Môn học

LÝ THUYẾT ĐIỀU KHIỂN NÂNG CAO

Giảng viên: PGS. TS. Huỳnh Thái Hoàng
Bộ môn Điều Khiển Tự Động
Khoa Điện – Điện Tử
Đại học Bách Khoa TP.HCM
Email: hthoang@hcmut.edu.vn
Homepage: http://www4.hcmut.edu.vn/~hthoang/

Chương 5

ĐIỀU KHIỂN BỀN VỮNG

Nội dung chương 5

- Giới thiệu
- Chuẩn của tín hiệu và hệ thống
- Tính ổn định bền vững
- Chất lượng bền vững
- Thiết kế hệ thống điều khiển bền vững dùng phương pháp chỉnh độ lợi vòng (loop-shaping)
- Thiết kế hệ thống điều khiển tối ưu bền vững (SV tự đọc thêm)

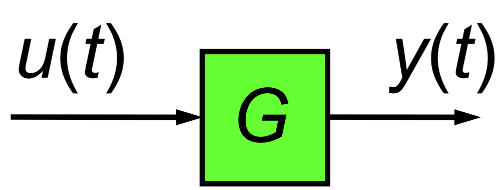
Tài liệu tham khảo

- *Feedback Control Theory*, J.Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum, Macmillan Publishing Co. 1990.
- *Linear Robust Control*, M. Green and D. J.N. Limebeer, Prentice Hall, 1994.
- *Robust and Optimal Control*, K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover, Prentice Hall.

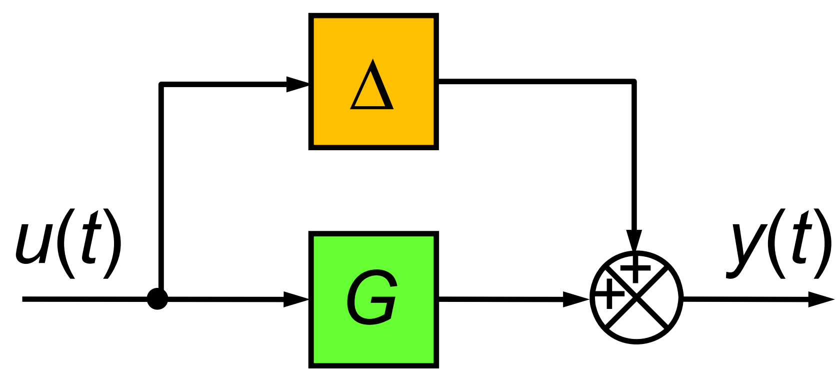
GIỚI THIỆU

Định nghĩa điều khiển bền vững

- Hệ thống điều khiển bền vững là hệ thống được thiết kế sao cho tính ổn định và chất lượng điều khiển được đảm bảo khi các thành phần không chắc chắn (sai số mô hình hóa, nhiễu loạn,…) nằm trong một tập hợp cho trước.



Đối tượng ĐK kinh điển



Đối tượng ĐK bền vững

G: mô hình danh định

Δ: thành phần không chắc chắn

Các thành phần không chắc chắn

- Các yếu tố không chắc chắn có thể làm giảm chất lượng điều khiển, thậm chí có thể làm hệ thống trở nên mất ổn định.
- Các yếu tố không chắc chắn xuất hiện khi mô hình hóa hệ thống vật lý.
- Các yếu tố không chắc chắc có thể phân làm hai loại:
  - Mô hình không chắc chắn
  - Nhiễu từ môi trường bên ngoài

Mô hình không chắc chắn

- Mô hình không chắc chắn do sự không chính xác hoặc sự xấp xỉ trong khi mô hình hóa:
  - Nhận dạng hệ thống chỉ thu được mô hình gần đúng: mô hình được chọn thường có bậc thấp và các thông số không thể xác định chính xác
  - Bỏ qua tính trễ hoặc không xác định chính xác độ trễ
  - Bỏ qua tính phi tuyến hoặc không biết chính xác các yếu tố phi tuyến
  - Các thành phần biến đổi theo thời gian có thể được xấp xỉ thành không biến đổi theo thời gian hoặc sự biến đổi theo thời gian không thể biết chính xác.

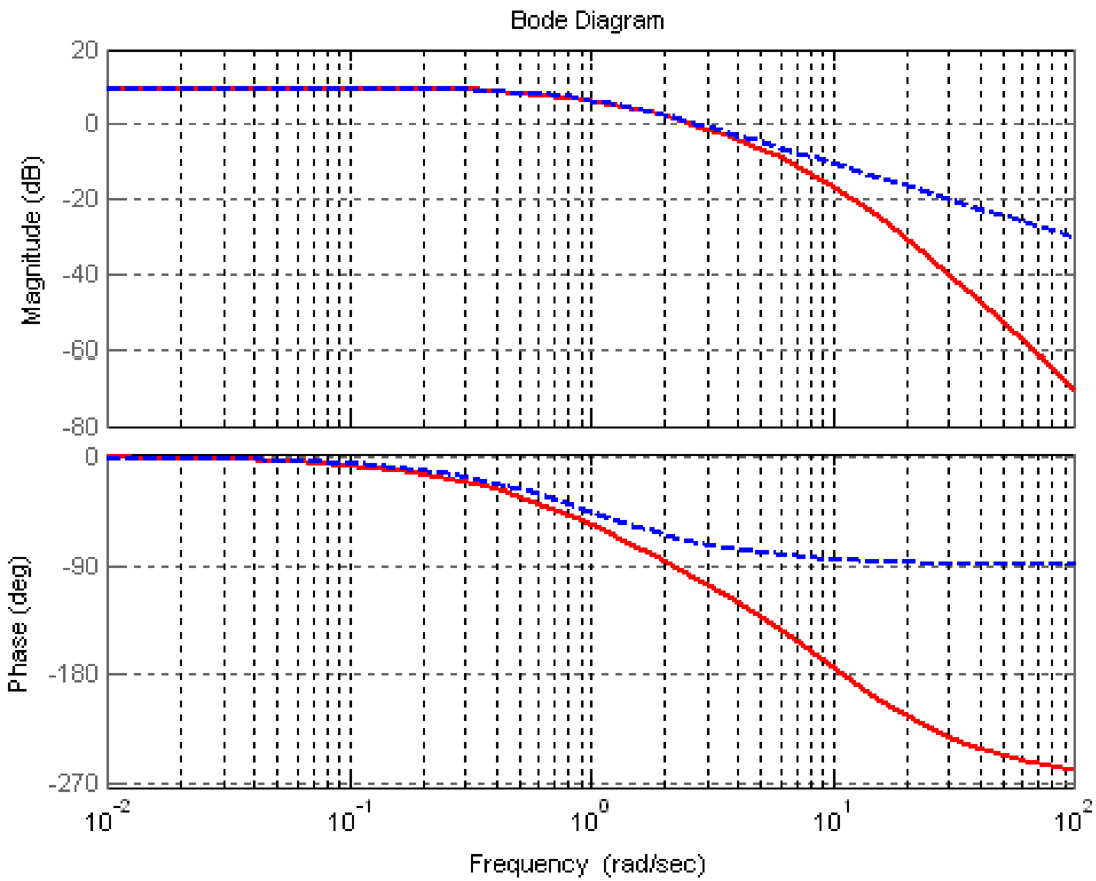
Nhiễu loạn từ bên ngoài

- Các tín hiệu nhiễu xuất hiện từ môi trường bên ngoài, thí dụ
  - như nguồn điện không ổn định
  - nhiệt độ, độ ẩm, ma sát,… thay đổi
  - nhiễu đo lường

Thí dụ: Hệ thống không bền vững

★ Đối tượng "thật": $\widetilde{G}(s) = \dfrac{3}{(s+1)(0.1s+1)^2}$

★ Mô hình bỏ qua đặc tính tần số cao: $G(s) = \dfrac{3}{(s+1)}$

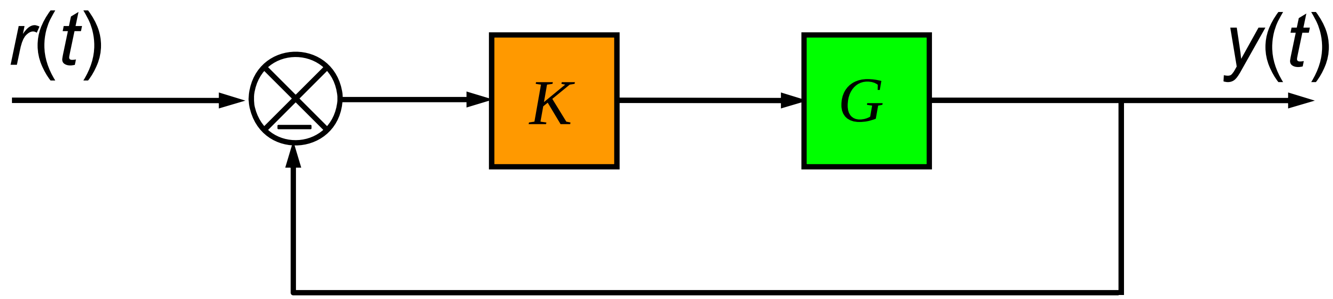


Đối tượng "thật"

Mô hình

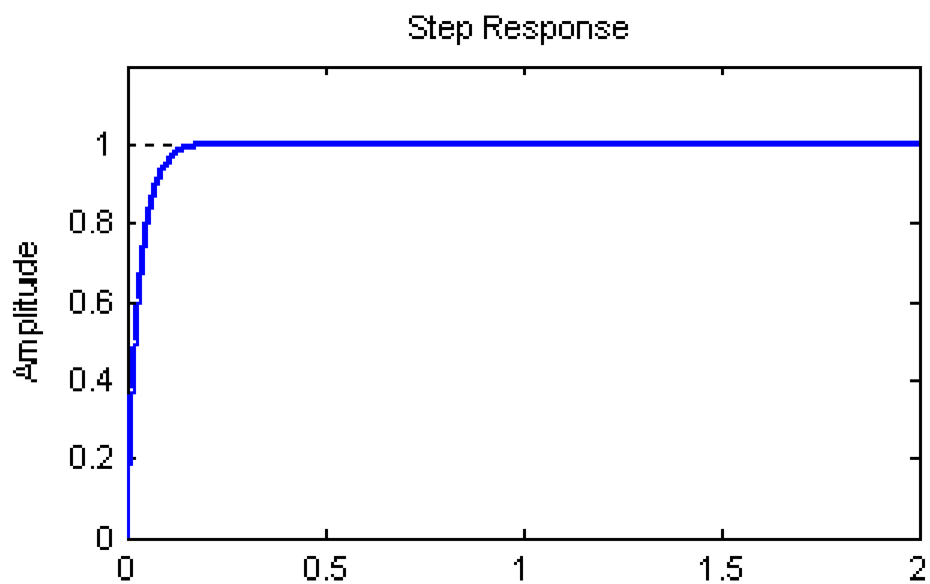
Biểu đồ Bode của "đối tượng thật" và "mô hình" trùng nhau ở miền tần số thấp, sai lệch ở miền tần số cao

Thí dụ: Hệ thống không bền vững (tt)

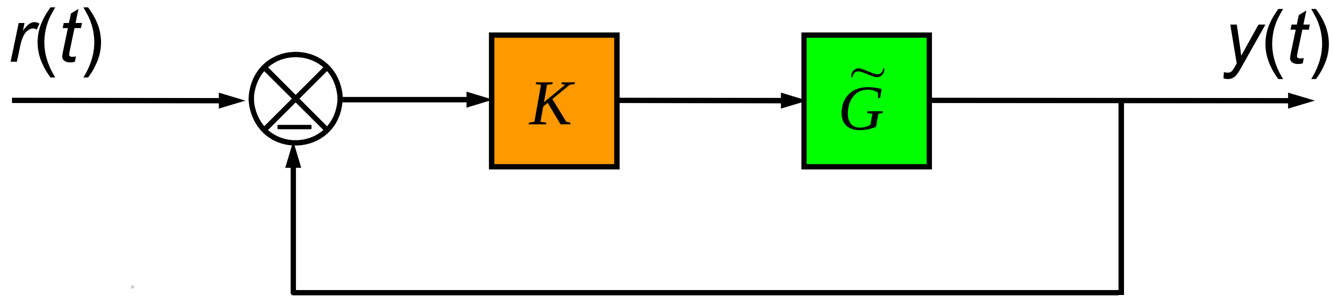


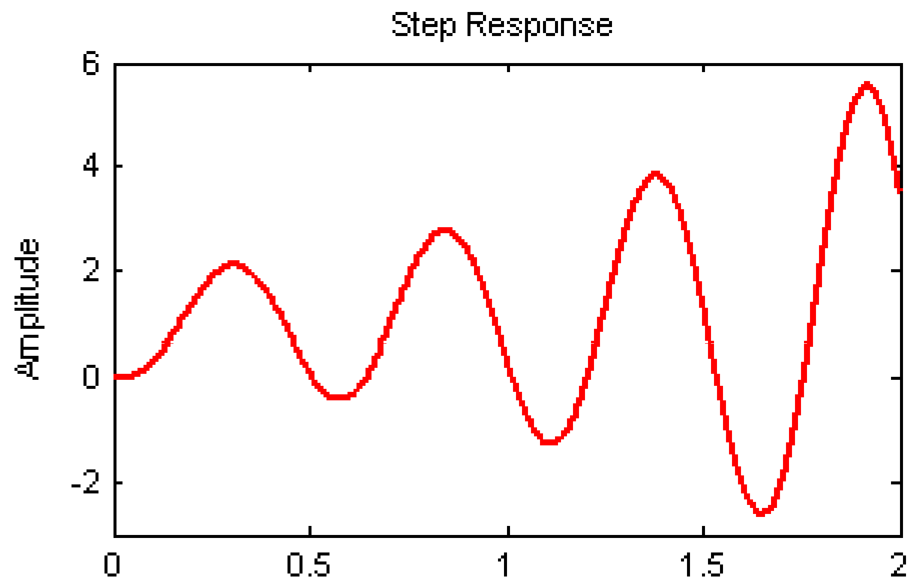
★ Bộ điều khiển thiết kế dựa vào mô hình $K(s) = \dfrac{10(s+1)}{s}$

⇒ Hệ kín khi thiết kế có cực tại –30, chất lượng đáp ứng tốt.



Thí dụ: Hệ thống không bền vững (tt)



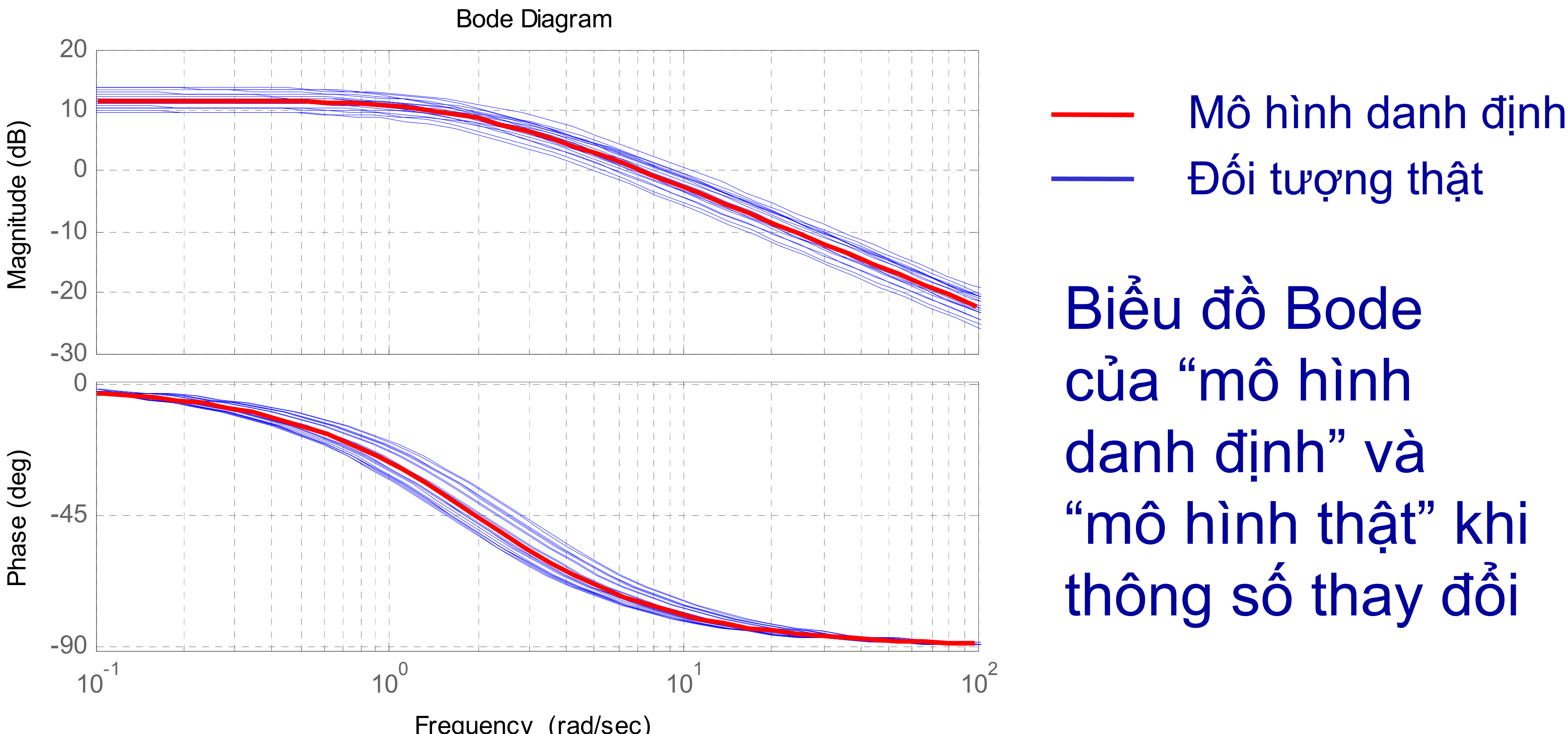


- Sử dụng bộ ĐK đã thiết kế cho đối tượng thật: đặc tính động học ở miền tần số cao đã bỏ qua khi thiết kế làm hệ thống không ổn định ⇒ Hệ thống không ổn định bền vững

Thí dụ: Hệ thống có chất lượng bền vững

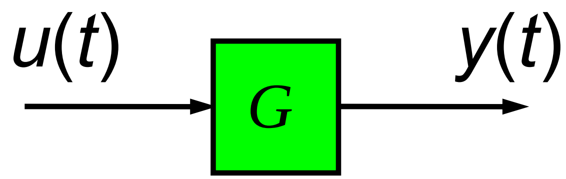
✶ Đối tượng "thật": $\widetilde{G}(s) = \dfrac{k}{Ts+1}$ $\quad 3 \le k \le 5 \quad T = 0.5 \ (\pm 30\%)$

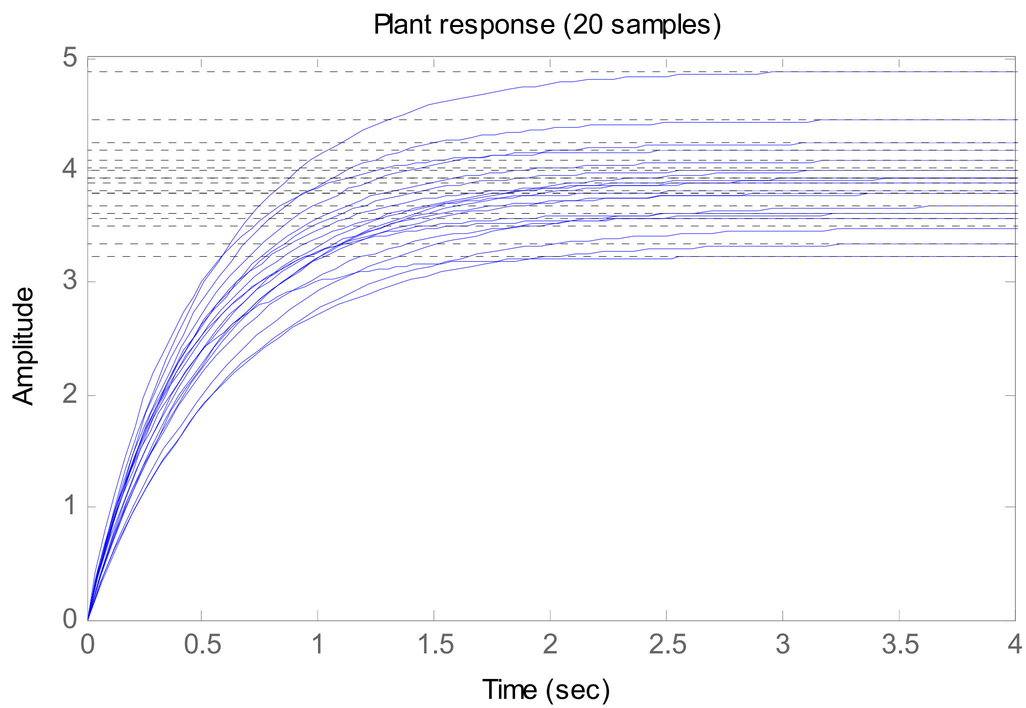
✶ Mô hình danh định: $\quad G(s) = \dfrac{4}{(0.5s+1)}$



Biểu đồ Bode của "mô hình danh định" và "mô hình thật" khi thông số thay đổi

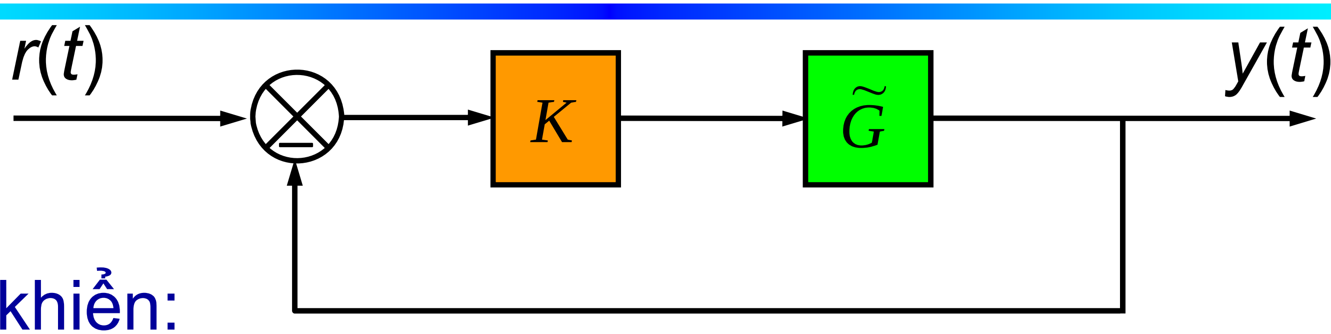
Thí dụ: Hệ thống có chất lượng bền vững (tt)





- Đáp ứng của hệ hở khi tín hiệu vào là hàm nấc: bị ảnh hưởng nhiều khi thông số của đối tượng thay đổi

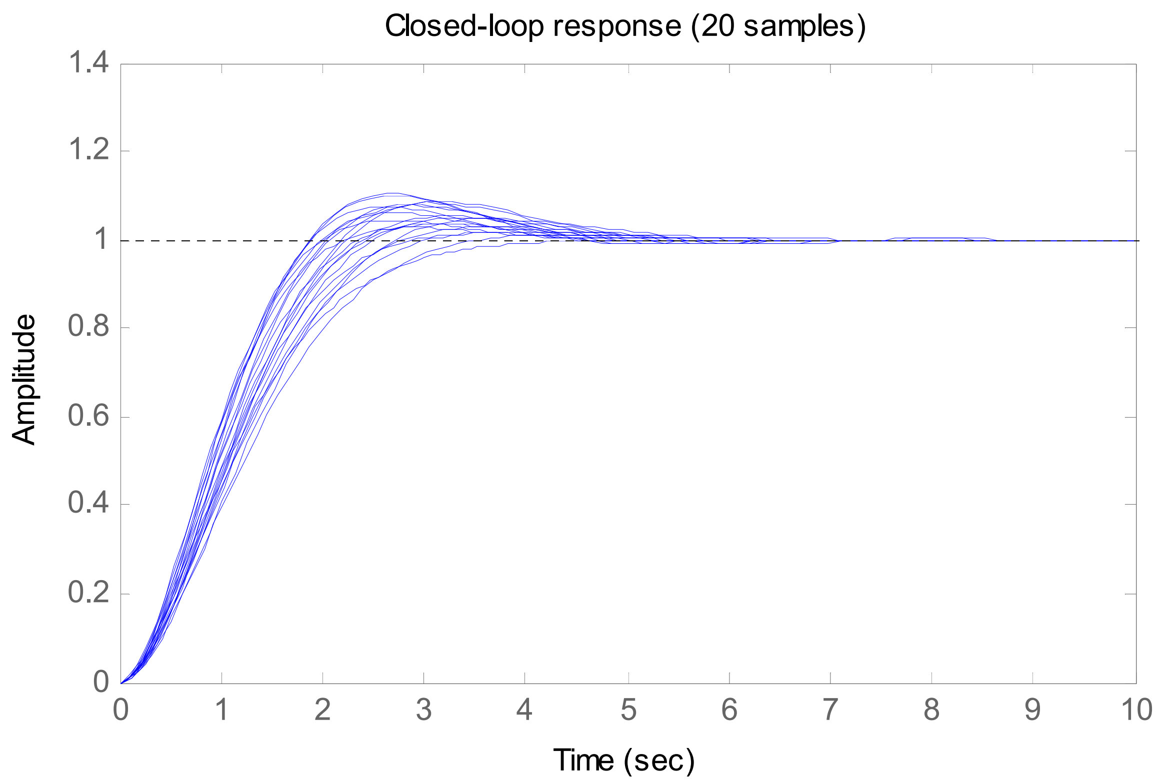
Thí dụ: Hệ thống có chất lượng bền vững (tt)



- Bộ điều khiển:

$$K(s) = \frac{1}{4s}$$

- Đáp ứng của hệ kín: hệ thống ổn định, chất lượng thay đổi không đáng kể khi thông số đối tượng thay đổi $\Rightarrow$ chất lượng bền vững



Mô phỏng HT có thông số không chắc chắn dùng Matlab

% Khâu quán tính bậc nhất với thời hằng và hệ số khuếch đại không chắc chắn

```
>> T = ureal('T',0.5,'Percentage',30);   % T = 0.5 (±30%), T0=0.5
>> k = ureal('k',4,'range',[3 5]);        %  3≤k≤5, k0=4
>> G = tf(k,[T 1])
>> figure(1);  bode(usample(G,20))        % Biểu đồ Bode hệ không chắc chắn
>> figure(2);  bode(tf(G.nominal))        % Biểu đồ Bode đối tượng danh định
```

% Bộ điều khiển

```
>> KI = 1/(2*T.Nominal*k.Nominal);
>> Gc = tf(KI,[1 0]);                     % Bộ điều khiển Gc(s)=KI/s
>> Gk = feedback(G*Gc,1)                  % Hàm truyền hệ kín
```

% Mô phỏng hệ hở và hệ kín

```
>> figure(3); step(usample(G,20)), title('Plant response (20 samples)')
>> figure(4); step(usample(Gk,20)), title('Closed-loop response (20 samples)')
```

Các phương pháp thiết kế HTĐK bền vững

* Các phương pháp phân tích và tổng hợp hệ thống điều khiển bền vững:
  * Phương pháp trong miền tần số
  * Phương pháp trong không gian trạng thái

Sơ lược lịch sử phát triển LTĐK bền vững

- (1980-): Điều khiển bền vững hiện đại
  - Đầu thập niên 1980: Phân tích μ (μ analysis)
  - Giữa thập niên 1980: Điều khiển H_∞ và các phiên bản
  - Giữa thập niên 1980: Định lý Kharitonov
  - Cuối 1980 đến 1990: Tối ưu lồi nâng cao, đặc biệt là tối ưu LMI (Linear Matrix Inequality)
  - Thập niên 1990: Các phương pháp LMI trong điều khiển

CHUẨN CỦA TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG

Định nghĩa chuẩn của vector

- Cho X là không gian vector. Một hàm giá trị thực $\|.\|$ xác định trên X được gọi là chuẩn (norm) trên X nếu hàm đó thỏa mãn các tín chất sau:

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|, \forall a \in \Re$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- Ý nghĩa: chuẩn của vector là đại lượng đo "độ dài" của vector

Các chuẩn vector thông dụng

Cho $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in \Re^n$

- Chuẩn bậc p: $\|\boldsymbol{x}\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$
- Chuẩn bậc 1: $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- Chuẩn bậc 2: $\|\boldsymbol{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$
- Chuẩn vô cùng: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

Tính chuẩn vector – Thí dụ 1

Cho $\boldsymbol{x} = [1 \quad -3 \quad 0 \quad 2]^T$

★ Chuẩn bậc 1: $\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = |1| + |-3| + |0| + |2| = 6$

★ Chuẩn bậc 2: $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{14}$

★ Chuẩn vô cùng: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4} |x_i| = \max\{|1|, |-3|, |0|, |2|\} = 3$

Định nghĩa chuẩn ma trận

Cho ma trận $A=[a_{ij}]\in C^{m\times n}$. Chuẩn của ma trận A là:

- Chuẩn bậc p: $\|A\|_p := \sup\limits_{x\neq 0}\dfrac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$

- Chuẩn bậc 1: $\|A\|_1 := \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{m}|a_{ij}|$ (tổng theo cột)

- Chuẩn bậc 2: $\|A\|_2 := \max\limits_{1\le i\le n}\sqrt{\lambda_i(A^*A)}$

  trong đó A^* là ma trận chuyển vị liên hợp của A,

  $\lambda_i(A^*A)$ là các trị riêng của A^*A .

- Chuẩn vô cùng: $\|A\|_\infty := \max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ (tổng theo hàng)

Tính chất của chuẩn ma trận

$$\|\boldsymbol{A}\| \geq 0, \forall \boldsymbol{A} \in \mathsf{C}^{n\times n}$$

$$\|\boldsymbol{A}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = 0$$

$$\|\alpha \boldsymbol{A}\| = |\alpha|.\|\boldsymbol{A}\|, \forall \alpha \in \mathsf{C}, \boldsymbol{A} \in \mathsf{C}^{n\times n}$$

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|, \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathsf{C}^{n\times n}$$

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|, \forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathsf{C}^{n\times n}$$

Tính chuẩn ma trận – Thí dụ 1

Cho ma trận $A := \begin{bmatrix} j & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

★ Chuẩn bậc 1: $\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 2} \sum_{i=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{(|\,j\,|+|\,0\,|),(|-2\,|+|\,2\,|)\} = 4$

★ Chuẩn bậc 2:

$$\|A\|_2 := \max_{1\le i\le 2} \sqrt{\lambda_i(A^* A)}$$

$$A^* A = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2j \\ -2j & 8 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(A^* A) = eig(A^* A) = \mathrm{sol}\{\det(\lambda I - A^* A) = 0\} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0.4689 \\ \lambda_2 = 8.5311 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|A\|_2 := \max_{1\le i\le n} \left\{\sqrt{0.4689}, \sqrt{8.5311}\right\} = 2.9208$$

★ Chuẩn vô cùng: $\|A\|_\infty := \max_{1\le i\le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{(|\,j\,|+|-2\,|),(|\,0\,|+|\,2\,|)\} = 3$

Tính chuẩn ma trận – Thí dụ 2

Cho ma trận $A := \begin{bmatrix} j & -1 \\ 2+j & 3 \end{bmatrix}$

⋆ Tính chuẩn : $\|A\|_1$, $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$

Chuẩn của tín hiệu

Chuẩn của t/hiệu $x(t)$ $[-\infty,+\infty]\rightarrow\Re$ được định nghĩa là:

- Chuẩn l_p: $\|x(t)\|_p := \sqrt[p]{\int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)|^p dt}$
- Chuẩn l_1: $\|x(t)\|_1 := \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt$
- Chuẩn l_2: $\|x(t)\|_2 := \sqrt{\int_{t=-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt}$ (căn bậc 2 của năng lượng của tín hiệu)
- Chuẩn l_∞ : $\|x(t)\|_\infty := \sup_{-\infty \le t \le +\infty} |x(t)|$ (giá trị cực đại của t/h)
- *Ý nghĩa:* Chuẩn của tín hiệu là đại lượng đo "độ lớn" của tín hiệu

Tính chuẩn của tín hiệu – Thí dụ 1

Cho tín hiệu: $x(t) = \begin{cases} 1/t & t \geq 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$

★ Chuẩn ℓ_1: $\|x(t)\|_1 = \int_{t=-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \ln t \Big|_1^{+\infty} = +\infty$

★ Chuẩn ℓ_2 : $\|x(t)\|_2 = \left(\int_{t=-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \right)^{1/2} = \left(\int_{t=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \right)^{1/2} = \left(-\frac{1}{t} \Big|_1^{+\infty} \right)^{1/2} = 1$

★ Chuẩn ℓ_∞ : $\|x(t)\|_\infty = \sup_{-\infty \leq t \leq +\infty} |x(t)| = \sup_{1 \leq t < +\infty} \left\{ \frac{1}{t} \right\} = 1$

Tính chuẩn của tín hiệu – Thí dụ 2

Cho tín hiệu: $x(t) = e^{-3t}.u(t)$

- Tính chuẩn $\ell_1, \ell_2, \ell_\infty$

Chuẩn của hệ thống

Cho hệ thống tuyến tính có hàm truyền $G(s)$.

★ **Chuẩn bậc 2:** $$\|G(j\omega)\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(j\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2}$$

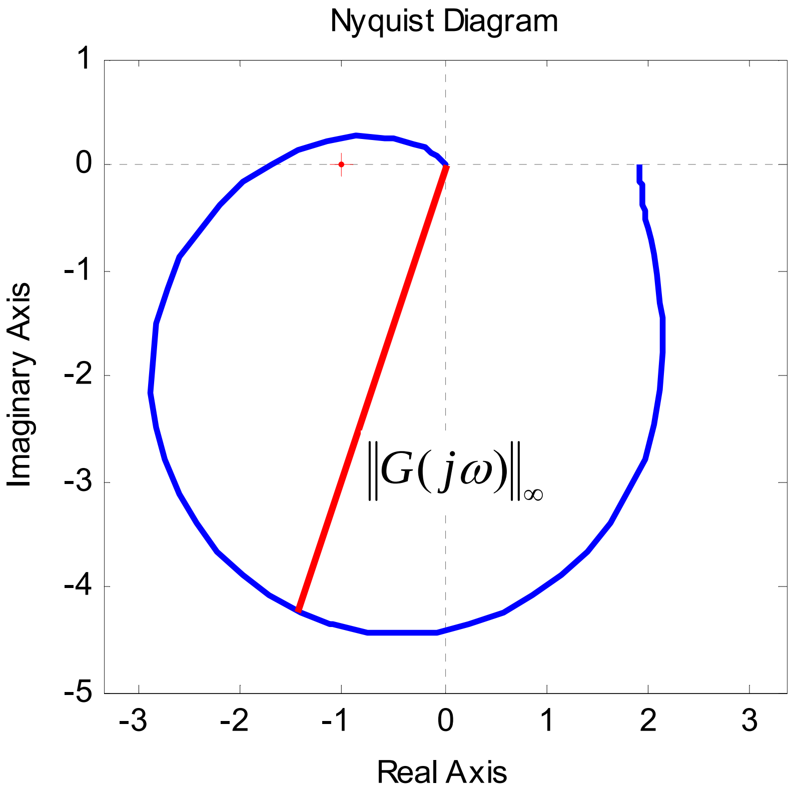
Chú ý do định lý Parseval, ta có:

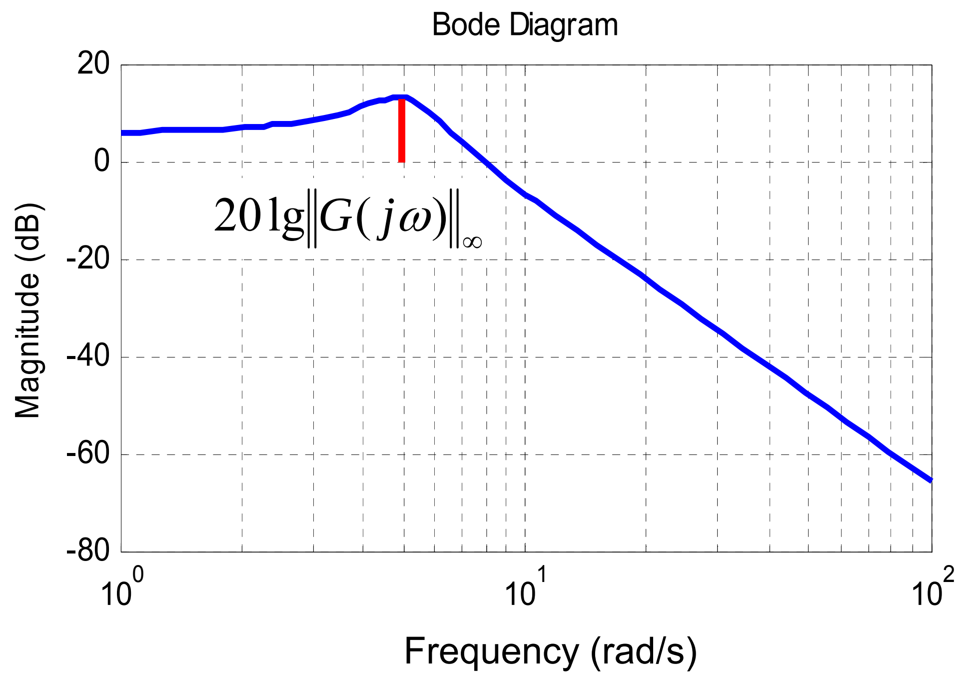
$$\|G(j\omega)\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(j\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$

trong đó $g(t)$ là đáp ứng xung của hệ thống.

