_2(1) = \dot{y}(1) = 0$

- Bước 3: Thành lập hàm Hamilton:

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda,t) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$$

$$\Rightarrow \quad H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\lambda,t) = \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 2u(t)$$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 2 (tt)

✶ Bước 4: Điều kiện cần để có nghiệm tối ưu

PT trạng thái:
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2u(t) \end{cases} \qquad (1)$$

PT đồng trạng thái:
$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \end{cases} \qquad (2)$$

Điều kiện dừng:
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) + 2\lambda_2(t) = 0 \qquad (3)$$

Điều kiện đầu:
$$\boldsymbol{x}(0) = [0;0]^T \qquad (4)$$

Điều kiện cuối:
$$\boldsymbol{x}(1) = [10;0]^T \qquad (5)$$

★ Bước 5: Giải phương trình vi phân

- Nghiệm phương trình (2): $\begin{cases} \lambda_1(t) = C_1 \\ \lambda_2(t) = -C_1 t + C_2 \end{cases}$ (6)

- Nghiệm phương trình (3):

$$u(t) = -2\lambda_2(t) = 2C_1 t - 2C_2 \quad (7)$$

- Thay (7) vào (1), ta được:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2u(t) = 4C_1 t - 4C_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = \frac{2}{3}C_1 t^3 - 2C_2 t^2 + C_3 t + C_4 \\ x_2(t) = 2C_1 t^2 - 4C_2 t + C_3 \end{cases} \quad (9)$$

Điều khiển tối ưu – Thí dụ 2 (tt)

- Thay điều kiện biên:

$$\begin{cases} x_1(0) = C_4 = 0 \\ x_2(0) = C_3 = 0 \\ x_1(1) = \frac{2}{3}C_1 - 2C_2 = 10 \\ x_2(1) = 2C_1 - 4C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_1 = -30 \\ C_2 = -15 \end{cases}$$

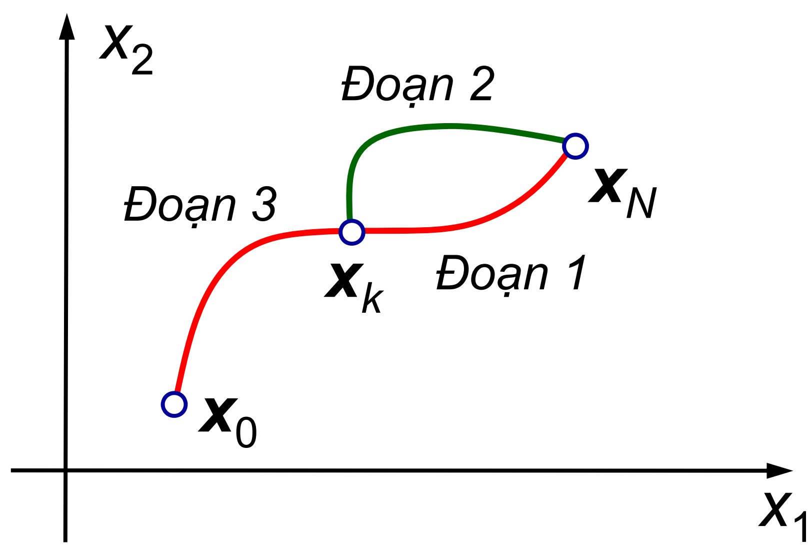
Kết luận: Tín hiệu điều khiển tối ưu là

$$u^*(t) = -60t + 30 \qquad (7)$$

PHƯƠNG PHÁP QUI HOẠCH ĐỘNG

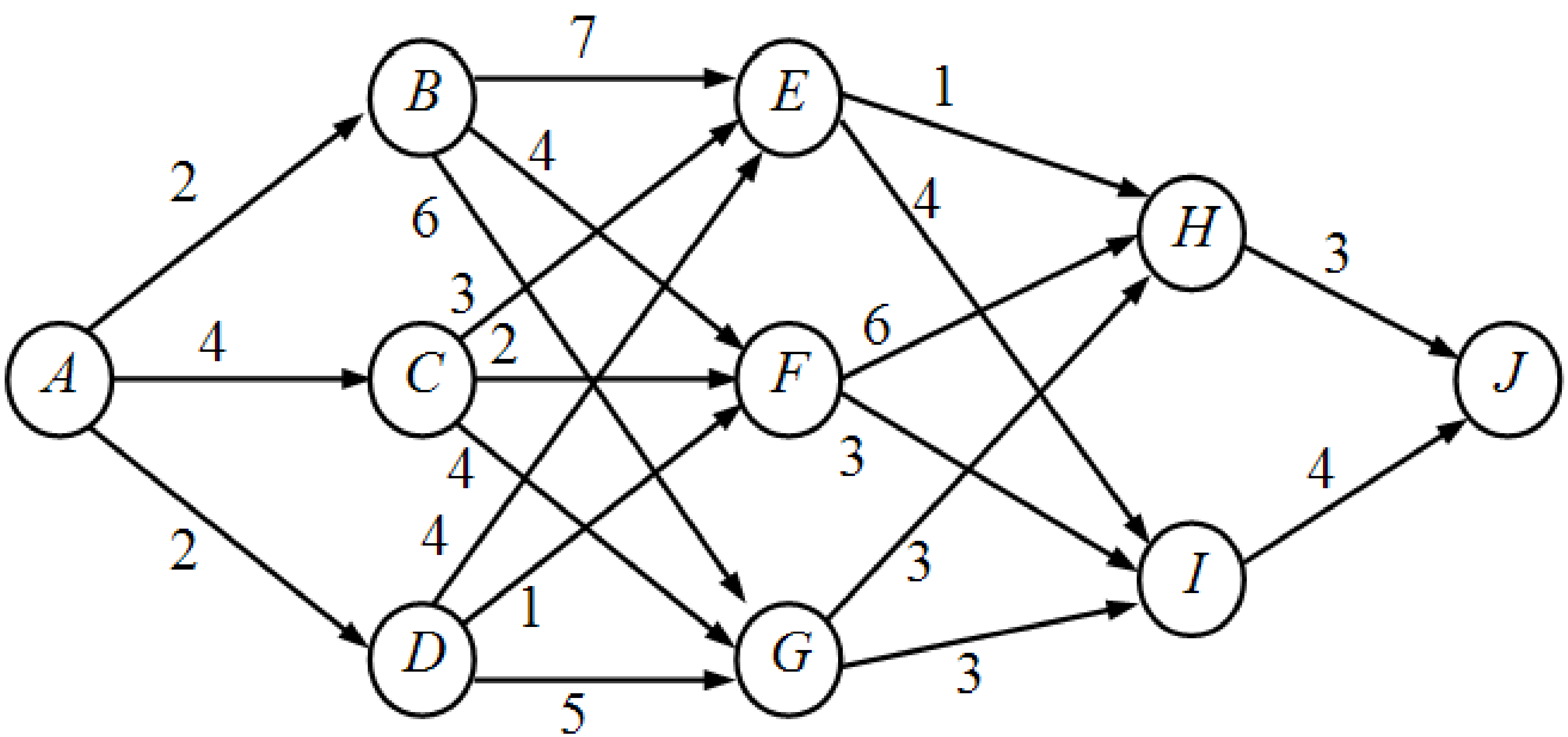
Nguyên lý tối ưu Bellman

- Phương pháp qui hoạch động (**DP – Dynamic Programing**) do Bellman đề xuất (1957)
- Phương pháp qui hoạch động là một thuật toán xác định dãy giá trị $\{\boldsymbol{u}(k)\}$ tối ưu để tối thiểu chỉ tiêu chất lượng J.
- ***Nguyên lý tối ưu:*** *Mỗi đoạn cuối của quỹ đạo trạng thái tối ưu cũng là một quỹ đạo trạng thái tối ưu.*



Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP

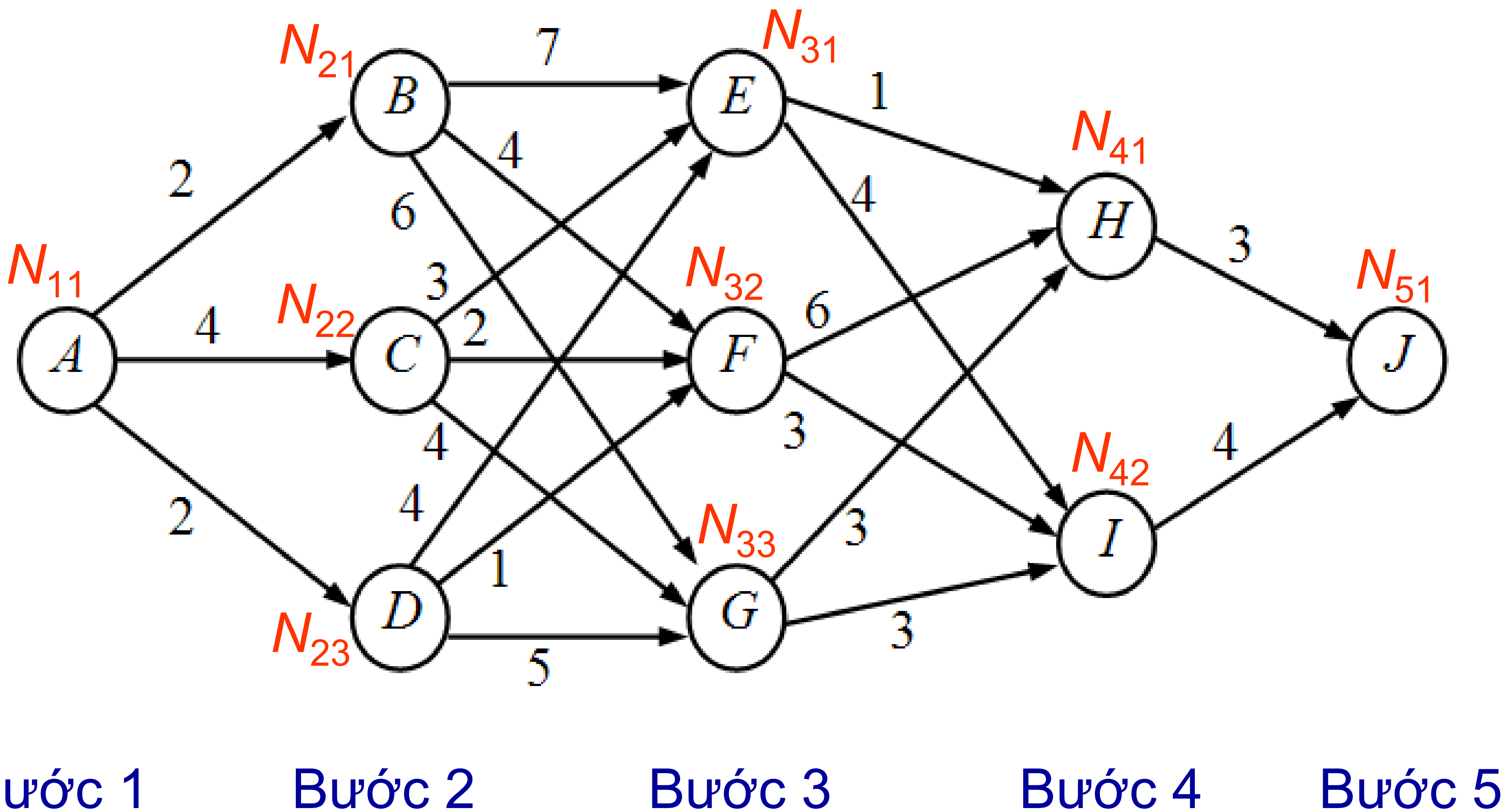
- Tìm đường ngắn nhất đi từ *A* đến *J*, cho biết mạng lưới đường như hình vẽ.



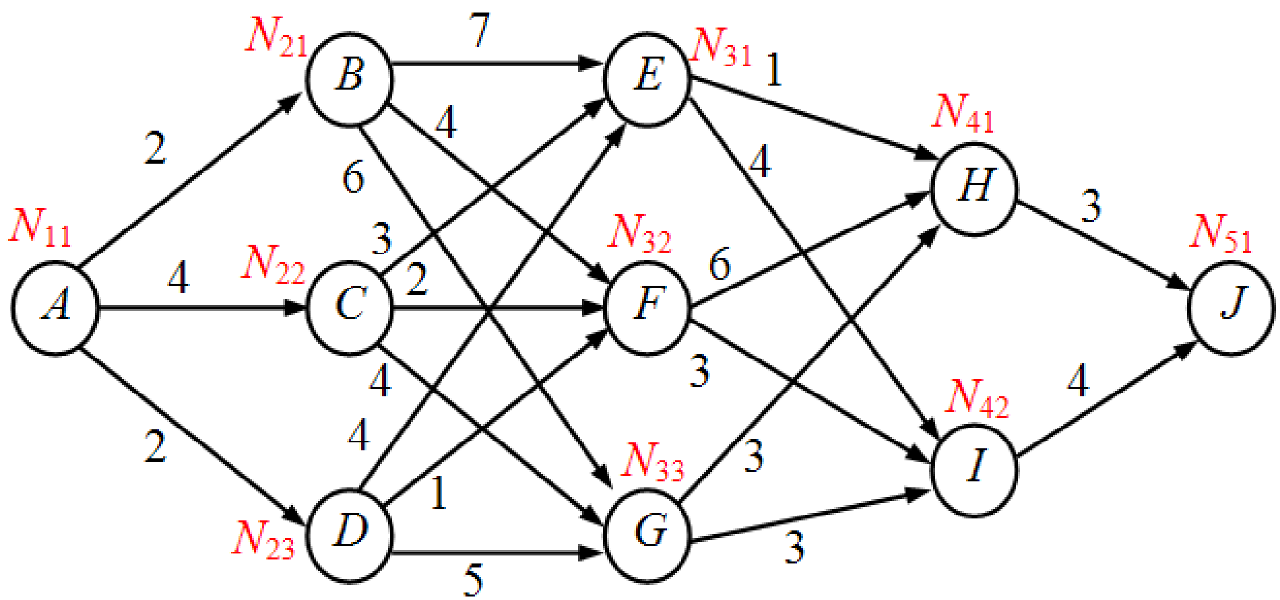
- ***Nguyên lý tối ưu Bellman:*** tìm đường ngắn nhất ngược từ nút đích đến nút đầu.

Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP

- Phân bài toán tìm đường thành các bước từ 1 đến 5
- Ký hiệu N_{ki} là nút thứ i ở bước k

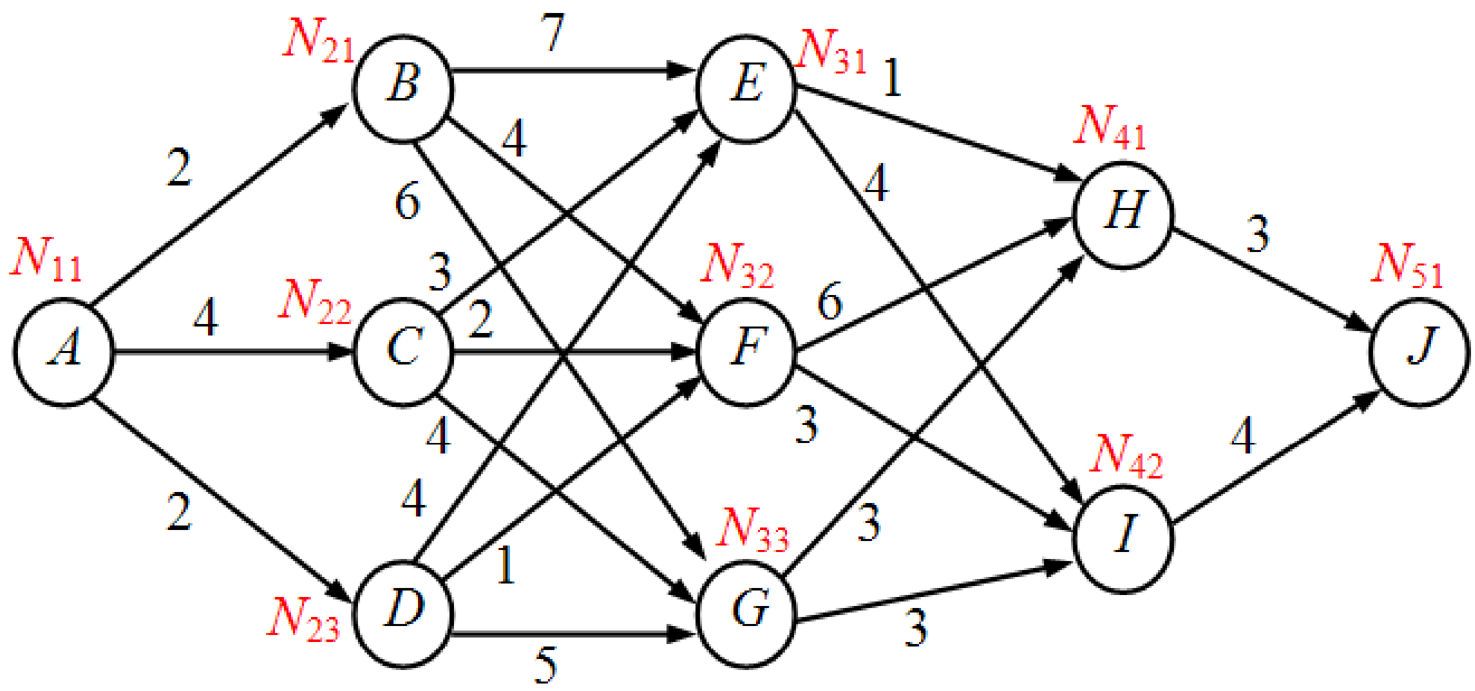


Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP



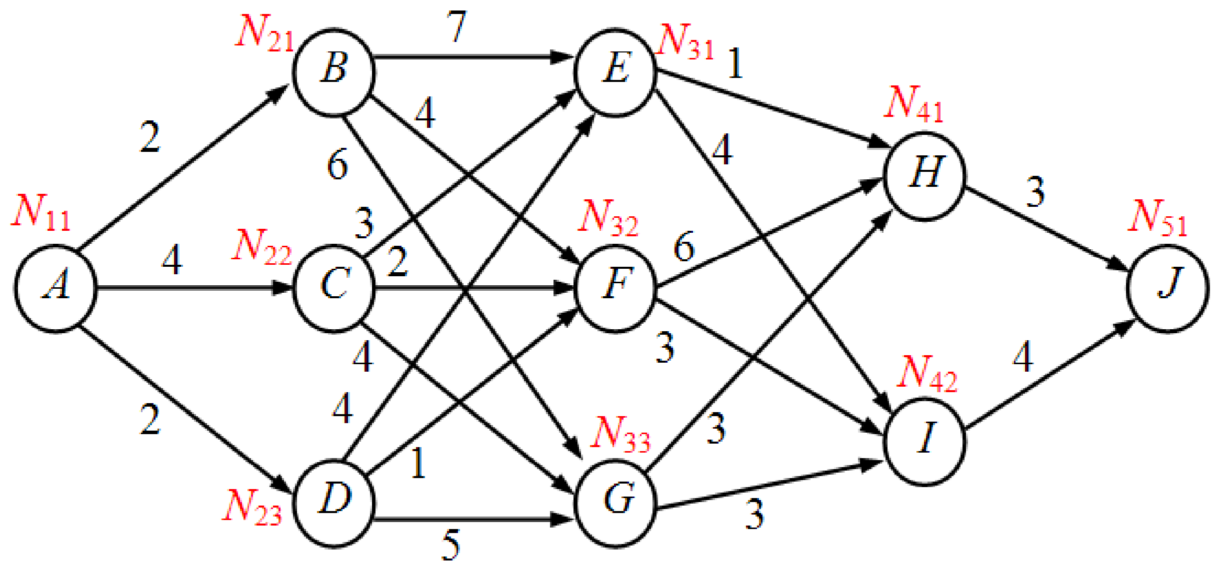
- Ký hiệu:
  - $J_k^*(N_{ki})$ là khoảng cách ngắn nhất từ nút N_{ki} đến nút đích ***J***
  - $d(N_{ki}, N_{k+1,j})$ là khoảng cách từ nút N_{ki} đến nút $N_{k+1,j}$
- Phương trình Bellman: $J_k^*(N_{ki}) = \min_j \left\{ d(N_{ki}, N_{k+1,j}) + J_{k+1}^*(N_{k+1,j}) \right\}$
- $J_1^*(N_{11})$ là khoảng cách ngắn nhất từ nút đầu đến nút đích.

Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP



- Giải PT Bellman qua 2 vòng:
  - Vòng ngược: đi ngược từ nút cuối về nút đầu tìm đoạn đường cuối ngắn nhất
  - Vòng xuôi: đi từ nút đầu đến nút cuối → đường đi tối ưu

Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP



★ Vòng ngược:

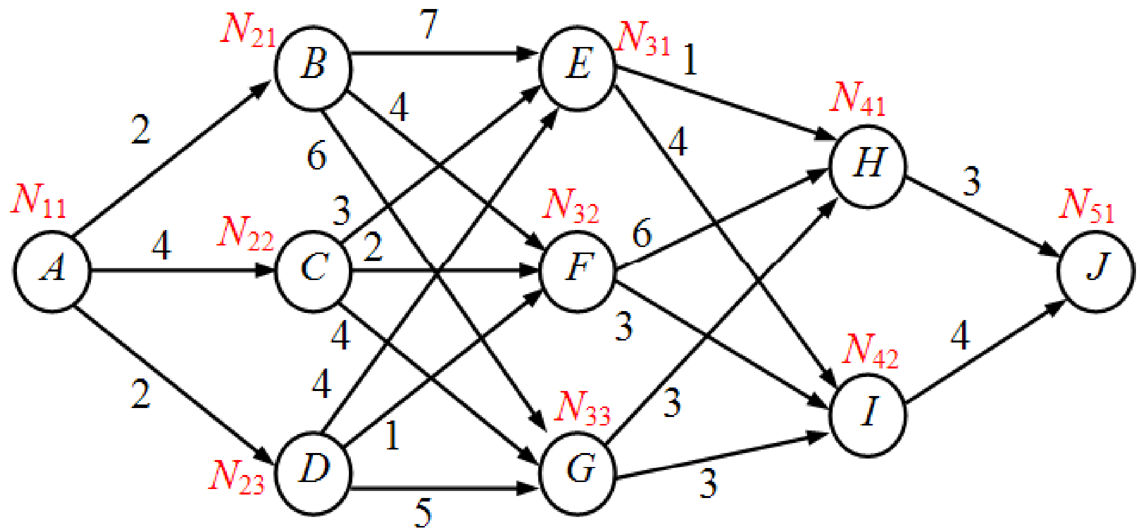
- Bước 5: bắt đầu từ nút đích $J_5^*(N_{51}) = 0$
- Bước 4: đoạn đường ngắn nhất từ nút N_{41} hoặc N_{42} đến đích:

$$J_4^*(N_{41}) = d(N_{41}, N_{51}) + J_5^*(N_{51}) = 3$$

$$J_4^*(N_{42}) = d(N_{42}, N_{51}) + J_5^*(N_{51}) = 4$$

Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP (tt)

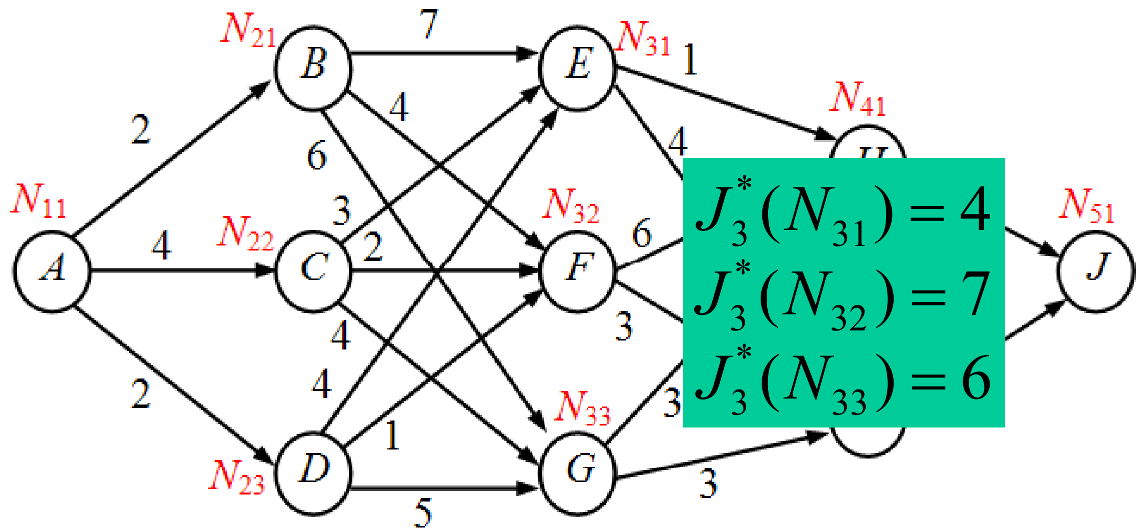
- Bước 3: có nhiều lựa chọn, từ nút N_{3i} phải chọn đường đi đến đích qua nút N_{4j} nào tối ưu đoạn quỹ đạo cuối $J_3^*(N_{3i})$?



$$J_3^*(N_{3i}) = \min_{j}\left\{d(N_{3i}, N_{4j}) + J_4^*(N_{4j})\right\}$$

Từ nút N_{3i}	$d(N_{3i}, N_{4j}) + J_4^*(N_{4j})$		$J_3^*(N_{3i})$	Quyết định đi đến
	N_{41}	N_{42}		
N_{31}	1+3=4	4+4=8	4	N_{41} (H)
N_{32}	6+3=9	3+4=7	7	N_{42} (I)
N_{33}	3+3=6	3+4=7	6	N_{41} (H)

- Bước 2: tìm đường tối ưu từ nút N_{2i} đến nút đích N_{51} (tức nút J), sử dụng kết quả tối ưu đoạn cuối tìm được ở bước 3

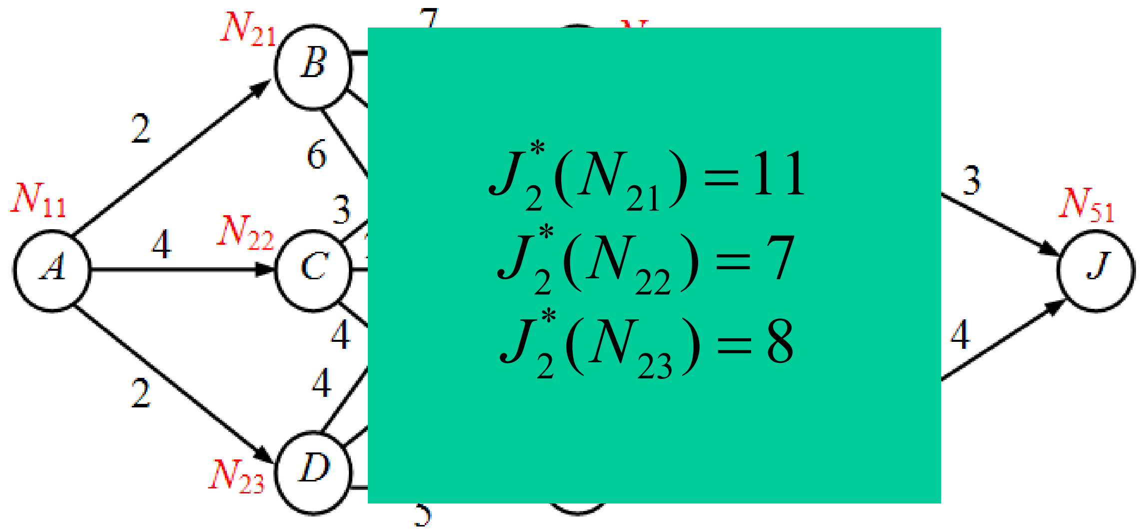


$$J_2^*(N_{2i}) = \min_j \left\{ d(N_{2i}, N_{3j}) + J_3^*(N_{3j}) \right\}$$

Từ nút N_{2i}	$d(N_{2i}, N_{3j}) + J_3^*(N_{3j})$			$J_2^*(N_{2i})$	Quyết định đi đến
	N_{31}	N_{32}	N_{33}		
N_{21}	7+4=11	4+7=11	6+6=12	11	N_{31} *hoặc* N_{32}
N_{22}	3+4=7	2+7=9	4+6=10	7	N_{31}
N_{23}	4+4=8	1+7=8	5+6=11	8	N_{31} *hoặc* N_{32}

Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP (tt)

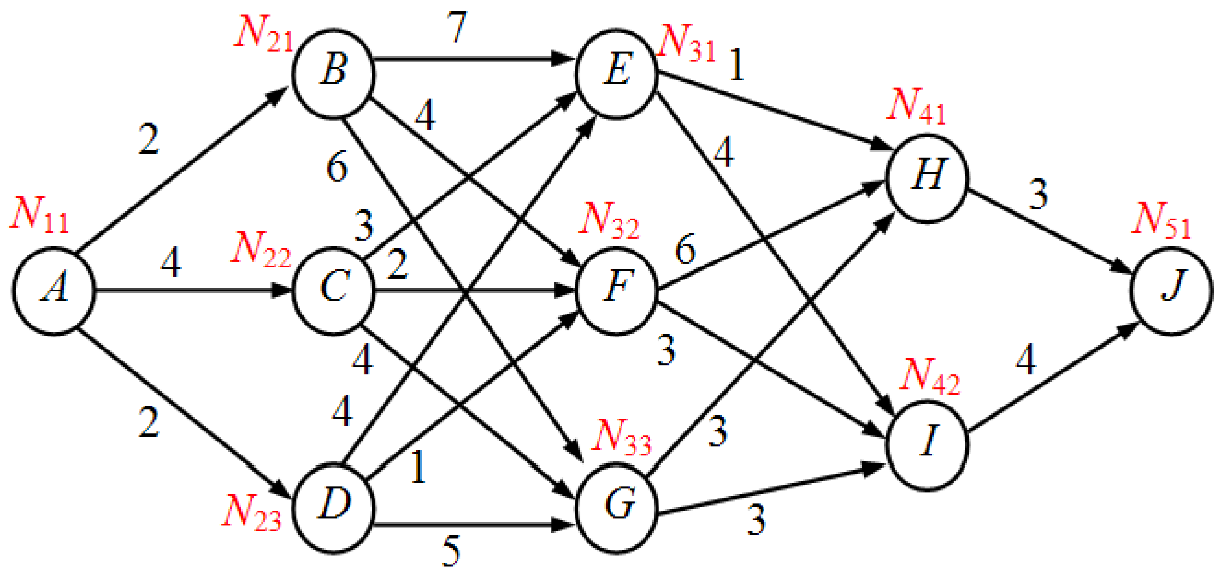
- Bước 1: tìm đường tối ưu từ nút N_{11} (tức nút A) đến nút đích N_{51} (tức nút J), sử dụng kết quả tối ưu đoạn cuối tìm được ở bước 2



$$J_1^*(N_{11}) = \min_j \left\{ d(N_{11}, N_{2j}) + J_2^*(N_{2j}) \right\}$$

Từ	$d(N_{11},N_{2j})+J_2^*(N_{2j})$			$J_1^*(N_{11})$	Quyết định đi đến
	N_{21}	N_{22}	N_{23}		
N_{11}	2+11=13	4+7=11	2+8=10	10	N_{23}

Thí dụ tìm đường ngắn nhất dùng DP (tt)



- **Vòng xuôi:** đi từ bước 1 đến bước 5 để rút ra đường đi tối ưu
- **Kết luận:**

Đường đi tối ưu: $N_{11} \rightarrow N_{23} \rightarrow N_{31} \rightarrow N_{41} \rightarrow N_{51}$

hoặc: $N_{11} \rightarrow N_{23} \rightarrow N_{32} \rightarrow N_{42} \rightarrow N_{51}$

Bài toán điều khiển tối ưu động rời rạc

- Cho đối tượng mô tả bởi phương trình sai phân:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)) \qquad (*)$$

trong đó: $\boldsymbol{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)]^T$: vector trạng thái

$\boldsymbol{u}(k) = [u_1(k), u_2(k), \ldots, u_m(k)]^T$: vector tín hiệu điều khiển

- Trạng thái đầu: $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, trạng thái cuối: $\boldsymbol{x}(N) = \boldsymbol{x}_N$
- Bài toán điều khiển tối ưu: tìm tín hiệu $\boldsymbol{u}(k)$ sao cho:

$$J = \phi(N, \boldsymbol{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} L(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}(k)) \rightarrow \min$$

Chú ý: Bài toán tối ưu điểm cuối tự do $\phi(N, \boldsymbol{x}_N) \neq 0$

Bài toán tối ưu điểm cuối cố định $\phi(N, \boldsymbol{x}_N) = 0$

- Ý tưởng giải bài toán ĐK tối ưu rời rạc dùng nguyên lý tối ưu Bellman: tìm kiếm nghiệm $\boldsymbol{u}^*(k)$ phụ thuộc $\boldsymbol{x}^*(k)$ theo chiều ngược hướng quỹ đạo từ điểm cuối $\boldsymbol{x}_N$ đến điểm đầu $\boldsymbol{x}_0$

PP qui hoạch động giải bài toán ĐK tối ưu rời rạc

- Đặt hàm mục tiêu tối ưu cho đoạn quỹ đạo t.thái cuối kể từ điểm $\boldsymbol{x}(k)$

$$J_k^*(\boldsymbol{x}(k)) = \min_{\boldsymbol{u}(k),\ldots,\boldsymbol{u}(N-1)} \left\{ \phi(N,\boldsymbol{x}(N)) + \sum_{i=k}^{N-1} L(\boldsymbol{x}(i),\boldsymbol{u}(i)) \right\}, \qquad (k = \overline{0, N-1})$$

- Biểu diễn $J_k^*(\boldsymbol{x}(k))$ dưới dạng:

$$J_k^*(\boldsymbol{x}(k)) = \min_{\boldsymbol{u}(k),\ldots,\boldsymbol{u}(N-1)} \left\{ L(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)) + \phi(N,\boldsymbol{x}(N)) + \sum_{i=k+1}^{N-1} L(\boldsymbol{x}(i),\boldsymbol{u}(i)) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad J_k^*(\boldsymbol{x}(k)) = \min_{\boldsymbol{u}(k)} \left\{ L(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)) + J_{k+1}^*(\boldsymbol{x}(k+1)) \right\}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{J_k^*(\boldsymbol{x}(k)) = \min_{\boldsymbol{u}(k)} \left\{ L(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)) + J_{k+1}^*(f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k))) \right\}} \quad \text{(PT Bellman)}$$

- Dễ thấy: $J_N^*(\boldsymbol{x}(N)) = \phi(N,\boldsymbol{x}(N))$ và $J_0^*(\boldsymbol{x}(0)) = \min\{J\}$
- Giải N phương trình Bellman theo thứ tự $k = N-1 \rightarrow 0$ sẽ tìm được tín hiệu điều khiển tối ưu.

Trình tự giải bài toán ĐK tối ưu rời rạc dùng DP

- Đối tượng: $$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k))$$
- Yêu cầu thiết kế: Tìm tín hiệu $\boldsymbol{u}^*(k), k=0,1,\ldots,N-1$ điều khiển hệ thống từ trạng thái đầu $\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$ đến trạng thái cuối $\boldsymbol{x}(N)$ sao cho tối thiểu chỉ tiêu chất lượng:

$$J=\phi(N,\boldsymbol{x}_N)+\sum_{k=0}^{N-1}L(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k))\rightarrow\min$$

- ***Bước 1:*** Viết phương trình Bellman:

$$J_k^*(\boldsymbol{x}(k))=\min_{\boldsymbol{u}(k)}\left\{L(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k))+J_{k+1}^*(f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)))\right\}\quad(k=0,1,\ldots,N-1)$$

với $J_N^*(\boldsymbol{x}(N))=\phi(N,\boldsymbol{x}_N)$

- ***Bước 2:*** Giải phương trình Bellman qua 2 vòng:
  - Vòng ngược: $k=N-1\rightarrow 0$ tìm $\boldsymbol{u}^*(k)$ phụ thuộc $\boldsymbol{x}(k)$
  - Vòng thuận: $k=0\rightarrow N-1$ tính cụ thể $\boldsymbol{u}^*(k)$ từ đ/kiện đầu $\boldsymbol{x}_0$

Trình tự giải bài toán ĐK tối ưu rời rạc dùng DP (tt)

- **Vòng ngược:** tìm $\boldsymbol{u}^*(k)$ phụ thuộc $\boldsymbol{x}(k)$ ($k=N-1\to 0$), gồm các bước:

★ Tìm $\boldsymbol{u}^*(N-1)$ phụ thuộc $\boldsymbol{x}(N-1)$ là nghiệm bài toán tối ưu:

$$J^*_{N-1}(\boldsymbol{x}(N-1)) = \min_{\boldsymbol{u}(N-1)} \{L(\boldsymbol{x}(N-1),\boldsymbol{u}(N-1)) + \phi(N,\boldsymbol{x}(N))\}$$

với ràng buộc $f(\boldsymbol{x}(N-1),\boldsymbol{u}(N-1)) = \boldsymbol{x}(N)$

★ Với $k = N-2 \to 0$:tìm $\boldsymbol{u}^*(k)$ phụ thuộc $\boldsymbol{x}(k)$ là nghiệm PT Bellman:

$$J^*_k(\boldsymbol{x}(k)) = \min_{\boldsymbol{u}(k)} \{L(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)) + J^*_{k+1}(f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)))\}$$

với $J^*_{k+1}(.)$ là biểu thức hàm mục tiêu tối ưu tối ưu đoạn quỹ đạo cuối đã tìm được ở bước trước đó.

❖ Chú ý: để tìm $\boldsymbol{u}^*(k)$, áp dụng PP tối ưu tĩnh, giải PT: $\dfrac{\partial J_k(.)}{\partial \boldsymbol{u}(k)} = 0$

Trình tự giải bài toán ĐK tối ưu rời rạc dùng DP (tt)

- **Vòng xuôi:** xác định giá trị cụ thể $\boldsymbol{u}_k^*(k)$. Thực hiện các bước sau đây với k=0,1,2,….N–1:
  - Gán $\boldsymbol{x}(k)$ vào công thức $\boldsymbol{u}^*(k)$ đã tính ở vòng ngược để được giá trị cụ thể của $\boldsymbol{u}^*(k)$
  - Thay $\boldsymbol{u}^*(k)$ vào mô hình toán của đối tượng để tính được trạng thái tối ưu ở thời điểm (k+1)

$$\boldsymbol{x}(k+1) = f(\boldsymbol{x}(k), \boldsymbol{u}^*(k))$$

Điều khiển tối ưu rời rạc dùng DP – Thí dụ 1

- Xét đối tượng là khâu quán tính bậc 1 có mô hình trạng thái:

$$x(k+1)=\frac{1}{2}x(k)+\frac{1}{2}u(k)$$

- Xác định tín hiệu điều khiển tối ưu để điều khiển hệ thống từ trạng thái đầu $x(0)=4$ đến trạng thái cuối $x(4)=0$ sao cho:

$$J=\sum_{k=0}^{3}(x^2(k)+u^2(k))\rightarrow \min$$

- **Giải:**
- Phương trình Bellman:

$$J_k^*(\boldsymbol{x}(k))=\min_{\boldsymbol{u}(k)}\left\{L(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k))+J_{k+1}^*(f(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k)))\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_k^*(x(k))=\min_{u(k)}\left\{x^2(k)+u^2(k)+J_{k+1}^*(0.5x(k)+0.5u(k))\right\}}\quad (k=0\rightarrow 3)$$

với: $J_4^*(x(4))=0$

Điều khiển tối ưu rời rạc dùng DP – Thí dụ 1 (tt)

- **Vòng ngược:** Với $k = 3$:

  Phương trình Bellman:

  $$J_3^*(x(3)) = \min_{u(3)}\left\{x^2(3) + u^2(3)\right\} \qquad \text{(do } J_4^*(x(4)) = 0 \text{)}$$

  Điều kiện ràng buộc: $0.5x(3) + 0.5u(3) = x(4) = 0$

  Lời giải: $u^*(3) = -x(3)$ (để thỏa mãn điều kiện ràng buộc)

  $$\Rightarrow \quad J_3^*(x(3)) = 2x^2(3)$$

Điều khiển tối ưu rời rạc dùng DP – Thí dụ 1 (tt)

- **Vòng ngược:** Với $k = 2$:

Phương trình Bellman:

$$J_2^*(x(2)) = \min_{u(2)} \left\{ x^2(2) + u^2(2) + J_3^*(x(3)) \right\}$$

$$\Rightarrow J_2^*(x(2)) = \min_{u(2)} \left\{ x^2(2) + u^2(2) + 2x^2(3) \right\}$$

$$\Rightarrow J_2^*(x(2)) = \min_{u(2)} \left\{ x^2(2) + u^2(2) + 2\left[\frac{1}{2}x(2) + \frac{1}{2}u(2)\right]^2 \right\}$$

$$\Rightarrow J_2^*(x(2)) = \min_{u(2)} \left\{ \frac{3}{2}x^2(2) + x(2)u(2) + \frac{3}{2}u^2(2) \right\}$$