★ **Chuẩn vô cùng:** $$\|G(j\omega)\|_\infty := \sup_{\omega}|G(j\omega)|$$

Biễu diễn chuẩn vô cùng trên biểu đồ





★ Chuẩn vô cùng bằng khoảng cách từ gốc tọa độ của mặt phẳng phức đến điểm xa nhất trên đường cong Nyquist của $G(j\omega)$, hoặc bằng đỉnh cộng hưởng trên biểu đồ Bode biên độ $|G(j\omega)|$

Cách tính chuẩn bậc 2

- Nếu $G(s)$ có bậc tử số ≥ bậc mẫu số : $\|G(j\omega)\|_2 = \infty$
- Nếu $G(s)$ có bậc tử số < bậc mẫu số và tất cả các cực đều nằm bên trái mp phức. Ta có:

$$\|G(j\omega)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|G(j\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{+j\infty} G(-s)G(s)ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Omega} G(-s)G(s)ds$$

trong đó Ω là đường cong kín gồm trục ảo và nữa đường tròn bán kính vô hạn bao nữa trái mặt phẳng phức.

Theo đ/lý thặng dư: $\|G(j\omega)\|_2^2 = \sum_i \lim_{s\to p_i}(s-p_i)G(-s)G(s)$

(p_i là cực bên trái mặt phẳng phức của $G(-s)G(s)$)

Thí dụ tính chuẩn bậc 2 của hệ thống

Cho $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{(s+3)(s+5)}$. Tính $\|G\|_2$

★ ***Giải***

$$\|G\|_2^2 = \sum_i \lim_{s\to p_i}(s-p_i)G(-s)G(s)$$

$$\Rightarrow \|G\|_2^2 = \lim_{s\to -3}(s+3)\frac{10(-s+1)}{(-s+3)(-s+5)}\frac{10(s+1)}{(s+3)(s+5)} +$$

$$\lim_{s\to -5}(s+5)\frac{10(-s+1)}{(-s+3)(-s+5)}\frac{10(s+1)}{(s+3)(s+5)}$$

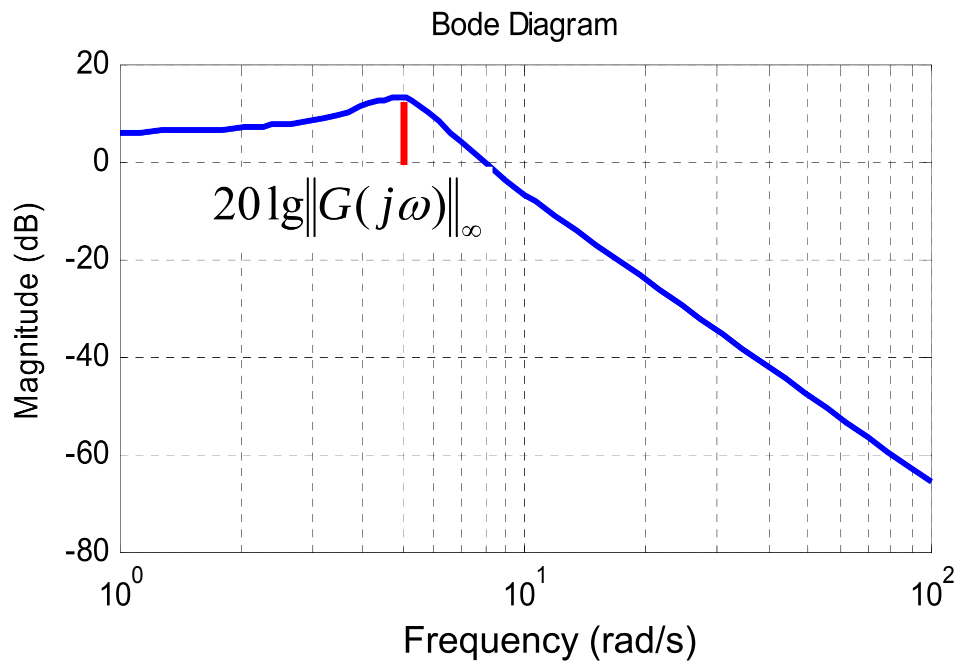
$$\Rightarrow \|G\|_2^2 = -\frac{25}{3}+15 = 6.6667 \qquad \Rightarrow \boxed{\|G\|_2 = 2.582}$$

Cách tính chuẩn vô cùng

- Cách 1: tìm cực đại của $|G(j\omega)|$ bằng cách tìm nghiệm phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{d|G(j\omega)|}{d\omega} = 0 \\ \dfrac{d^2|G(j\omega)|}{d\omega^2} < 0 \end{cases}$$

- Cách 2: tính gần đúng dựa vào biểu đồ Bode



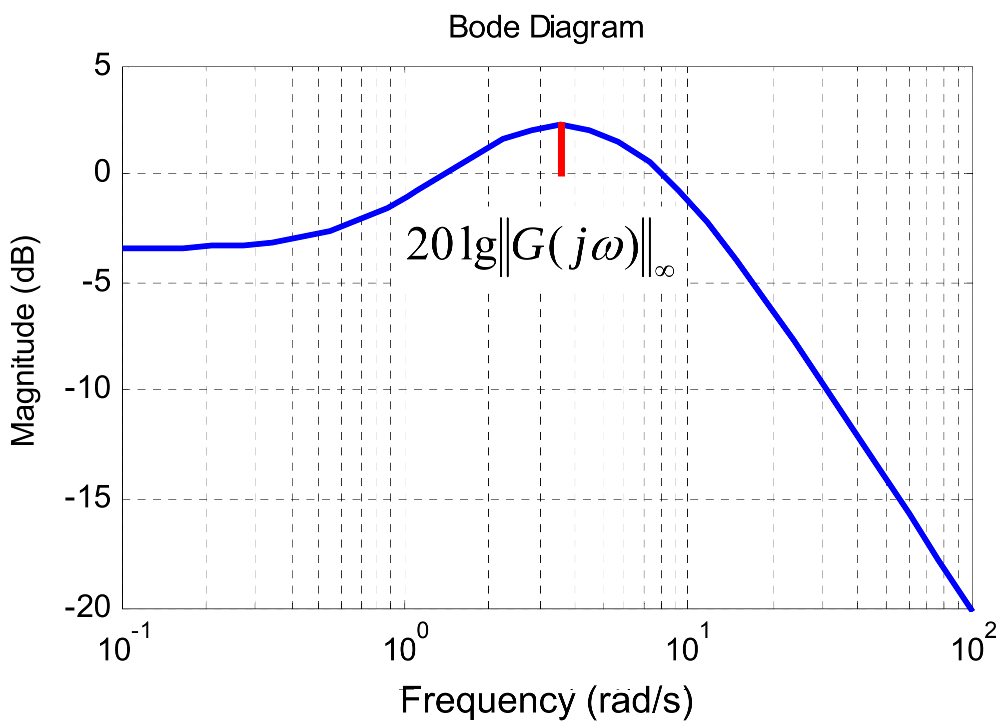
Thí dụ tính chuẩn vô cùng của hệ thống

Cho $G(s) = \dfrac{10(s+1)}{(s+3)(s+5)}$. Tính $\|G\|_\infty$

★ ***Giải***

★ Cách 1: Giải phương trình tìm cực đại (SV tự làm)

★ Cách 2: Dùng biểu đồ Bode



Dựa vào biểu đồ Bode, ta có

$$20\lg\|G(j\omega)\|_\infty = 2.23dB$$

$$\Rightarrow \|G(j\omega)\|_\infty = 1.2927$$

Tính chuẩn dùng Matlab

★ Chuẩn của vector hoặc ma trận:

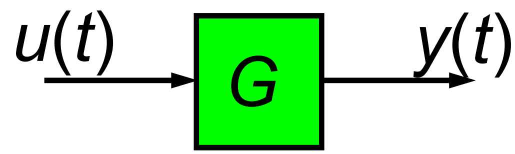
```
>> norm(X,1)      % chuẩn bậc 1 của vector hoặc ma trận X
>> norm(X,2)      % chuẩn bậc 2 của vector hoặc ma trận X
>> norm(X,inf)    % chuẩn vô cùng của vector hoặc ma trận X
```

★ Chuẩn của hệ thống:

```
>> normh2(G)         % chuẩn bậc 2 của hệ thống G
>> normhinf(G)       % chuẩn vô cùng của hệ thống G
%  Chú ý: G phải được khai báo bằng lệnh tf (transfer
% function) hoặc ss (state-space model)
```

Quan hệ vào – ra

- Cho hệ tuyến tính có h/truyền $G(s)$, đáp ứng xung là $g(t)$.
- Vấn đề đặt ra là xác định "độ lớn" của t/hiệu ra $y(t)$ khi biết "độ lớn" của t/hiệu vào $u(t)$



Bảng 1: Chuẩn của tín hiệu ra

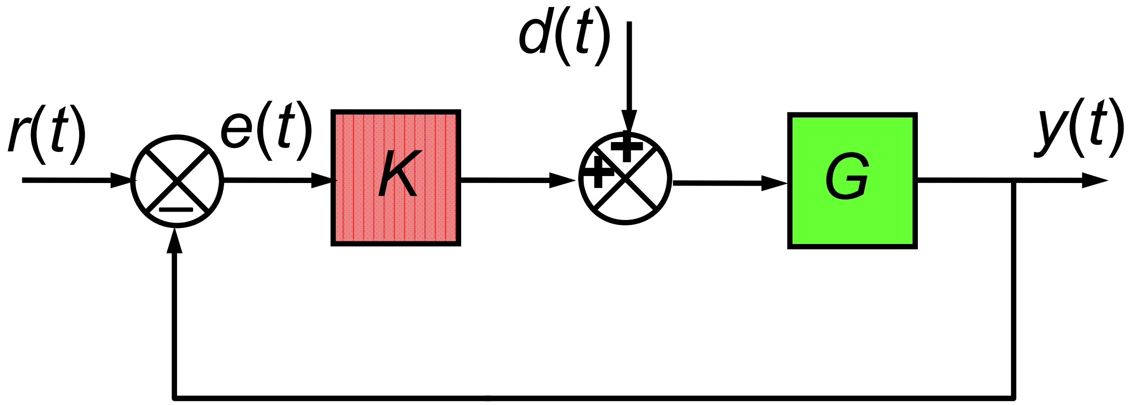
	$u(t) = \delta(t)$	$u(t) = \sin(\omega t)$
$\|y\|_2$	$\|G\|_2$	∞
$\|y\|_\infty$	$\|g\|_\infty$	$\|G(j\omega)\|$

Bảng 2: Độ lợi của hệ thống

	$\|u\|_2$	$\|u\|_\infty$
$\|y\|_2$	$\|G\|_\infty$	∞
$\|y\|_\infty$	$\|G\|_2$	$\|g\|_1$

- Ứng dụng: Bảng 1&2 thường được sử dụng để đánh giá:
  - Sai số của hệ thống khi biết tín hiệu vào, hoặc
  - Ảnh hưởng của nhiễu đến tín hiệu ra của hệ thống

Thí dụ: Đánh giá sai số



★ Cho hệ thống điều khiển hồi tiếp âm đơn vị, trong đó

$$G(s) = \frac{2}{s+2} \qquad K(s) = 4$$

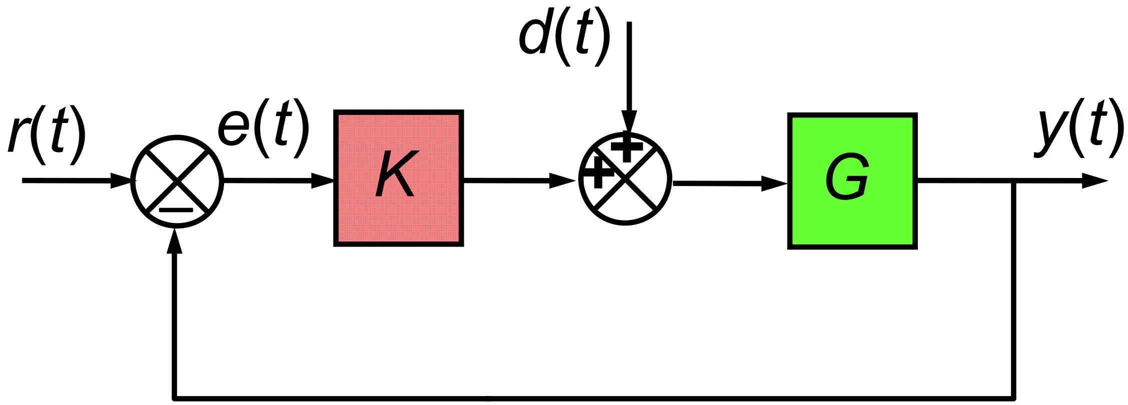
Xét trường hợp nhiễu bằng 0. Tính giá trị cực đại của sai số trong các trường hợp:

(a) Tín hiệu vào là $r(t)$=sin(3t)

(b) Tín hiệu vào $r(t)$ bất kỳ có biên độ nhỏ hơn 1

Thí dụ: Khảo sát ảnh hưởng của nhiễu (tt)

★ ***Giải:***



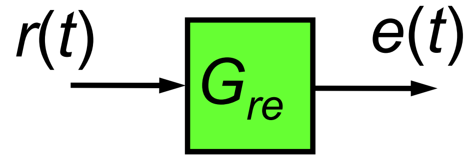
★ Hàm truyền tương từ *r*(*t*) đến *e*(*t*)

$$G_{re}(s) = \frac{1}{1+K(s)G(s)} = \frac{1}{1+4\dfrac{2}{s+2}}$$

$$\Rightarrow \quad G_{re}(s) = \frac{s+2}{s+10}$$

Thí dụ: Khảo sát ảnh hưởng của nhiễu (tt)

(a) Trường hợp $r(t)=\sin(3t)$



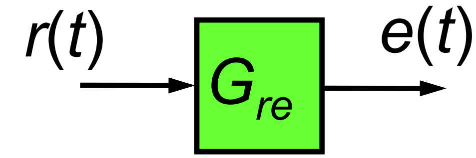
★ Giá trị cực đại của sai số khi tín hiệu vào hình sin theo bảng 1 là:

$$\|e(t)\|_{\infty} = |G_{re}(j\omega)|$$

$$|G_{re}(j\omega)| = \frac{\sqrt{\omega^2+4}}{\sqrt{\omega^2+100}} \Rightarrow |G_{re}(j3)| = \frac{\sqrt{3^2+4}}{\sqrt{3^2+100}} = 0.3453$$

$$\Rightarrow \|e(t)\|_{\infty} = |G_{re}(j3)| = 0.3453$$

(b) Trường hợp $r(t)$ bất kỳ có biên độ nhỏ hơn 1



★ Giá trị cực đại của sai số theo bảng 2 là:

$$\|e(t)\|_\infty = \|g_{re}\|_1 \|r(t)\|_\infty$$

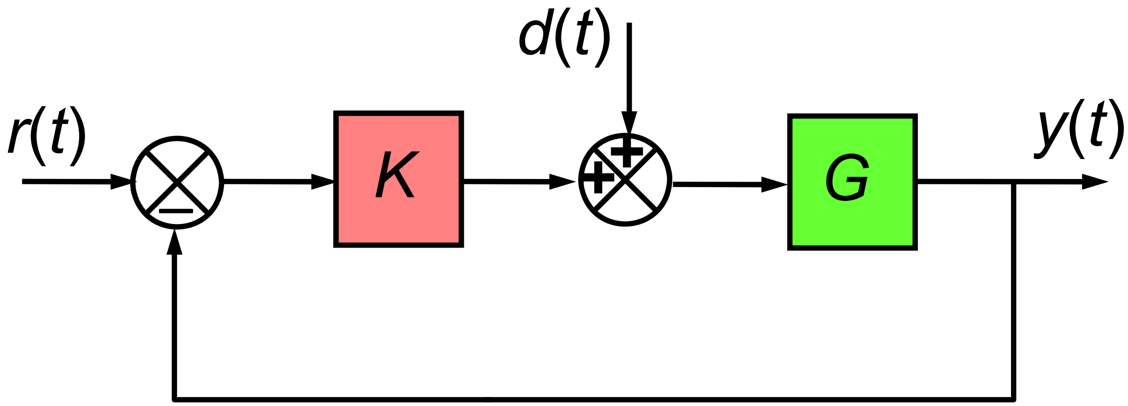
$$g_{re}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G_{re}(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{s+10}\right\} = \delta(t) - 8e^{-10t}$$

$$\|g_{re}(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |g_{re}(t)| dt < \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt + \int_{0}^{+\infty} 8e^{-10t} dt = 1 + \frac{8}{10} = 1.8$$

$$\Rightarrow \|e(t)\|_\infty = \|g_{re}(t)\|_1 \|r(t)\|_\infty < 1.8 \times 1$$

$$\Rightarrow \|e(t)\|_\infty < 1.8$$

Thí dụ: Khảo sát ảnh hưởng của nhiễu



- Cho hệ thống điều khiển hồi tiếp âm đơn vị, trong đó

$$G(s) = \frac{2}{s+2} \qquad K(s) = 4$$

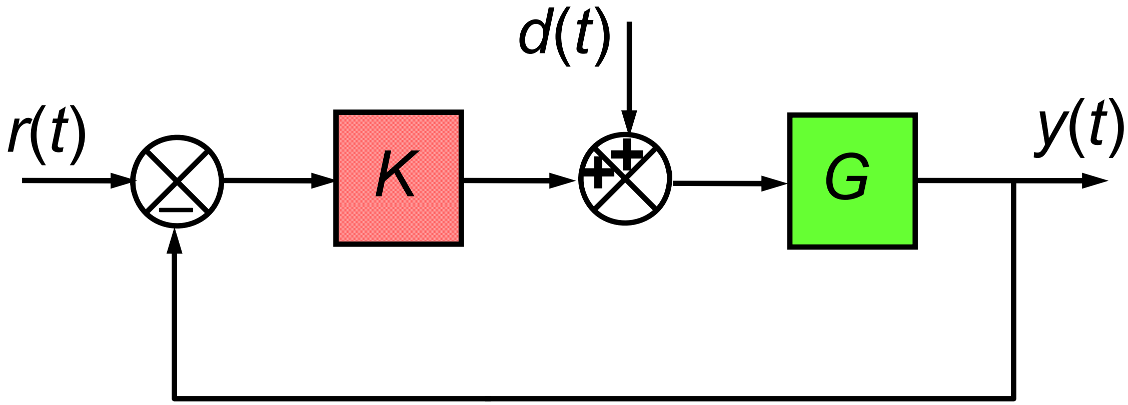
Xét trường hợp tín hiệu vào bằng 0. Tính năng lượng và giá trị cực đại của tín hiệu ra trong các trường hợp:

(a) Nhiễu $d(t)$ là xung dirac

(b) Nhiễu $d(t)$ là tín hiệu ngẫu nhiên bất kỳ có năng lượng nhỏ hơn 0.4

Thí dụ: Khảo sát ảnh hưởng của nhiễu (tt)

★ ***Giải:***



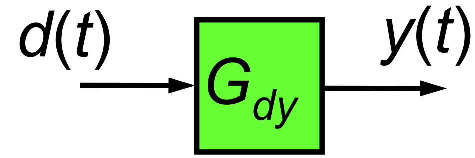
★ Hàm truyền tương từ *d*(*t*) đến *y*(*t*)

$$G_{dy}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{\dfrac{2}{s+2}}{1 + 4\dfrac{2}{s+2}}$$

$$\Rightarrow \quad G_{dy}(s) = \frac{2}{s+10}$$

Thí dụ: Khảo sát ảnh hưởng của nhiễu (tt)

(a) Trường hợp $d(t)$ là xung dirac



✶ Năng lượng của tín hiệu ra theo bảng 1 là:

$$\|y(t)\|_2^2 = \|G_{dy}\|_2^2$$

$$\|G_{dy}\|_2^2 = \sum_i \lim_{s\to p_i}(s-p_i)G_{dy}(-s)G_{dy}(s) = \lim_{s\to -10}(s+10)\frac{2}{(-s+10)}\frac{2}{(s+10)} = 0.2$$

$$\Rightarrow \quad \|y(t)\|_2^2 = \|G_{dy}\|_2^2 = 0.2$$

✶ Giá trị cực đại của tín hiệu ra theo bảng 1 là:

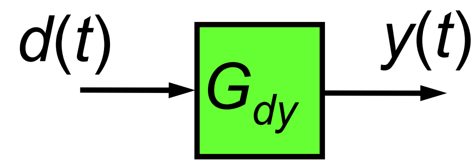
$$\|y(t)\|_\infty = \|g_{dy}(t)\|_\infty$$

$$g_{yd}(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G_{dy}(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+10}\right\} = 2e^{-10t}$$

$$\Rightarrow \|y(t)\|_\infty = \|g_{dy}(t)\|_\infty = 2$$

Thí dụ: Khảo sát ảnh hưởng của nhiễu (tt)

(b) Trường hợp *d*(*t*) là nhiễu có $\|d(t)\|_2^2 \le 0.4$



✶ Năng lượng của tín hiệu ra theo bảng 2 là:

$$\|y(t)\|_2 = \|G_{dy}\|_\infty \|d(t)\|_2$$

$\|G_{yd}\|_\infty = 0.2$ (xác định được dễ dàng dựa vào biểu đồ Bode)

$$\Rightarrow \|y(t)\|_2^2 = \|G_{dy}\|_\infty^2 \|d(t)\|_2^2 \le (0.2)^2 \times 0.4 = 0.016$$

✶ Giá trị cực đại của tín hiệu ra theo bảng 2 là:

$$\|y(t)\|_\infty = \|G_{dy}\|_2 \|d(t)\|_2$$

$\|G_{dy}\|_2 = 0.447$ (xem cách tính ở câu a)

$$\Rightarrow \|y(t)\|_\infty = \|G_{dy}\|_2 \|d(t)\|_2 \le 0.447 \times \sqrt{0.4} = 0.283$$

MÔ HÌNH KHÔNG CHẮC CHẮN

Mô hình không chắc chắn

- Mô hình toán học không thể mô tả hoàn toàn chính xác hệ thống vật lý $\Rightarrow$ cần quan tâm đến ảnh hưởng của sai số mô hình đến chất lượng điều khiển
- Phương pháp cơ bản để xét đến yếu tố không chắc chắn là mô hình hóa hệ thống thuộc về một tập hợp mô hình $\mathcal{M}$.
- Hai dạng mô hình không chắc chắn:
  - Mô hình không chắc chắn có cấu trúc (còn gọi là mô hình tham số không chắc chắn)
  - Mô hình không chắc chắn không cấu trúc

Mô hình không chắc chắn có cấu trúc

- **Mô hình không chắc chắn có cấu trúc**: hệ thống mô tả bởi hàm truyền hoặc PTTT trong đó một hoặc nhiều thông số của hàm truyền hoặc PTTT thay đổi trong miền xác định trước.
- Một số thí dụ:
  - mô hình bậc 2 không chắc chắn (như hệ xe-lò xo -giảm chấn hoặc hệ RLC)

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{8}{s^2 + as + 1} : a_{\min} \le a \le a_{\max} \right\}$$

  - mô hình có trễ không chắc chắn (như lò nhiệt)

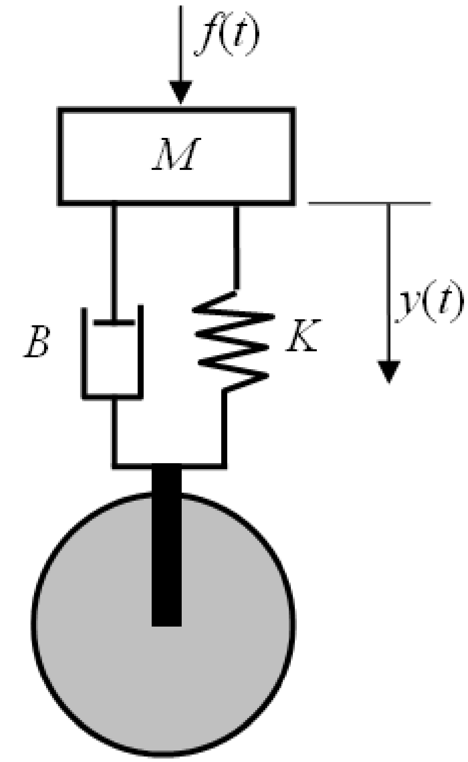
$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{e^{-\tau s}}{5s + 1} : \tau_{\min} \le \tau \le \tau_{\max} \right\}$$

Thí dụ mô hình có tham số không chắc chắn

- Cho hệ thống giảm sốc mô tả bởi PTVP bậc 2:

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=f(t)$$

M: khối lượng tác động lên bánh xe,
B hệ số ma sát, *K* độ cứng lò xo
f(*t*): lực do sốc: tín hiệu vào
y(*t*): dịch chuyển của thân xe: tín hiệu ra



- Giả sử không biết chính xác thông số của hệ thống, PT trên có thể biểu diễn lại dưới dạng

$$(m_0+\Delta_m)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+(b_0+\Delta_b)\frac{dy(t)}{dt}+(k_0+\Delta_k)y(t)=f(t)$$

trong đó: m_0, b_0, k_0 là các thông số danh định;
Δ_m, Δ_b, Δ_k biểu diễn sự thay đổi của các thông số

Thí dụ mô hình tham số không chắc chắn

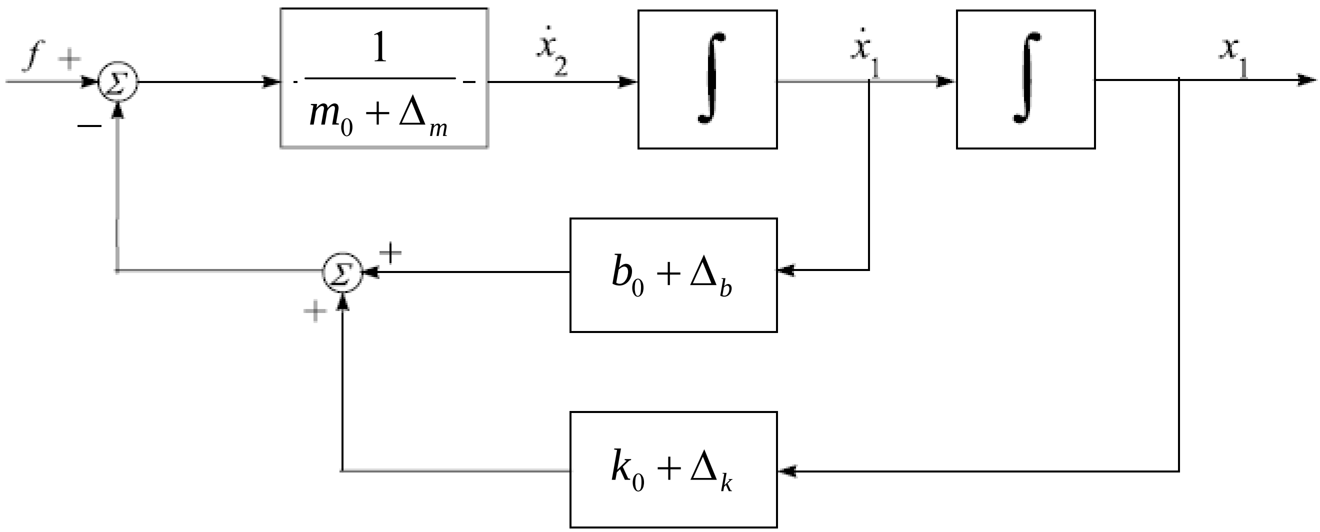
- Đặt các biến trạng thái: $x_1(t) = y(t), x_2(t) = \dot{y}(t)$
- Phương trình trạng thái mô tả đối tượng:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{m_0 + \Delta_m}\left[-(k_0 + \Delta_k)x_1 - (b_0 + \Delta_b)x_2 + f\right]$$

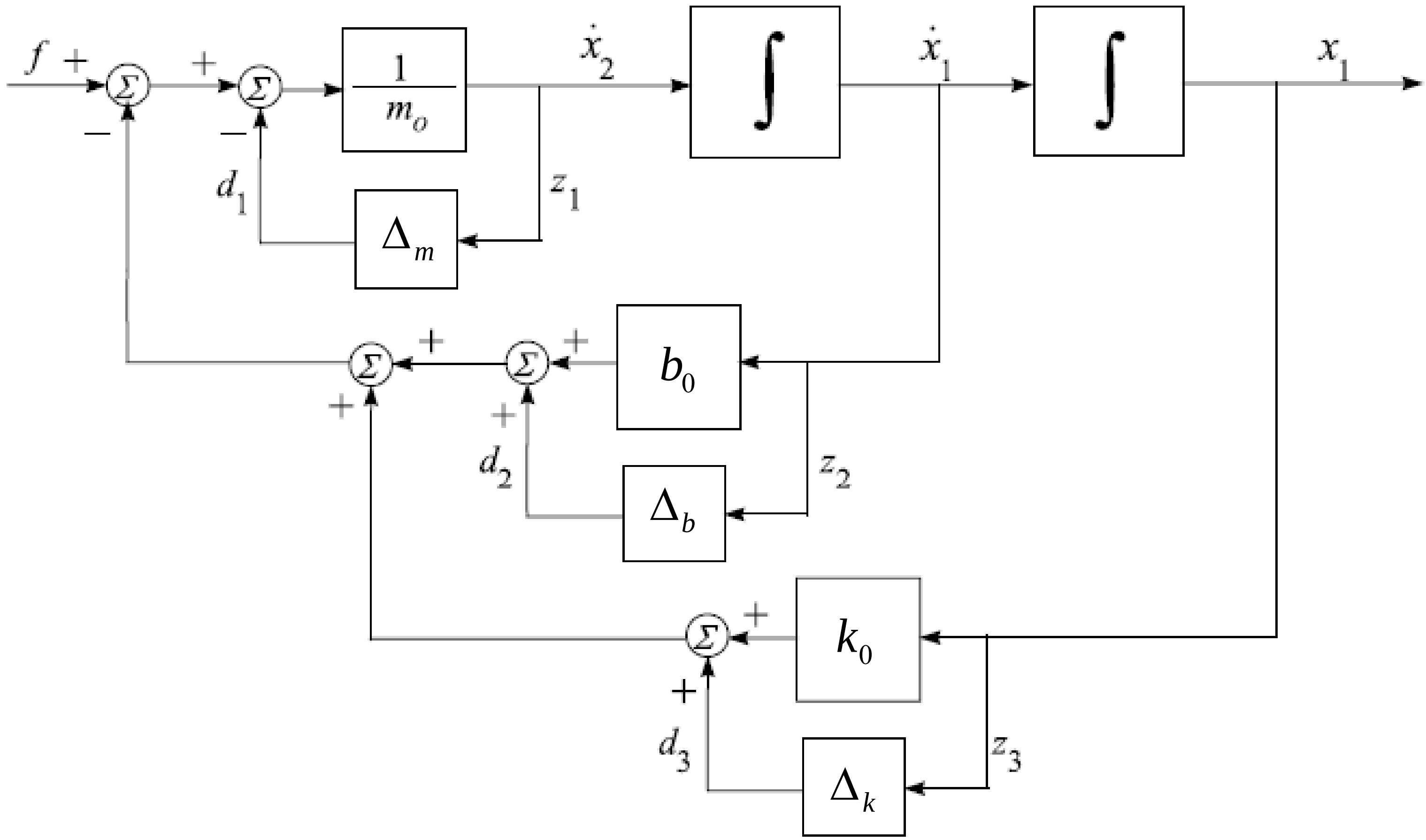
$$y = x_1$$

- Sơ đồ khối:



Thí dụ mô hình tham số không chắc chắn

- Biến đổi sơ đồ khối:



Thí dụ mô hình tham số không chắc chắn

- Đặt các biến z_1, z_2, z_3, d_1, d_2, d_3 như trên sơ đồ khối.
- Phương trình trạng thái của hệ thống có thông số không chắc chắn có thể biểu diễn lại dưới dạng:.

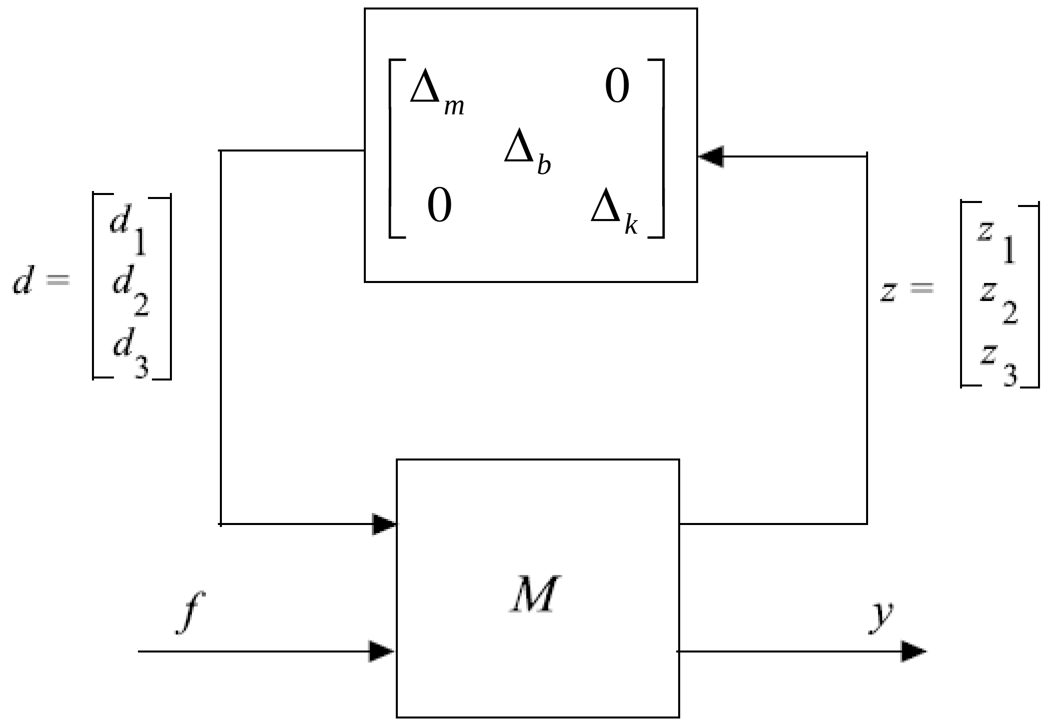
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_0}{m_0} & -\dfrac{b_0}{m_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m_0} \end{bmatrix} f$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{k_0}{m_0} & -\dfrac{b_0}{m_0} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{m_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Thí dụ mô hình tham số không chắc chắn

✶ Đặt *M* là ma trận hàm truyền của hệ thống. Sơ đồ khối hệ thống có thể biểu diễn dưới dạng:



Mô hình không chắc chắn không cấu trúc

- **Mô hình không chắc chắn không cấu trúc**: mô tả yếu tố không chắc chắn dùng chuẩn hệ thống.
- Mô hình không chắc chắn không cấu trúc thường dùng hơn vì 2 lý do:
  - Tất cả các mô hình dùng trong thiết kế hệ thống điều khiển đều chứa đựng trong đó các yếu tố không chắc chắn không cấu trúc để bao hàm đặc tính động học không mô hình hóa, đặc biệt là ở miền tần số cao.
  - Sử dụng mô hình không chắc chắn không cấu trúc có thể dễ dàng hơn trong việc xây dựng các phương pháp và phân tích thiết kế HTĐK bền vững.