Do $\dfrac{\partial J_2(.)}{\partial u(2)} = x(2) + 3u(2) \quad \Rightarrow u^*(2) = -\dfrac{x(2)}{3}$

$$\Rightarrow J_2^*(x(2)) = x^2(2) + \left(-\frac{x(2)}{3}\right)^2 + 2\left[\frac{1}{2}\left(x(2) - \frac{x(2)}{3}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow J_2^*(x(2)) = \frac{4}{3}x^2(2)$$

Điều khiển tối ưu rời rạc dùng DP – Thí dụ 1 (tt)

- **Vòng ngược:** Với k = 1:

  Phương trình Bellman:

$$J_1^*(x(1)) = \min_{u(1)}\left\{x^2(1) + u^2(1) + J_2^*(x(2))\right\}$$

$$\Rightarrow J_1^*(x(1)) = \min_{u(1)}\left\{x^2(1) + u^2(1) + \frac{4}{3}x^2(2)\right\}$$

$$\Rightarrow J_1^*(x(1)) = \min_{u(1)}\left\{x^2(1) + u^2(1) + \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}(x(1) + u(1))\right]^2\right\}$$

$$\Rightarrow J_1^*(x(1)) = \min_{u(1)}\left\{\frac{4}{3}x^2(1) + \frac{2}{3}x(1)u(1) + \frac{4}{3}u^2(1)\right\}$$

Do: $\dfrac{\partial J_1(.)}{\partial u(1)} = \dfrac{2}{3}x(1) + \dfrac{8}{3}u(1) \quad \Rightarrow u^*(1) = -\dfrac{x(1)}{4}$

$$\Rightarrow J_1^*(x(1)) = x^2(1) + \left(-\frac{x(1)}{4}\right)^2 + \frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}\left(x(1) - \frac{x(1)}{4}\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow J_1^*(x(1)) = \frac{5}{4}x^2(1)$$

Điều khiển tối ưu rời rạc dùng DP – Thí dụ 1 (tt)

- **Vòng ngược:** Với $k = 0$:

  Phương trình Bellman:

$$J_0^*(x(0)) = \min_{|u_0|<1}\left\{x^2(0) + u^2(0) + J_1^*(x(1))\right\}$$

$$\Rightarrow J_0^*(x(0)) = \min_{u(0)}\left\{x^2(0) + u^2(0) + \frac{5}{4}x^2(1)\right\}$$

$$\Rightarrow J_0^*(x(0)) = \min_{u(0)}\left\{x^2(0) + u^2(0) + \frac{5}{4}\left[\frac{1}{2}(x(0) + u(0))\right]^2\right\}$$

$$\Rightarrow J_0^*(x(0)) = \min_{u(0)}\left\{\frac{21}{16}x^2(0) + \frac{5}{8}x(0)u(0) + \frac{21}{16}u^2(0)\right\}$$

Do: $\dfrac{\partial J_0(.)}{\partial u(0)} = \dfrac{5}{8}x(0) + \dfrac{21}{8}u(0) \Rightarrow u^*(0) = -\dfrac{5}{21}x(0)$

$$\Rightarrow J_0^*(x(0)) = x^2(0) + \left(-\frac{5}{21}x(0)\right)^2 + \frac{5}{4}\left[\frac{1}{2}\left(x(0) - \frac{5}{21}x(0)\right)\right]^2$$

$$\Rightarrow J_0^*(x(0)) = \frac{26}{21}x^2(0)$$

Thí dụ giải bài toán ĐK tối ưu rời rạc dùng DP (tt)

❑ Vòng xuôi:

Điều kiện đầu: $x(0) = 4$

Với k = 0: $u^*(0) = -\frac{5}{21}x(0) = -\frac{20}{21}$

$$x(1) = \frac{1}{2}(x(0) + u^*(0)) = \frac{1}{2}\left(4 - \frac{20}{21}\right) = \frac{32}{21}$$

Với k = 1: $u^*(1) = -\frac{x(1)}{4} = -\frac{8}{21}$

$$x(2) = \frac{1}{2}(x(1) + u^*(1)) = \frac{1}{2}\left(\frac{32}{21} - \frac{8}{21}\right) = \frac{12}{21}$$

Thí dụ giải bài toán ĐK tối ưu rời rạc dùng DP (tt)

❑ Vòng xuôi:

Với k = 2: $$u^*(2) = -\frac{x(2)}{3} = -\frac{4}{21}$$

$$x(3) = \frac{1}{2}(x(2) + u^*(2)) = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{21} - \frac{4}{21}\right) = \frac{4}{21}$$

Với k = 3: $$u^*(3) = -x(3) = -\frac{4}{21}$$

$$x(4) = \frac{1}{2}(x(3) + u^*(3)) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{21} - \frac{4}{21}\right) = 0$$

Kết luận: Chuỗi tín hiệu ĐK tối ưu là: $$u^* = \left\{-\frac{20}{21}; -\frac{8}{21}; -\frac{4}{21}; -\frac{4}{21}\right\}$$

Chỉ tiêu chất lượng tối ưu: $$J_{\min} = J_0^*(x(0)) = \frac{26}{21}x^2(0) = \frac{416}{21}$$

Qui hoạch động giải bài toán ĐK tối ưu liên tục

- Cho đối tượng mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

Trạng thái đầu: $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, trạng thái cuối: $\boldsymbol{x}(t_f) = \boldsymbol{x}_f$

- Bài toán điều khiển tối ưu: tìm tín hiệu điều khiển $\boldsymbol{u}(t)$ sao cho:

$$J(\boldsymbol{u}) = \phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt \rightarrow \min \qquad (*)$$

- Đặt: Hàm mục tiêu tối ưu đoạn quỹ đạo cuối từ thời điểm t_i, trạng thái x_i đến thời điểm cuối t_f, trạng thái cuối $x(t_f)$ là

$$J^*(t_i, \boldsymbol{x}_i) = \min_{\boldsymbol{u}(t)} \left\{ \phi(\boldsymbol{x}(t_f)) + \int_{t_i}^{t_f} L(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)dt \right\}$$

- Nếu tồn tại lời giải tối ưu của bài toán (*) thì hàm mục tiêu tối ưu đoạn quỹ đạo cuối phải thỏa mãn phương trình Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$-\frac{\partial J^*(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} = \min_{\boldsymbol{u}(t)} \left\{ L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \left[\frac{\partial J^*(t, \boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right]^T f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \right\}$$

ĐIỀU CHỈNH TOÀN PHƯƠNG TUYẾN TÍNH
(Linear Quadratic Regulator – LQR)

Bài toán LQR liên tục

- ★ Đối tượng tuyến tính mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad (*)$$

trong đó: $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]^T$: vector trạng thái

$\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), ..., u_m(t)]^T$: vector tín hiệu điều khiển

- ★ Bài toán đặt ra là tìm tín hiệu điều khiển $\boldsymbol{u}(t)$ điều chỉnh hệ thống từ trạng thái đầu $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ bất kỳ về trạng thái cuối $\boldsymbol{x}(t_f) = 0$ sao cho tối thiểu chỉ tiêu chất lượng dạng toàn phương:

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(t_f)\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right]dt$$

trong đó $\boldsymbol{Q}$ và $\boldsymbol{M}$ là các ma trận trọng số bán xác định dương

$\boldsymbol{R}$ là ma trận trọng số xác định dương

- ★ Bài toán trên được gọi là bài toán điều chỉnh toàn phương tuyến tính.

Điều kiện cực trị bài toán LQR liên tục

- Hàm Hamilton:

$$H = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right] + \lambda^T(t)\left[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)\right]$$

- Điều kiện cần để có lời giải tối ưu:

PT trạng thái: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ (1)

PT đồng trạng thái: $\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{A}\boldsymbol{\lambda}(t)$ (2)

Điều kiện dừng: $\dfrac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) = 0$ (3)

Cách tìm lời giải tối ưu

- Rút $\boldsymbol{u}(t)$ từ (3):

$$\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \qquad (4)$$

- Thay (4) vào (1), ta được

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\lambda}(t) \qquad (5)$$

- Kết hợp (5) và (2), ta được phương trình vi phân:

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T \\ -\boldsymbol{Q} & -\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \qquad (6)$$

- Giải phương trình vi phân (6), tìm được $\boldsymbol{x}(t)$ và $\boldsymbol{\lambda}(t)$
- Thay $\boldsymbol{\lambda}(t)$ vào (4) tìm được lời giải tối ưu

Lời giải bài toán LQR liên tục

- Tín hiệu điều khiển tối ưu: $\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{x}(t)$

  trong đó: $\boldsymbol{K}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}(t)$

  và $\boldsymbol{P}(t)$ là nghiệm bán xác định dương của phương trình vi phân Ricatti:

$$-\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{M}$$

- Lời giải phương trình Ricatti:
  - Trường hợp hệ bậc 2: có thể giải bằng tay
  - Trường hợp tổng quát: tham khảo thêm trong tài liệu

Bài toán LQR liên tục thời gian vô hạn

- Đối tượng tuyến tính mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

- Chỉ tiêu chất lượng dạng toàn phương, trong đó thời điểm cuối $t_f = \infty$:

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right]dt$$

- Tín hiệu điều khiển tối ưu: $\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$

  trong đó: $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}$

  và $\boldsymbol{P}$ là nghiệm bán xác định dương của phương trình đại số Ricatti:

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = 0$$

- Chú ý: trong trường hợp này $\boldsymbol{K}$ và $\boldsymbol{P}$ là không phụ thuộc thời gian

- Giá trị cực tiểu của chỉ tiêu chất lượng: $J_{\min} = \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)$

Điều khiển LQR liên tục – Thí dụ 1

- Cho hệ tuyến tính bậc 1 không ổn định mô tả bởi PTTT:

$$\dot{x}(t) = 3x(t) + 2u(t)$$

- ***Yêu cầu:*** Thiết kế luật điều khiển $u(t)$ để hệ kín ổn định và tối thiểu chỉ tiêu chất lượng:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2(t) + 5u^2(t))dt$$

- ***Giải:***

- Phương trình đại số Ricatti: $PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$

$$\Rightarrow \quad P.3 + 3.P + 1 - P.2.\frac{1}{5}.2.P = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}P^2 - 6P - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad P = 7.663 \quad \text{(chọn nghiệm xác định dương)}$$

- Độ lợi hồi tiếp trạng thái: $K = R^{-1}B^T P \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{5}.2.(7,663) = 3,065$

- Luật điều khiển tối ưu: $u(t) = -Kx(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = -3,065x(t)$

Điều khiển LQR liên tục – Thí dụ 2

- Cho hệ tuyến tính bậc 2 mô tả bởi PTTT: $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases}$
- ***Yêu cầu:*** Thiết kế luật điều khiển $u(t)$ để hệ kín ổn định và tối thiểu chỉ tiêu chất lượng:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (2x_1^2(t) + 2u^2(t))dt$$

- ***Giải:***
- Viết lại phương trình trạng thái: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u(t)$
- Viết lại chỉ tiêu chất lượng:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[x_1 \quad x_2\right] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{2}_{\boldsymbol{R}} u^2(t))dt$$

Điều khiển LQR liên tục – Thí dụ 2

★ Phương trình đại số Ricatti:

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 - \frac{1}{2}p_2^2 & p_1 - \frac{1}{2}p_2 p_3 \\ p_1 - \frac{1}{2}p_2 p_3 & 2p_2 - \frac{1}{2}p_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

Điều khiển LQR liên tục – Thí dụ 2

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-\dfrac{1}{2}p_2^2=0 \\ p_1-\dfrac{1}{2}p_2p_3=0 \\ 2p_2-\dfrac{1}{2}p_3^2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} p_1=2\sqrt{2} \\ p_2=2 \\ p_3=2\sqrt{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

★ Độ lợi hồi tiếp trạng thái:

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \quad \Rightarrow \boldsymbol{K}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

★ Luật điều khiển tối ưu:

$$u^*(t)=-\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=-\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \Rightarrow u^*(t)=-x_1(t)-\sqrt{2}x_2(t)$$

Điều khiển LQR liên tục – Thí dụ 3

- Cho hệ tuyến tính bậc 2 mô tả bởi PTTT:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u(t)$$

- ***Yêu cầu:*** Thiết kế luật điều khiển $u(t)$ để hệ kín ổn định và tối thiểu chỉ tiêu chất lượng:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [2x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)]dt$$

- ***Giải:***

- Viết lại chỉ tiêu chất lượng:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left([x_1 \quad x_2] \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{1}_{\boldsymbol{R}} u^2(t) \right) dt$$

Điều khiển LQR liên tục – Thí dụ 3

- Phương trình đại số Ricatti:

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -p_2 & p_1 - 2p_2 \\ -p_3 & p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_2 & -p_3 \\ p_1 - 2p_2 & p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2p_2 + 2 - p_2^2 & p_1 - 2p_2 - p_3 - p_2 p_3 \\ -p_3 + p_1 - 2p_2 - p_2 p_3 & 2p_2 - 4p_3 + 1 - p_3^2 \end{bmatrix} = 0$$

Điều khiển LQR liên tục – Thí dụ 3

$$\Rightarrow \begin{cases} -2p_2 + 2 - p_2^2 = 0 \\ p_1 - 2p_2 - p_3 - p_2 p_3 = 0 \\ -p_3 + p_1 - 2p_2 - p_2 p_3 = 0 \\ 2p_2 - 4p_3 + 1 - p_3^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 2.403 \\ p_2 = 0.732 \\ p_3 = 0.542 \end{cases}$$

(chọn các nghiệm dương)

$$\Rightarrow \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 2.403 & 0.732 \\ 0.732 & 0.542 \end{bmatrix}$$