Các dạng MH không chắc chắn không cấu trúc

- Bốn MH không chắc chắn không cấu trúc thường dùng:

$$\mathcal{M} = \left\{\tilde{G} = (1+\Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$$ (Mô hình nhiễu nhân)

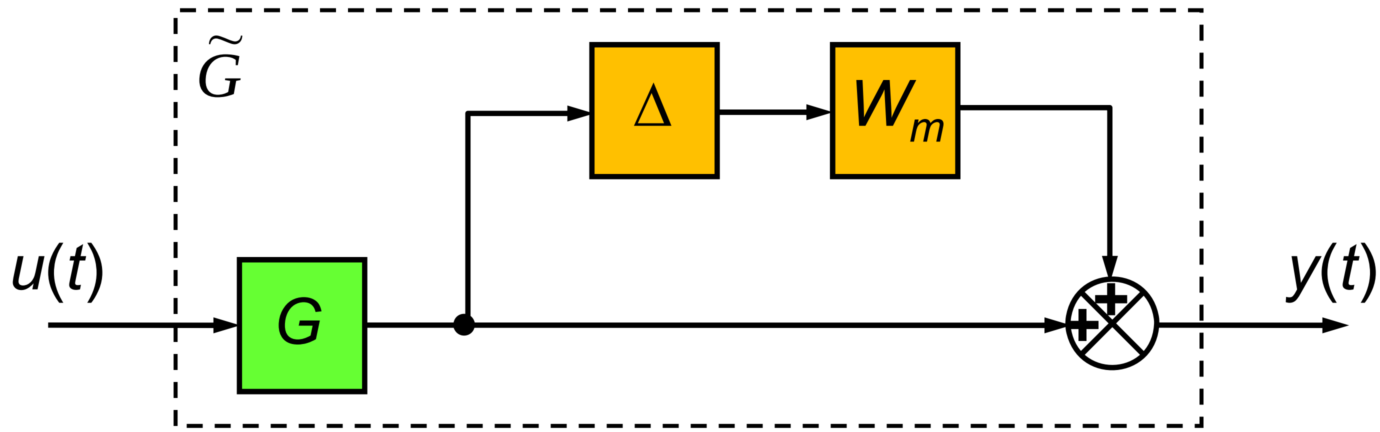
$$\mathcal{M} = \left\{\tilde{G} = G + \Delta W_m : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$$ (Mô hình nhiễu cộng)

$$\mathcal{M} = \left\{\tilde{G} = \frac{G}{1+\Delta W_m G} : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$$ (Mô hình nhiễu cộng ngược)

$$\mathcal{M} = \left\{\tilde{G} = \frac{G}{1+\Delta W_m} : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$$ (Mô hình nhiễu nhân ngược)

- Trong đó:
  - G gọi là mô hình danh định (nominal model)
  - $\tilde{G}$ là mô hình không chắc chắn
  - Δ: là hàm truyền ổn định, thay đổi bất kỳ thỏa mãn $\|\Delta\|_\infty \le 1$ dùng mô tả yếu tố không chắc chắn không cấu trúc.
  - W_m: hàm truyền ổn định, đóng vai trò là hàm trọng số

Mô hình nhiễu nhân

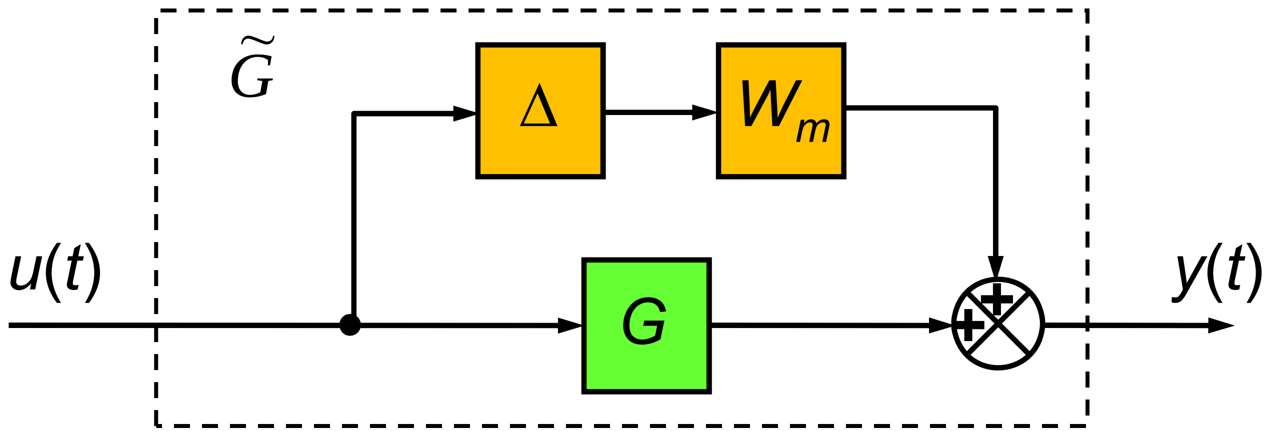


- Biểu thức mô hình nhiễu nhân:

$$\widetilde{G} = \left\{ (1 + \Delta W_m) G : \|\Delta\|_\infty \le 1 \right\}$$

- Thường dùng để mô tả các yếu tố không chắc chắn:
  - Đặc tính tần số cao của đối tượng
  - Zero không chắc chắn

Mô hình nhiễu cộng

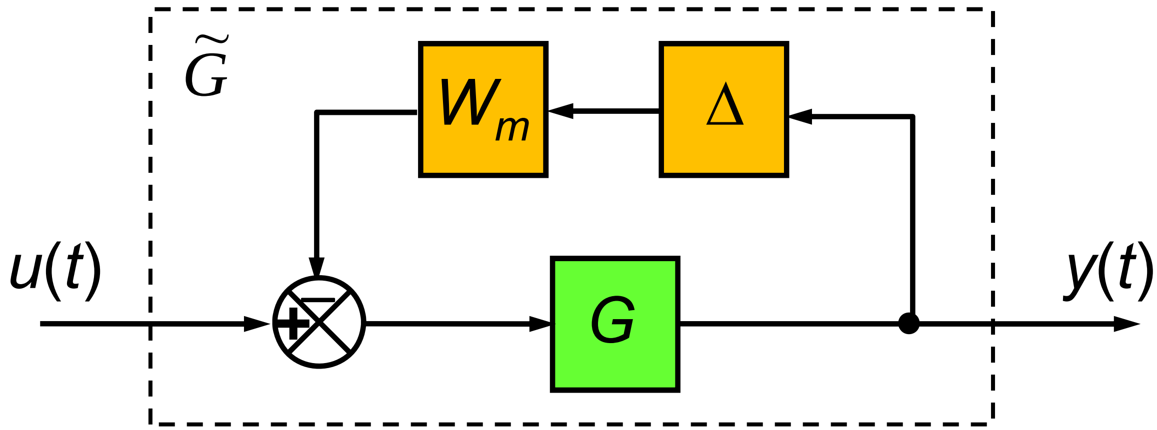


- Biểu thức mô hình nhiễu cộng:

$$\widetilde{G} = \left\{ G + \Delta W_m : \|\Delta\|_\infty \leq 1 \right\}$$

- Thường dùng để mô tả các yếu tố không chắc chắn:
  - Đặc tính tần số cao của đối tượng
  - Zero không chắc chắn

Mô hình nhiễu cộng ngược

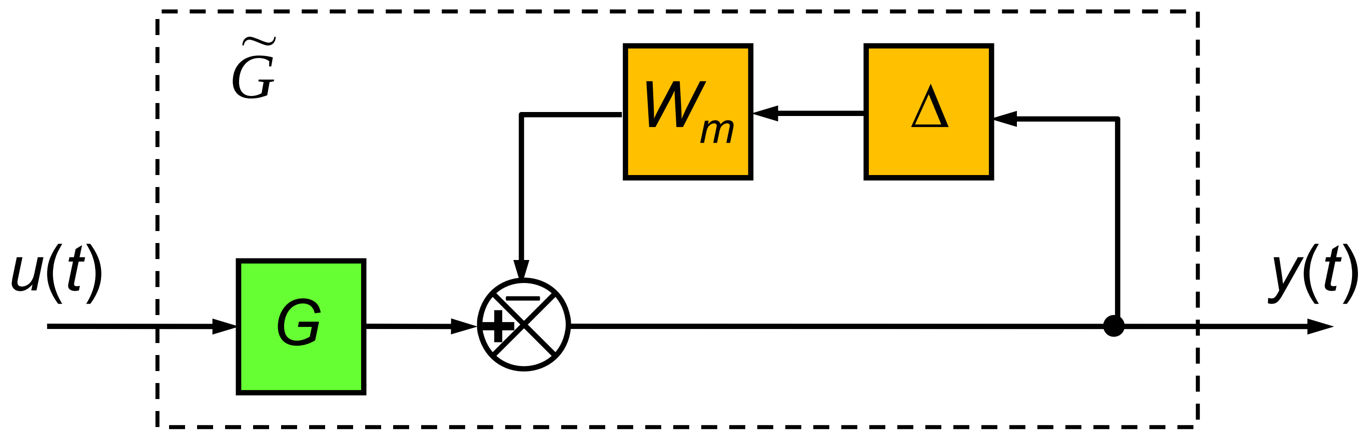


- Biểu thức mô hình nhiễu cộng ngược:

$$\tilde{G} = \frac{G}{1 + \Delta W_m G} : \|\Delta\|_\infty \le 1$$

- Thường dùng để mô tả các yếu tố không chắc chắn:
  - Đặc tính không chắc chắn ở miền tần số thấp
  - Cực không chắc chắn

Mô hình nhiễu nhân ngược



★ Biểu thức mô hình sai số nhân ngược:

$$\widetilde{G} = \frac{G}{1 + \Delta W_m} : \|\Delta\|_\infty \le 1$$

★ Thường dùng để mô tả các yếu tố không chắc chắn:

- Đặc tính không chắc chắn ở miền tần số thấp
- Cực không chắc chắn

Xây dựng mô hình không chắn chắn – Cách 1

- ***Bước 1:*** Xây dựng mô hình danh định *G* dùng phương pháp mô hình hóa thông thường với bộ thông số danh định của đối tượng.
- ***Bước 2:*** Xác định hàm truyền trọng số W_m, tùy theo từng mô hình, hàm truyền trọng số cần chọn thỏa mãn đ/kiện:
  - **Mô hình nhiễu nhân:** $\tilde{G} = G(1 + \Delta W_m) : \|\Delta\|_\infty \le 1$

$$|W_m(j\omega)| > \left|\frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1\right|, \forall \omega$$

  - **Mô hình nhiễu cộng:** $\tilde{G} = G + \Delta W_m : \|\Delta\|_\infty \le 1$

$$|W_m(j\omega)| \ge \left|\tilde{G}(j\omega) - G(j\omega)\right|, \forall \omega$$

Xây dựng mô hình không chắc chắn (tt)

- **Mô hình nhiễu cộng ngược** $\tilde{G} = \dfrac{G}{1+\Delta W_m G} : \|\Delta\|_\infty \le 1$

$$|W_m(j\omega)| \ge \left| \frac{1}{\tilde{G}(j\omega)} - \frac{1}{G(j\omega)} \right|, \forall \omega$$

- **Mô hình nhiễu nhân ngược** $\tilde{G} = \dfrac{G}{1+\Delta W_m} : \|\Delta\|_\infty \le 1$

$$|W_m(j\omega)| \ge \left| \frac{G(j\omega)}{\tilde{G}(j\omega)} - 1 \right|, \forall \omega$$

- ***Bước 3:*** xác định biểu thức hàm truyền trọng số thỏa điều kiện ở bước 2 dựa vào biểu đồ Bode
- Chú ý: thông thường W_m có biên độ tăng dần theo tần số, do ở miền tần số càng cao độ bất định càng lớn

Chứng minh điều kiện hàm trọng số

★ **Mô hình nhiễu nhân:**

$$\tilde{G} = G(1+\Delta W_m) : \|\Delta\|_\infty \le 1$$

$$\Rightarrow \quad 1+\Delta(j\omega)W_m(j\omega) = \frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)}$$

$$\Rightarrow \quad |\Delta(j\omega)W_m(j\omega)| = \left|\frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1\right|$$

$$\Rightarrow \quad \|\Delta(j\omega)\|_\infty |W_m(j\omega)| > \left|\frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1\right|$$

$$\Rightarrow \quad |W_m(j\omega)| > \left|\frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1\right|, \forall \omega$$

★ CM theo cách tương tự cho mô hình nhiễu cộng, mô hình nhiễu số cộng ngược và mô hình nhiễu nhân ngược.

Xây dựng mô hình không chắn chắn – Cách 2

Chỉ áp dụng trong trường hợp hàm truyền đối tượng thật $\widetilde{G}$ chỉ có 1 tham số không chắc chắn, chẳng hạn: $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$

- **Bước 1:** Đặt $\theta = \theta_0 + \theta_1\Delta$, trong đó:

$$\theta_0 = (\theta_{\min} + \theta_{\max})/2 \qquad \theta_1 = (\theta_{\max} - \theta_{\min})/2 \qquad -1 \leq \Delta \leq 1$$

- **Bước 2:** Thay $\theta = \theta_0 + \theta_1\Delta$ vào hàm truyền $\widetilde{G}$ và thực hiện biến đổi để rút ra *G* và W_m từ mô hình:
  - Mô hình nhiễu nhân: $\widetilde{G} = G(1 + \Delta W_m) : \|\Delta\|_\infty \leq 1$
  - Mô hình nhiễu cộng: $\widetilde{G} = G + \Delta W_m : \|\Delta\|_\infty \leq 1$
  - Mô hình nhiễu cộng ngược: $\widetilde{G} = \dfrac{G}{1 + \Delta W_m G} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$
  - Mô hình nhiễu nhân ngược: $\widetilde{G} = \dfrac{G}{1 + \Delta W_m} : \|\Delta\|_\infty \leq 1$

Thí dụ 1: Hệ thống có độ lợi không chắc chắn

✶ ***Bài toán:*** Cho HT mô tả bởi hàm truyền "thực": $\widetilde{G} = \dfrac{k}{s(s+1)}$

trong đó độ lợi *k* nằm trong khoảng $0.1 \le k \le 10$

Xây dựng mô hình nhiễu nhân để mô tả hệ thống trên.

✶ ***Giải:***

✶ Mô hình nhiễu nhân: $\widetilde{G} = \left\{(1 + \Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$

✶ Chọn mô hình danh định:

$$G = \frac{k_0}{s(s+1)}$$

$$k_0 = \frac{k_{min} + k_{max}}{2} = \frac{0.1 + 10}{2} = 5.05$$

Thí dụ 1: Hệ thống có độ lợi không chắc chắn

- Cần chọn W_m thỏa mãn điều kiện:

$$|W_m(j\omega)| \geq \left|\frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1\right|, \forall\omega$$

$$\Rightarrow \quad |W_m(j\omega)| \geq \left|\frac{k}{k_0} - 1\right|, \forall\omega \qquad (0.1 \leq k \leq 10)$$

$$\Rightarrow \quad |W_m(j\omega)| \geq \max_{0.1\leq k\leq 10}\left|\frac{k}{k_0} - 1\right| = \frac{4.95}{5.05} \qquad \Rightarrow \quad W_m(j\omega) = 0.981$$

- Kết luận: mô hình nhiễu nhân tìm được là:

$$\tilde{G} = \left\{(1 + \Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \leq 1\right\}$$

trong đó: $G = \dfrac{5.05}{s(s+1)}$ $\qquad W_m(s) = 0.981$

Thí dụ 2: Hệ thống thời hằng không chắc chắn

- ***Bài toán:*** Cho HT có hàm truyền "thực" là: $\widetilde{G} = \dfrac{8(\tau s+1)}{(2s+1)(10s+1)}$

trong đó τ nằm trong khoảng $0.2 \le \tau \le 5.0$

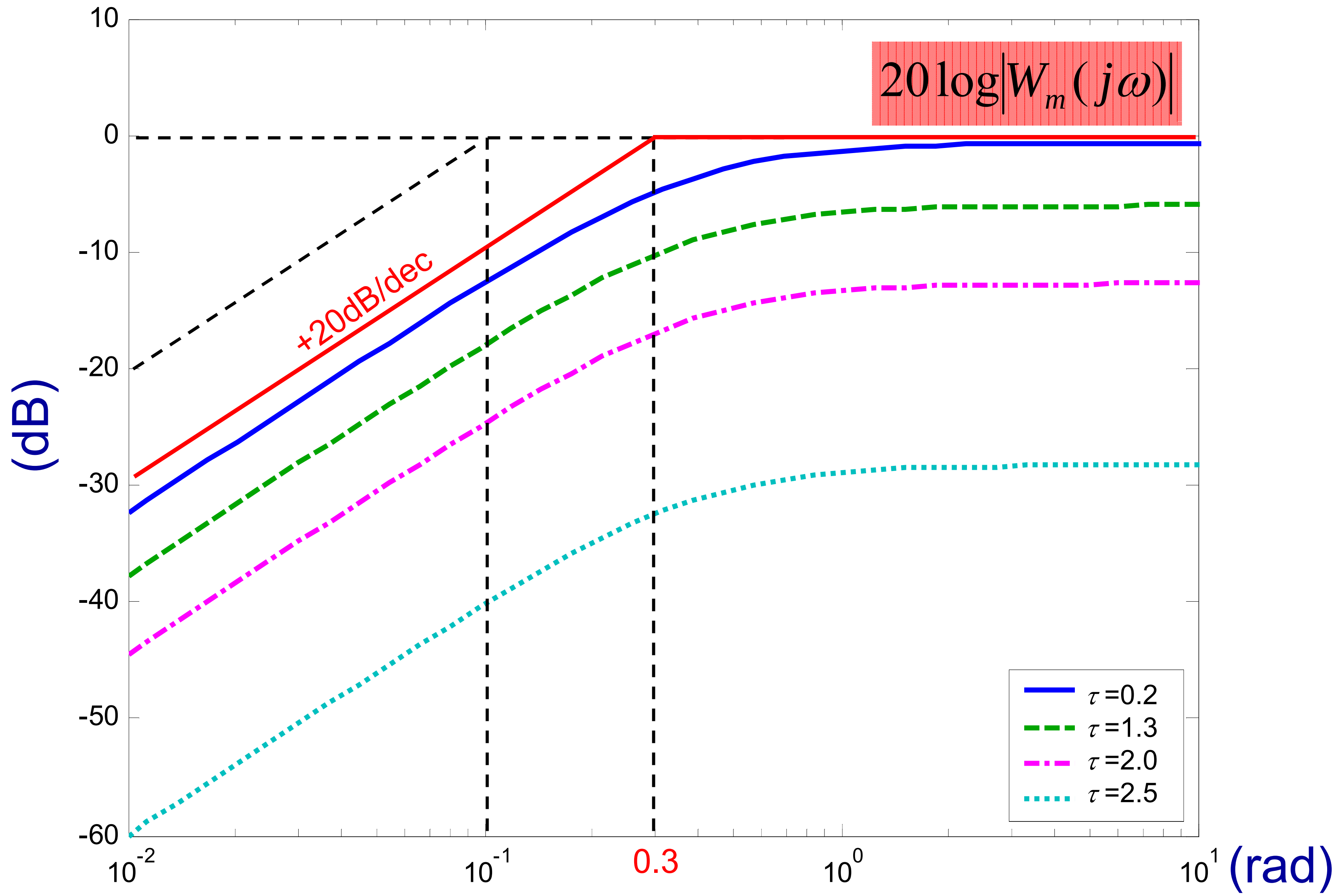
Xây dựng MH nhiễu nhân để mô tả HT không chắc chắn trên

- ***Giải:***
- Mô hình nhiễu nhân: $\widetilde{G} = \left\{(1+\Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$
- Chọn mô hình danh định $G = \dfrac{8(2.6s+1)}{(2s+1)(10s+1)}$
- Cần chọn W_m thỏa mãn điều kiện:

$$|W_m(j\omega)| \ge \left|\frac{\widetilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1\right|, \forall\omega \quad \Rightarrow \quad |W_m(j\omega)| \ge \left|\frac{\tau j\omega+1}{2.6j\omega+1} - 1\right|, \forall\omega$$

Chọn W_m thỏa mãn đ/kiện trên với $0.2 \le \tau \le 5.0$ dùng b/đồ Bode

Thí dụ 2: Hệ thống có thời hằng không chắc chắn (tt)



Thí dụ 2: Hệ thống có thời hằng không chắc chắn (tt)

- Dựa vào b/đồ Bode, có thể chọn W_m có dạng: $W_m(s) = \dfrac{Ks}{Ts+1}$

- Dễ thấy:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{1}{\omega_g} = \dfrac{1}{0.3} = 3.33(\text{sec}) \\[2ex] 20\lg\dfrac{K}{T} = 0(dB) \;\Rightarrow\; K = 3.33 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{W_m(s) = \dfrac{3.33s}{3.33s+1}}$$

- Kết luận: mô hình nhiễu nhân tìm được là:

$$\boxed{\widetilde{G} = \left\{(1+\Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}}$$

trong đó: $\boxed{G = \dfrac{8(2.6s+1)}{(2s+1)(10s+1)}}$ $\boxed{W_m(s) = \dfrac{3.33s}{3.33s+1}}$

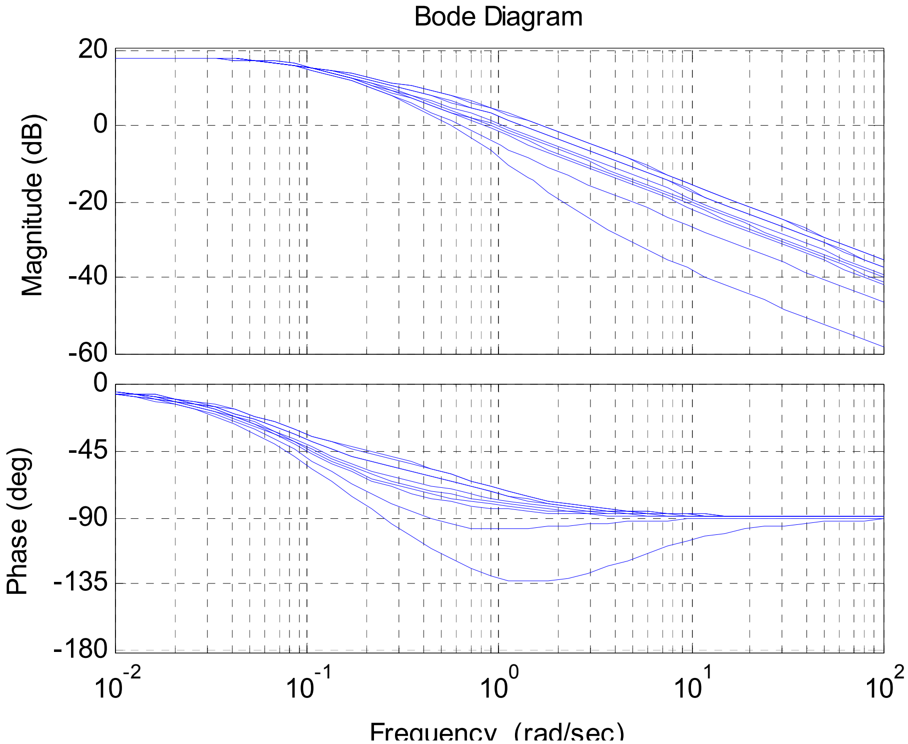
Thí dụ 2: Hệ thống có thời hằng không chắc chắn (tt)

Biểu diễn mô hình nhiễu nhân dùng Matlab

```
% Đối tượng có thời hằng không chắn chắn
>> tau = ureal('tau',2.6,'range',[0.2 5]);
>> G =tf(8*[tau  1],[20  12 1]);            %Hàm truyền có tham số không chắn chắn
>> figure(1)
>> bode(usample(G,10),{0.01,100})           %Biểu đồ Bode của đối tượng  kg chắc chắn

% Mô hình sai số nhân (Multiplicative Uncertainty Model)
>> Gnom=tf(8*[2.6 1],[20 12 1]);            % Mô hình danh định
>> Wm=tf([3.33 0],[3.33 1]);                % Hàm truyền trọng số
>> Delta = ultidyn('Delta',[1 1]);
>> G = Gnom*(1+W*Delta) ;                   % Mô hình sai số nhân
>> figure(2)
>> bode(usample(G,10),{0.01,100})           % Biểu đồ Bode mô hình nhiễu nhân
```

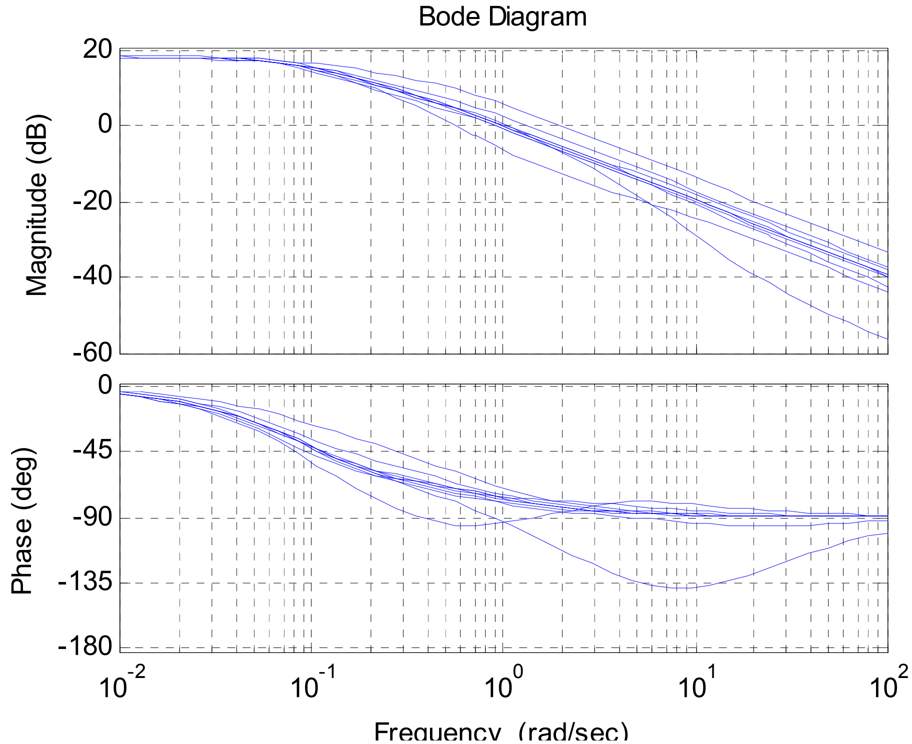
Thí dụ 2: Hệ thống có thời hằng không chắc chắn (tt)



$$\widetilde{G} = \frac{8(\tau s + 1)}{(2s+1)(10s+1)}$$

$$0.2 \le \tau \le 5.0$$

Biểu đồ Bode của đối tượng có thời hằng không chắc chắn



$$\widetilde{G} = \left\{(1+\Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$$

$$G = \frac{8(2.6s+1)}{(2s+1)(10s+1)} \qquad W_m(s) = \frac{3.33s}{3.33s+1}$$

Biểu đồ Bode mô hình nhiễu nhân

Thí dụ 3: Hệ thống có trễ không chắc chắn

✶ ***Bài toán:*** Cho h/thống mô tả bởi h/truyền "thực": $\tilde{G} = \dfrac{15e^{-\tau s}}{0.2s+1}$

trong đó thời gian trễ τ nằm trong khoảng $0 \le \tau \le 0.1$

Xây dựng MH nhiễu nhân để mô tả HT không chắc chắn trên

✶ ***Giải:***

✶ Mô hình nhiễu nhân: $\tilde{G} = \left\{(1+\Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}$

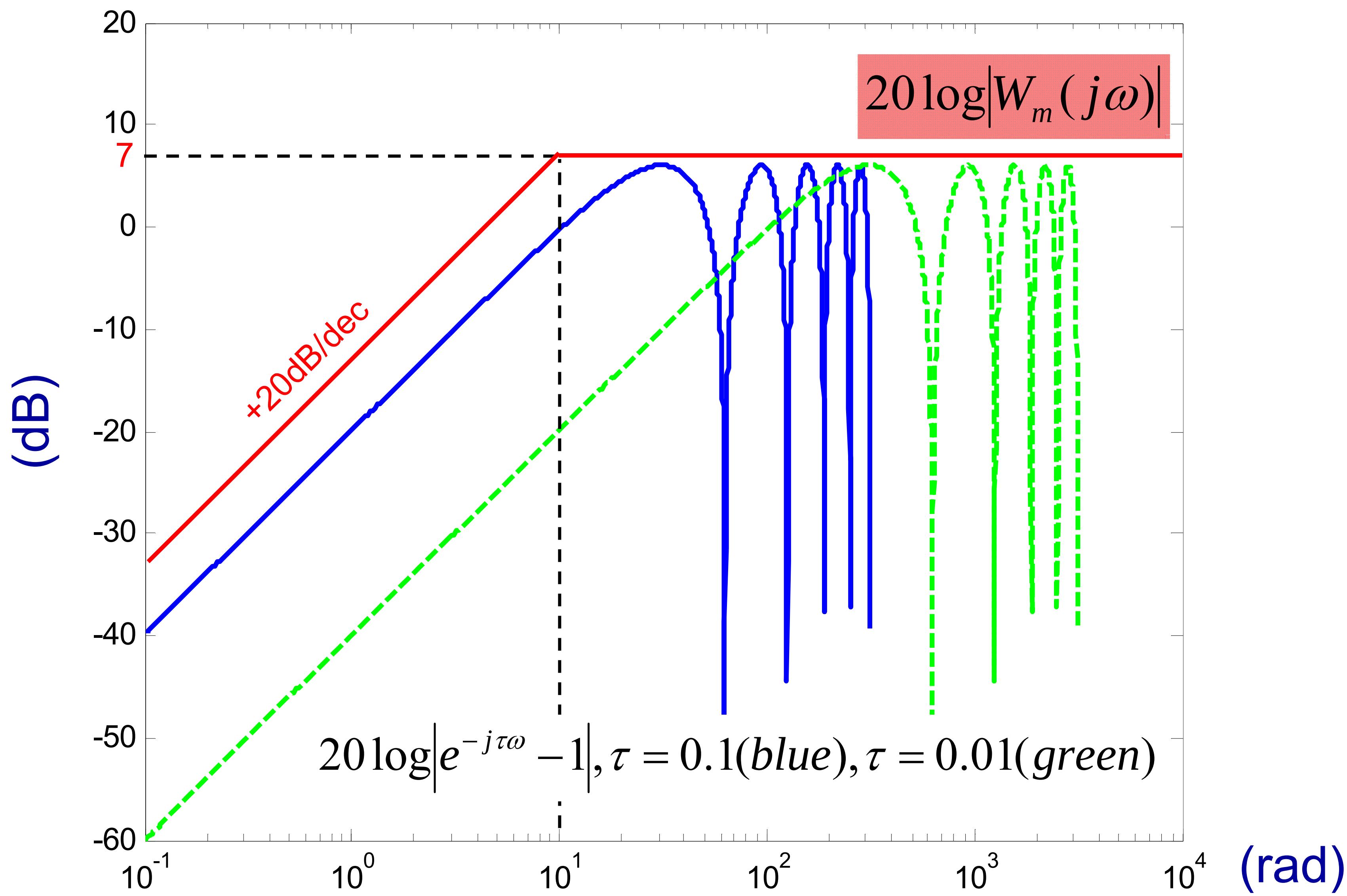
✶ Chọn mô hình danh định: $G = \dfrac{15}{0.2s+1}$

✶ Cần chọn W_m thỏa mãn điều kiện:

$$|W_m(j\omega)| \ge \left|\frac{\tilde{G}(j\omega)}{G(j\omega)} - 1\right|, \forall\omega \quad \Rightarrow \quad |W_m(j\omega)| \ge \left|e^{-j\tau\omega} - 1\right|, \forall\omega$$

Chọn W_m thỏa mãn điều kiện trên dựa vào biểu đồ Bode

Thí dụ 3: Hệ thống có trễ không chắc chắn (tt)



Thí dụ 3: Hệ thống có trễ không chắc chắn (tt)

- Dựa vào b/đồ Bode, có thể chọn W_m có dạng: $W_m(s) = \dfrac{Ks}{Ts+1}$
- Dễ thấy:

$$\left.\begin{array}{l} T = \dfrac{1}{\omega_g} = \dfrac{1}{10} = 0.1(\sec) \\ \\ 20\lg\dfrac{K}{T} = 7(dB) \;\Rightarrow\; K = 0.224 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{W_m(s) = \dfrac{0.224s}{0.1s+1}}$$

- Kết luận: mô hình nhiễu nhân tìm được là:

$$\boxed{\widetilde{G} = \left\{(1+\Delta W_m)G : \|\Delta\|_\infty \le 1\right\}}$$

trong đó: $\boxed{G = \dfrac{15}{0.2s+1}}$ $\boxed{W_m(s) = \dfrac{0.224s}{0.1s+1}}$

Thí dụ 4: Hệ thống có cực không chắc chắn

- ***Bài toán:*** Cho h/thống mô tả bởi h/truyền "thực": $\tilde{G} = \dfrac{5}{s^2 + as + 1}$

trong đó thông số *a* nằm trong khoảng $0.1 \le a \le 1.7$

Xây dựng mô hình nhiễu cộng ngược để mô tả hệ thống trên

- ***Giải:***
- Có thể biểu diễn *a* như sau: $a = 0.9 + 0.8\Delta \qquad -1 \le \Delta \le 1$
- Thay *a* vào $\tilde{G}$:

$$\tilde{G} = \frac{5}{s^2 + (0.9 + 0.8\Delta)s + 1} = \frac{5}{(s^2 + 0.9s + 1) + 0.8\Delta s} = \frac{\dfrac{5}{(s^2 + 0.9s + 1)}}{1 + 0.16s\Delta \dfrac{5}{(s^2 + 0.9s + 1)}}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{G} = \frac{P(s)}{1 + W_m(s)\Delta P(s)}$$

trong đó $\quad G(s) = \dfrac{5}{s^2 + 0.9s + 1} \qquad W_m(s) = \dfrac{0.16s}{0.0001s + 1} \approx 0.16s$

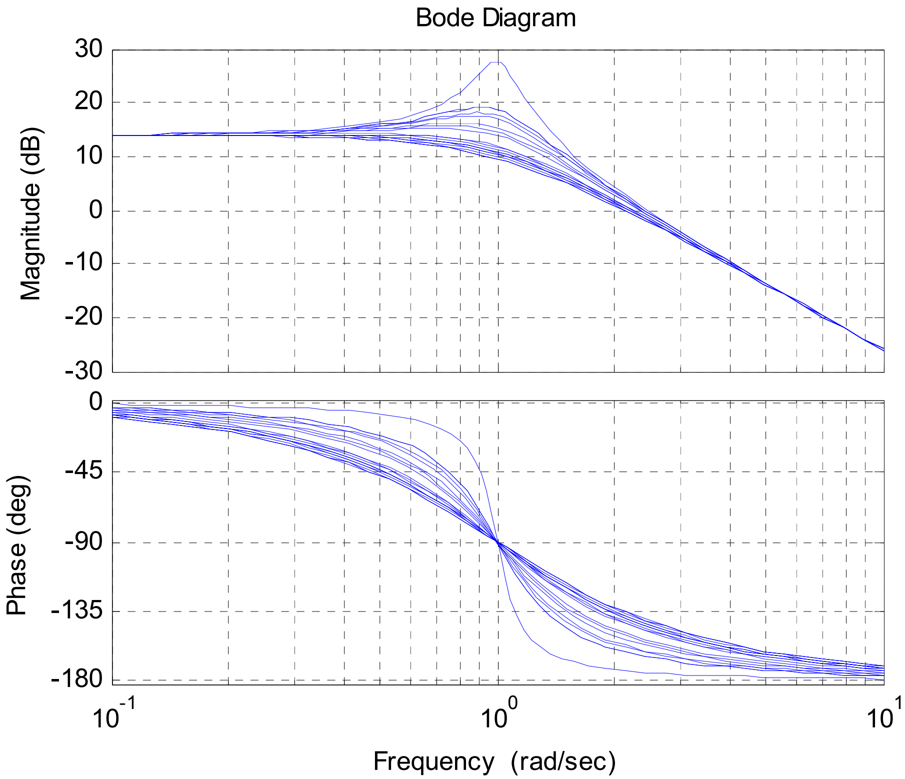
Thí dụ 4: Hệ thống có cực không chắc chắn (tt)