★ Độ lợi hồi tiếp trạng thái:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \Rightarrow \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.403 & 0.732 \\ 0.732 & 0.542 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 0.732 & 0.542 \end{bmatrix}$$

★ Luật điều khiển tối ưu: $u^*(t) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) = -\begin{bmatrix} 0.732 & 0.542 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{u^*(t) = -0.732x_1(t) - 0.542x_2(t)}$$

Bài toán LQR rời rạc

- Cho đối tượng tuyến tính rời rạc mô tả bởi phương trình trạng thái:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{u}(k) \qquad (*)$$

trong đó: $\boldsymbol{x}(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)]^T$: vector trạng thái

$\boldsymbol{u}(k) = [u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)]^T$: vector tín hiệu điều khiển

- Bài toán đặt ra là tìm tín hiệu điều khiển $\boldsymbol{u}(k)$ điều chỉnh hệ thống từ trạng thái đầu $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ bất kỳ về trạng thái cuối $\boldsymbol{x}(N) = 0$ sao cho tối thiểu chỉ tiêu chất lượng dạng toàn phương:

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(N)\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)\right]$$

trong đó $\boldsymbol{Q}$ và $\boldsymbol{M}$ là các ma trận trọng số bán xác định dương

$\boldsymbol{R}$ là ma trận trọng số xác định dương

Lời giải bài toán LQR rời rạc

- Tín hiệu điều khiển tối ưu: $\boldsymbol{u}^*(k) = -\boldsymbol{K}(k)\boldsymbol{x}(k)$

  trong đó: $$\boldsymbol{K}(k) = \left[\boldsymbol{B}_d^T \boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}_d + \boldsymbol{R}\right]^{-1} \boldsymbol{B}_d^T \boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{A}_d$$

  và $\boldsymbol{P}(k)$ là nghiệm bán xác định dương của phương trình Ricatti:

$$\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{A}_d^T \left(\boldsymbol{P}(k+1) - \boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}_d\left(\boldsymbol{B}_d^T \boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{B}_d + \boldsymbol{R}\right)^{-1} \boldsymbol{B}_d^T \boldsymbol{P}(k+1)\right)\boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{P}(N) = \boldsymbol{M}$$

- Nghiệm phương trình Ricatti rời rạc: lần lượt thay $k = (N-1) \rightarrow 0$ vao phương trình Ricatti sẽ tìm được $\boldsymbol{P}(k)$

Bài toán LQR rời rạc thời gian vô hạn

- Đối tượng tuyến tính mô tả bởi phương trình trạng thái rời rạc:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{u}(k)$$

- Chỉ tiêu chất lượng dạng toàn phương, trong đó thời điểm cuối $N=\infty$:

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)\right]$$

- Tín hiệu điều khiển tối ưu: $\boldsymbol{u}^*(k) = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(k)$

  trong đó: $\boldsymbol{K} = \left[\boldsymbol{B}_d^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_d + \boldsymbol{R}\right]^{-1}\boldsymbol{B}_d^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_d$

  và $\boldsymbol{P}$ là nghiệm bán xác định dương của phương trình đại số Ricatti:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}_d^T\left(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_d\left(\boldsymbol{B}_d^T\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_d + \boldsymbol{R}\right)^{-1}\boldsymbol{B}_d^T\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{A}_d + \boldsymbol{Q}$$

- Chú ý: trong trường hợp này $\boldsymbol{K}$ và $\boldsymbol{P}$ là không phụ thuộc k
- Giá trị cực tiểu của chỉ tiêu chất lượng: $J_{\min} = \boldsymbol{x}^T(0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(0)$

Lời giải bài toán LQR thời gian vô hạn dùng Matlab

- Nghiệm phương trình đại số Ricatti liên tục (continuous algebraic Ricatti equation – **care**)

  >> P=care(A,B,Q,R)

- Lời giải bài toán LQR (Linear quadratic Regulator – **LQR**) liên tục

  >> K=lqr(A,B,Q,R)

- Nghiệm phương trình đại số Ricatti rời rạc(discrete algebraic Ricatti equation – **dare**)

  >> P=dare(A,B,Q,R)

- Lời giải bài toán LQR (Linear quadratic Regulator – **LQR**) rời rạc

  >> K=dlqr(A,B,Q,R)

BỘ LỌC KALMAN

Lọc Kalman liên tục

- Xét hệ tuyến tính liên tục: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + v(t) \end{cases}$

Trong đó: $\boldsymbol{w}(t)$ là nhiễu hệ thống; $v(t)$ là nhiễu đo lường.

Giả sử nhiễu hệ thống và nhiễu đo lường có phân bố Gauss, không tương quan, có trung bình bằng 0 và phương sai là:

$$E[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T] = \boldsymbol{Q}_N \qquad E[vv^T] = \boldsymbol{R}_N$$

- Bộ lọc Kalman liên tục: $\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = [\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t)] + \boldsymbol{L}[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = \boldsymbol{C}\hat{x}(t) \end{cases}$

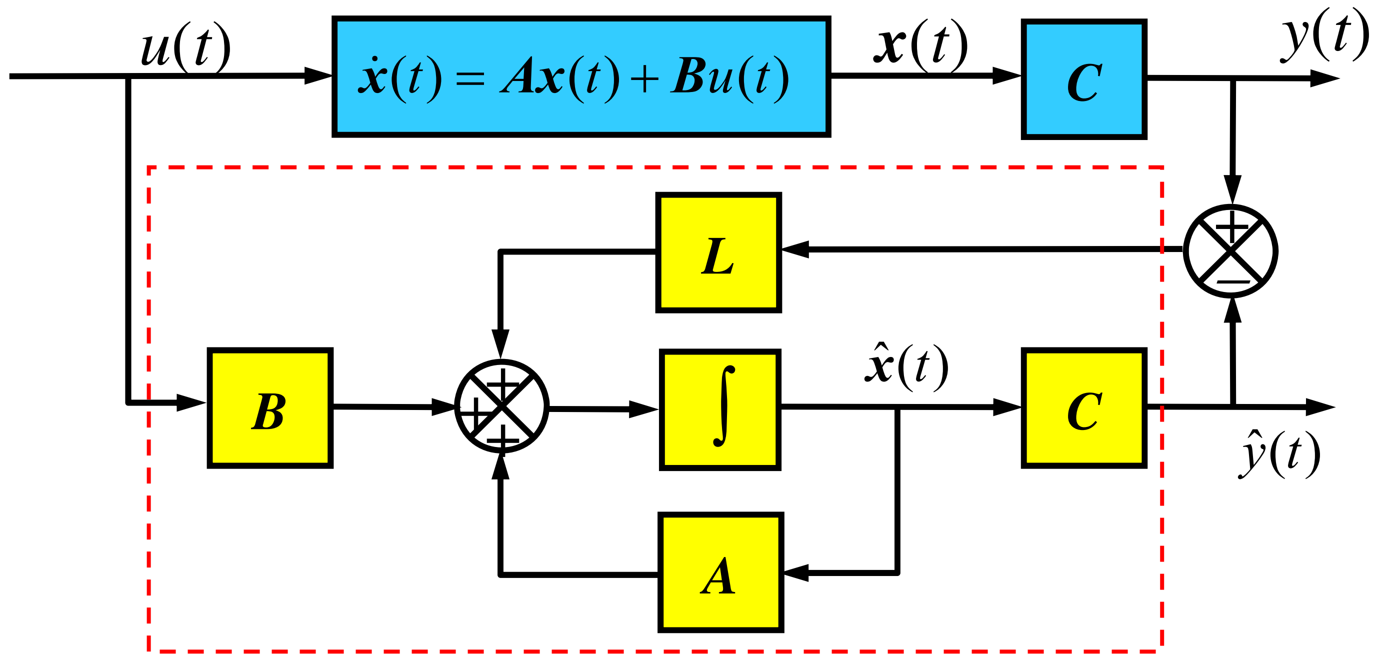
Trong đó $\boldsymbol{L}$ là độ lợi của bộ lọc Kalman:

$$\boldsymbol{L} = \Pi \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{R}_N^{-1}$$

với Π là nghiệm của phương trình Ricatti:

$$\boldsymbol{A}\Pi + \Pi \boldsymbol{A}^T - \Pi \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{R}_N^{-1} \boldsymbol{C}\, \Pi + \boldsymbol{Q}_N = 0$$

Sơ đồ khối bộ lọc Kalman liên tục



★ Bộ lọc Kalman:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Trong đó:

$$L = \Pi C^T R_N^{-1}$$

$$A\Pi + \Pi A^T - \Pi C^T R_N^{-1} C \Pi + Q_N = 0$$

Bộ lọc Kalman liên tục – Thí dụ 1

- Cho hệ tuyến tính bậc 2 mô tả bởi PTTT:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + v(t) \end{cases}$$

Trong đó: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$E[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T] = \boldsymbol{Q}_N = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \qquad E[vv^T] = \boldsymbol{R}_N = 0.01$$

- ***Yêu cầu:*** Thiết kế bộ lọc Kalman ước lượng trạng thái của hệ thống trên từ tín hiệu đo $y(t)$.

- ***Giải:***

- Bộ ước lượng trạng thái: $\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases}$

$$\boldsymbol{L} = \Pi \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{R}_N^{-1}$$

Bộ lọc Kalman liên tục – Thí dụ 1

- Trong đó Π là nghiệm của phương trình đại số Ricatti:

$$\boldsymbol{A}\Pi + \Pi\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}_N - \Pi\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R}_N^{-1}\boldsymbol{C}\Pi = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{0.01}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} p_2 & p_3 \\ -p_1 - 2p_2 & -p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2 & -p_1 - 2p_2 \\ p_3 & -p_2 - 2p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

$$-100\begin{bmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2p_2 + 0.2 - 100p_1^2 & p_3 - p_1 - 2p_2 - 100p_1 p_2 \\ p_3 - p_1 - 2p_2 - 100p_1 p_2 & -2p_2 - 4p_3 + 0.1 - p_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

Bộ lọc Kalman liên tục – Thí dụ 1

$$\Rightarrow \begin{cases} 2p_2 + 0.2 - 100p_1^2 = 0 & (1) \\ p_3 - p_1 - 2p_2 - 100p_1p_2 = 0 & (2) \\ -2p_2 - 4p_3 + 0.1 - p_2^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2)\ \&(3) \Rightarrow \quad p_2^2 + 400p_1p_2 + 4p_1 + 10p_2 - 0.1 = 0 \qquad (4)$$

$$(1)\ \&(4) \Rightarrow (50p_1^2 - 0.1)^2 + (50p_1^2 - 0.1)(400p_1 + 10) + 4p_1 - 0.1 = 0$$

$$\Rightarrow 2500p_1^4 + 20000p_1^3 + 490p_1^2 - 36p_1 - 1.09 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = 0.0441 \\ p_2 = -0.00279 \\ p_3 = 0.0262 \end{cases} \Rightarrow \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0.0441 & -0.00279 \\ -0.00279 & 0.0262 \end{bmatrix}$$

★ Độ lợi bộ lọc Kalman: $\boldsymbol{L} = \prod \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{R}_N^{-1}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 0.0441 & -0.00279 \\ -0.00279 & 0.0262 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{0.01} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 4.409 \\ 0.279 \end{bmatrix}$$

Lọc Kalman rời rạc

- Xét hệ tuyến tính rời rạc: $\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k) + \boldsymbol{w}(k) \\ y(k) = \boldsymbol{C}_d x(k) + v(k) \end{cases}$

  Trong đó: $\boldsymbol{w}(k)$ là nhiễu hệ thống; $v(k)$ là nhiễu đo lường.

  Giả sử nhiễu hệ thống và nhiễu đo lường có phân bố Gauss, không tương quan, có trung bình bằng 0 và phương sai là:

$$E[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T] = \boldsymbol{Q}_N \qquad E[vv^T] = \boldsymbol{R}_N$$

- Bộ lọc Kalman rời rạc:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}(k+1) = [\boldsymbol{A}_d \hat{\boldsymbol{x}}(k) + \boldsymbol{B}_d u(k)] + \boldsymbol{L}_k [y(k+1) - \hat{y}(k+1)] \\ \hat{y}(k) = \boldsymbol{C}_d \hat{x}(k) \end{cases}$$

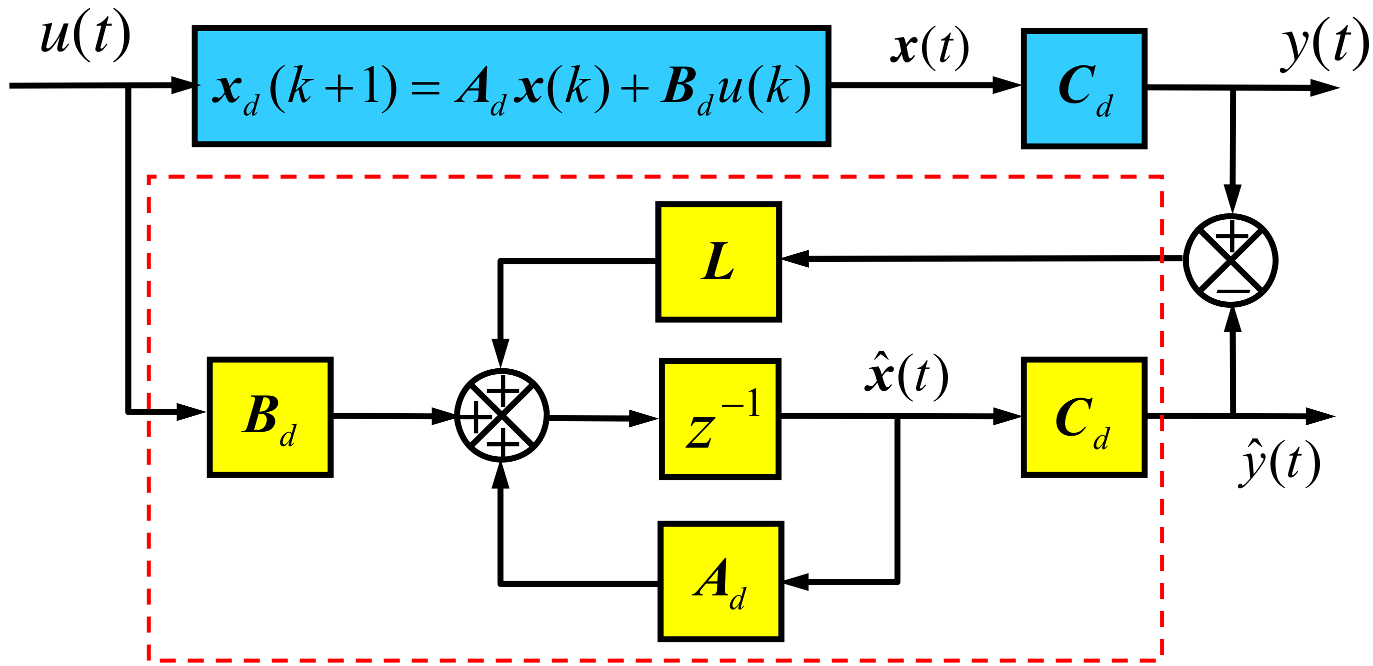
  Trong đó $\boldsymbol{L}$ là độ lợi của bộ lọc Kalman:

$$\boldsymbol{L}(k) = \boldsymbol{A}_d \Pi(k) \boldsymbol{C}_d^T \left(\boldsymbol{C}_d \Pi(k) \boldsymbol{C}_d^T + \boldsymbol{R}_N \right)^{-1}$$

  với Π là nghiệm của phương trình Ricatti:

$$\Pi(k+1) = \boldsymbol{A}_d \Pi(k) \boldsymbol{A}_d^T + \boldsymbol{Q}_N - \boldsymbol{A}_d \Pi(k) \boldsymbol{C}_d^T \boldsymbol{R}_N^{-1} \boldsymbol{C}_d \Pi(k) \boldsymbol{A}_d^T$$

Sơ đồ khối bộ lọc Kalman rời rạc



★ Bộ lọc Kalman: $\begin{cases} \hat{x}(k+1) = [A_d\hat{x}(k) + B_d u(k)] + L_k[y(k+1) - \hat{y}(k+1)] \\ \hat{y}(k) = C_d\hat{x}(k) \end{cases}$

Trong đó: $L(k) = A_d\Pi(k)C_d^T\left(C_d\Pi(k)C_d^T + R_N\right)^{-1}$

$$\Pi(k+1) = A_d\Pi(k)A_d^T + Q_N - A_d\Pi(k)C_d^T R_N^{-1} C_d\Pi(k)A_d^T$$

Lời giải bộ lọc Kalman dùng Matlab

- Lời giải bộ lọc Kalman liên tục:

  >> L = lqe(A,G,C,QN,RN) %G ma trận đơn vị

BỘ ĐIỀU KHIỂN LQG
(Linear Quadratic Gaussian)

Bài toán điều khiển LQG (Linear Quadratic Gaussian)

- Xét hệ tuyến tính liên tục bị tác động bởi nhiễu Gauss:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{w}(t) \\ y(t) = \boldsymbol{C}x(t) + v(t) \end{cases}$$

Trong đó: $\boldsymbol{w}(t)$ là nhiễu hệ thống; $v(t)$ là nhiễu đo lường. Giả sử nhiễu không tương quan, có trung bình bằng 0 và phương sai là:

$$E[\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T] = \boldsymbol{Q}_N \qquad E[vv^T] = \boldsymbol{R}_N$$

- Bài toán đặt ra là tìm tín hiệu điều khiển $\boldsymbol{u}(t)$ điều chỉnh hệ thống từ trạng thái đầu $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ bất kỳ về trạng thái cuối $\boldsymbol{x}(t_f) = 0$ sao cho tối thiểu chỉ tiêu chất lượng dạng toàn phương:

$$J(\boldsymbol{u}) = E\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty \left[\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\right]dt\right\}$$

trong đó $\boldsymbol{Q}$ là các ma trận trọng số bán xác định dương
$\boldsymbol{R}$ là ma trận trọng số xác định dương

Nguyên lý tách rời

- Nguyên lý tách rời: Bài toán tối ưu LQG có thể giải bằng cách giải riêng bài toán điều khiển tối ưu tiền định và bài toán ước lượng trạng thái tối ưu.

LQG = LQR + Lọc Kalman

Lời giải bài toán điều khiển LQG

- Tín hiệu điều khiển tối ưu LQR:

$$u^*(t) = -K\hat{x}(t)$$

với độ lợi hồi tiếp trạng thái: $K = R^{-1}B^T P$

trong đó ***P*** là nghiệm bán xác định dương của pt đại số Ricatti:

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

- Bộ lọc Kalman:

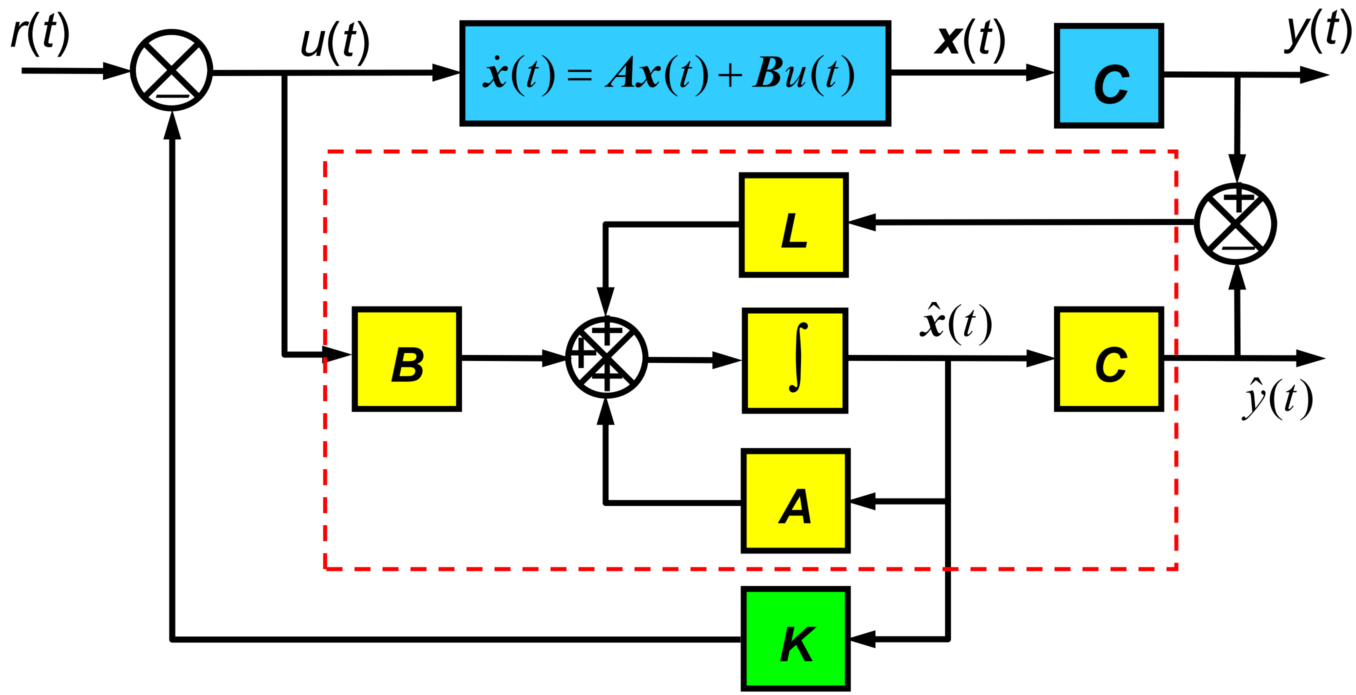
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = [A\hat{x}(t) + Bu(t)] + L[y(t) - \hat{y}(t)] \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

với độ lợi ước lượng: $L = \Pi C^T R_N^{-1}$

trong đó Π là nghiệm bán xác định dương của pt đại số Ricatti:

$$A\Pi + \Pi A^T - \Pi C^T R_N^{-1} C\,\Pi + Q_N = 0$$

Sơ đồ khối bộ điều khiển LQG liên tục



★ Bộ điều khiển LQR

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{x}}(t)$$

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} = 0$$

★ Bộ lọc Kalman

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}u(t) + \boldsymbol{L}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{L} = \Pi \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R}_N^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}\Pi + \Pi\boldsymbol{A}^T - \Pi\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R}_N^{-1}\boldsymbol{C}\,\Pi + \boldsymbol{Q}_N = 0$$

THÍ DỤ THIẾT KẾ ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU

Đối tượng điều khiển: hệ con lắc ngược

- Thông số hệ con lắc ngược

  $M = 1.0\ kg$: *trọng lượng xe*

  $m = 0.1 kg$: *trọng lượng con lắc*

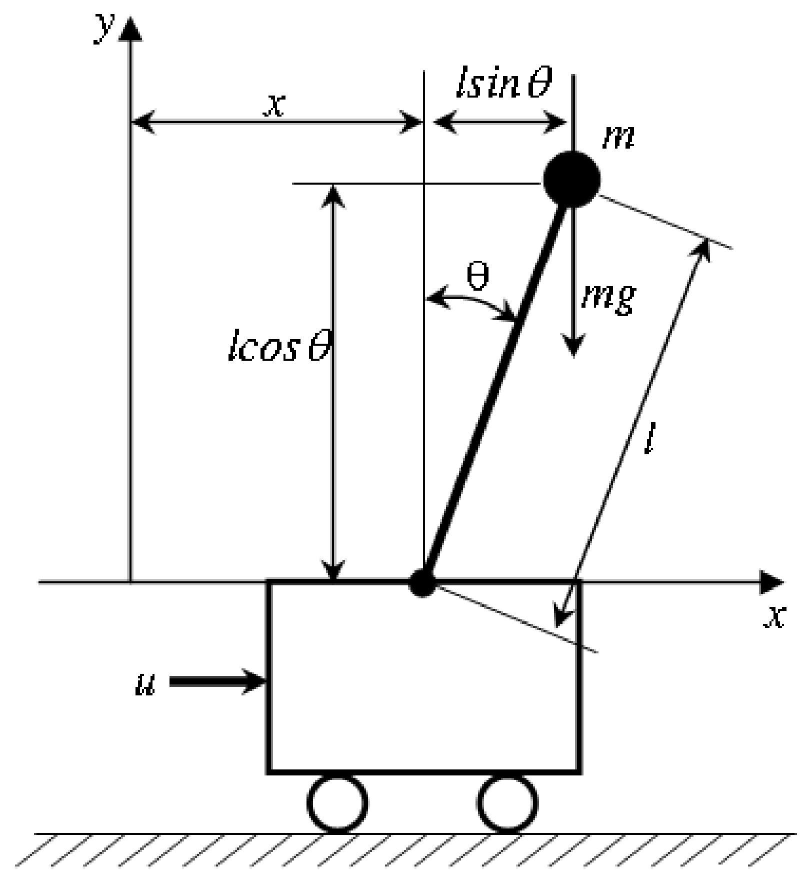
  $l = 1.0\ m$: *chiều dài con lắc*

  u : *lực tác động vào xe* [N]

  g : *gia tốc trọng trường* [m/s2]

  x : *vị trí xe* [m]

  θ : *góc giữa con lắc và phương thẳng đứng* [rad]



- Mô hình toán hệ con lắc ngược

$$\ddot{x} = \frac{u + ml(\sin\theta)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta\sin\theta}{M + m - m(\cos\theta)^2}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{u\cos\theta - (M+m)g(\sin\theta) + ml(\cos\theta\sin\theta)\dot{\theta}}{ml(\cos\theta)^2 - (M+m)l}$$

PTTT phi tuyến của hệ con lắc ngược

- Đặt các biến trạng thái $x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x, x_4 = \dot{x}$
- Phương trình trạng thái phi tuyến

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{u\cos x_1 - (M+m)g(\sin x_1) + ml(\cos x_1 \sin x_1)x_2}{ml(\cos x_1)^2 - (M+m)l} \\ x_4 \\ \dfrac{u + ml(\sin x_1)x_2^2 - mg\cos x_1 \sin x_1}{M + m - m(\cos x_1)^2} \end{bmatrix}$$

- Yêu cầu: Thiết kế bộ điều khiển giữ cân bằng con lắc quanh vị trí thẳng đứng

PTTT tuyến tính của hệ con lắc ngược

- PTTT tuyến tính hóa quanh điểm cân bằng thẳng đứng (góc lệch θ nhỏ hơn 10^0)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\dfrac{1}{Ml} \\ 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

- Thay cụ thể thông số của hệ con lắc ngược:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 10.78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.98 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