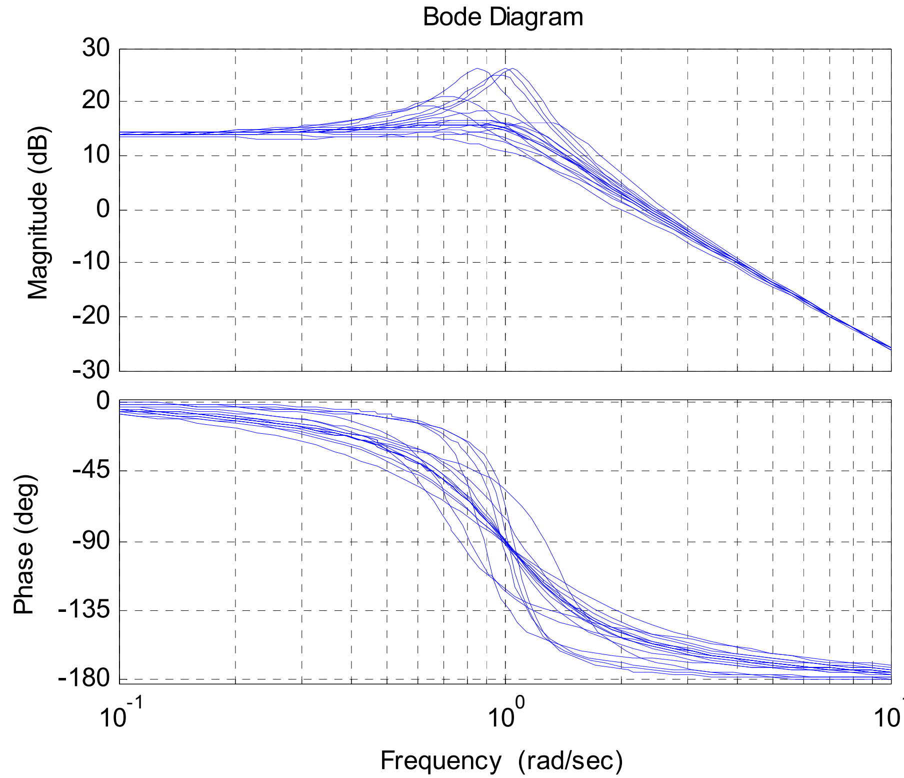
Biểu diễn mô hình nhiễu cộng ngược dùng Matlab

```
% Đối tượng có cực không chắn chắn
>> a = ureal(‘a',0.9,'range',[0.1 1.7]);
>> G =tf(5,[1 a 1]);                      %Hàm truyền có tham số không chắn chắn
>> figure(1)
>> bode(usample(G,20),{0.1,10})           %Biểu đồ Bode của đối tượng  kg chắc chắn

% Mô hình sai số cộng ngược (Inverse Additive Uncertainty Model)
>> Gnom=tf(5,[1 0.9 1]);                  % Mô hình danh định
>> Wm=tf(0.16*[1 0],[0.0001 1]);          % Hàm truyền trọng số
>> Delta = ultidyn('Delta',[1 1]);
>> G = Gnom/(1+W*Delta*Gnom) ;            % Mô hình sai số cộng ngược
>> figure(2)
>> bode(usample(G,20),{0.01,100})         % Biểu đồ Bode mô hình nhiễu cộng ngược
```

Thí dụ 4: Hệ thống có cực không chắc chắn (tt)





$$\widetilde{G} = \frac{5}{s^2 + as + 1}$$

$$0.1 \le a \le 1.7$$

Biểu đồ Bode của đối tượng có cực không chắc chắn

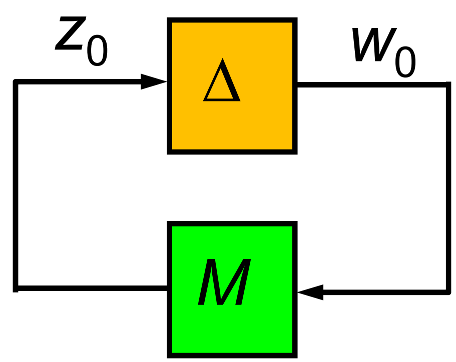
$$\widetilde{G} = \left\{ G/(1 + \Delta W_m G) : \|\Delta\|_\infty \le 1 \right\}$$

$$G = \frac{5}{s^2 + 0.9s + 1} \qquad W_m(s) = \frac{0.16s}{10^{-4}s + 1}$$

Biểu đồ Bode mô hình nhiễu cộng ngược

Cấu trúc M-Δ

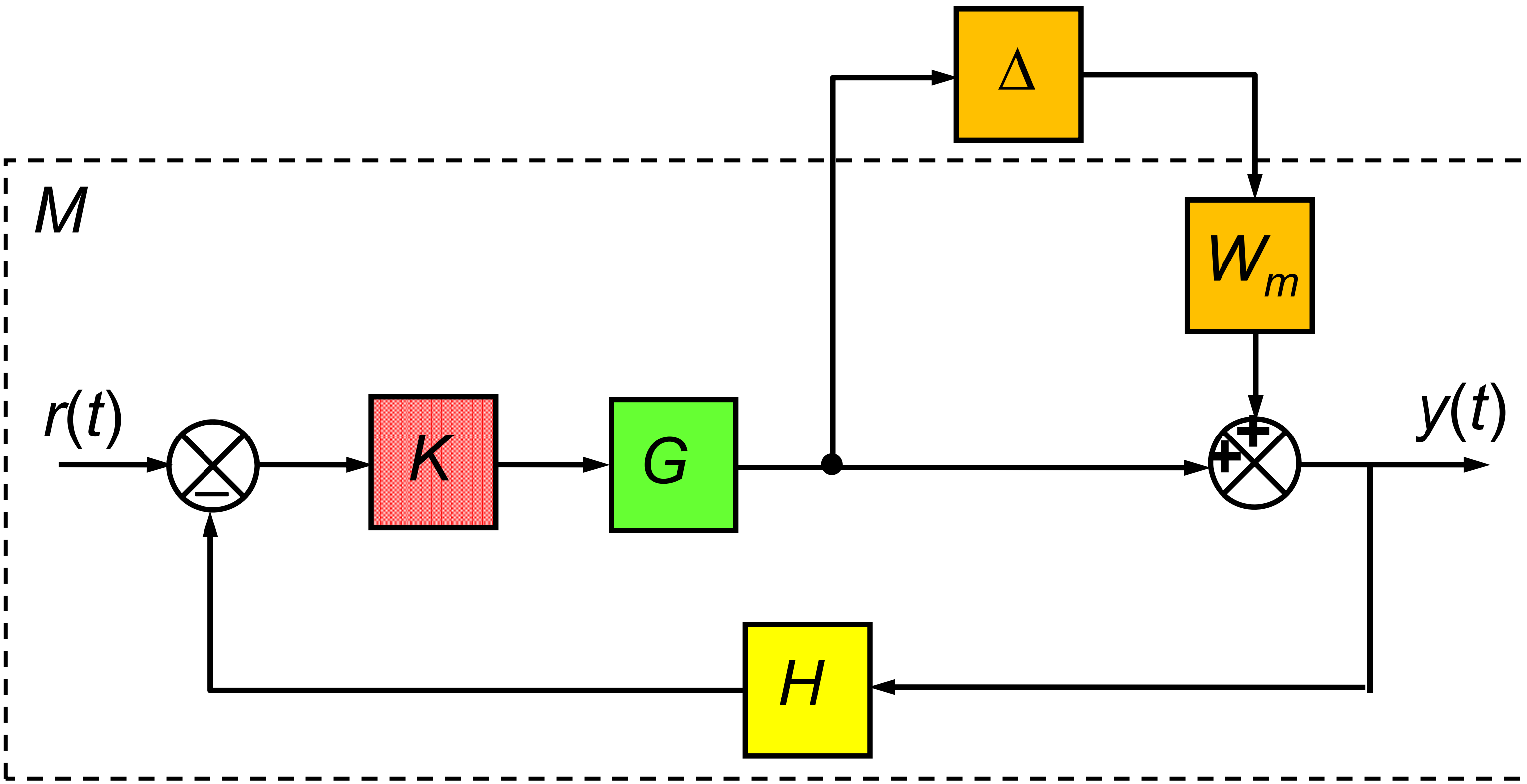
- Hệ thống điều khiển vòng kín bất kỳ với thành phần không chắc chắn có thể biến đổi về cấu trúc chuẩn M–Δ



- Các bước biến đổi HTĐK thành cấu trúc chuẩn M–Δ
  - Xác định tín hiệu vào của M (t/hiệu ra của Δ), ký hiệu là w_0.
  - Xác định tín hiệu ra của M (tín hiệu vào của Δ), ký hiệu là z_0
  - Tách thành phần không chắc chắn Δ ra khỏi sơ đồ
  - Tìm hàm truyền M từ w_0 đến z_0

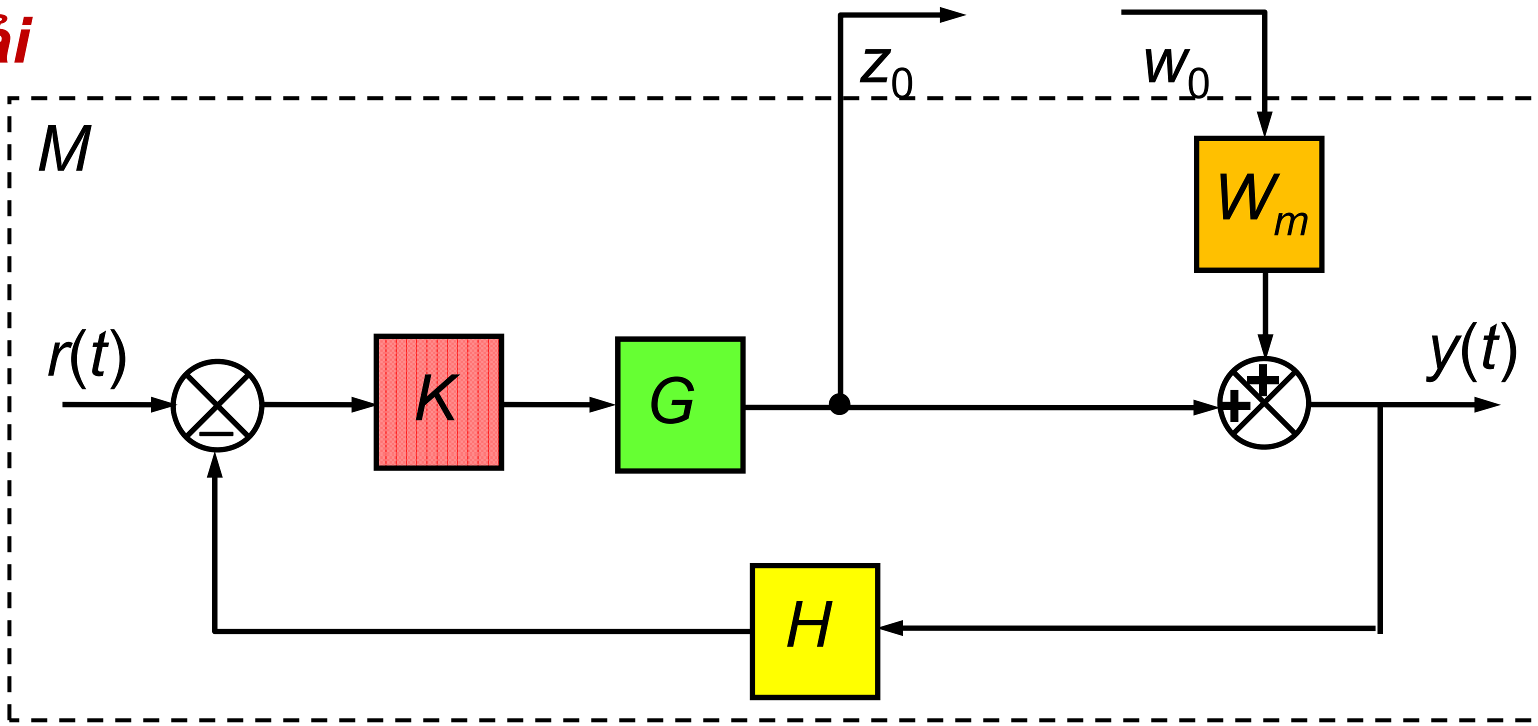
Thí dụ: Cấu trúc M-Δ

- Hãy biến đổi hệ thống dưới đây về cấu trúc chuẩn *M*–Δ



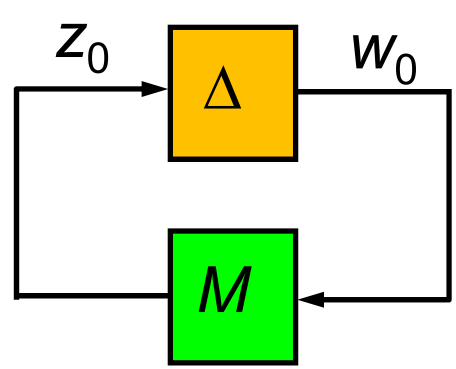
Thí dụ: Cấu trúc M-Δ

- **Giải**



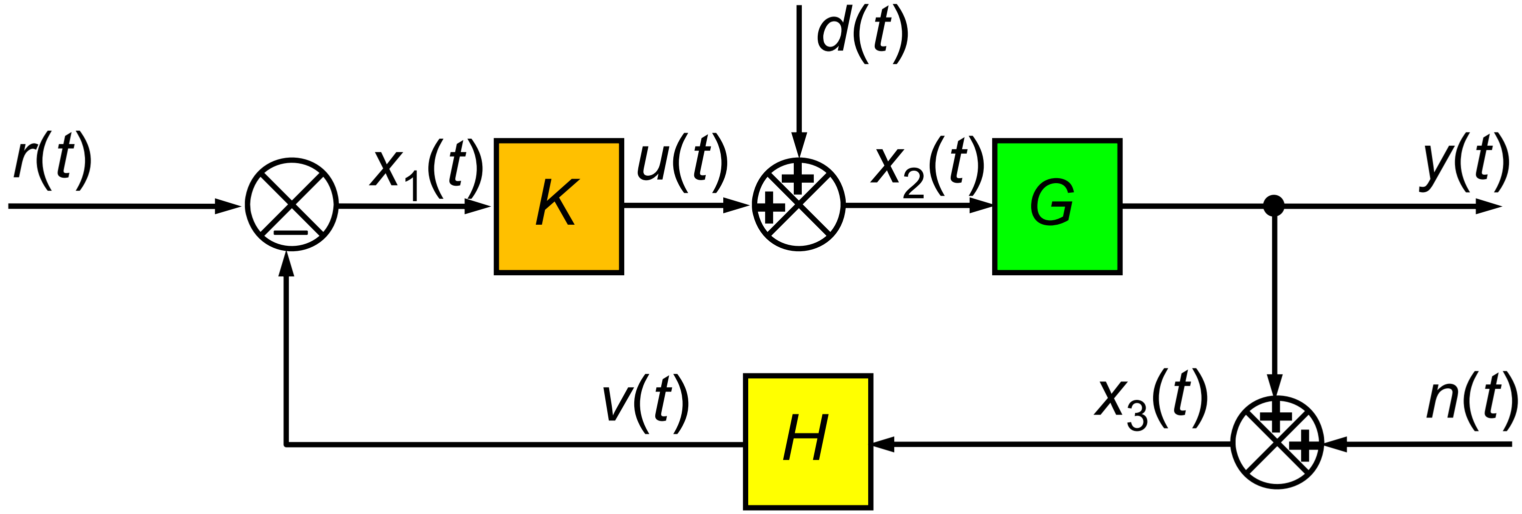
- Hàm truyền từ w_0 đến z_0:

$$M(s) = \frac{-W_m(s)K(s)G(s)H(s)}{1+K(s)G(s)H(s)} \quad \Rightarrow$$



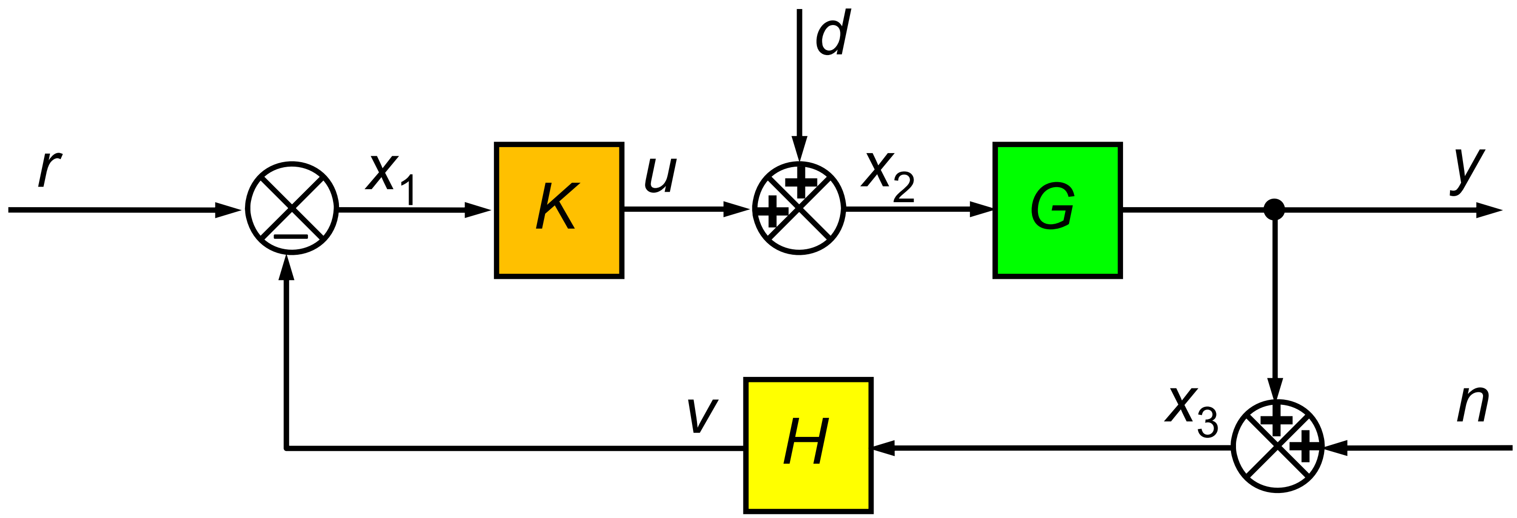
TÍNH ỔN ĐỊNH NỘI

Hệ thống điều khiển vòng kín



- $r(t)$: tín hiệu đặt
- $y(t)$: tín hiệu ra của đối tượng
- $u(t)$: tín hiệu ra của bộ điều khiển
- $v(t)$: tín hiệu ra của cảm biến
- $d(t)$: nhiễu hệ thống
- $n(t)$: nhiễu đo lường

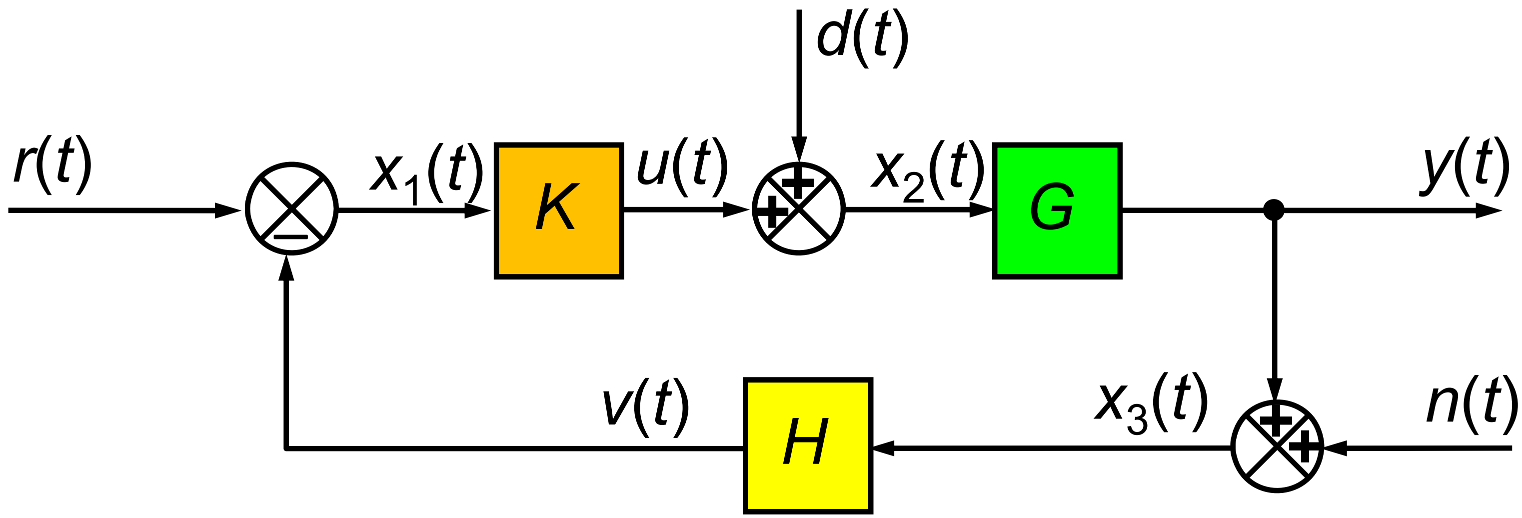
Các hàm truyền



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & H \\ -K & 1 & 0 \\ 0 & -G & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+GHK}\begin{bmatrix} 1 & -GH & -H \\ K & 1 & -HK \\ GK & G & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}$$

Định nghĩa ổn định nội

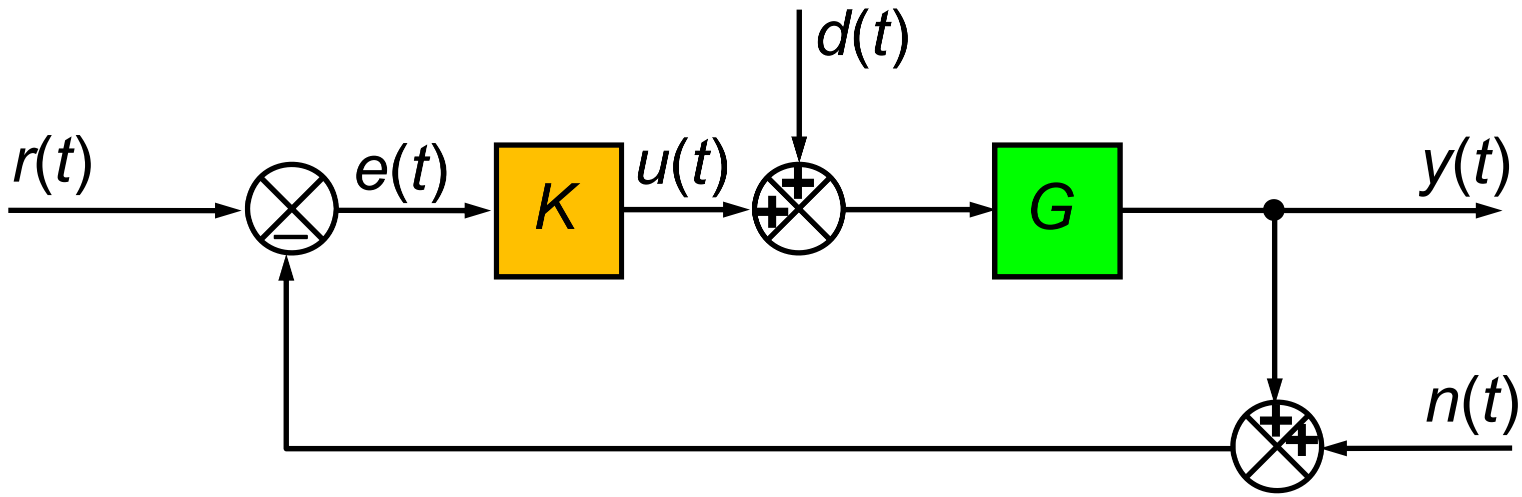


- ***Nhắc lại khái niệm ổn định BIBO***: Hệ thống được gọi là ổn định nếu tín hiệu vào bị chặn thì tín hiệu ra bị chặn (Bounded Input Bounded Output)
- Hệ thống được gọi là ***ổn định nội*** (Internal Stability) nếu tín hiệu vào bị chặn thì tín hiệu ra và tất cả các tín hiệu bên trong hệ thống đều bị chặn.

Định lý ổn định nội

- Hệ thống ***ổn định nội*** khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây được thỏa mãn:
  - Hàm truyền $(1+GHK)$ không có zero nằm bên phải mặt phẳng phức
  - Không có triệt tiêu cực–zero bên phải mặt phẳng phức khi tính tích các hàm truyền GHK.

Hàm truyền kín và hàm độ nhạy



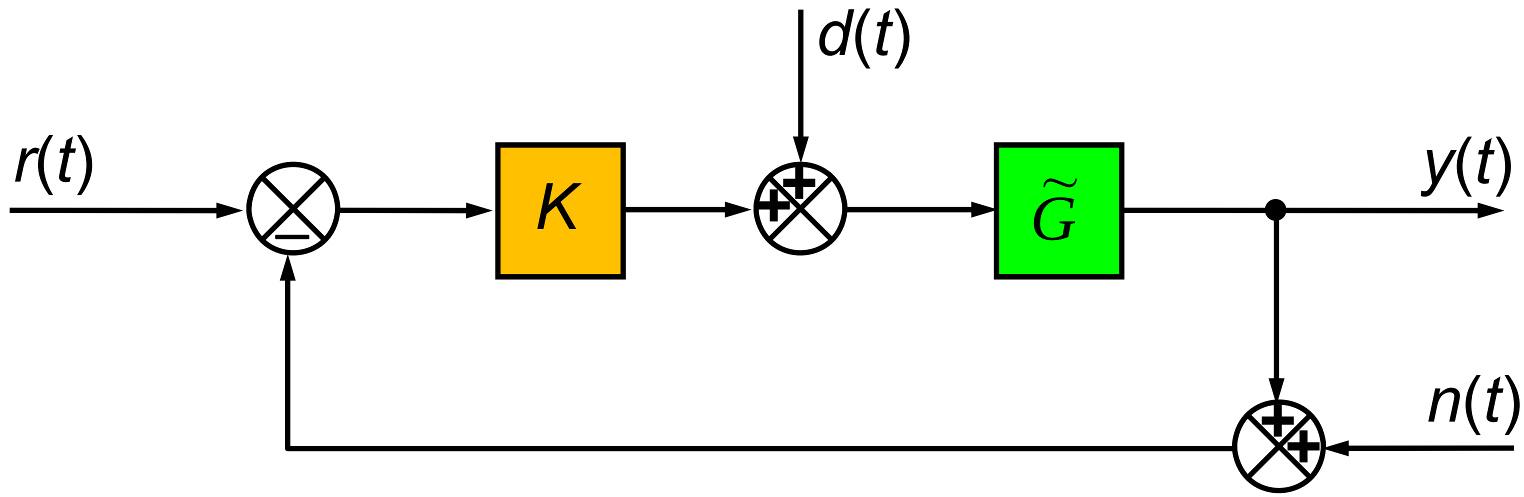
- Hàm truyền kín: $T = \dfrac{KG}{1+KG}$
- Hàm độ nhạy: định lượng độ nhạy của *T* đối với sự thay đổi của *G*:

$$S := \lim_{\Delta G \to 0} \frac{\Delta T / T}{\Delta G / G} = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{1+KG}$$

- Chú ý: $T + S = 1$ $\Rightarrow$ *T* còn được gọi là hàm bù nhạy

ỔN ĐỊNH BỀN VỮNG

Định nghĩa ổn định bền vững



- Hệ thống được gọi là ổn định bền vững nếu hệ thống ổn định nội với mọi đối tượng thuộc lớp mô hình không chắc chắn $\tilde{G}$ cho trước.
- Đánh giá tính ổn định bền vững
  - Định lý Kharitonov
  - Định lý độ lợi bé

Định lý Kharitonov

- Cho hệ thống điều khiển có phương trình đặc trưng là:

$$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + a_3 s^{n-3} + a_4 s^{n-4} + a_5 s^{n-5} + a_6 s^{n-6} + \ldots = 0$$

trong đó các hệ số của PTĐT nằm trong miền cho trước:

$$\underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i, \quad (i = 0,1,\ldots,n)$$

- ***Định lý Kharitonov:*** HT ổn định bền vững với mọi $\underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i$ nếu và chỉ nếu bốn đa thức dưới đây đều là đa thức Hurwitz (tức là đa thức có tất cả các nghiệm nằm bên trái mp phức).

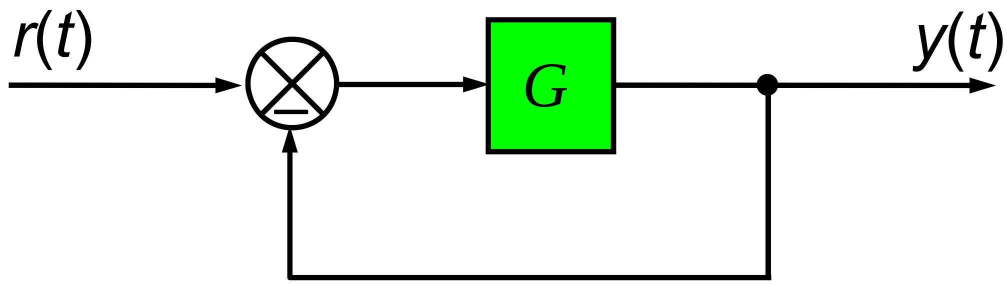
$$\Delta_1(s) = \underline{a}_0 s^n + \underline{a}_1 s^{n-1} + \overline{a}_2 s^{n-2} + \overline{a}_3 s^{n-3} + \underline{a}_4 s^{n-4} + \underline{a}_5 s^{n-5} + \overline{a}_6 s^{n-6} + \ldots$$

$$\Delta_2(s) = \underline{a}_0 s^n + \overline{a}_1 s^{n-1} + \overline{a}_2 s^{n-2} + \underline{a}_3 s^{n-3} + \underline{a}_4 s^{n-4} + \overline{a}_5 s^{n-5} + \overline{a}_6 s^{n-6} + \ldots$$

$$\Delta_3(s) = \overline{a}_0 s^n + \underline{a}_1 s^{n-1} + \underline{a}_2 s^{n-2} + \overline{a}_3 s^{n-3} + \overline{a}_4 s^{n-4} + \underline{a}_5 s^{n-5} + \underline{a}_6 s^{n-6} + \ldots$$

$$\Delta_4(s) = \overline{a}_0 s^n + \overline{a}_1 s^{n-1} + \underline{a}_2 s^{n-2} + \underline{a}_3 s^{n-3} + \overline{a}_4 s^{n-4} + \overline{a}_5 s^{n-5} + \underline{a}_6 s^{n-6} + \ldots$$

Định lý Kharitonov – Thí dụ 1



- Cho hệ thống đ/khiển hồi tiếp âm với: $G(s) = \dfrac{K_P}{s(ms^2 + bs + k)}$

  trong đó: $1 \le m \le 10; 1 \le b \le 3; 5 \le k \le 8; 2 \le K_P \le 6$

- Đánh giá tính ổn định bền vững của hệ thống.
- Giải:
- Phương trình đặc trưng: $1 + G(s) = 0$

$$1 + \frac{K_P}{s(ms^2 + bs + k)} = 0$$

$$ms^3 + bs^2 + ks + K_P = 0$$

Định lý Kharitonov – Thí dụ 1 (tt)

- Xét các đa thức Kharitonov:

$$\Delta_1(s) = s^3 + 1s^2 + 8s + 6$$

  - Do $1 \times 8 - 1 \times 6 > 0$ nên $\Delta_1(s)$ là đa thức Hurwitz.

$$\Delta_2(s) = s^3 + 3s^2 + 8s + 2$$

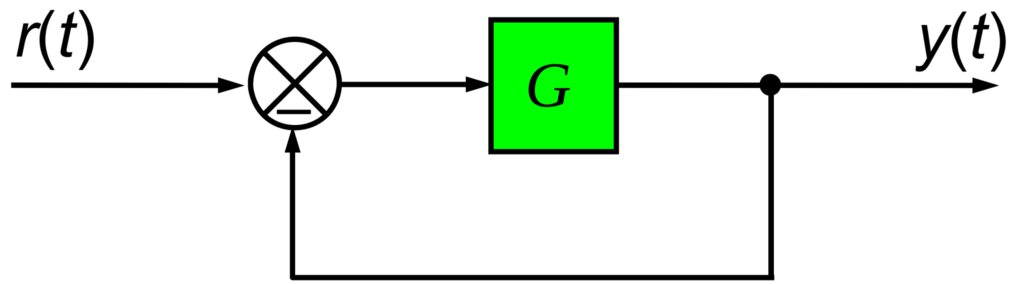
  - Do $3 \times 8 - 1 \times 2 > 0$ nên $\Delta_2(s)$ là đa thức Hurwitz.

$$\Delta_3(s) = 10s^3 + s^2 + 5s + 6$$

  - Do $1 \times 5 - 5 \times 10 < 0$ nên $\Delta_3(s)$ không phải là đa thức Hurwitz.

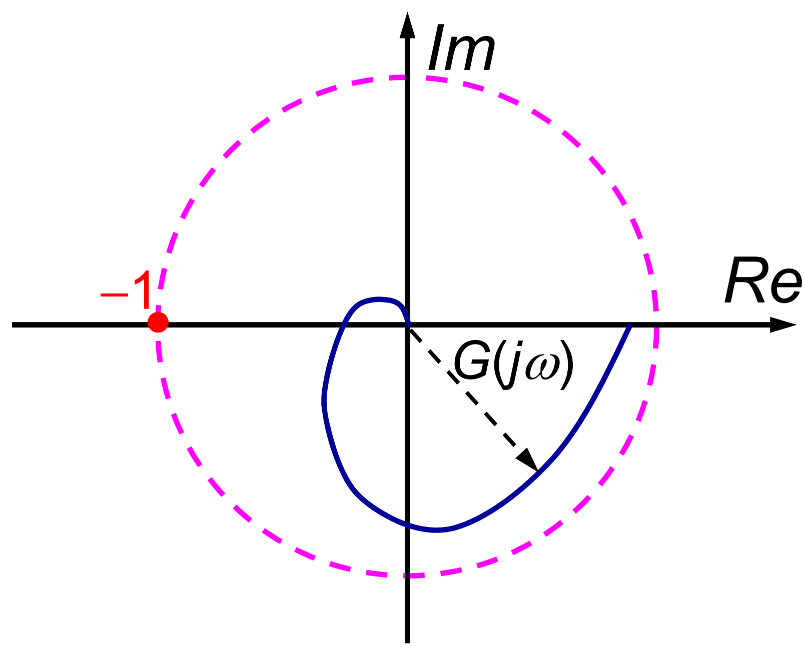
- (không cần xét $\Delta_4(s)$)
- Kết luận: Theo định lý Kharitonov, hệ thống không ổn định bền vững.