Thiết kế bộ điều khiển LQR

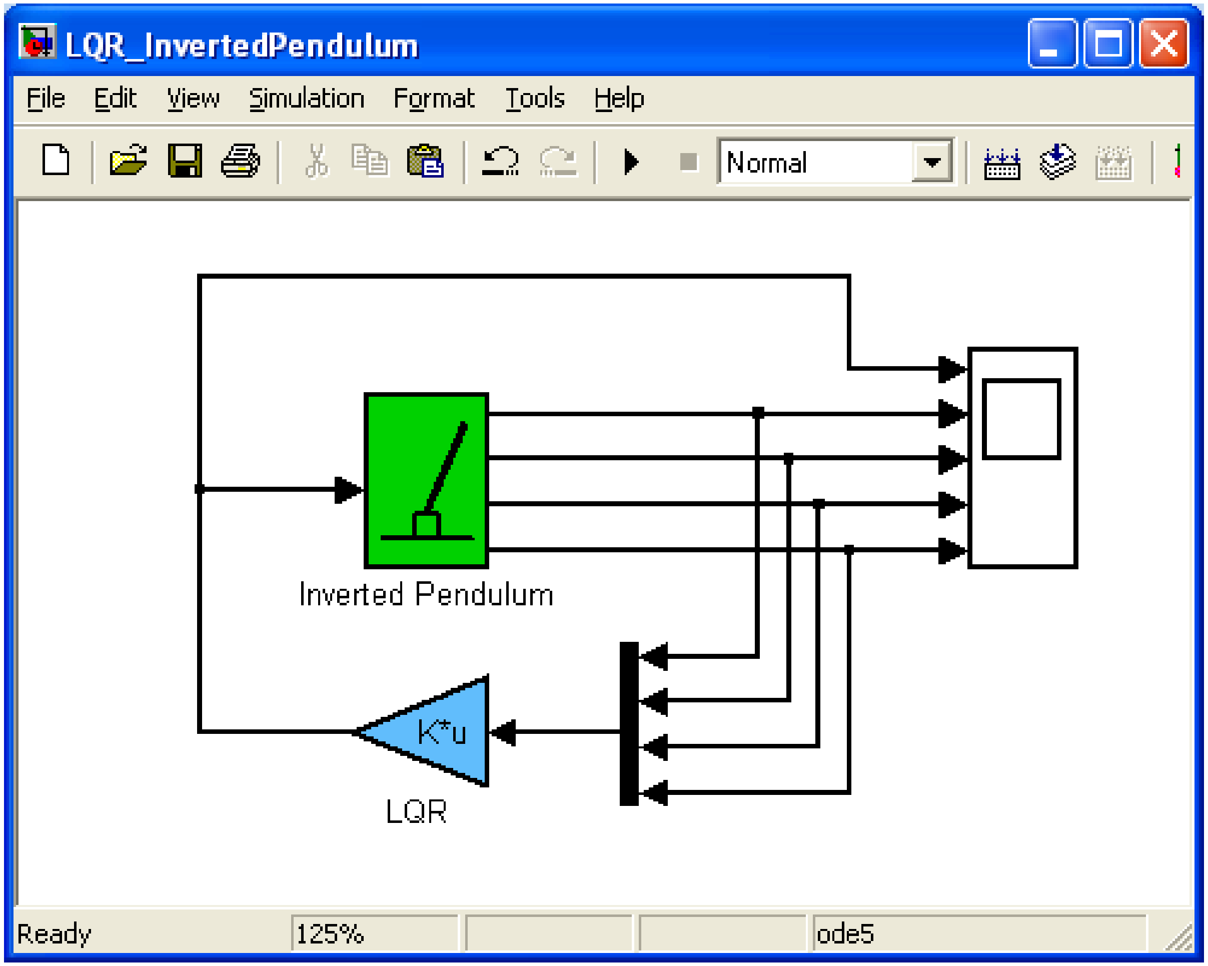
★ Giả thiết:

- Đặc tính động của hệ con lắc ngược có thể được mô tả bởi hệ phương trình biến trạng thái tuyến tính. Điều này chỉ đúng khi góc lệch θ *nhỏ.*
- Hệ thống phản hồi trạng thái đầy đủ, nghĩa là có thể đo được 4 biến trạng thái (*góc lệch θ, vận tốc góc, vị trí xe x, vận tốc xe*)
- Không có nhiễu tác động vào hệ thống.

★ Thiết kế dùng Matlab:

- **>>** K = lqr(A,B,Q,R)
- Tùy theo độ lớn tương đối giữa trọng số ***Q*** và ***R*** mà hệ thống có đáp ứng quá độ và năng lượng tiêu tốn khác nhau.
- Muốn trạng thái đáp ứng nhanh tăng thành phần ***Q*** tương ứng
- Muốn giảm năng lượng tăng ***R***

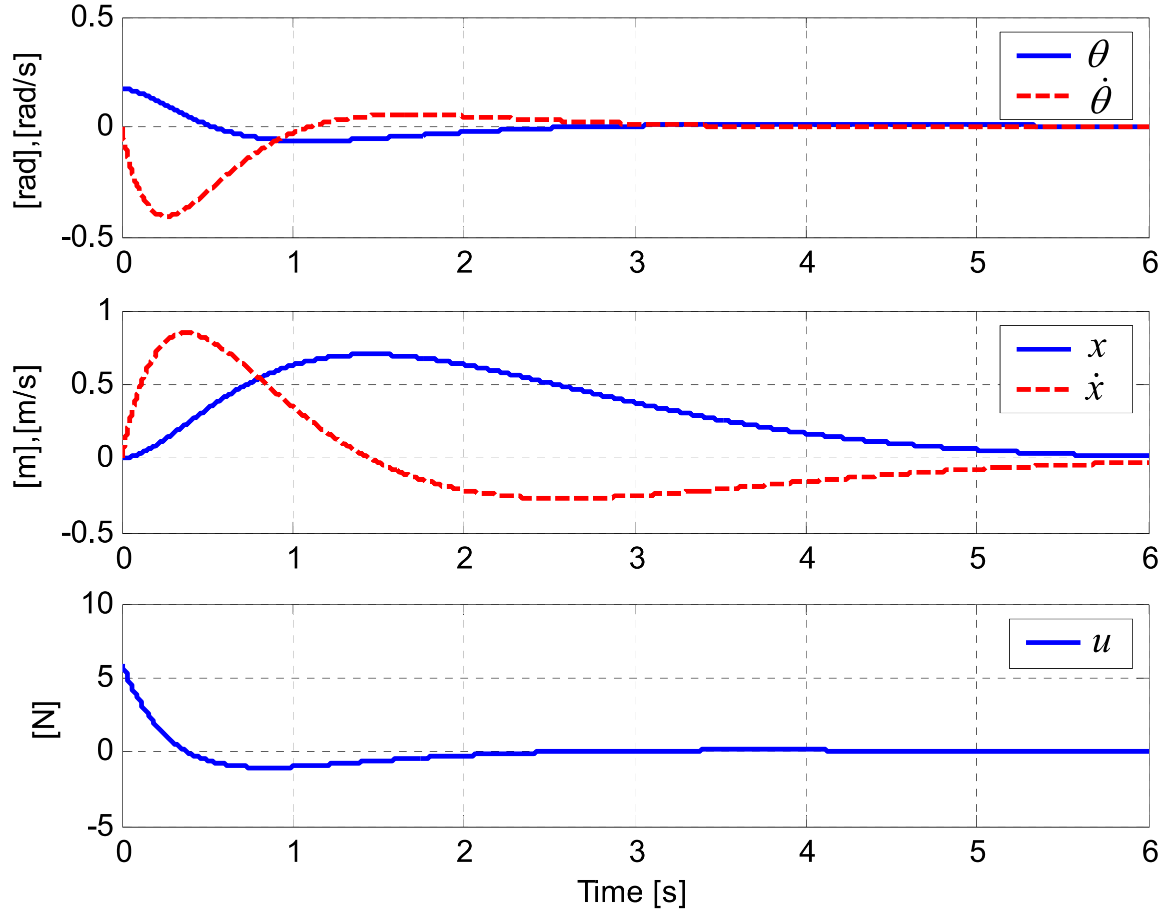
Mô phỏng điều khiển LQR hệ con lắc ngược



Kết quả mô phỏng điều khiển LQR hệ con lắc ngược

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$



$$\boldsymbol{K} = [-34.3620 \quad -10.7009 \quad -1.000 \quad -2.4109]$$

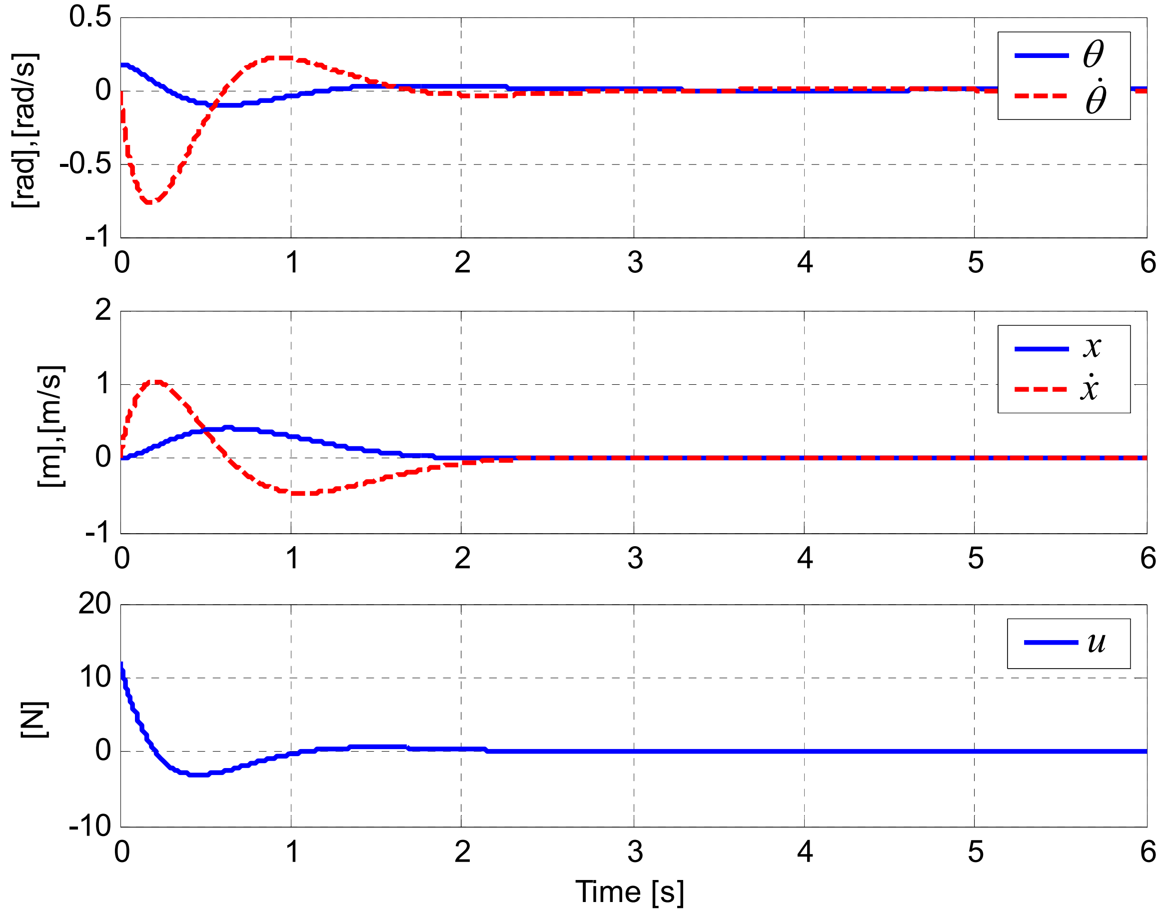
Góc lệch con lắc được giữ cân bằng tốt, tuy nhiên vị trí xe dao động khá lớn

Kết quả mô phỏng điều khiển LQR hệ con lắc ngược

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$

Tăng trọng số q_{33} (tương ứng với vị trí xe) $\Rightarrow$ vị trí xe ít dao động hơn, tuy nhiên năng lượng tiêu tốn tăng lên

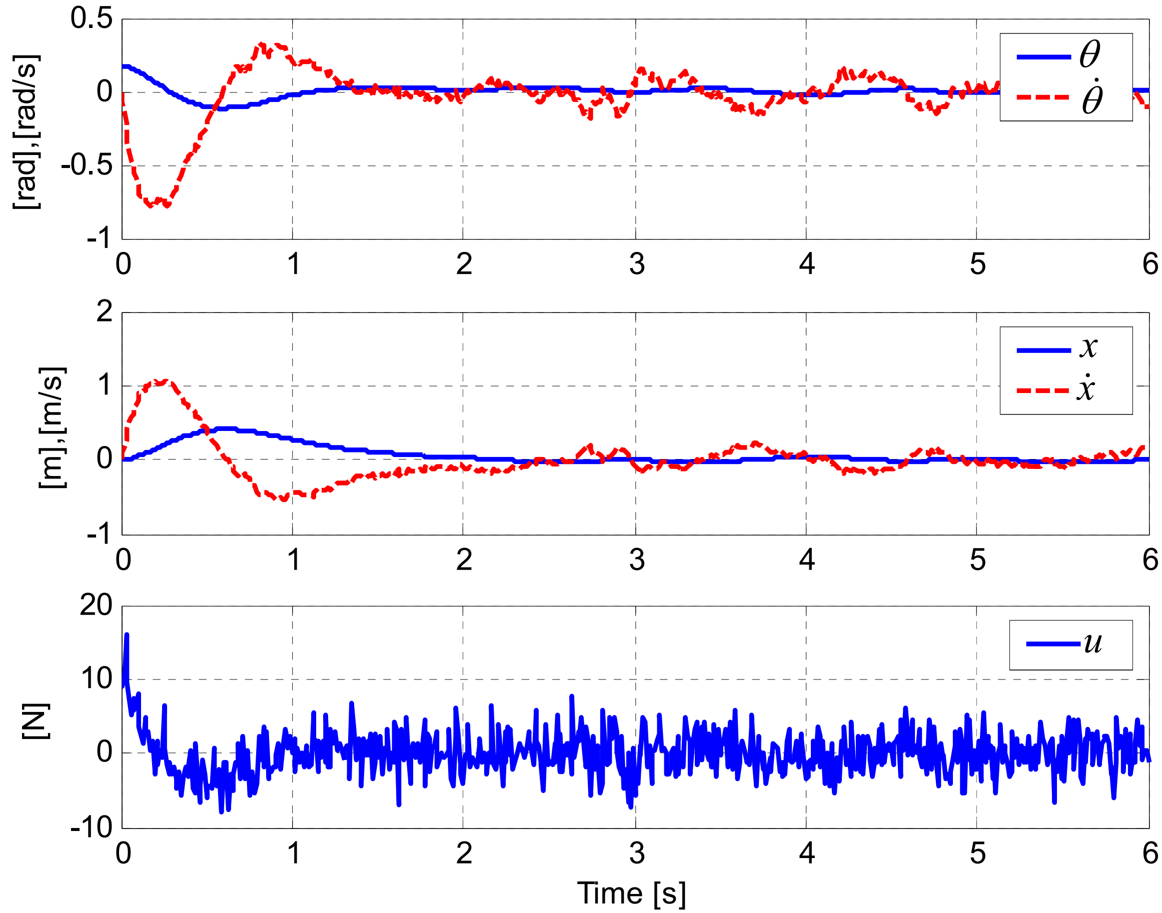


$$K = [-70.1356 \quad -22.1091 \quad -10.000 \quad -11.0514]$$

Kết quả mô phỏng điều khiển LQR hệ con lắc ngược

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = 1$$



Khuyết điểm của bộ điều khiển LQR là nếu có nhiễu đo lường thì chất lượng điều khiển bị ảnh hưởng đáng kể

$$\boldsymbol{K} = [-70.1356 \quad -22.1091 \quad -10.000 \quad -11.0514]$$

Thiết kế bộ điều khiển LQG

- **Giả thiết:**
  - Hệ thống hoạt động trong miền tuyến tính
  - Giả sử chỉ đo được góc lệch và vị trí xe
  - Có nhiễu tác động vào hệ thống. Nhiễu đo vị trí xe có phương sai là 0.01; nhiễu đo góc lệch con lắc có phương sai 0.001