Định lý độ lợi nhỏ (Small Gain Theorem)



- ***Định lý độ lợi nhỏ:*** Cho hệ hở $G(s)$ ổn định. Hệ kín ổn định nếu $\left\|G(j\omega)\right\|_{\infty} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|G(j\omega)\right| < 1, \forall \omega$

- ***Chứng minh:*** Dễ dàng chứng minh dùng tiêu chuẩn ổn định Nyquist

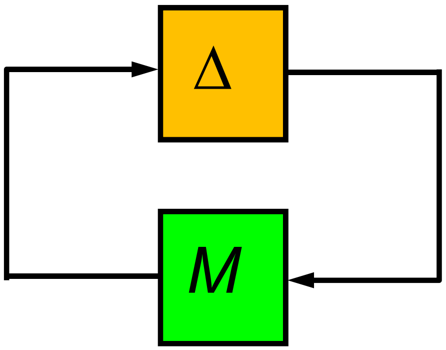


- ***Chú ý:*** Định lý độ lợi nhỏ là điều kiện đủ để đánh giá ổn định

$\Rightarrow$ Hệ thống không thỏa định lý độ lợi nhỏ vẫn có thể ổn định

Định lý ổn định bền vững

- ***Định lý ổn định bền vững:*** Cho hệ thống điều khiển vòng kín như hình vẽ, trong đó $M(s)$ là hàm truyền ổn định và là $\Delta(s)$ hàm truyền ổn định bất kỳ thỏa $\|\Delta(j\omega)\|_\infty \le 1$. Hệ thống kín ổn định khi và chỉ khi:



$$\boxed{\|M(j\omega)\|_\infty < 1}$$

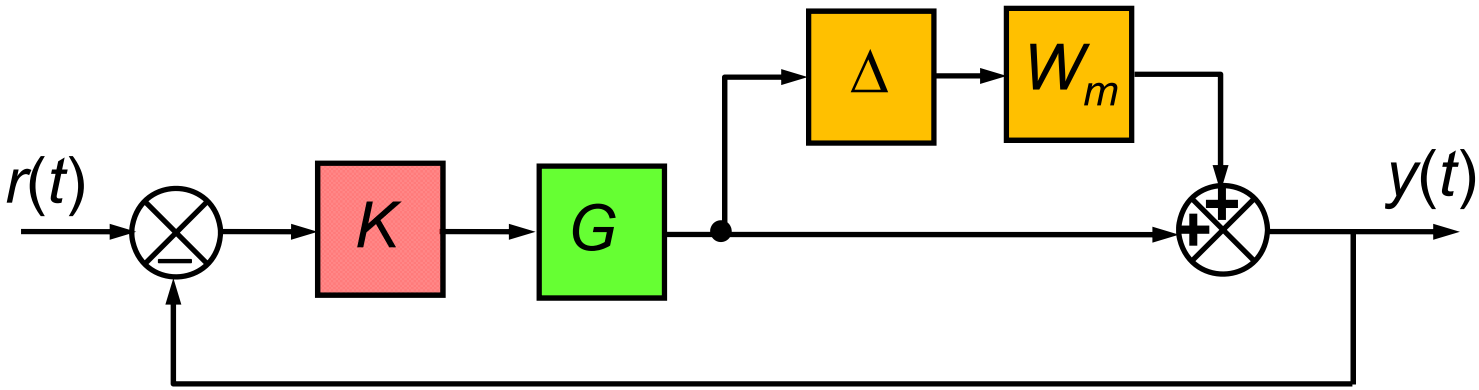
- ***Chứng minh:***

($\Rightarrow$) Sử dụng định lý độ lợi nhỏ

($\Leftarrow$) Phản chứng. Giả sử hệ kín không ổn định và $\|M(j\omega)\|_\infty < 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|\Delta(j\omega)M(j\omega)\|_\infty > 1 \\ \|M(j\omega)\|_\infty < 1 \end{cases} \Rightarrow \|\Delta(j\omega)\|_\infty > 1$$ (trái giả thiết)

Điều kiện ổn định bền vững mô hình nhiễu nhân



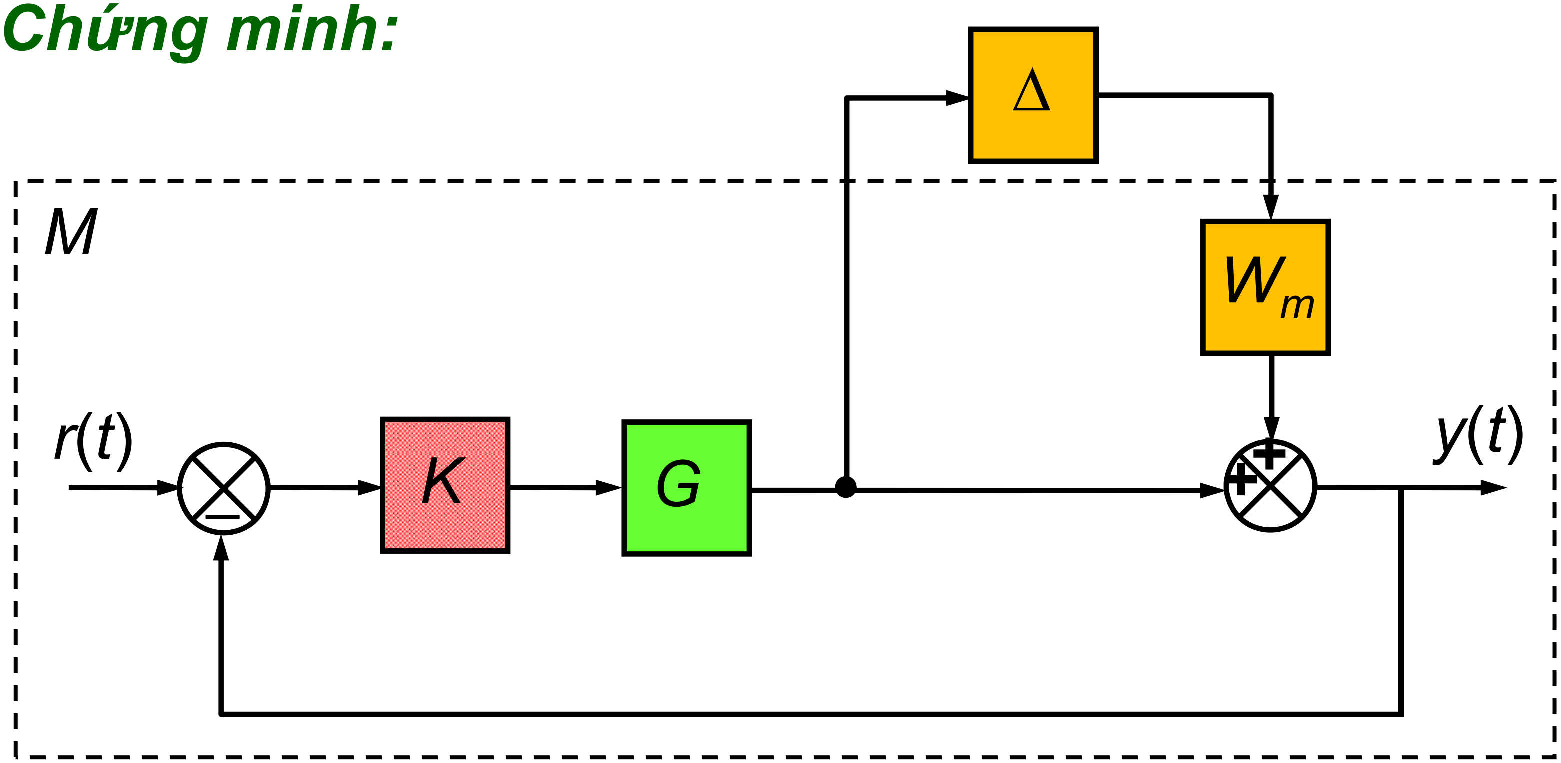
★ ***Định lý:*** Hệ thống điều khiển mô hình nhiễu nhân ổn định bền vững với mọi $\|\Delta\|_\infty \le 1$ nếu và chỉ nếu hệ thống ổn định danh định, đồng thời bộ điều khiển *K* thỏa mãn điều kiện:

$$\|W_m T\|_\infty < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 20\lg\|W_m T\|_\infty < 0[dB]$$

trong đó: $$T = 1 - S = \frac{L}{1+L} = \frac{KG}{1+KG}$$ (hàm độ nhạy bù)

Điều kiện ổn định bền vững mô hình nhiễu nhân (tt)

- *Chứng minh:*



- Biến đổi tương đương hệ thống về dạng vòng M-Δ, trong đó:

$$M = -\frac{W_m KG}{1+KG} = -W_m T$$

- Sau đó áp dụng định lý ổn định bền vững.

★ ***Biểu diễn hình học:***

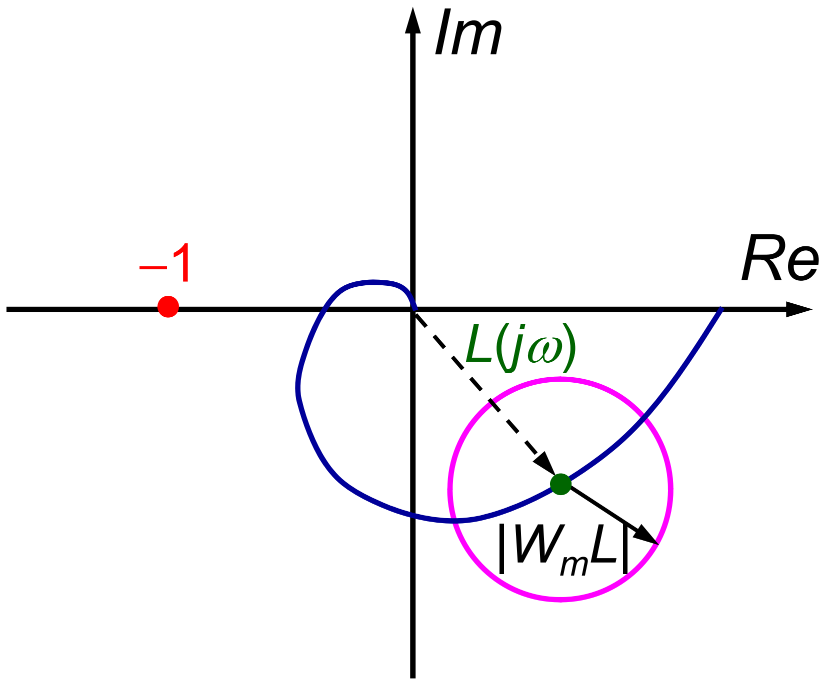
★ Chú ý:

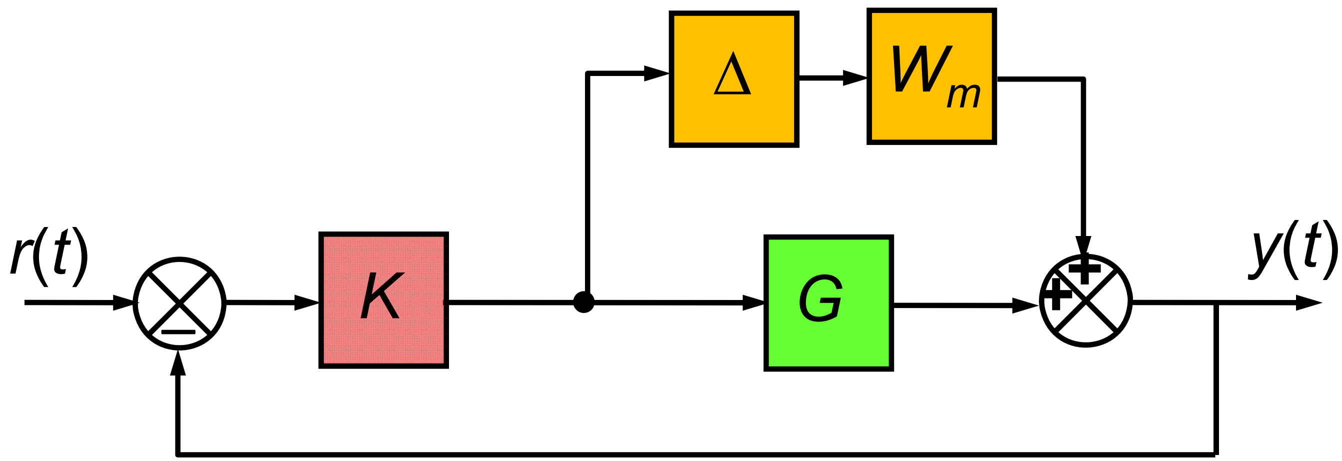
$$\left\|W_m T\right\|_\infty < 1$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{W_m(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)}\right| < 1, \forall\omega$$

$$\Leftrightarrow \left|W_m(j\omega)L(j\omega)\right| < \left|1+L(j\omega)\right|, \forall\omega$$

$\Leftrightarrow$ Tại mọi tần số, điểm tới hạn (–1, *j*0) phải nằm ngoài hình tròn tâm $L(j\omega)$, bán kính $|W_m(j\omega)L(j\omega)|$





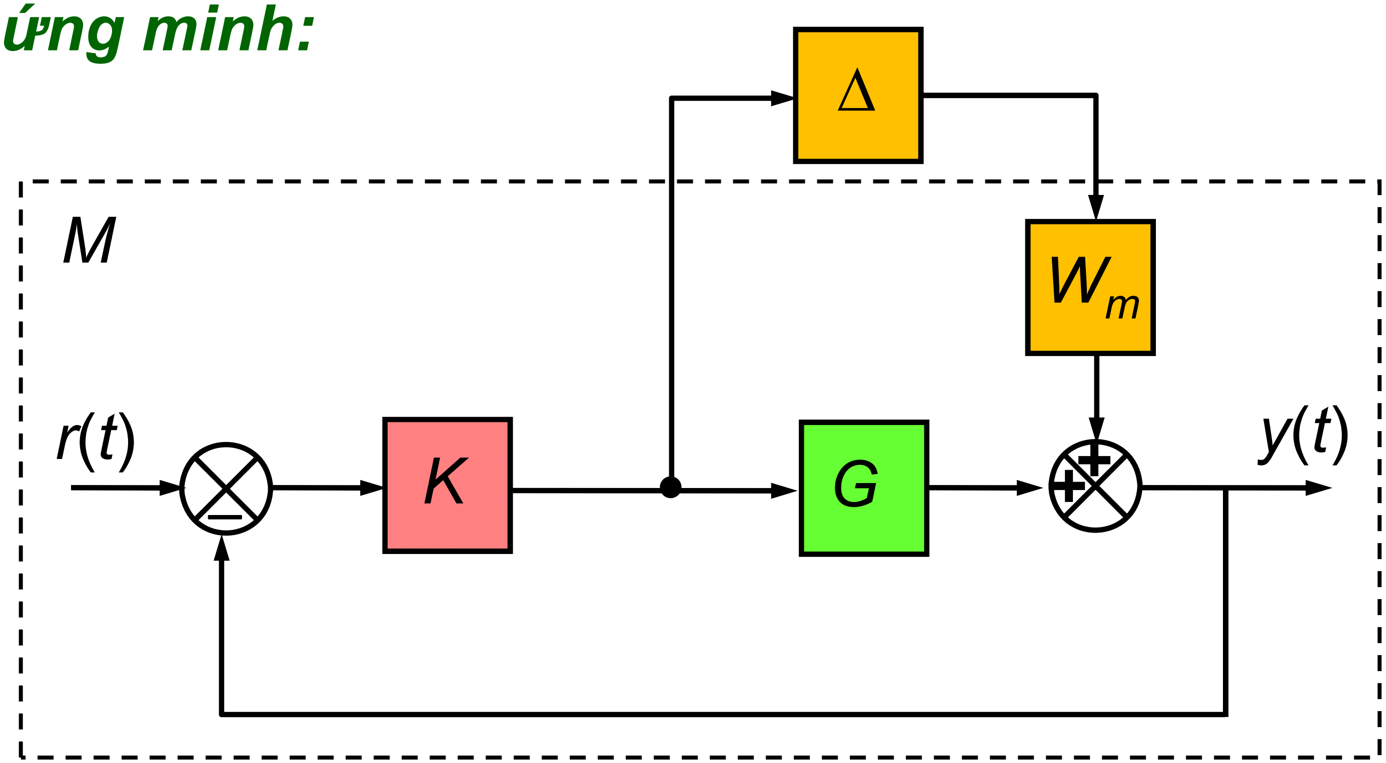
★ ***Định lý:*** Hệ thống điều khiển mô hình nhiễu cộng ổn định bền vững với mọi $\|\Delta\|_\infty \le 1$ nếu và chỉ nếu hệ thống ổn định danh định, đồng thời bộ điều khiển *K* thỏa mãn điều kiện:

$$\|W_m KS\|_\infty < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 20\lg\|W_m KS\|_\infty < 0[dB]$$

trong đó: $$S = \frac{1}{1+L} = \frac{1}{1+KG}$$ (hàm độ nhạy)

Điều kiện ổn định bền vững mô hình nhiễu cộng (tt)

- *Chứng minh:*



- Biến đổi tương đương hệ thống về dạng vòng M-Δ, trong đó:

$$M = -\frac{W_m K}{1+KG} = -W_m KS$$

- Sau đó áp dụng định lý ổn định bền vững.

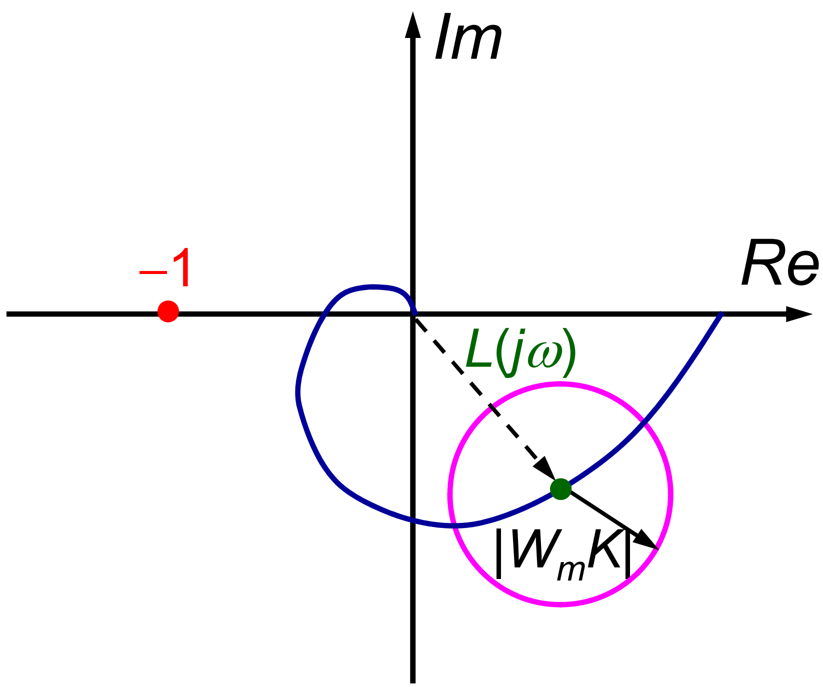
- ***Biểu diễn hình học:***
- Chú ý:

$$\left\| W_m K S \right\|_\infty < 1$$

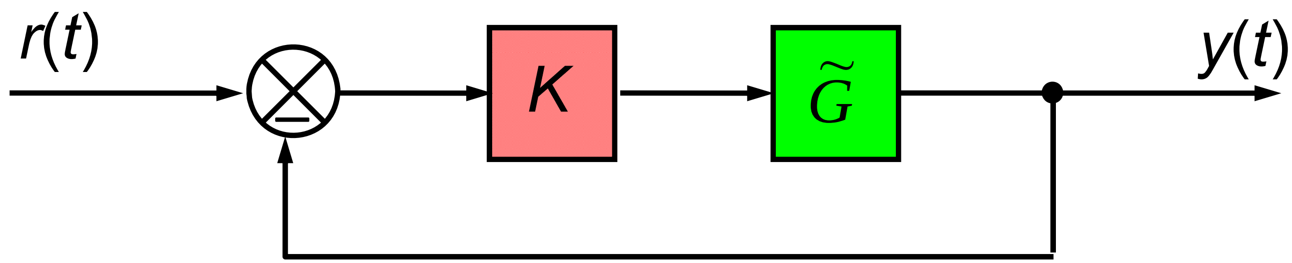
$$\Leftrightarrow \left| \frac{W_m(j\omega)K(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| < 1, \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow \left| W_m(j\omega)K(j\omega) \right| < \left| 1+L(j\omega) \right|, \forall \omega$$

$\Leftrightarrow$ Tại mọi tần số, điểm tới hạn (–1, *j*0) phải nằm ngoài hình tròn tâm $L(j\omega)$, bán kính $|W_m(j\omega)K(j\omega)|$



Điều kiện ổn định bền vững MH nhiễu cộng/nhân ngược



- Cho hệ thống điều khiển hồi tiếp âm đơn vị (xem hình).
- Nếu đối tượng mô tả bởi mô hình nhiễu cộng ngược:

$$\tilde{G} = \frac{G}{1 + \Delta W_m G} : \|\Delta\|_\infty \le 1$$

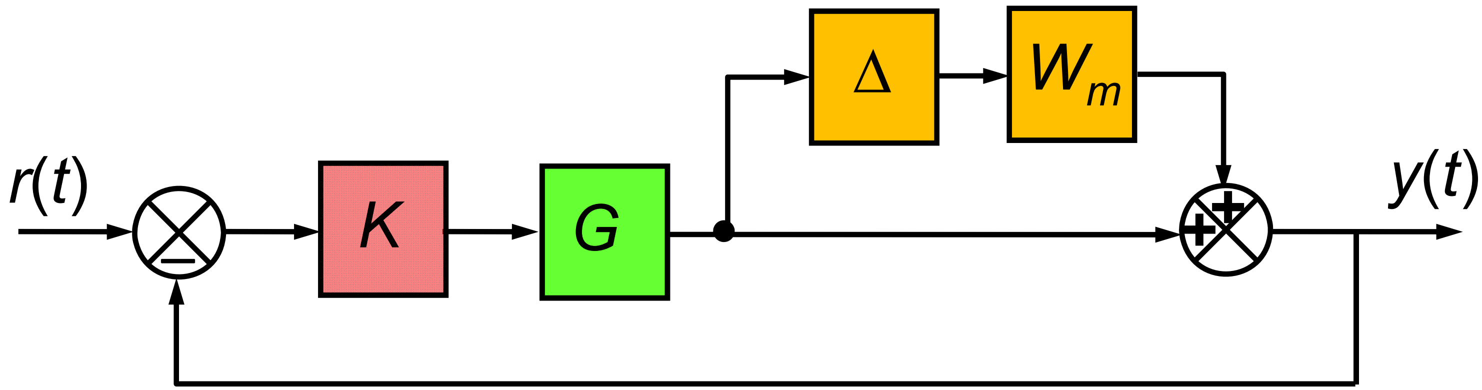
thì điều kiện ổn định bền vững là: $\|W_m G S\|_\infty < 1$

- Nếu đối tượng mô tả bởi mô hình nhiễu nhân ngược:

$$\tilde{G} = \frac{G}{1 + \Delta W_m} : \|\Delta\|_\infty \le 1$$

thì điều kiện ổn định bền vững là: $\|W_m S\|_\infty < 1$

Đánh giá tính ổn định bền vững – Thí dụ 1



★ Bài toán: Cho hệ thống điều khiển có sơ đồ khối như hình vẽ, đối tượng không chắc chắn mô tả bởi mô hình nhiễu nhân, trong đó:

$$G = \frac{1}{(2s+1)(2.6s+1)} \qquad W_m(s) = \frac{3.33s}{3.33s+1} \qquad \|\Delta\|_\infty \le 1$$

Đánh giá tính ổn định bền vững của HT trong 2 trường hợp:

$$K(s) = 3 + \frac{0.1}{s} \qquad\qquad K(s) = 30 + \frac{0.1}{s}$$

Đánh giá tính ổn định bền vững – Thí dụ 1 (tt)

★ ***Giải:***

❖ ***Trường hợp 1:***

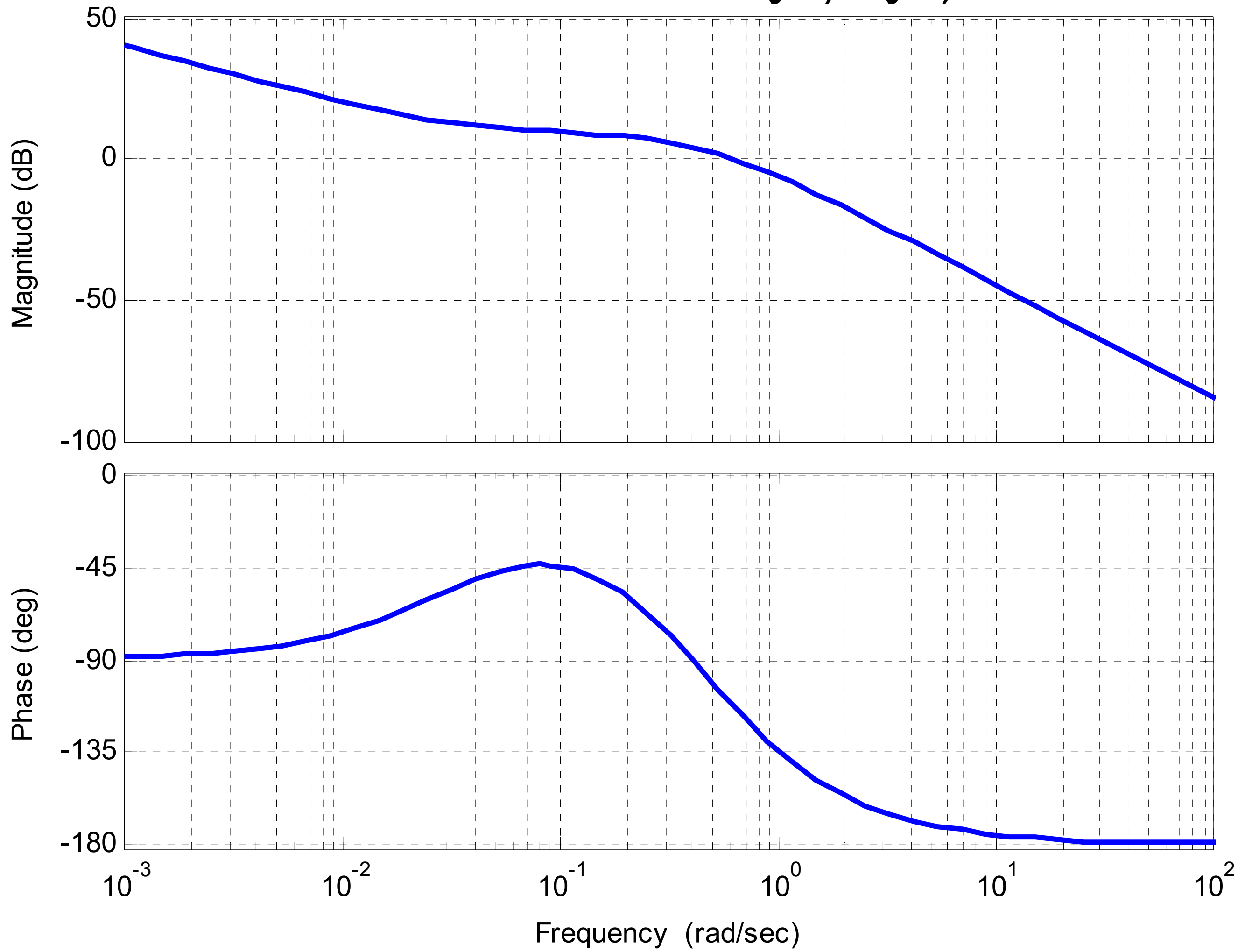
$$W_mT = \frac{W_mKG}{1+KG} = \frac{\left(\dfrac{3.33s}{3.33s+1}\right)\left(3+\dfrac{0.1}{s}\right)\left(\dfrac{1}{(2s+1)(2.6s+1)}\right)}{1+\left(3+\dfrac{0.1}{s}\right)\left(\dfrac{1}{(2s+1)(2.6s+1)}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad W_mT = \frac{0.5769s^2+0.0192s}{s^4+1.185s^3+1.035s^2+0.2502s+0.0057}$$

Xét biểu đồ Bode $K(j\omega)G(j\omega)$ và $W_m(j\omega)T(j\omega)$

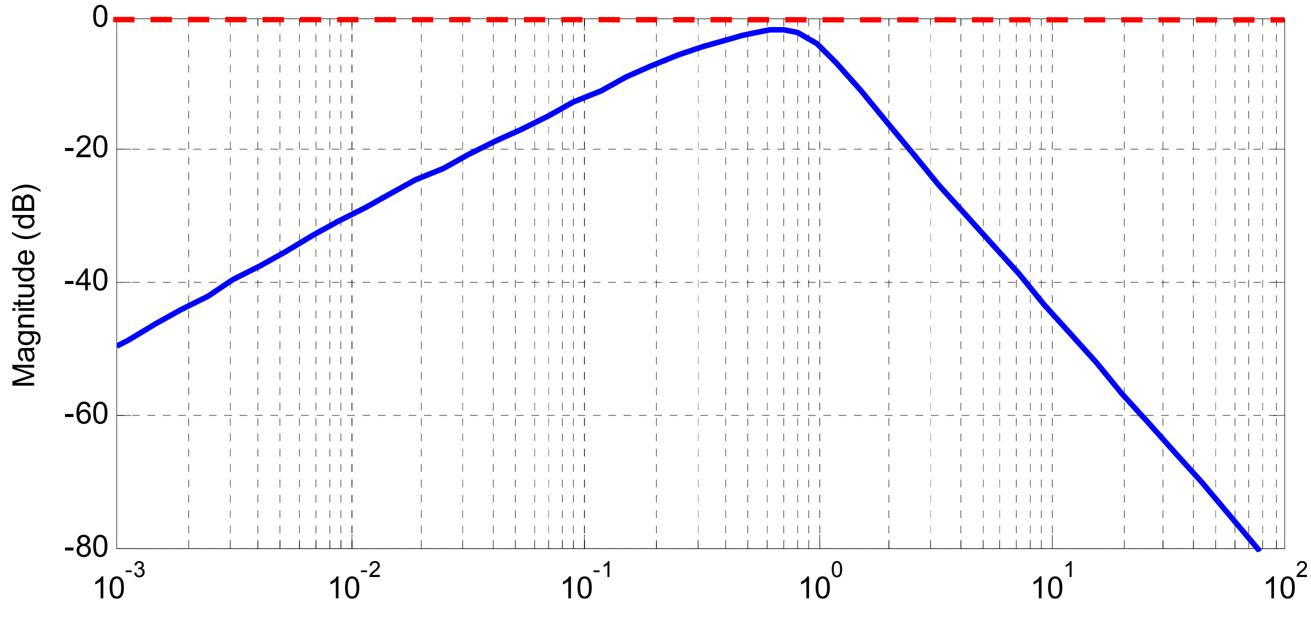
Đánh giá tính ổn định bền vững – Thí dụ 1 (tt)

Biểu đồ Bode $K(j\omega)G(j\omega)$



Do GM > 0 và ΦM > 0 nên hệ danh định ổn định

Đánh giá tính ổn định bền vững – Thí dụ 1 (tt)



- Dựa vào biểu đồ Bode biên độ |$W_m(j\omega)T(j\omega)$|, ta xác định được:

$$20\lg\|W_mT\|_\infty = -1.85[dB] < 0[dB] \quad \Rightarrow \quad \|W_mT\|_\infty < 1$$

- Do hệ thống danh định ổn định, đồng thời |$W_m(j\omega)T(j\omega)$|<1, nên hệ thống ổn định bền vững.

Đánh giá tính ổn định bền vững – Thí dụ 1 (tt)

❖ ***Trường hợp 2:***

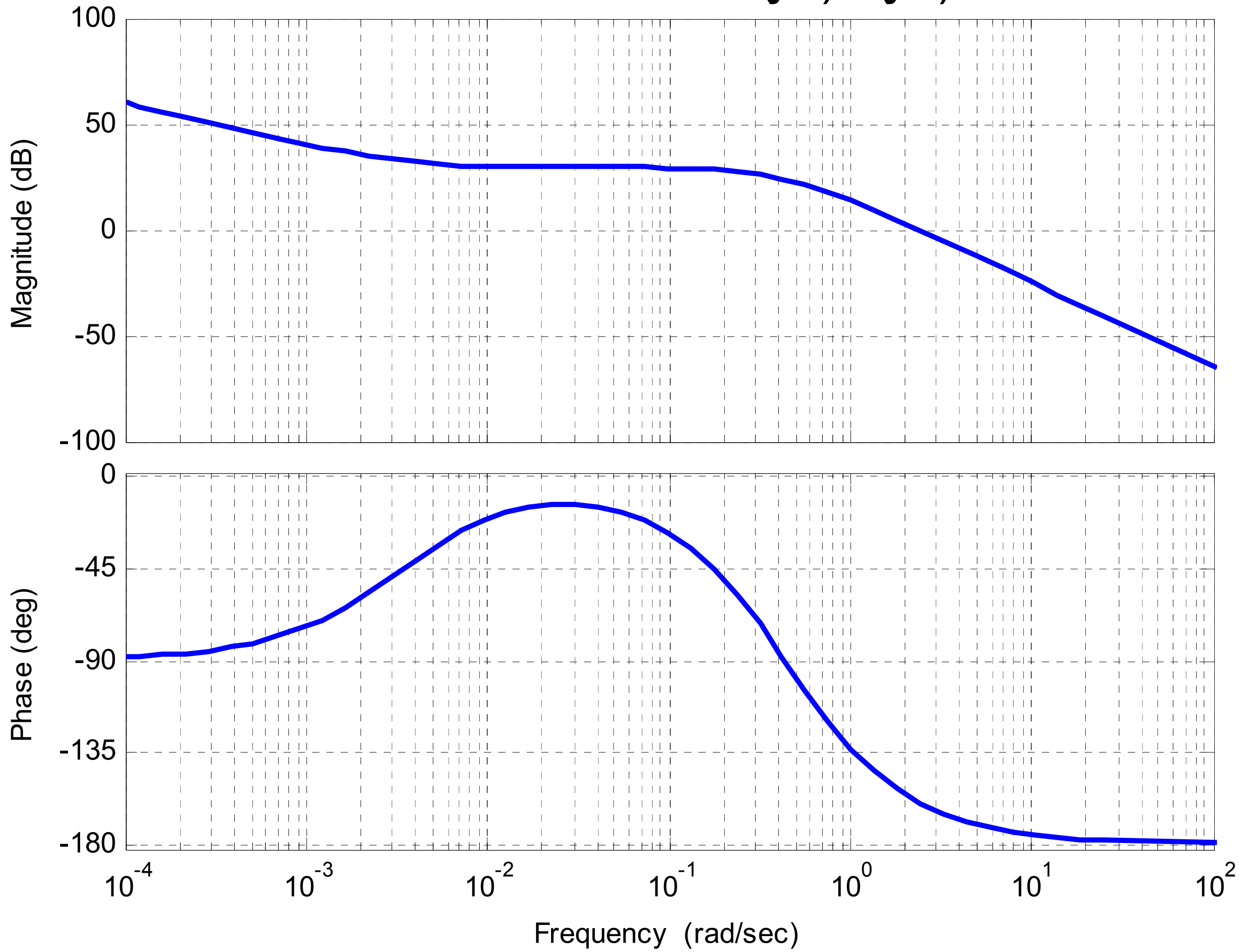
$$W_mT = \frac{W_mKG}{1+KG} = \frac{\left(\dfrac{3.33s}{3.33s+1}\right)\left(30+\dfrac{0.1}{s}\right)\left(\dfrac{1}{(2s+1)(2.6s+1)}\right)}{1+\left(30+\dfrac{0.1}{s}\right)\left(\dfrac{1}{(2s+1)(2.6s+1)}\right)}$$

$$W_mT = \frac{5.769s^2+0.0192s}{s^4+1.185s^3+6.227s^2+1.809s+0.0057}$$

Xét biểu đồ Bode $K(j\omega)G(j\omega)$ và $W_m(j\omega)T(j\omega)$

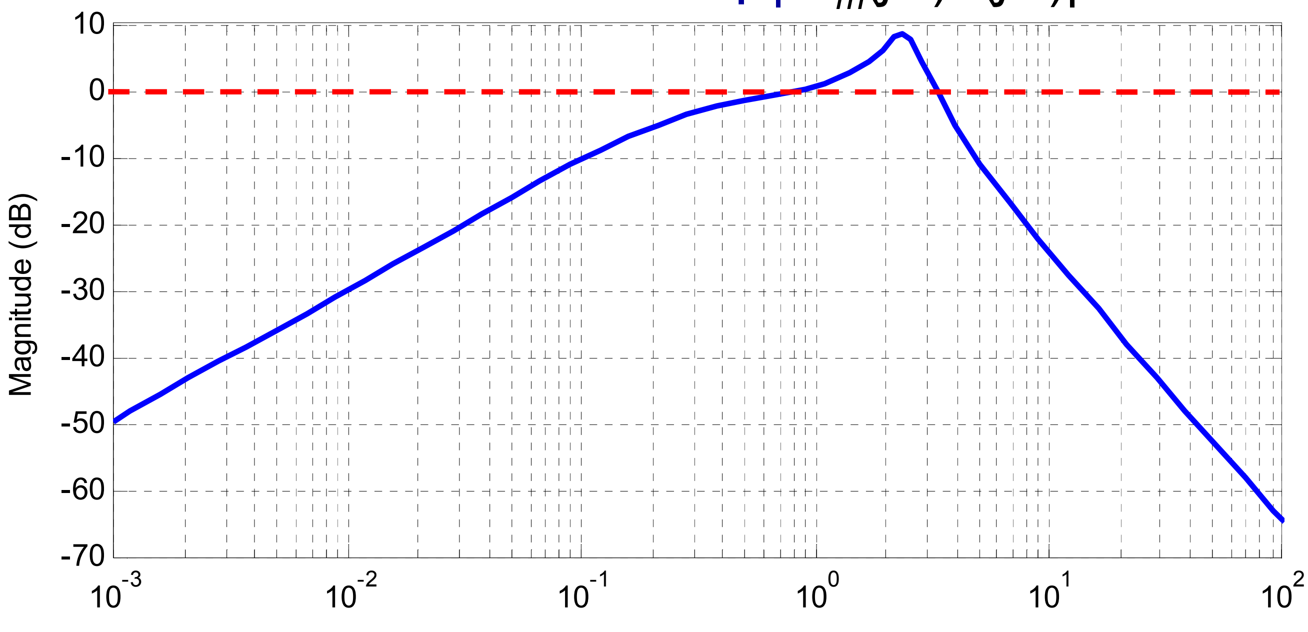
Đánh giá tính ổn định bền vững – Thí dụ 1 (tt)

Biểu đồ Bode $K(j\omega)G(j\omega)$



Do GM > 0 và ΦM > 0 nên hệ danh định ổn định

Đánh giá tính ổn định bền vững – Thí dụ 1 (tt)



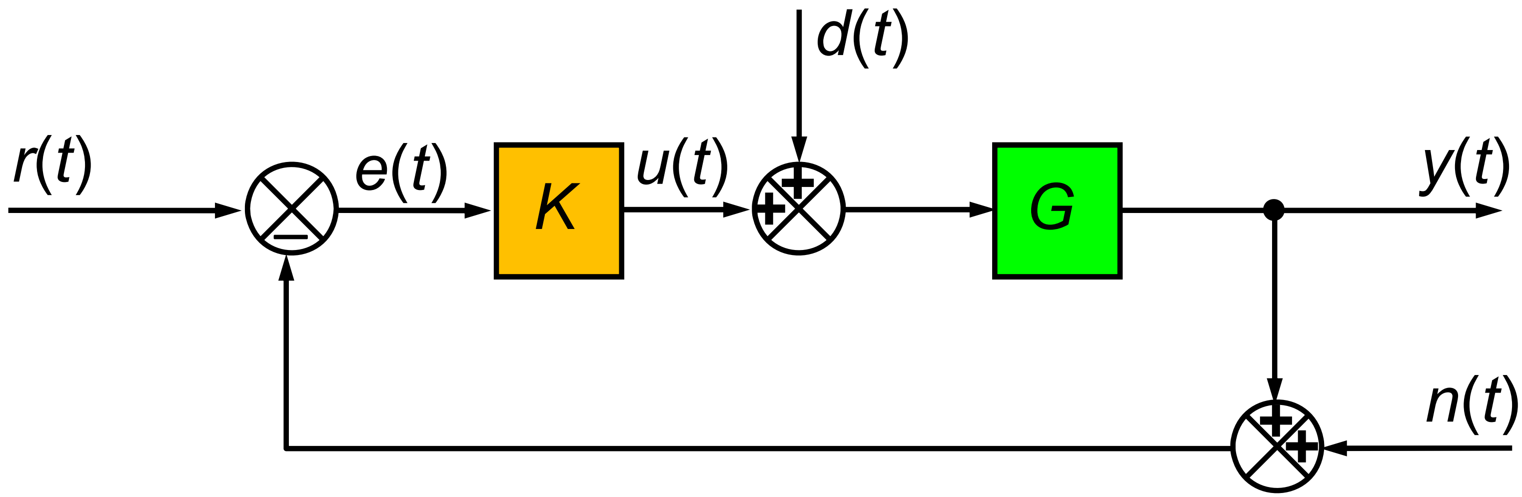
- Dựa vào biểu đồ Bode biên độ $|W_m(j\omega)T(j\omega)|$, ta xác định được:

$$20\lg\|W_m T\|_\infty = 8.5[dB] > 0[dB] \qquad \Rightarrow \qquad \|W_m T\|_\infty > 1$$

- Do $|W_m(j\omega)T(j\omega)|>1$ nên hệ thống không ổn định bền vững

BIỂU DIỄN CHẤT LƯỢNG DANH ĐỊNH DÙNG HÀM ĐỘ NHẠY

Nhắc lại: Hàm truyền kín và hàm độ nhạy



- Hàm truyền kín: $T = \dfrac{KG}{1+KG}$

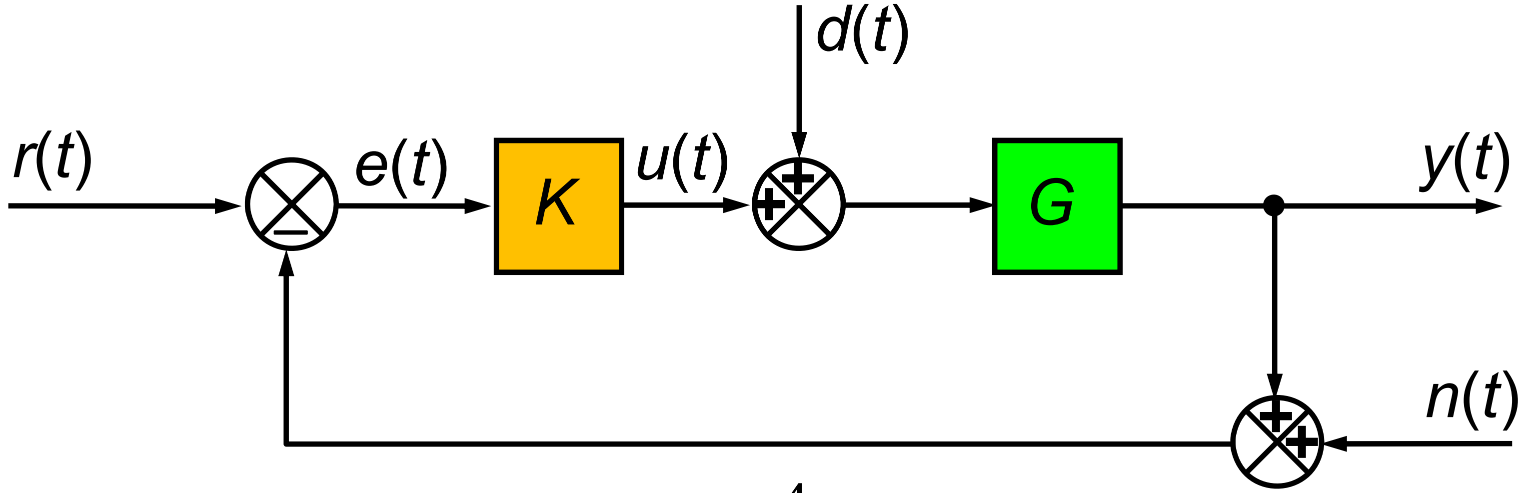
- Hàm độ nhạy: định lượng độ nhạy của *T* đi với sự thay đổi của *G*:

$$S := \lim_{\Delta G \to 0} \frac{\Delta T / T}{\Delta G / G} = \frac{dT}{dG} \cdot \frac{G}{T} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{1+KG}$$

- Chú ý: $T + S = 1$

  Hàm truyền tương từ *r*(*t*) đến *e*(*t*) chính bằng hàm độ nhạy

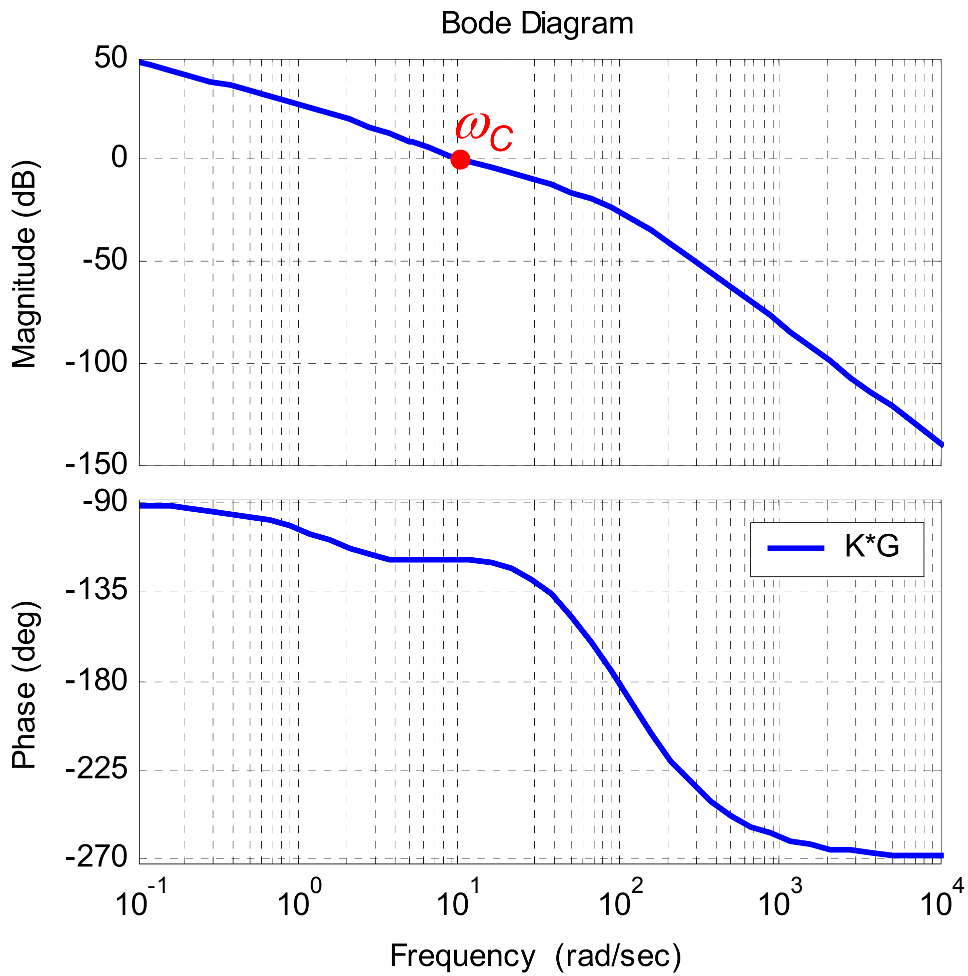
Thí dụ hàm truyền kín và hàm độ nhạy



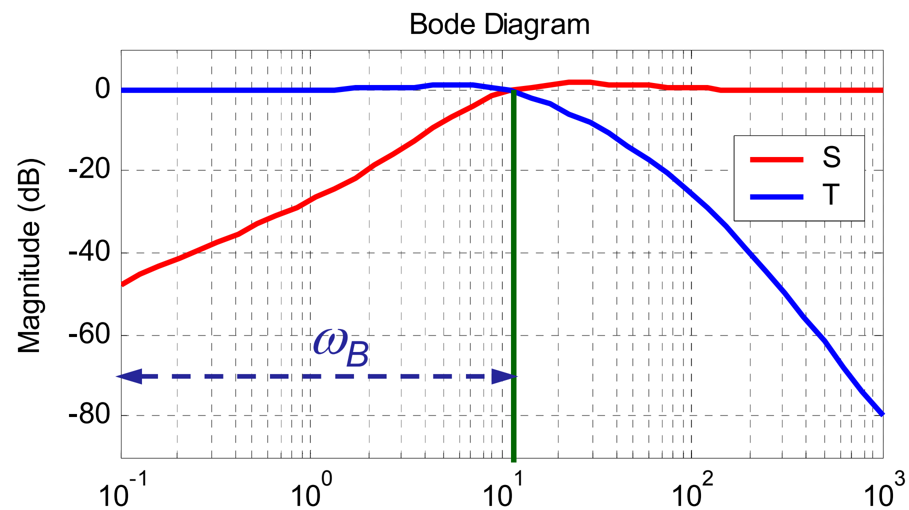
- Đối tượng: $$G(s) = \frac{4}{(0.4s+1)(0.01s+1)^2}$$
- Bộ điều khiển: $$K(s) = 1 + \frac{6}{s}$$
- Hàm truyền kín: $$T = \frac{KG}{1+KG} = \frac{4(s+6)}{s(0.4s+1)(0.01s+1)^2 + 4(s+6)}$$
- Hàm độ nhạy: $$S = \frac{1}{1+KG} = \frac{s(0.4s+1)(0.01s+1)^2}{s(0.4s+1)(0.01s+1)^2 + 4(s+6)}$$

Thí dụ hàm truyền kín và hàm độ nhạy

Biểu đồ Bode hệ hở

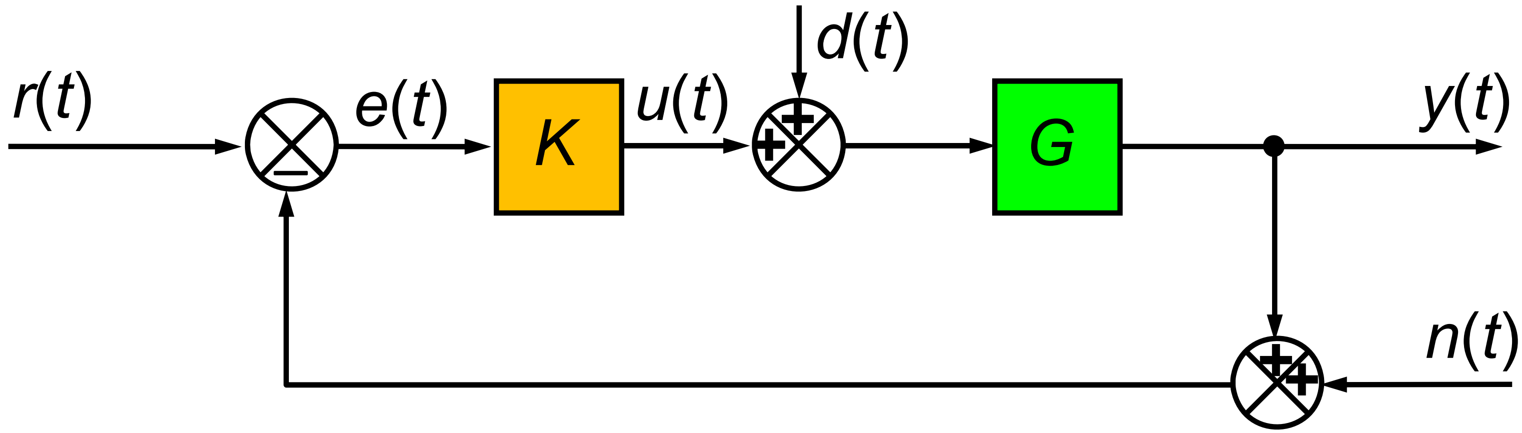


Biểu đồ Bode hàm nhạy và hàm bù nhạy



Tần số cắt biên của hệ hở xấp xỉ băng thông hệ kín

$$\omega_C \approx \omega_B$$



- Sai số: $e = \dfrac{1}{1+KG} r = Sr$
- Nhắc lại một số kết luận trong môn CSTĐ:
  - Nếu *r* là hàm nấc: $e_{xl}=0$ nếu *KG* có ít nhất 1 khâu TPLT
  - Nếu *r* là hàm dốc: $e_{xl}=0$ nếu *KG* có ít nhất 2 khâu TPLT
- Chỉ tiêu chất lượng nếu *r* thuộc về một tập tín hiệu có chuẩn bị chặn?

Biểu diễn chất lượng danh định dùng hàm độ nhạy

- ***Trường hợp 1:*** Xét trường hợp *r* là tín hiệu hình sin có tần số bất kỳ và biên độ bằng 1. Yêu cầu chất lượng là biên độ sai số nhỏ hơn ε.

- Do $e = \dfrac{1}{1+KG} r = Sr$

$\Rightarrow$ Chỉ tiêu chất lượng có thể biểu diễn như sau:

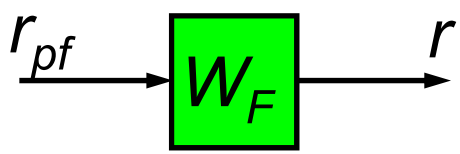
$$\|S\|_\infty < \varepsilon$$

- Đặt $W_p(s) = 1/\varepsilon$

$\Rightarrow$ Chỉ tiêu chất lượng có thể viết lại dưới dạng:

$$\|W_p S\|_\infty < 1$$

Biểu diễn chất lượng danh định dùng hàm độ nhạy



★ ***Trường hợp 2:*** Tín hiệu vào r có dạng $r = W_F r_{pf}$ trong đó r_{pf} là tín hiệu hình sin tần số bất kỳ có biên độ bằng 1.

Chuẩn vô cùng của sai số: $\|e\|_\infty = \|W_F S\|_\infty$

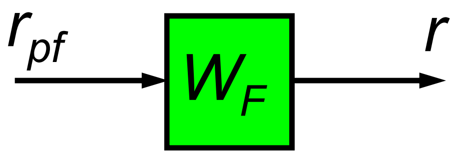
Giả sử yêu cầu chất lượng là: $\|e\|_\infty < \varepsilon$

Đặt $W_p = W_F / \varepsilon$

$\Rightarrow$ Yêu cầu chất lượng $\|e\|_\infty < \varepsilon$ tương đương điều kiện:

$$\boxed{\|W_p S\|_\infty < 1}$$

Biểu diễn chất lượng danh định dùng hàm độ nhạy



- ***Trường hợp 3:*** Tín hiệu vào r là tín hiệu r_{pf} có năng lượng bằng 1 đi qua một bộ lọc W_F

$$\left\{ r : r = W_F r_{pf}, \left\| r_{pf} \right\|_2 \le 1 \right\}$$

Chuẩn bậc 2 của sai số: $\|e\|_2 = \|W_F S\|_\infty$

Giả sử yêu cầu chất lượng là: $\|e\|_2 < \varepsilon$

Đặt $W_p = W_F / \varepsilon$

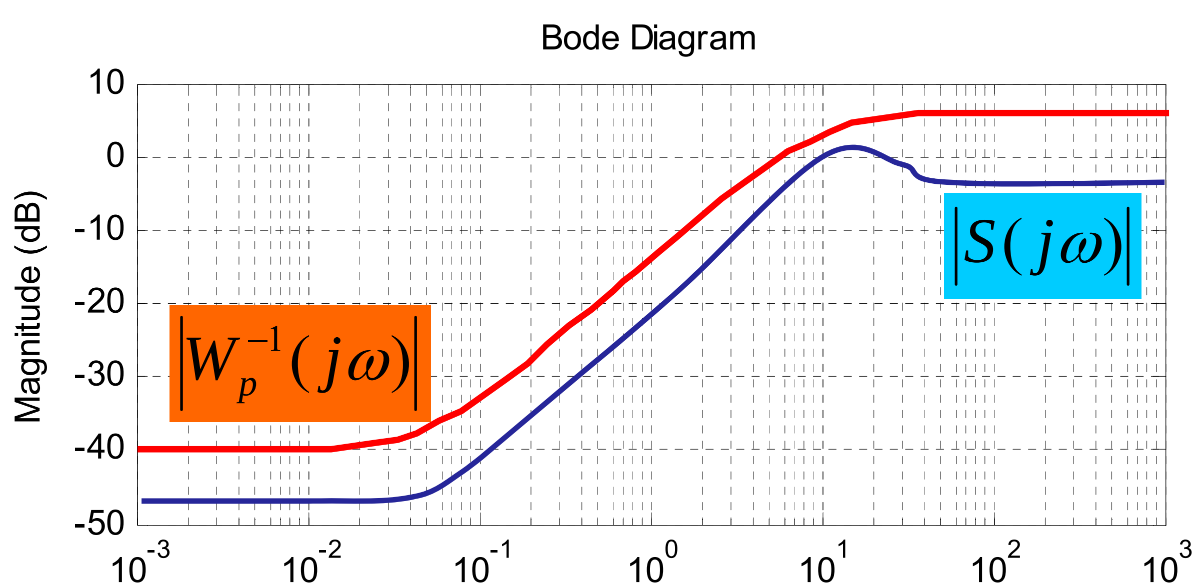
$\Rightarrow$ Yêu cầu chất lượng $\|e\|_2 < \varepsilon$ tương đương điều kiện:

$$\boxed{\|W_p S\|_\infty < 1}$$

Biểu diễn chất lượng danh định dùng hàm độ nhạy

- ***Trường hợp 4:*** Trong một số ứng dụng, người thiết kế dựa vào kinh nghiệm biết rằng để đạt chất lượng tốt, biểu đồ Bode biên độ của hàm độ nhạy phải nằm dưới một đường cong nào đó. Ý tưởng thiết kế này có thể viết dưới dạng:

$$|S(j\omega)| < |W_p(j\omega)|^{-1}, \forall \omega \quad \Leftrightarrow \quad \|W_p S\|_\infty < 1$$



Biểu diễn chất lượng danh định dùng hàm độ nhạy

★ **Tóm lại**: tùy theo ứng dụng cụ thể và tùy theo lớp tín hiệu vào, bằng cách chọn bộ lọc trọng số chất lượng $W_p(s)$ thích hợp, ta có thể biểu diễn chỉ tiêu chất lượng dưới dạng:

$$\left\| W_p S \right\|_\infty < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |S| < \left| W_p^{-1} \right|, \forall \omega$$

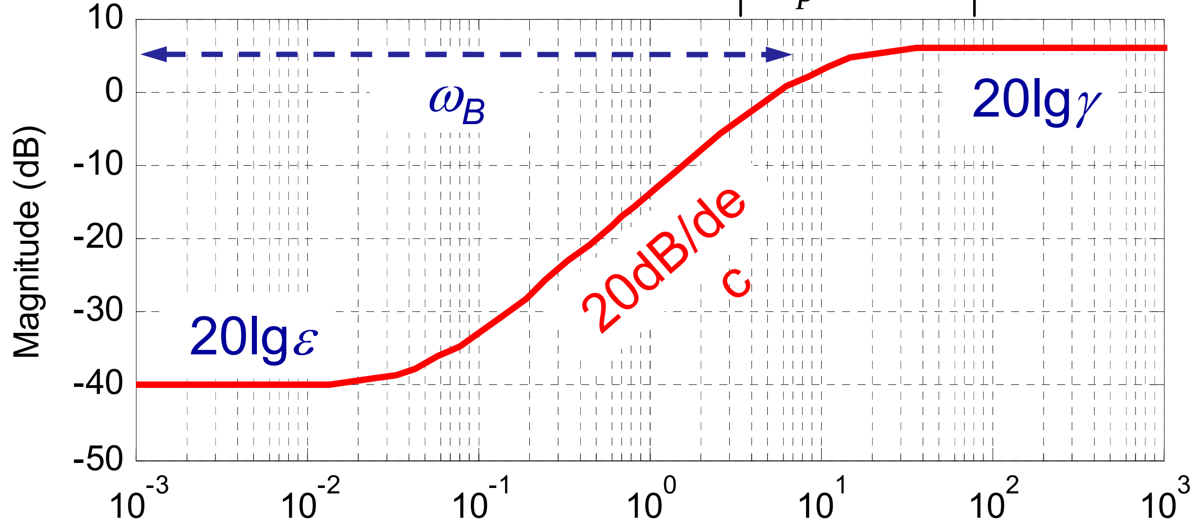
Bộ lọc trọng số chất lượng thường dùng

- Hàm truyền trọng số chất lượng:

$$W_p(s) = \frac{s + \omega_B}{\gamma s + \varepsilon \omega_B}$$

$$\Leftrightarrow W_p^{-1}(s) = \frac{\gamma s + \varepsilon \omega_B}{s + \omega_B}$$

Biểu đồ Bode $20\lg\left|W_p^{-1}(j\omega)\right|$



- Ý nghĩa chỉ tiêu chất lượng danh định $\left\|W_p S\right\|_\infty < 1$ với trọng số chất lượng ở trên là:
  - Sai số xác lập đối với tín hiệu vào là hàm nấc nhỏ hơn ε
  - Sai số bám theo tín hiệu hình sin có biên độ bằng 1, tần số bất kỳ nhỏ hơn γ
  - Băng thông của hệ thống xấp xỉ ω_B

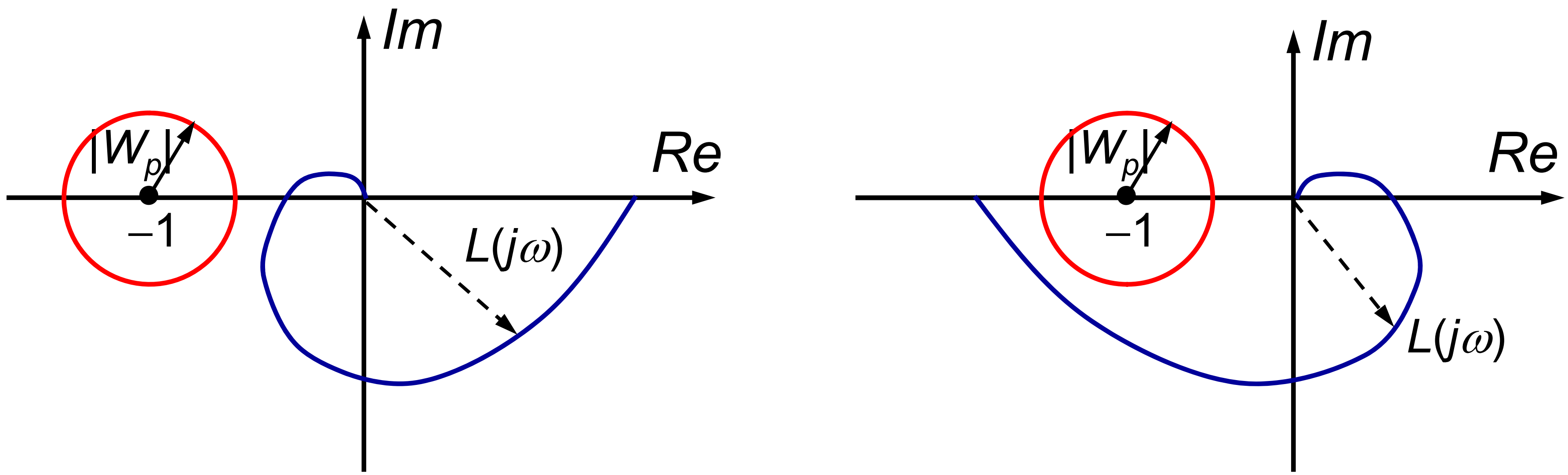
Biểu diễn hình học chỉ tiêu chất lượng

★ Chú ý rằng:

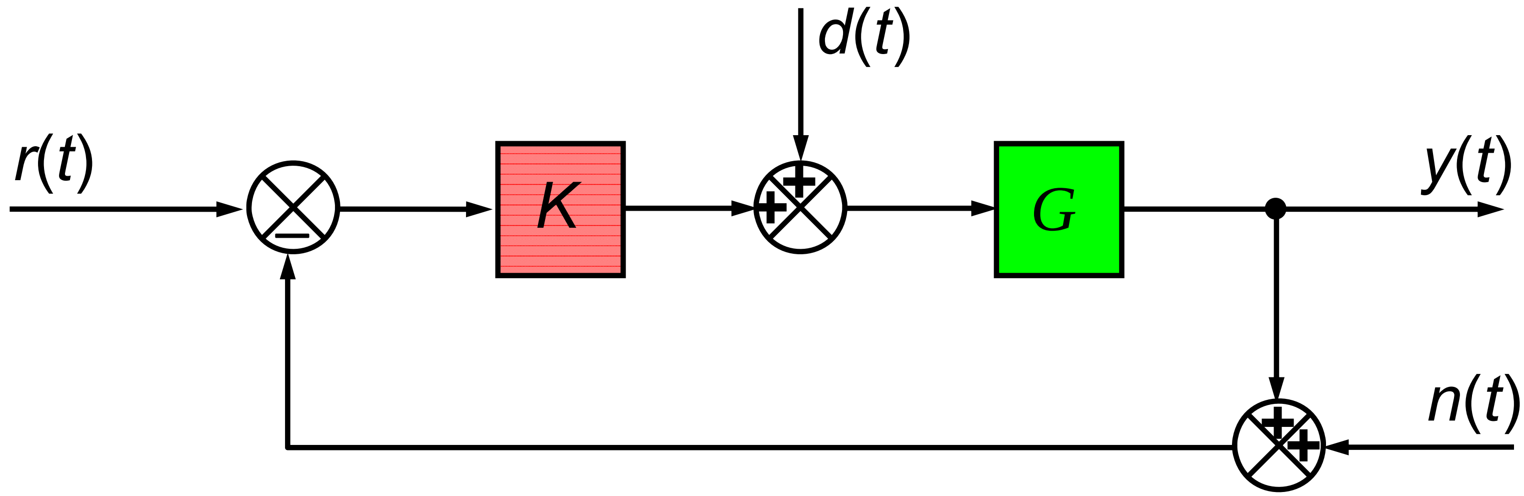
$$\|W_pS\|_\infty < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{W_p(j\omega)}{1+L(j\omega)}\right| < 1, \forall\omega \quad \text{(với } L(j\omega) = K(j\omega)G(j\omega)\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad |W_p(j\omega)| < |1 + L(j\omega)|, \forall\omega$$

$\Rightarrow$ Điều kiện để hệ thống thỏa chất lượng $\|W_pS\|_\infty < 1$ là đường cong Nyquist $L(j\omega)$ của hệ hở phải nằm ngoài vòng tròn tâm –1, bán kính $|W_p(j\omega)|$



Đánh giá chất lượng danh định – Thí dụ 1



★ Cho hệ thống, trong đó:

$$G(s) = \frac{15}{(s+1)} \qquad K(s) = \frac{8(s+3)}{(s+5)}$$

★ Xét hàm trọng số chất lượng: $$W_p(s) = \frac{s+10}{0.5s+0.2}$$

★ Hệ thống có thỏa mãn chất lượng danh định hay không?

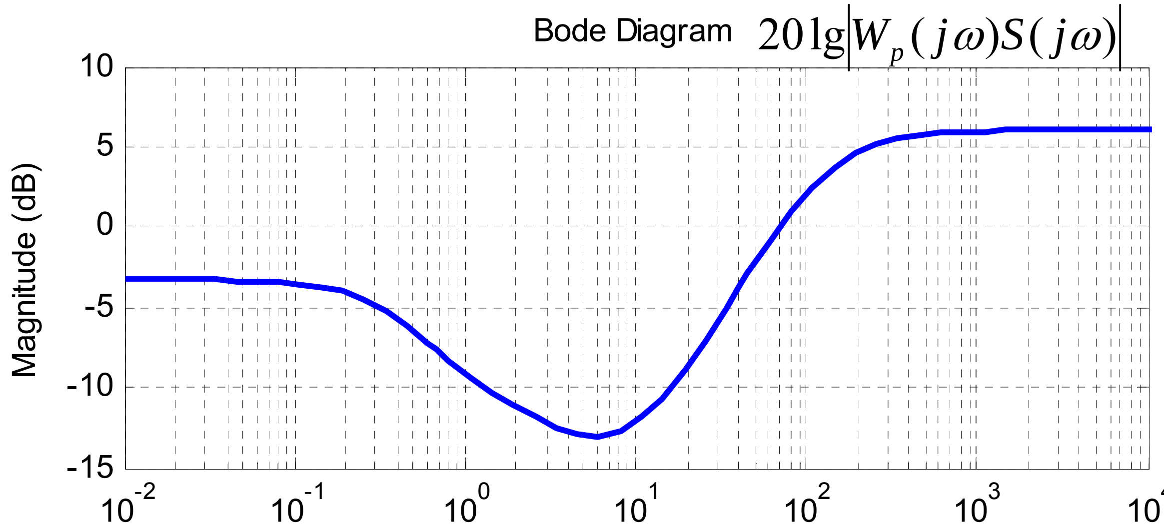
★ *Giải:*

★ Hàm độ nhạy: $S = \dfrac{1}{1+K(s)G(s)} = \dfrac{(s+5)(s+1)}{s^2+126s+365}$

$$\Rightarrow \quad W_p S = \frac{(s+10)(s+5)(s+1)}{(0.5s+0.2)(s^2+126s+365)}$$

★ Vẽ Biểu đồ Bode

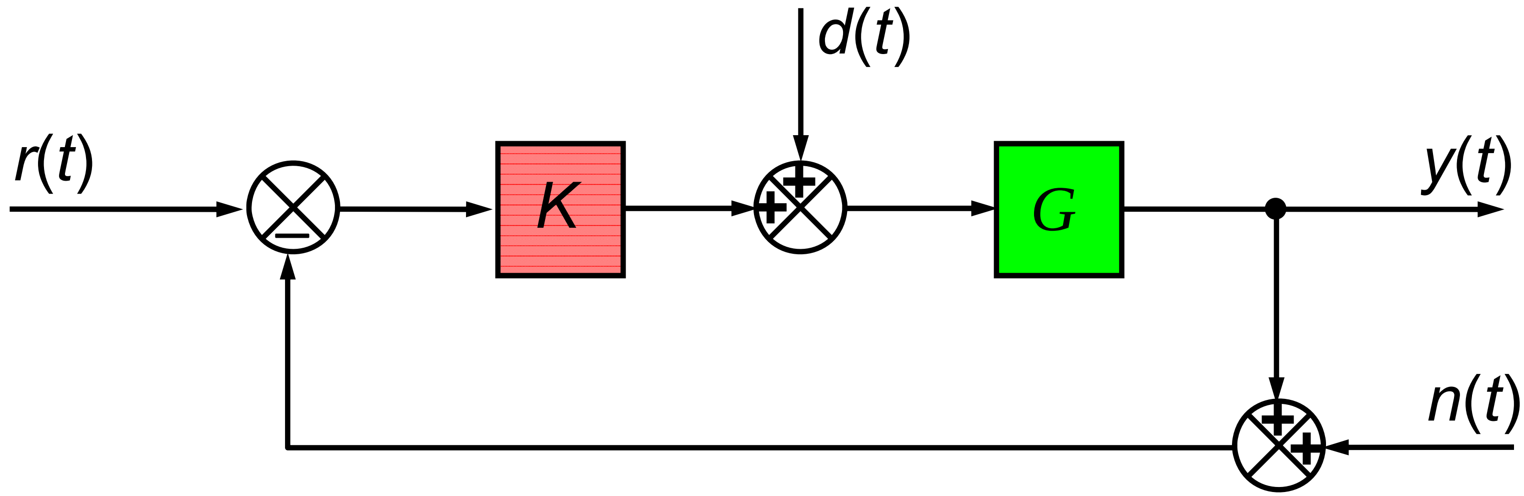
$$\left|W_p(j\omega)S(j\omega)\right|$$



★ Dựa vào biểu đồ, ta thấy $\left\|W_p S\right\|_\infty > 1$ (vì $20\lg\left\|W_p S\right\|_\infty = 6dB > 0$)

$\Rightarrow$ do đó hệ thống không thỏa mãn chất lượng danh định.

Đánh giá chất lượng danh định – Thí dụ 2



- Cho hệ thống, trong đó:

$$G(s) = \frac{5}{(s+2)(s+10)} \qquad K(s) = 5 + \frac{20}{s}$$

- Xét hàm trọng số chất lượng: $W_p(s) = \dfrac{s+1}{1.5s}$

- Hệ thống có thỏa mãn chất lượng danh định hay không?

Đánh giá chất lượng danh định – Thí dụ 2

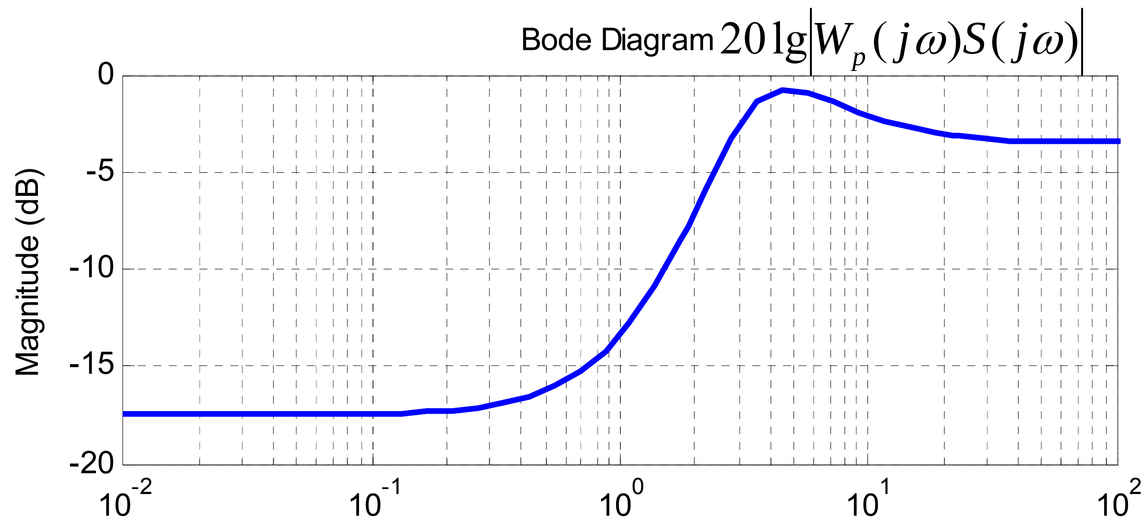
★ ***Giải:***

★ Hàm độ nhạy: $S = \dfrac{1}{1+K(s)G(s)} = \dfrac{s(s+2)(s+10)}{s^3+12s^2+45s+100}$

$$\Rightarrow W_pS = \frac{(s+1)(s+2)(s+10)}{1.5(s^3+12s^2+45s+100)}$$

★ Vẽ biểu đồ Bode biên độ:

$$\left|W_p(j\omega)S(j\omega)\right|$$

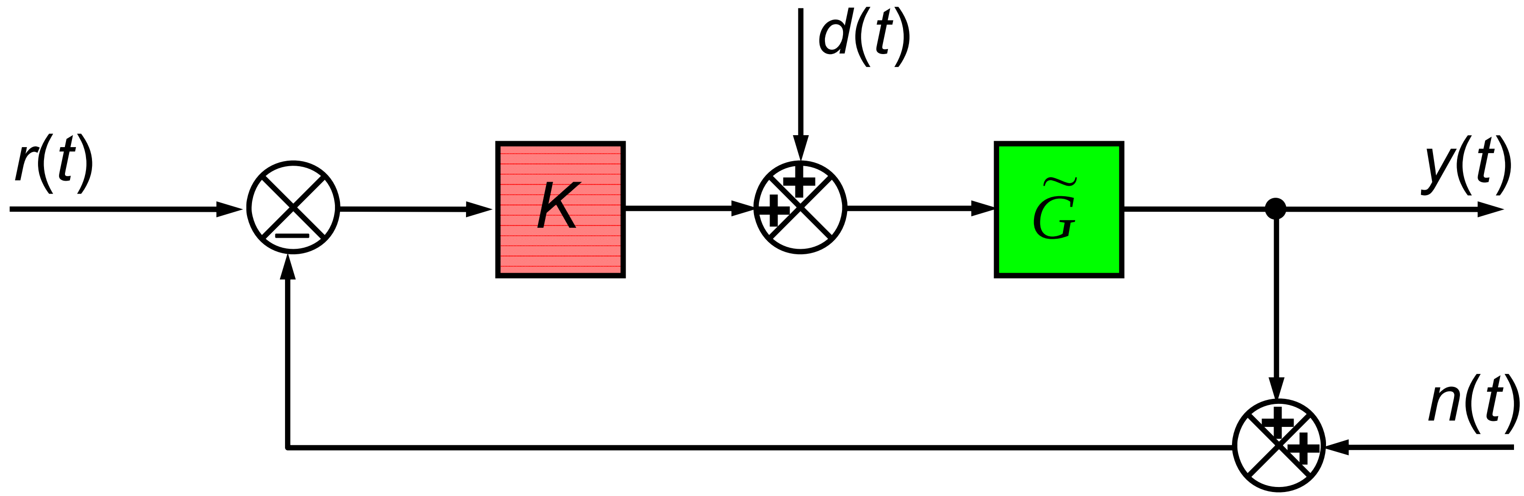


★ Theo b.đồ Bode, ta thấy $\left\|W_pS\right\|_\infty < 1$ (vì $20\lg\left\|W_pS\right\|_\infty = -0.8dB < 0$)

$\Rightarrow$ do đó hệ thống thỏa mãn chất lượng danh định.