⇒ Dùng lọc Kalman để ước lượng trạng thái và lọc nhiễu

- **Thiết kế dùng Matlab:**
  - **>>** K = lqr(A,B,Q,R)
  - >> L = lqe(A,G,C,QN,RN)   %G là ma trận đơn vị

Thiết kế bộ điều khiển LQG

★ Bộ điều khiển LQR

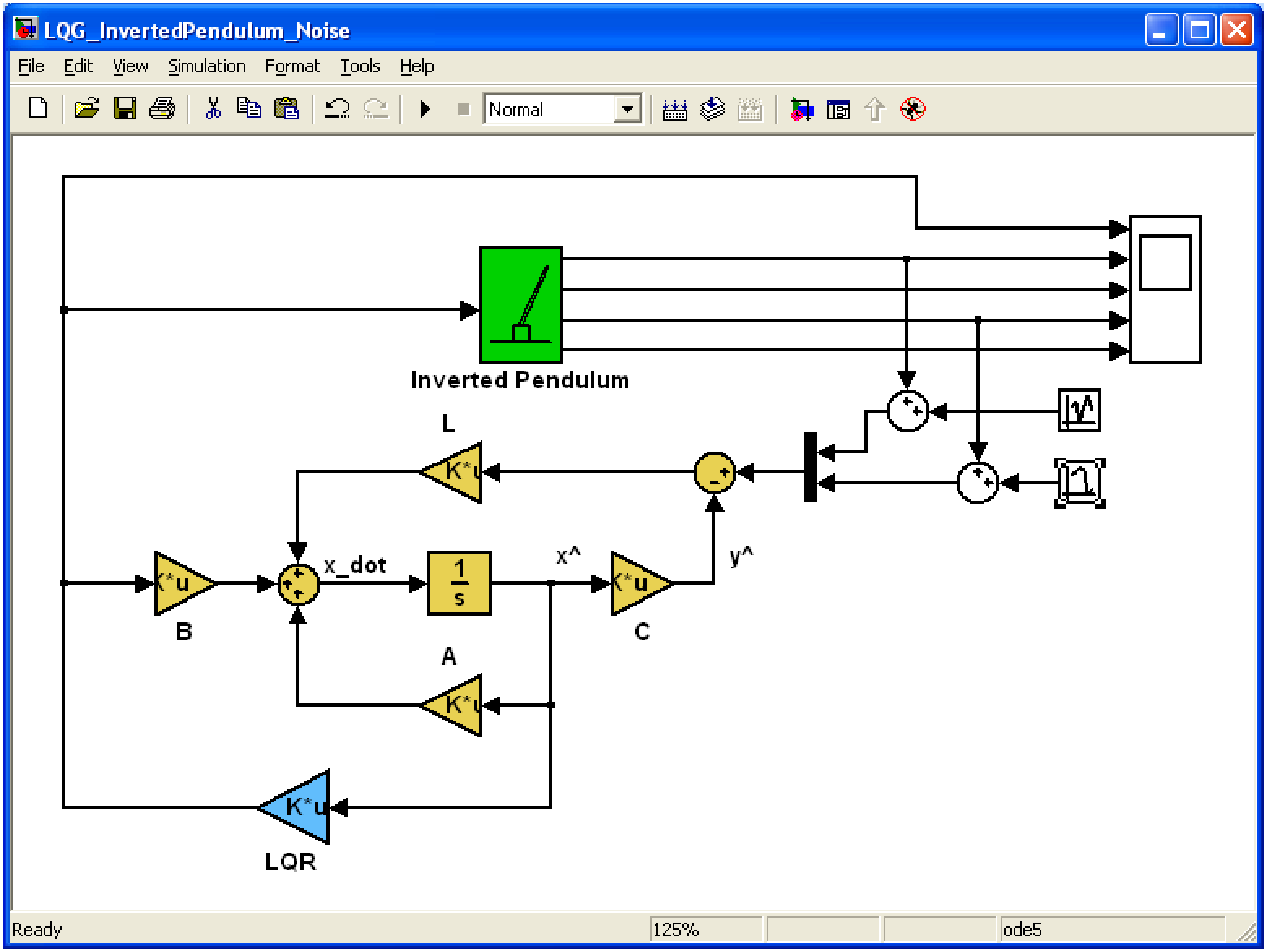
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{R} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{K} = [-70.1356 \quad -22.1091 \quad -10.000 \quad -11.0514]$$

★ Bộ lọc Kalman

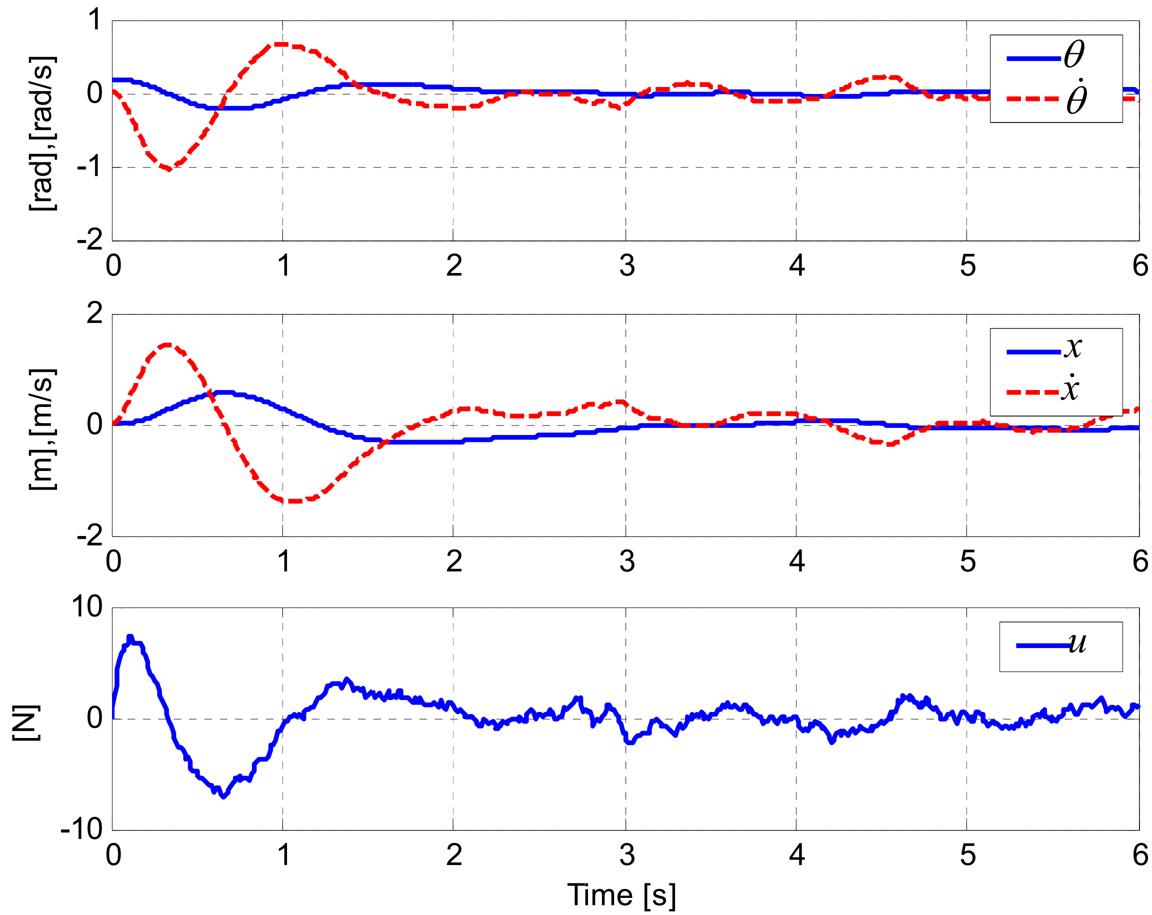
$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_N &= 0.000001\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{R}_N &= \begin{bmatrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 6.5617 & -0.0571 \\ 21.5437 & -0.1876 \\ -0.5713 & 0.1470 \\ -1.9568 & 0.0271 \end{bmatrix}$$

(Do ta giả sử không có nhiễu hệ thống nên chọn $\boldsymbol{Q}_N$ rất bé. Hai thành phần của $\boldsymbol{R}_N$ chính là phương sai của nhiễu đo lường)

Mô phỏng điều khiển LQG hệ con lắc ngược



Kết quả mô phỏng điều khiển LQG hệ con lắc ngược



Bộ lọc Kalman ước lượng trạng thái và lọc nhiễu, nhờ vậy mà đáp ứng của hệ thống điều khiển LQG tốt hơn LQR trong trường hợp hệ thống có nhiễu

MỘT SỐ CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Nghiệm của phương trình vi phân bậc 1

- Phương trình vi phân bậc 1 đồng nhất : $\dot{x}(t) + ax(t) = 0$
- Nghiệm tổng quát: $x(t) = Ce^{-at}$
- Hằng số *C* được xác định dựa vào điều kiện biên.

Nghiệm của phương trình vi phân bậc 1 (tt)

- Phương trình vi phân bậc 1 không đồng nhất :

$$\dot{x}(t) + ax(t) = b$$

- Nghiệm tổng quát: $$x(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}$$

- Hằng số *C* được xác định dựa vào điều kiện biên.

Nghiệm của phương trình vi phân bậc 1 (tt)

- Phương trình vi phân bậc 1 không đồng nhất :

$$\dot{x}(t) + p(t)x(t) = q(t)$$

- Nghiệm tổng quát: $x(t) = \dfrac{\int \mu(t)q(t)dt + C}{\mu(t)}$

  trong đó: $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$

- Hằng số *C* được xác định dựa vào điều kiện biên.

Nghiệm của phương trình vi phân bậc 2

- Phương trình vi phân bậc 2 đồng nhất : $a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = 0$
- Nghiệm tổng quát:
  - Trường hợp 1: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

    $$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \quad \text{với } p_{1,2} = (-b \pm \sqrt{\Delta})/(2a)$$

  - Trường hợp 2: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

    $$x(t) = C_1 e^{pt} + C_2 t e^{pt} \quad \text{với } p = -b/(2a)$$

  - Trường hợp 3: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

    $$x(t) = C_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + C_2 e^{\alpha t} \cos \beta t$$

    Với $\alpha = -b/(2a)$ và $\beta = \sqrt{-\Delta}/(2a)$
- Hằng số C_1 và C_2 được xác định dựa vào điều kiện biên.

Nghiệm của phương trình vi phân bậc 2

* Phương trình vi phân bậc 2 không đồng nhất :

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = d$$

* Nghiệm tổng quát: $x = z + \dfrac{d}{c}$

  trong đó *z*(*t*) là nghiệm của phương trình vi phân đồng nhất:

$$a\ddot{z}(t) + b\dot{z}(t) + cz(t) = 0$$

* Hằng số C_1 và C_2 được xác định dựa vào điều kiện biên.

Nghiệm của phương trình trạng thái

- Phương trình vi phân bậc 1: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$

  Điều kiện đầu: $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

  trong đó: $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T \in \Re^n$

  $\boldsymbol{A} \in \Re^{n \times n}$

- Nghiệm : $\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau$

- Trong đó: $\Phi(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$

  Cách 1: $\Phi(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right\}$

  Cách 2: $\Phi(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = C_0\boldsymbol{I} + C_1[\boldsymbol{A}] + C_2[\boldsymbol{A}]^2 + \ldots + C_{n-1}[\boldsymbol{A}]^{n-1}$

  thay các trị riêng λ_i của ma trận ***A*** (nghiệm của $\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$) vào phương trình trên sẽ tính được các hệ số C_i

Nghiệm của phương trình trạng thái (tt)

- Các trường hợp riêng của phương trình vi phân bậc 1:
  - Nếu ***B***=0: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(t_0) = e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)$$

  - Nếu *u*=1: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t-\tau)\boldsymbol{B}\,d\tau$$

Tổng kết chương

Sau khi học xong chương 3, sinh viên phải có khả năng:

- Giải bài toán tối ưu động không ràng buộc và có ràng buộc
- Thành lập các bài toán điều khiển tối ưu động
- Giải bài toán tối ưu động liên tục dùng phương pháp biến phân
- Giải bài toán tối ưu rời rạc dùng phương pháp qui hoạch động
- Thiết kế bộ điều khiển LQR, bộ lọc Kalman, bộ điều khiển LQG