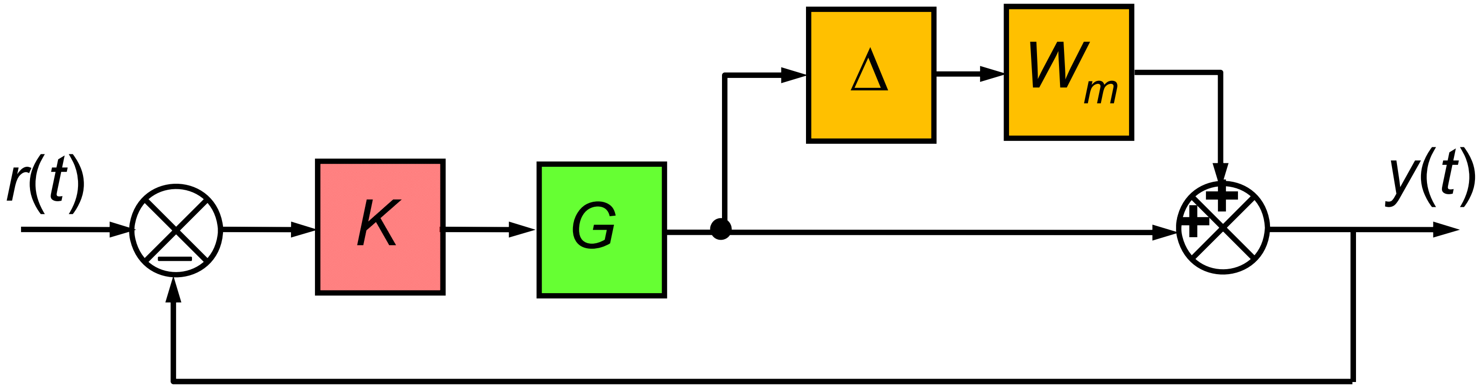
CHẤT LƯỢNG BỀN VỮNG

Định nghĩa chất lượng bền vững



★ Hệ thống được gọi là có chất lượng bền vững nếu hệ thống ổn định nội và thỏa mãn chỉ tiêu chất lượng mong muốn với mọi đối tượng thuộc lớp mô hình không chắc chắn $\widetilde{G}$ cho trước.

Chất lượng bền vững mô hình nhiễu nhân



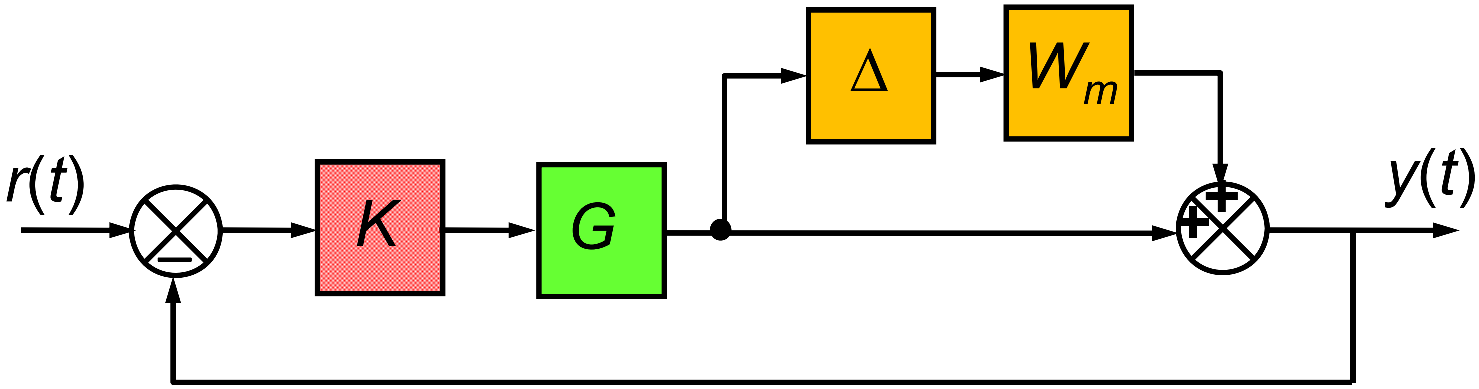
- Xét hàm trọng số chất lượng $W_p(s)$
- Hàm độ nhạy của mô hình nhiễu nhân $\widetilde{G} = G(1+\Delta W_m)$

$$\widetilde{S} = \frac{1}{1+K\widetilde{G}} = \frac{1}{1+KG(1+\Delta W_m)} = \frac{S}{1+\Delta W_m T}$$

- Điều kiện để đạt chất lượng bền vững:

$$\begin{cases} \left\| W_m T \right\|_\infty < 1 \\ \left\| W_p \widetilde{S} \right\|_\infty < 1 \end{cases} \quad \forall \Delta, \left\| \Delta \right\|_\infty \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \left\| W_m T \right\|_\infty < 1 \\ \left\| \dfrac{W_p S}{1+\Delta W_m T} \right\|_\infty < 1 \end{cases}} \quad \forall \Delta, \left\| \Delta \right\|_\infty \le 1$$

Định lý chất lượng bền vững mô hình nhiễu nhân



- ***Định lý:*** Điều kiện cần và đủ để hệ thống điều khiển mô hình nhiễu nhân đạt chất lượng bền vững $\forall \left\|\Delta\right\|_\infty \leq 1$ là:

$$\left\| \left|W_p S\right| + \left|W_m T\right| \right\|_\infty < 1$$

- ***Chứng minh:*** Tham khảo *Feedback Control Theory*, trang 47-48

Định lý chất lượng bền vững mô hình nhiễu nhân (tt)

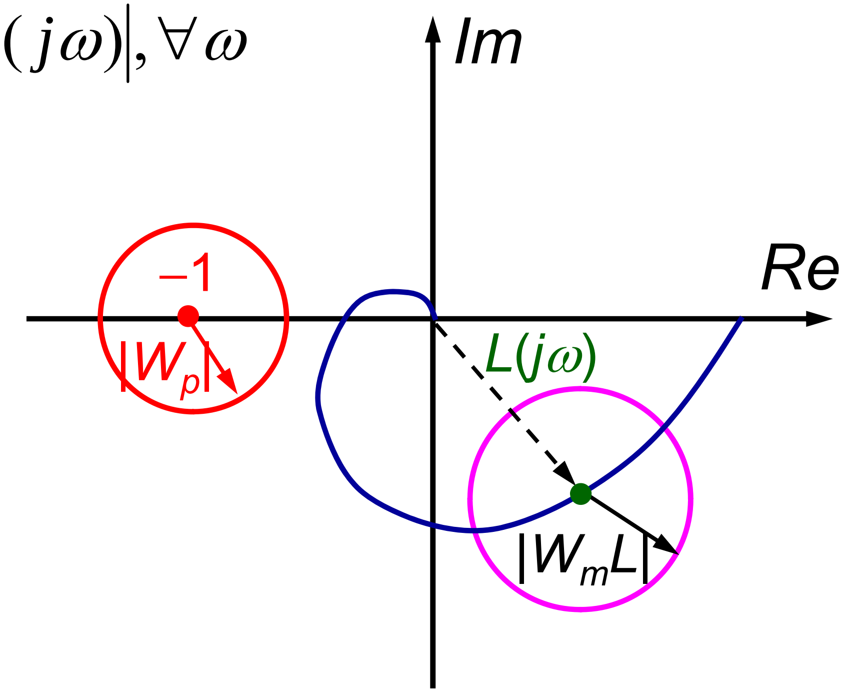
★ ***Biểu diễn hình học:***

★ Chú ý:

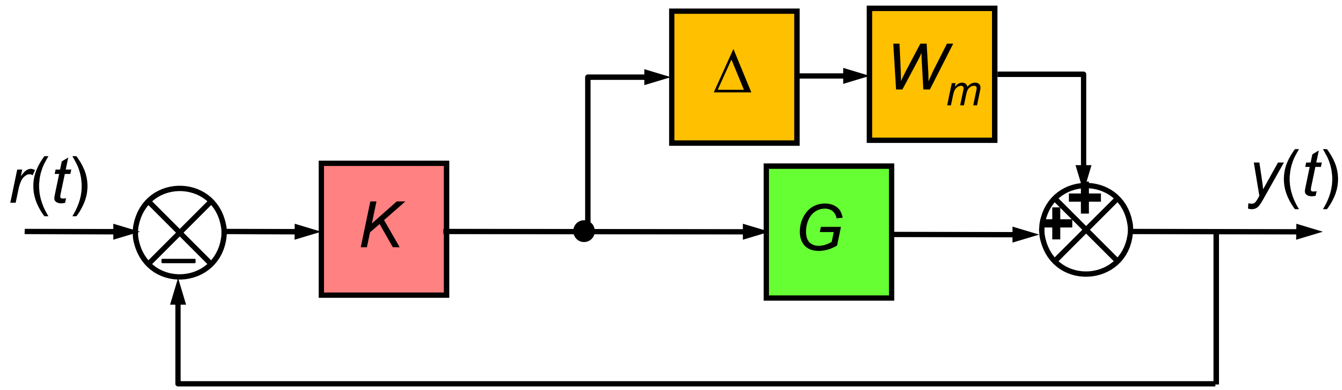
$$\left\| |W_p S| + |W_m T| \right\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W_p(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| + \left| \frac{W_m(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \right| < 1, \forall \omega$$

$$\Leftrightarrow |W_p(j\omega)| + |W_m(j\omega)L(j\omega)| < |1+L(j\omega)|, \forall \omega$$

$\Leftrightarrow$ Tại mọi tần số, vòng tròn tâm (–1, j0), bán kính $|W_p(j\omega)|$ không được cắt vòng tròn tâm $L(j\omega)$, bán kính $|W_m(j\omega)L(j\omega)|$



Chất lượng bền vững mô hình nhiễu cộng



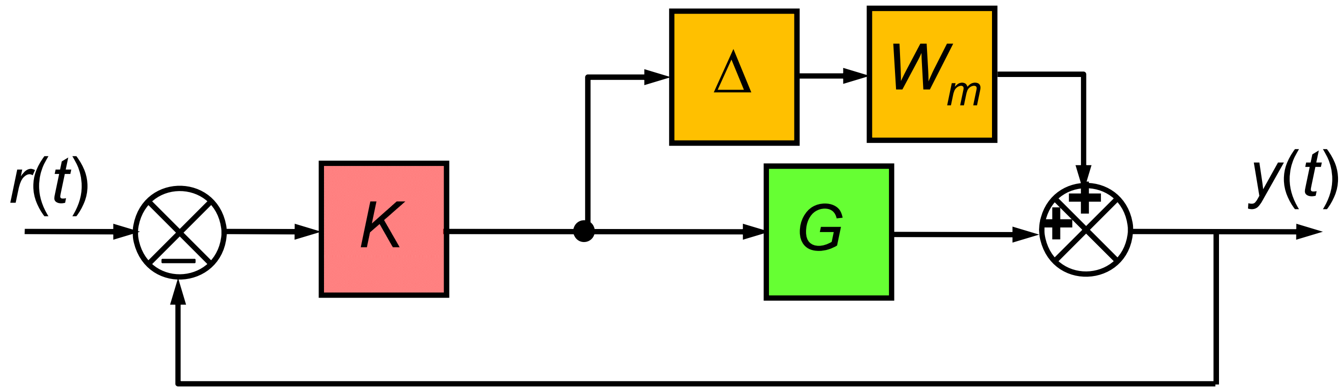
- Xét hàm trọng số chất lượng $W_p(s)$
- Hàm độ nhạy của mô hình nhiễu cộng $\tilde{G} = G + \Delta W_m$

$$\tilde{S} = \frac{1}{1+K\tilde{G}} = \frac{1}{1+K(G+\Delta W_m)} = \frac{S}{1+\Delta W_m KS}$$

- Điều kiện để đạt chất lượng bền vững:

$$\begin{cases} \left\| W_m KS \right\|_\infty < 1 \\ \left\| W_p \tilde{S} \right\|_\infty < 1 \end{cases} \quad \forall \Delta, \left\| \Delta \right\|_\infty \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \left\| W_m KS \right\|_\infty < 1 \\ \left\| \dfrac{W_p S}{1+\Delta W_m KS} \right\|_\infty < 1 \end{cases} \forall \Delta, \left\| \Delta \right\|_\infty \le 1$$

Định lý chất lượng bền vững mô hình nhiễu cộng

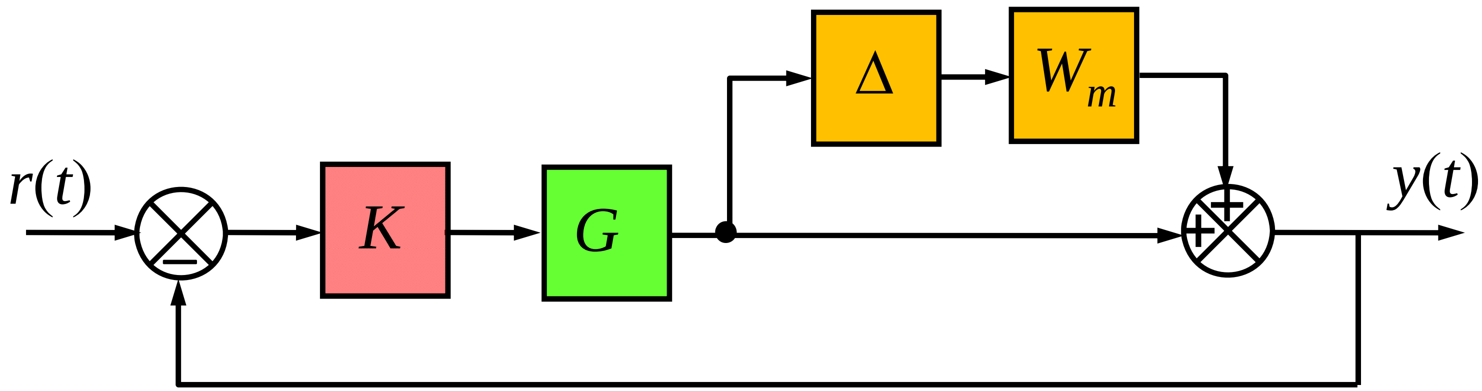


- ***Định lý:*** Điều kiện cần và đủ để hệ thống điều khiển mô hình nhiễu cộng đạt chất lượng bền vững $\forall \|\Delta\|_\infty \le 1$ là:

$$\left\| \left|W_p S\right| + \left|W_m K S\right| \right\|_\infty < 1$$

- ***Chứng minh:*** Tham khảo *Feedback Control Theory.*

Đánh giá chất lượng bền vững – Thí dụ 1



★ Bài toán: Cho HTĐK có sơ đồ khối như hình vẽ, đối tượng không chắc chắn mô tả bởi mô hình nhiễu nhân, trong đó:

$$G = \frac{26800}{(s+250)(s+60)} \qquad W_m(s) = \frac{0.05s+0.92}{0.1064s+1} \qquad K(s) = 1.8 + \frac{1.8}{s}$$

Hàm trọng số chất lượng là: $W_p(s) = \dfrac{0.5s+0.01}{s+0.0001}$

(a) Hệ thống có thỏa chất lượng danh định $\left\|W_p S\right\|_\infty < 1$?

(b) Hệ thống có thỏa chất lượng bền vững $\left\| |W_p S| + |W_m T| \right\|_\infty < 1$?

Đánh giá chất lượng bền vững – Thí dụ 1 (tt)

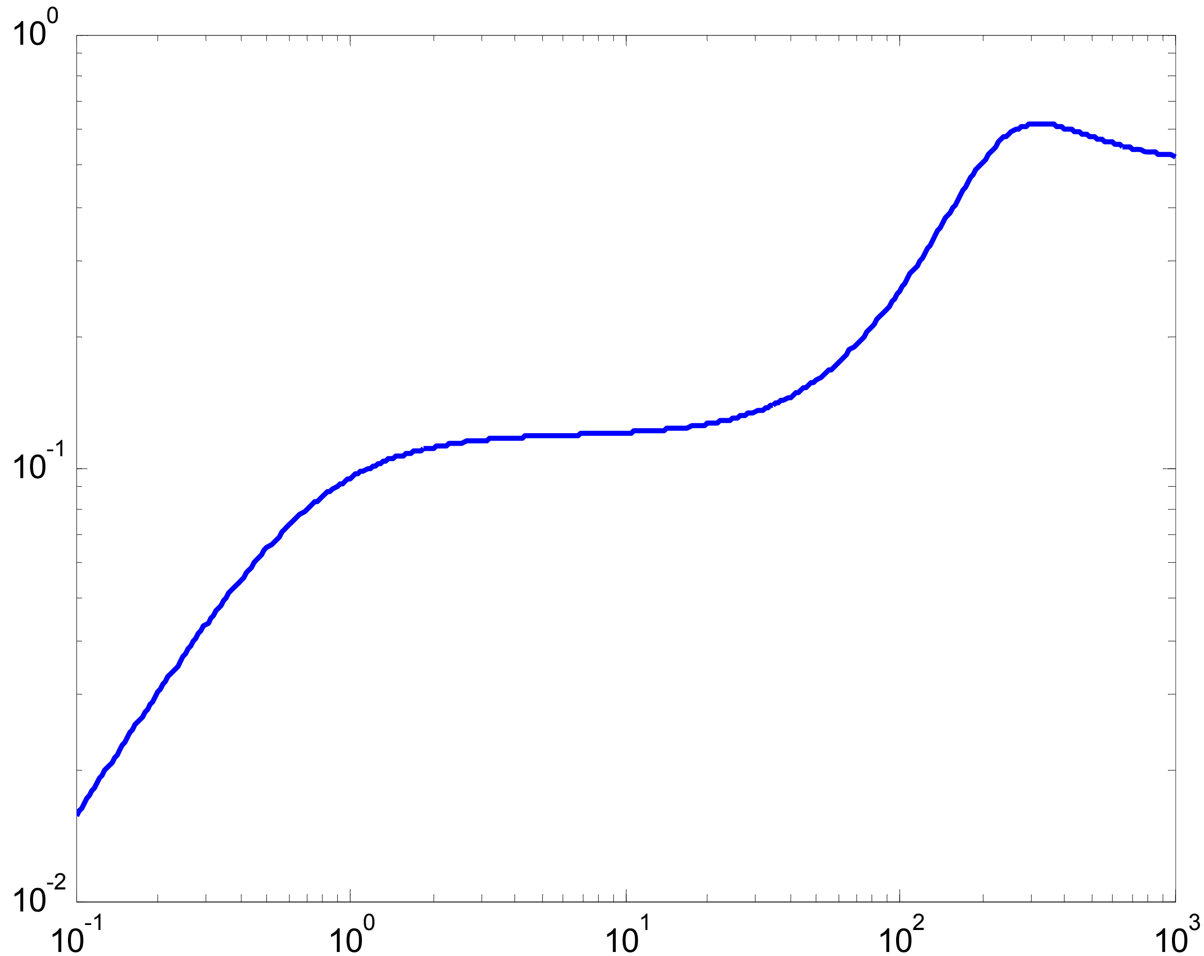
- Giải:
- Kiểm tra điều kiện chất lượng danh định

$$W_pS = \frac{W_p}{1+KG} = \frac{\left(\dfrac{0.5s+0.01}{s+0.0001}\right)}{1+\left(1.8+\dfrac{1.8}{s}\right)\dfrac{26800}{(s+250)(s+60)}}$$

$$W_pS = \frac{0.5s^4+155s^3+7503s^2+150s}{s^4+310s^3+63240s^2+48250s+4.824}$$

- Vẽ biểu đồ: $\left|W_p(j\omega)S(j\omega)\right|$

Đánh giá chất lượng bền vững – Thí dụ 1 (tt)



★ Theo biểu đồ: $\left\| W_p S \right\|_\infty = 0.6207 < 1$

$\Rightarrow$ Hệ thống thỏa điều kiện chất lượng danh định

Đánh giá chất lượng bền vững – Thí dụ 1 (tt)

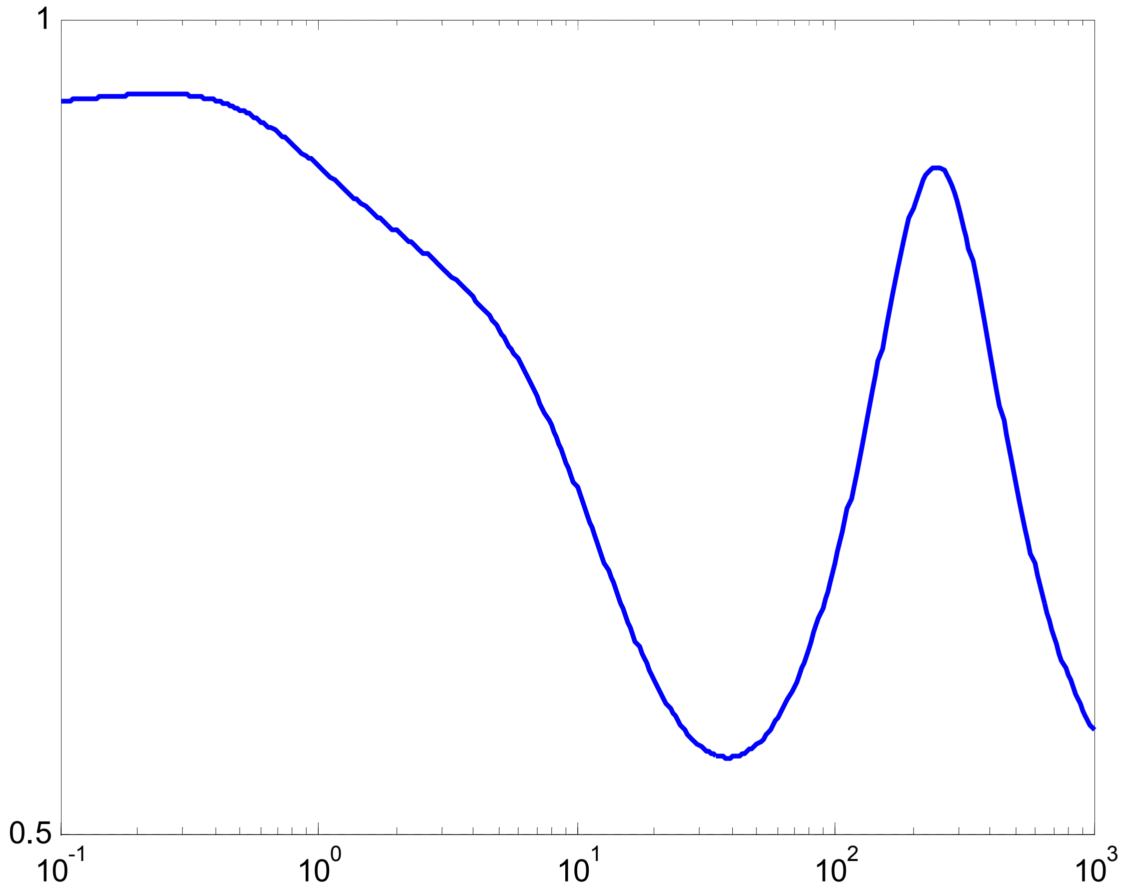
★ Kiểm tra điều kiện chất lượng bền vững

$$W_m T = \frac{W_m KG}{1+KG} = \frac{\left(\dfrac{0.05s+0.92}{0.1064s+1}\right)\left(1.8+\dfrac{1.8}{s}\right)\left(\dfrac{26800}{(s+250)(s+60)}\right)}{1+\left(1.8+\dfrac{1.8}{s}\right)\left(\dfrac{26800}{(s+250)(s+60)}\right)}$$

$$W_m T = \frac{22670s^2+439800s+417100}{s^4+319.4s^3+66150s^2+642600s+453400}$$

★ Vẽ biểu đồ: $\left|W_p(j\omega)S(j\omega)\right| + \left|W_m(j\omega)T(j\omega)\right|$

Đánh giá chất lượng bền vững – Thí dụ 1 (tt)

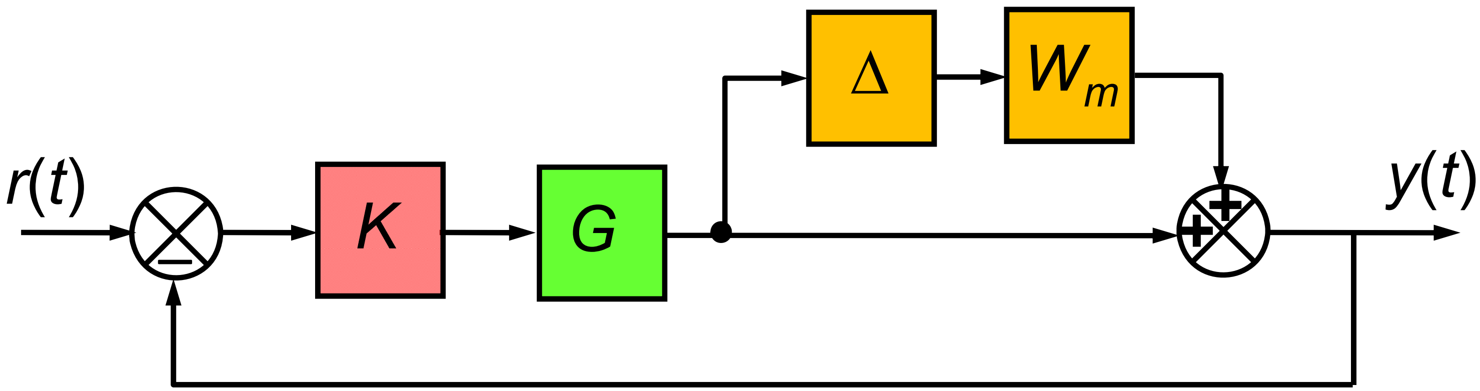


★ Theo biểu đồ: $\left\| \left|W_p S\right| + \left|W_m T\right| \right\|_\infty = 0.9383 < 1$

$\Rightarrow$ Hệ thống thỏa điều kiện chất lượng bền vững

THIẾT KẾ BỘ ĐIỀU KHIỂN BỀN VỮNG DÙNG PHƯƠNG PHÁP CHỈNH ĐỘ LỢI VÒNG (Loopshaping)

Ý tưởng thiết kế dùng phương pháp chỉnh độ lợi vòng



- ***Bài toán:*** Cho đối tượng không chắc chắn mô tả bởi MH nhiễu nhân. TK bộ ĐK $K(s)$ sao cho hệ kín đạt chất lượng bền vững
- ***Ý tưởng thiết kế:***
  - Chỉnh độ lợi vòng $|L(j\omega)|$ để thỏa đạt chất lượng bền vững:

$$\left\| |W_p S| + |W_m T| \right\|_\infty < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \left|\frac{W_p}{1+L}\right| + \left|\frac{W_m L}{1+L}\right| \right\|_\infty < 1$$

  - Sau đó tính hàm truyền bộ điều khiển: $K(j\omega) = \dfrac{L(j\omega)}{G(j\omega)}$

Các ràng buộc

* Ràng buộc đối với *S* và *T*:
  * *S* và *T* cần thỏa mãn đẳng thức: $S+T=1\ \forall\omega$
  * $\Rightarrow$ Trường hợp riêng, tại tần số bất kỳ *S* và *T* không thể đồng thời nhỏ hơn 1/2

* Ràng buộc đối với W_p và W_m:
  * ĐK cần để hệ thống đạt chất lượng bền vững là:

$$\min\left\{\left|W_p(j\omega)\right|,\left|W_m(j\omega)\right|\right\}<1,\forall\omega$$

Nghĩa là tại mọi tần số, $|W_p|$ hoặc $|W_m|$ phải nhỏ hơn 1

  * Thông thường $|W_p|$ đơn điệu giảm để sai số bám nhỏ trong miền tần số thấp và $|W_m|$ đơn điệu tăng vì độ bất định tăng ở miền tần số cao.

Cơ sở toán học của phương pháp chỉnh độ lợi vòng

- Đặt: $$\Gamma(j\omega) = \left|W_p(j\omega)S(j\omega)\right| + \left|W_m(j\omega)T(j\omega)\right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \Gamma(j\omega) = \left|\frac{W_p(j\omega)}{1+L(j\omega)}\right| + \left|\frac{W_m(j\omega)L(j\omega)}{1+L(j\omega)}\right|$$

- Điều kiện chất lượng bền vững tương đương với:

$$\Gamma(j\omega) < 1, \forall\omega$$

- Từ biểu thức định nghĩa $\Gamma(j\omega)$, suy ra các bất đẳng thức:

$$\frac{\left|W_p\right| + \left|W_m L\right|}{1+\left|L\right|} \le \Gamma \le \frac{\left|W_p\right| + \left|W_m L\right|}{\left|1-\left|L\right|\right|}$$

- Do ràng buộc $\min\left\{\left|W_p(j\omega)\right|, \left|W_m(j\omega)\right|\right\} < 1, \forall\omega$ nên tại mọi tần số ta phải có $\left|W_p(j\omega)\right| < 1$ hoặc $\left|W_m(j\omega)\right| < 1$

Cơ sở toán học của PP chỉnh độ lợi vòng (tt)

- Xét trường hợp $|W_m| < 1 < |W_p|$

$$\Gamma < 1 \quad \Leftarrow \quad |L| > \frac{|W_p| + 1}{1 - |W_m|}$$

$$\Gamma < 1 \quad \Rightarrow \quad |L| > \frac{|W_p| - 1}{1 - |W_m|}$$

Nếu $|W_p| >> 1$ thì vế phải 2 bất đ.thức trên gần bằng $\dfrac{|W_p|}{1 - |W_m|}$

$\Rightarrow$ Ở miền tần số thấp thỏa $|W_p| > 1 >> |W_m|$, điều kiện để hệ thống đạt chất lượng bền vững là:

$$|L| > \frac{|W_p|}{1 - |W_m|}$$

Cơ sở toán học của phương pháp chỉnh độ lợi vòng (tt)

- Xét trường hợp $\left|W_p\right| < 1 < \left|W_m\right|$

$$\Gamma < 1 \quad \Leftarrow \quad \left|L\right| < \frac{1-\left|W_p\right|}{\left|W_m\right|+1}$$

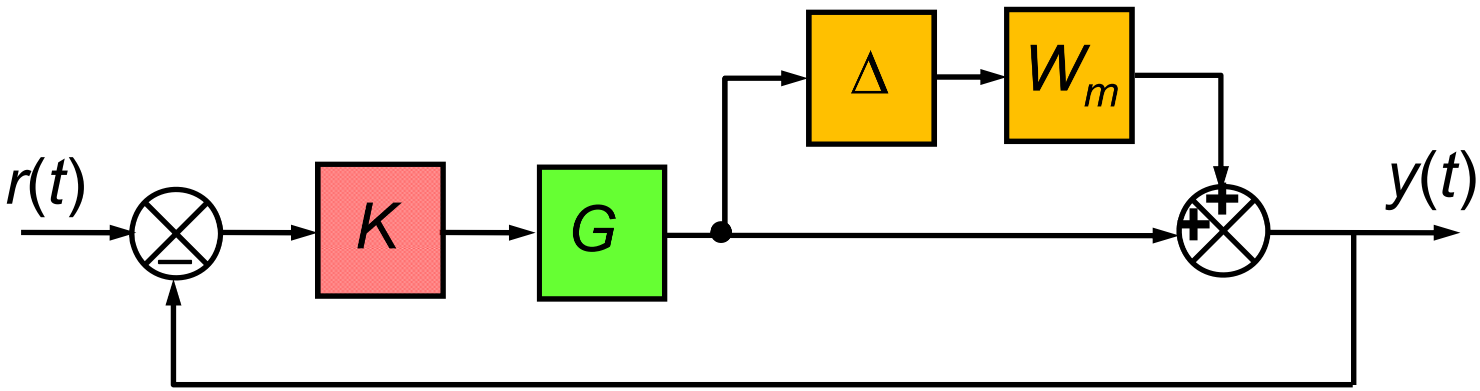
$$\Gamma < 1 \quad \Rightarrow \quad \left|L\right| < \frac{1-\left|W_p\right|}{\left|W_m\right|-1}$$

Nếu $\left|W_m\right| >> 1$ thì vế phải 2 bất đ.thức trên gần bằng $\dfrac{1-\left|W_p\right|}{\left|W_m\right|}$

$\Rightarrow$ Ở miền tần số cao thỏa $\left|W_p\right| < 1 << \left|W_m\right|$, điều kiện để hệ thống đạt chất lượng bền vững là:

$$\left|L\right| < \frac{1-\left|W_p\right|}{\left|W_m\right|}$$

Trình tự thiết kế dùng PP chỉnh độ lợi vòng



★ ***Bài toán:*** Cho đối tượng ĐK mô tả bởi mô hình nhiễu nhân. Thiết kế bộ ĐK $K(s)$ sao cho hệ kín đạt chất lượng bền vững

$$\left\| \left|W_p S\right| + \left|W_m T\right| \right\|_\infty < 1$$

★ ***Bước 1:*** Vẽ hai biểu đồ Bode biên độ

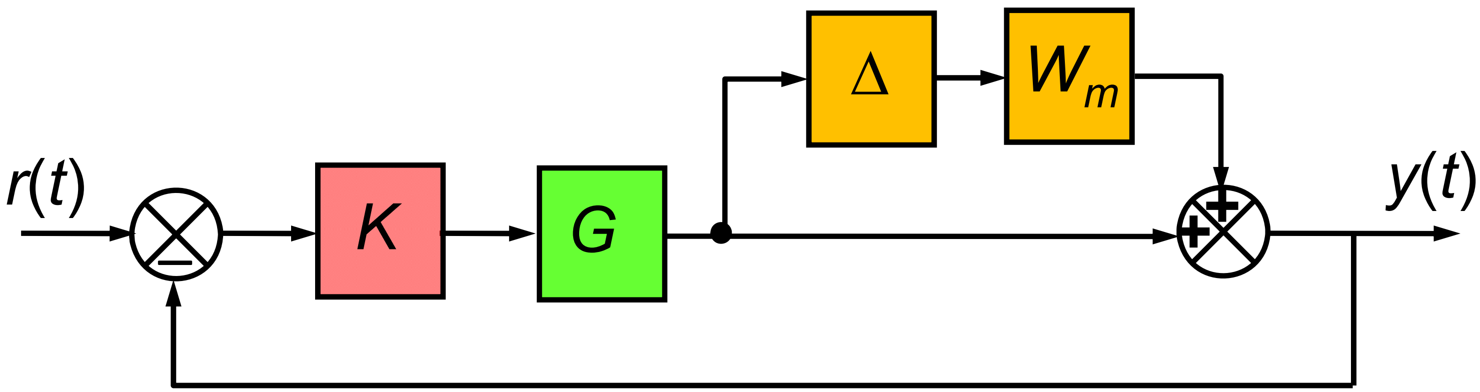
- Ở miền t/số thấp thỏa $|W_p| > 1 > |W_m|$: vẽ biểu đồ $\dfrac{|W_p|}{1-|W_m|}$ (1)
- Ở miền t/số cao thỏa $|W_p| < 1 < |W_m|$: vẽ biểu đồ $\dfrac{1-|W_p|}{|W_m|}$ (2)

Trình tự thiết kế dùng PP chỉnh độ lợi vòng

- ***Bước 2:*** Vẽ biểu đồ Bode biên độ $|L(j\omega)|$ sao cho:
  - Ở miền tần số thấp: $|L(j\omega)|$ nằm ở phía trên biểu đồ Bode (1), đồng thời $|L(j\omega)| >> 1$.
  - Ở miền tần số cao: $|L(j\omega)|$ nằm ở phía dưới biểu đồ Bode (2), đồng thời $|L(j\omega)| << 1$.
  - Ở miền tần số "rất cao", độ dốc xuống $|L(j\omega)|$ của ít nhất phải bằng độ dốc của $|G(j\omega)|$ để đảm bảo $K(j\omega)$ hợp thức.
  - Độ dốc của $|L(j\omega)|$ thay đổi càng ít càng tốt tại tần số cắt biên. Tốt nhất độ dốc bằng –20dB/dec tại tần số cắt biên.
- ***Bước 3:*** Viết biểu thức $L(j\omega)$ để có biểu đồ Bode ở bước 2.
- ***Bước 4:*** Tính $K(j\omega) = L(j\omega)/G(j\omega)$
- ***Bước 5:*** Kiểm tra đ.k chất lượng bền vững $\left\| |W_p S| + |W_m T| \right\|_\infty < 1$

  Nếu không thỏa mãn thì trở lại bước 2

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 1



- ***Bài toán:*** Cho ĐTĐK mô tả bởi mô hình nhiễu nhân:

$$G(s) = \frac{10}{(3s+1)} \qquad W_m(s) = \frac{s+1}{20(0.01s+1)} \qquad \|\Delta\|_\infty \le 1$$

Mục tiêu điều khiển là tín hiệu ra *y*(*t*) bám theo tín hiệu chuẩn *r*(*t*) có dạng hình sin, tần số bất kỳ nằm trong miền 0 – 1 rad/s với sai số nhỏ hơn 2%.

Yêu cầu: Thiết kế bộ điều khiển *K*(*s*) sao cho hệ kín đạt chất lượng bền vững.

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 1

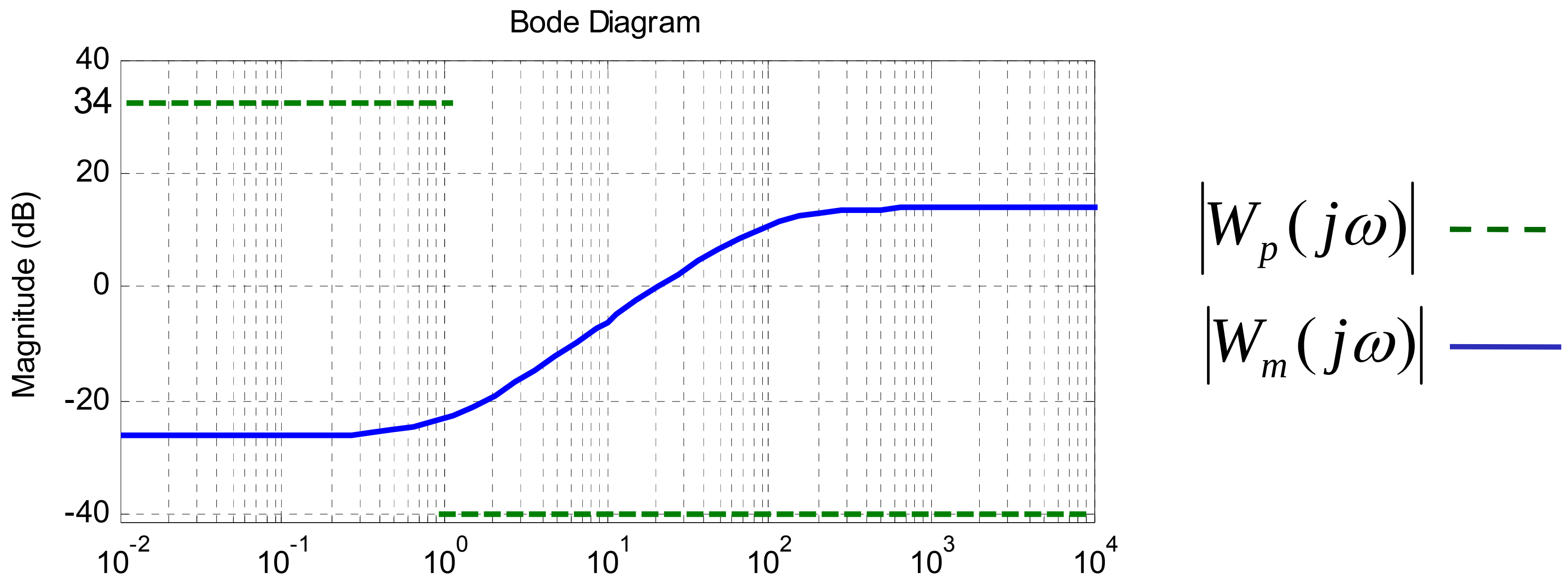
- ***Giải:***
- Chọn hàm trọng số chất lượng:

$$|W_p(j\omega)| = \begin{cases} 50 & \text{nếu } 0 \le \omega \le 1 \\ 0.01 & \text{nếu } \omega > 1 \end{cases}$$

Hàm trọng số chất lượng được chọn như trên để tín hiệu ra của đối tượng bám theo t/hiệu chuẩn hình sin trong miền $0 \le \omega \le 1$ (rad/s) với sai số nhỏ hơn 2%.

- Xét biểu đồ Bode biên độ: $|W_p(j\omega)|$ và $|W_m(j\omega)|$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 1



✶ Bước 1: Dựa vào biểu đồ Bode ở trên, ta thấy:

➢ Trong miền $0 \le \omega \le 1$:

$$|W_p| >> 1 > |W_m|$$

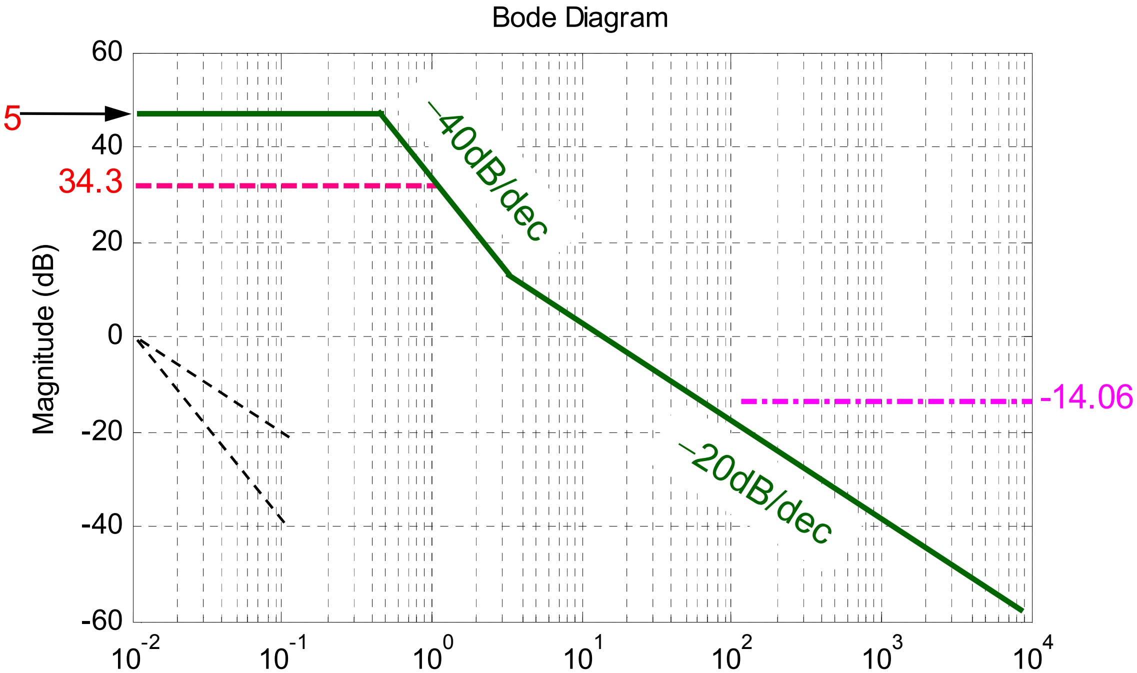
$\Rightarrow$ Vẽ biểu đồ $\dfrac{|W_p|}{1-|W_m|}$

➢ Trong miền $10^2 \le \omega \le \infty$:

$$|W_p| < 1 << |W_m|$$

$\Rightarrow$ Vẽ biểu đồ $\dfrac{1-|W_p|}{|W_m|}$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 1



$$\frac{|W_p|}{1-|W_m|} \quad \text{- - -}$$

$$\frac{1-|W_p|}{|W_m|} \quad \text{- · - ·}$$

★ Bước 2: Chỉnh độ lợi vòng:

➢ Miền $0 \le \omega \le 1$: $\quad |L| > \dfrac{|W_p|}{1-|W_m|}$

➢ Miền $10^2 \le \omega \le \infty$: $\quad |L| < \dfrac{1-|W_p|}{|W_m|}$

$$\Rightarrow \boxed{L(s) = \frac{K(T_2 s+1)}{(T_1 s+1)^2}}$$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 1

★ Bước 3: Biểu thức $L(s)$

$$20\log K = 48.5 \quad \Rightarrow \quad K = 266$$

$$\omega_1 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2$$

$$\omega_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0.33$$

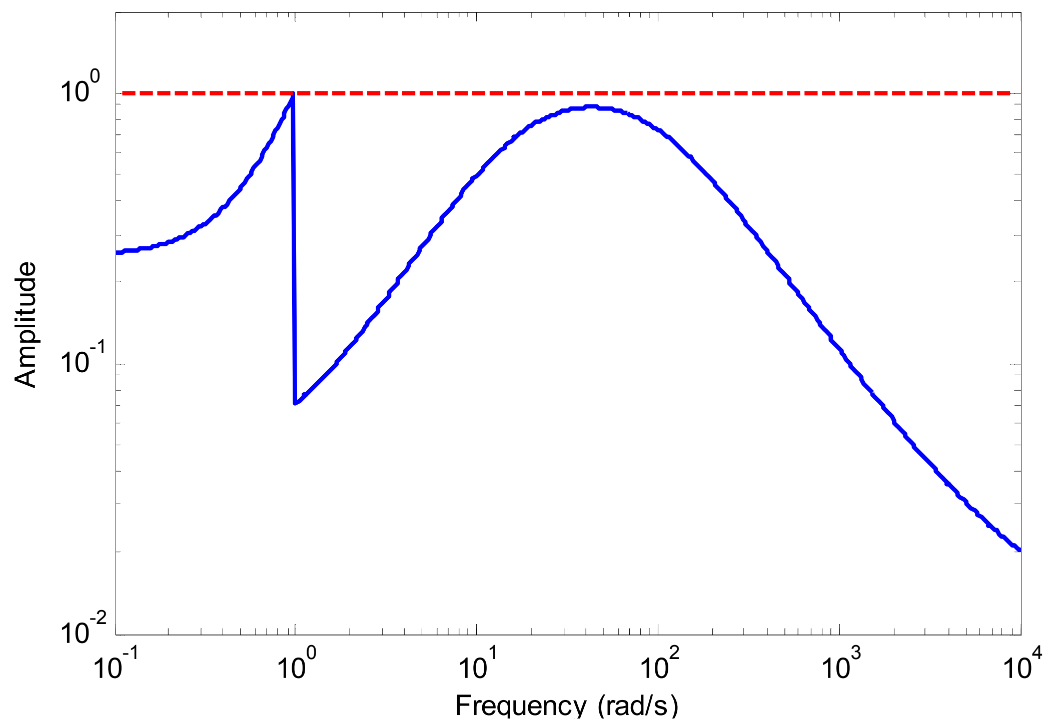
$$\Rightarrow \quad L(s) = \frac{266(0.33s+1)}{(2s+1)^2}$$

★ Bước 4: Tính hàm truyền bộ điều khiển

$$K(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{\dfrac{266(0.33s+1)}{(2s+1)^2}}{\dfrac{10}{(3s+1)}} \quad \Rightarrow \quad K(s) = \frac{26.6(0.33s+1)(3s+1)}{(2s+1)^2}$$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 1

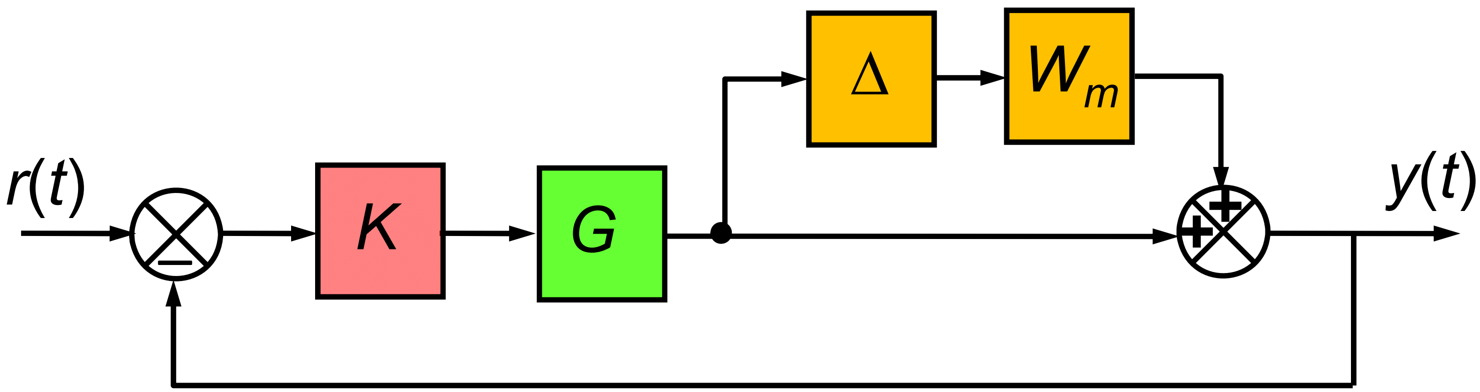
- Bước 5: Kiểm tra lại điều kiện chất lượng bền vững
  - Vẽ biểu đồ $|W_p S| + |W_m T|$



$$\left\| |W_p S| + |W_m T| \right\|_\infty = \max(|W_p S| + |W_m T|) = 0.9558 < 1$$

- Kết luận: HT đã thiết kế thỏa mãn đ.kiện chất lượng bền vững

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 2



★ ***Bài toán:*** Cho đối tượng ĐK mô tả bởi mô hình nhiễu nhân:

$$G(s) = \frac{1}{(s+0.01)^2} \qquad W_m(s) = \frac{0.1s}{0.05s+1} \qquad \|\Delta\|_\infty \le 1$$

Mục tiêu điều khiển là tín hiệu ra $y(t)$ bám theo tín hiệu chuẩn $r(t)$ có dạng hình sin, tần số bất kỳ nằm trong miền 0 – 1 rad/s với sai số nhỏ hơn 10%.

Yêu cầu: Thiết kế bộ điều khiển $K(s)$ sao cho hệ kín đạt chất lượng bền vững.

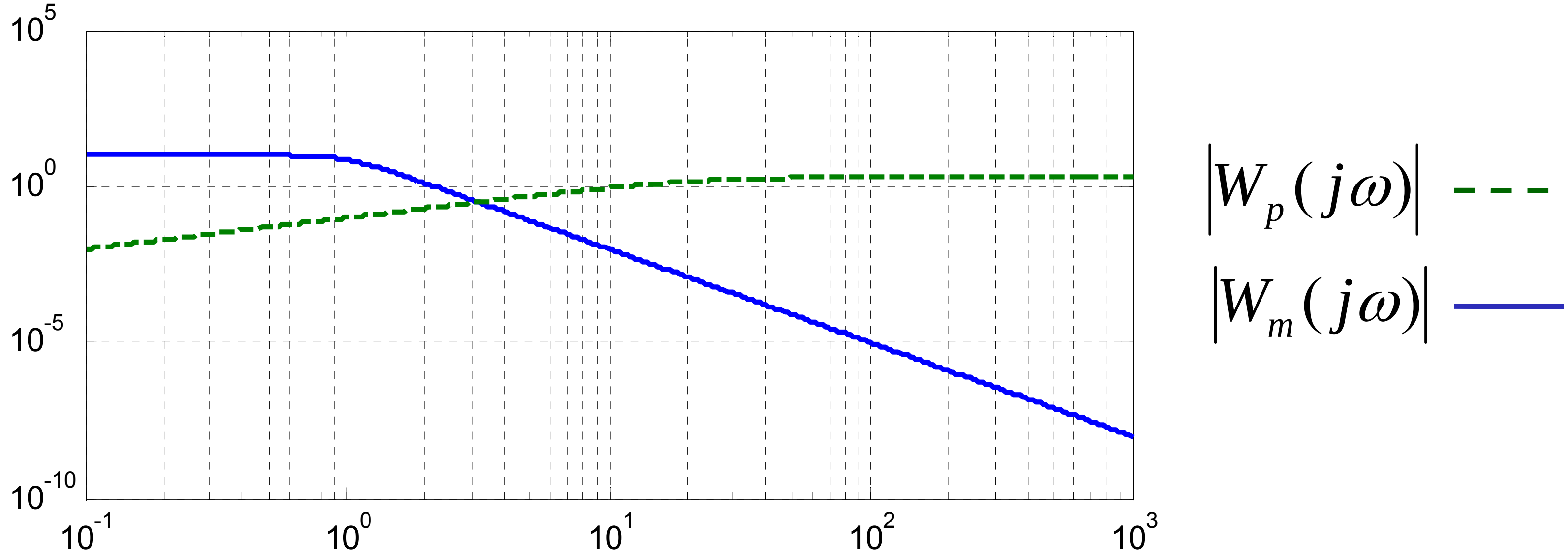
Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 2

- ***Giải:***
- Để tín sai số bám theo tín hiệu chuẩn hình sin trong miền $0 \le \omega \le 1$ (rad/s) với sai số nhỏ hơn 10%, chọn hàm trọng số chất lượng là bộ lọc Butterworth có độ lợi bằng 10. Trong thí dụ này, ta chọn $W_p(s)$ là bộ lọc Butterworth bậc 3:

$$W_p(s) = \frac{10}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

- Xét biểu đồ Bode biên độ: $|W_p(j\omega)|$ và $|W_m(j\omega)|$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 2



★ Bước 1: Dựa vào biểu đồ Bode, ta thấy:

➢ Trong miền $0 \le \omega \le 1$:

$$|W_p(j\omega)| >> 1 > |W_m(j\omega)|$$

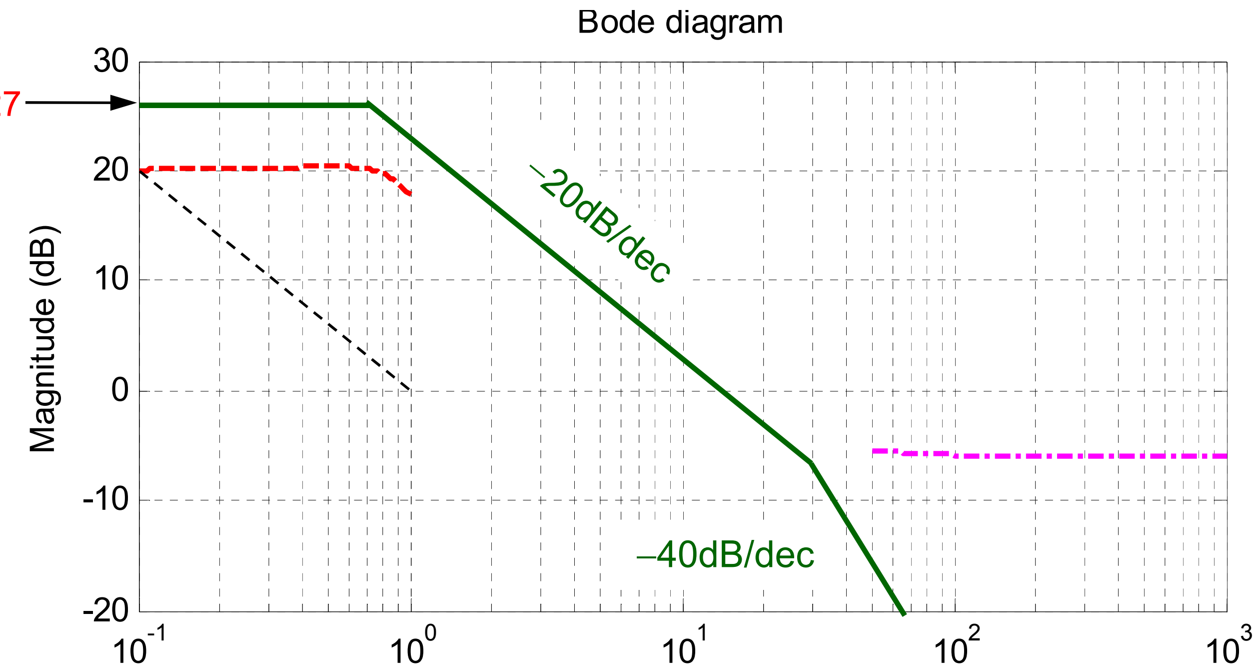
$\Rightarrow$ Vẽ biểu đồ $\dfrac{|W_p|}{1-|W_m|}$

➢ Trong miền $50 \le \omega \le \infty$:

$$|W_p(j\omega)| < 1 << |W_m(j\omega)|$$

$\Rightarrow$ Vẽ biểu đồ $\dfrac{1-|W_p|}{|W_m|}$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 2



$$\frac{|W_p|}{1-|W_m|} \quad - - -$$

$$\frac{1-|W_p|}{|W_m|} \quad -\cdot-$$

★ Bước2: Chỉnh độ lợi vòng:

➢ Miền $0 \le \omega \le 1$: $\quad |L| > \dfrac{|W_p|}{1-|W_m|}$

➢ Miền $50 \le \omega \le \infty$: $\quad |L| < \dfrac{1-|W_p|}{|W_m|}$

$$\Rightarrow \boxed{L(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}}$$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 2

- Bước 3: Biểu thức $L(s)$

$$20\log K = 27 \quad \Rightarrow \quad K = 22.38$$

$$\omega_1 = 0.6 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 1.66$$

$$\omega_2 = 30 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 0.033$$

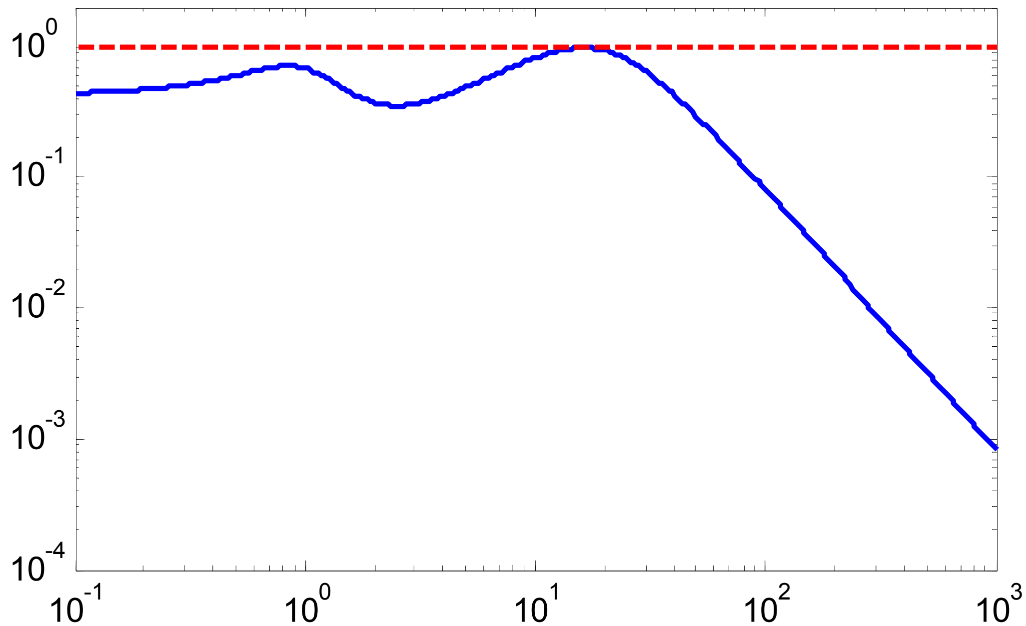
$$\Rightarrow \quad L(s) = \frac{22.38}{(1.66s+1)(0.033s+1)}$$

- Bước 4: Tính hàm truyền bộ điều khiển

$$K(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{\dfrac{22.38}{(1.66s+1)(0.033s+1)}}{\dfrac{1}{(s+0.01)^2}} \quad \Rightarrow \quad K(s) = \frac{22.38(s+0.01)^2}{(1.66s+1)(0.033s+1)}$$

Phương pháp chỉnh độ lợi vòng – Thí dụ 1

- Bước 5: Kiểm tra lại điều kiện chất lượng bền vững
  - Vẽ biểu đồ $|W_pS| + |W_mT|$



$$\left\| |W_pS| + |W_mT| \right\|_\infty = \max(|W_pS| + |W_mT|) = 0.9785 < 1$$

- Kết luận: Hệ thống đã thiết kế thỏa mãn đ.kiện chất lượng bền vững

Nhận xét phương pháp chỉnh độ lợi vòng

☺ **Ưu điểm:**

- Đơn giản, sử dụng kỹ thuật vẽ biểu đồ Bode quen thuộc ở lý thuyết điều khiển kinh điển
- Áp dụng tương đối dễ dàng trong trường hợp hệ thống bậc thấp

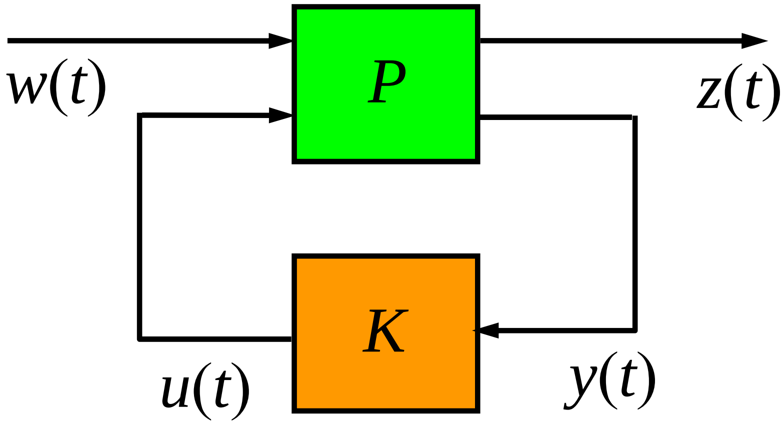
☹ **Khuyết điểm:**

- Đây là phương pháp gần đúng, trong nhiều trường hợp phải chỉnh độ lợi vòng (bước 2) nhiều lần mới thỏa mãn được điều kiện chất lượng bền vững (bước 5).
- Áp dụng khá khó khăn trong trường hợp hệ bậc cao nếu phải vẽ các biểu đồ Bode bằng tay
- Phương pháp chỉnh độ lợi vòng không nêu lên được điều kiện cần và đủ để tồn tại lời giải của bài toán thiết kế
- Lời giải tìm được không phải là lời giải tối ưu

$\Rightarrow$ Phương pháp thiết kế tối ưu H_∞

THIẾT KẾ HỆ THỐNG ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU BỀN VỮNG

Cấu trúc chuẩn P-K



$w(t)$: tín hiệu vào từ bên ngoài
(bao gồm tín hiệu đặt, nhiễu,…)

$z(t)$: tín hiệu ra bên ngoài

$u(t)$: tín hiệu ra của bộ điều khiển

$y(t)$: tín hiệu vào của bộ điều khiển

Có thể biểu diễn hệ thống điều khiển dưới dạng chuẩn cấu trúc P-K:

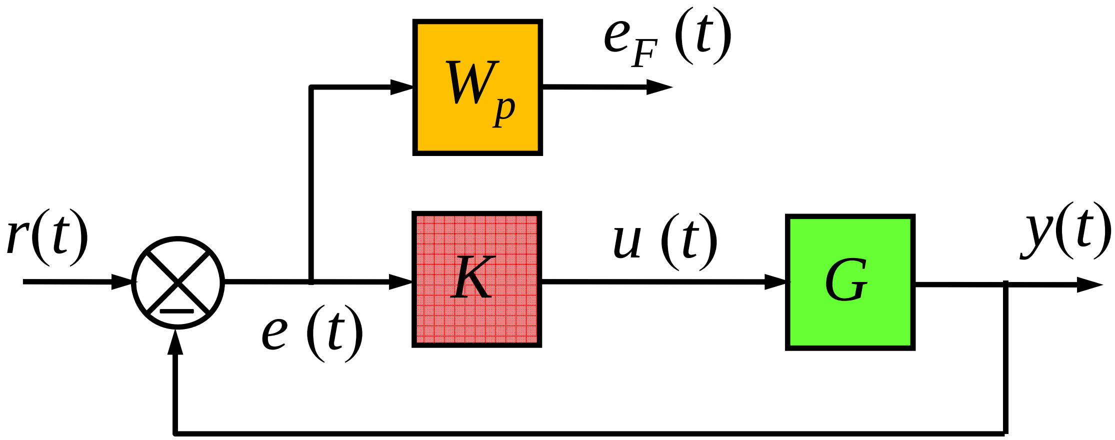
- Hệ hở: $$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$
- Luật điều khiển: $u = Ky$
- Hệ kín: $z = P_{11} + P_{12}\left[I - KP_{22}\right]^{-1} KP_{21} w$
- Hàm truyền kín từ $w(t)$ đến $z(t)$: $T_{zw} = P_{11} + P_{12}\left[I - KP_{22}\right]^{-1} KP_{21}$

Các bước biến đổi hệ thống thành cấu trúc P-K

- Bước 1: Xác định các vector tín hiệu vào – ra của cấu trúc P-K:
  - z gồm tất cả các tín hiệu dùng để đánh giá chất lượng điều khiển.
  - w gồm tất cả các tín hiệu từ bên ngoài
  - y gồm tất cả các tín hiệu được đưa vào bộ điều khiển K
  - u gồm tất cả các tín hiệu ra của K
- Bước 2: Tách K ra khỏi sơ đồ khối hệ thống
- Bước 3: Viết các biểu thức z và y theo w và u:
- Bước 4: Xác định ma trận P thỏa:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

- Hãy biểu diễn hệ thống dưới đây dưới dạng cấu trúc chuẩn *P–K*, biết rằng tín hiệu ra dùng để đánh giá chất lượng điều khiển là $e_F(t)$



- ***Giải:***

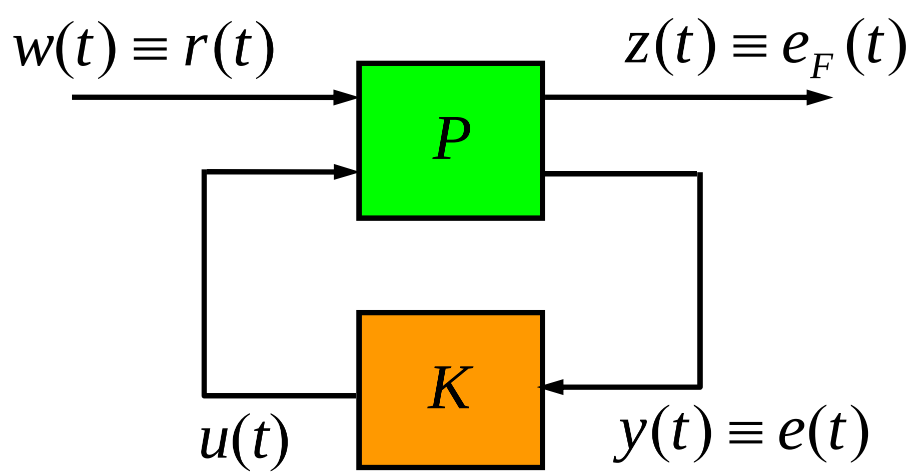
- Bước 1: Tín hiệu vào ra của cấu trúc *P–K*

$$w \equiv r$$

$$z \equiv e_F$$

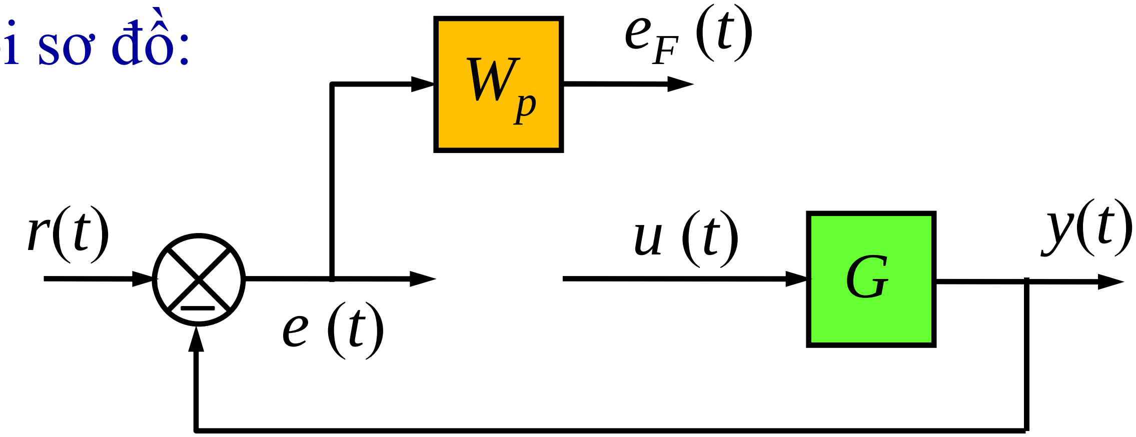
$$y \equiv e$$

$$u \equiv u$$



Biến đổi hệ thống thành cấu trúc P-K – Thí dụ 1 (tt)

★ Bước 2: Tách K ra khỏi sơ đồ:



★ Bước 3: Quan hệ vào ra:

$$z = e_F = W_p e = W_p(r - Gu) \quad \Rightarrow \quad z = W_p w - W_p G u$$

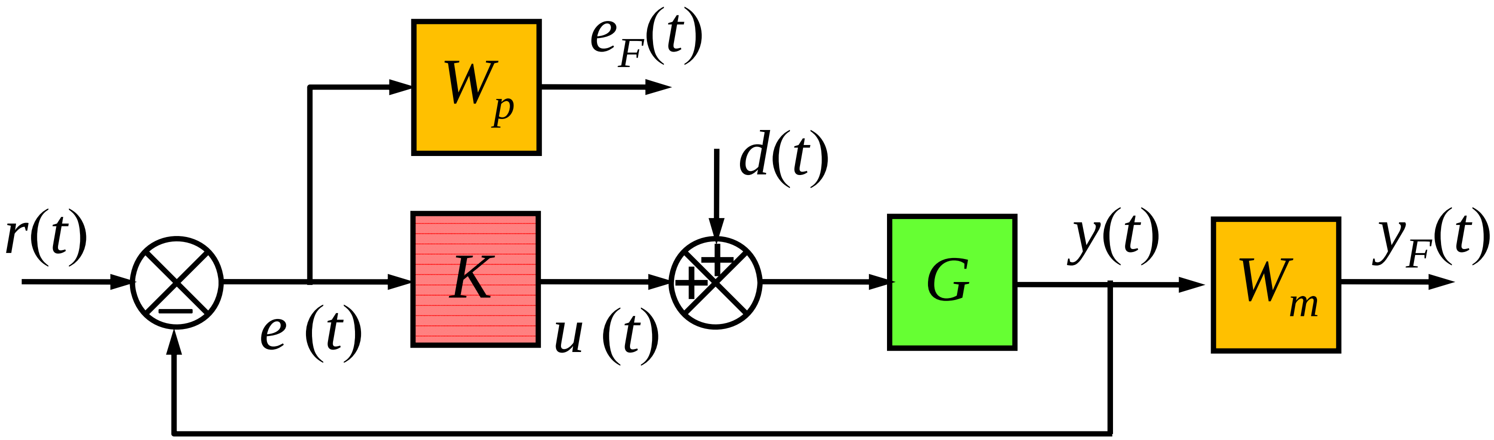
$$y = e = r - Gu \quad \Rightarrow \quad y = w - Gu$$

★ Bước 4: Xác định P:

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 1 & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} W_p & -W_p G \\ 1 & -G \end{bmatrix}$$

Biến đổi hệ thống thành cấu trúc P-K – Thí dụ 2

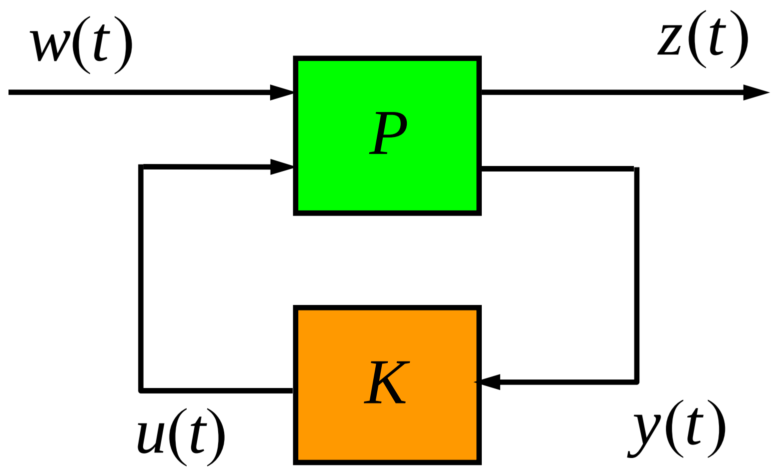
- Hãy biểu diễn hệ thống dưới đây dưới dạng cấu trúc chuẩn P–K, biết rằng tín hiệu dùng để đánh giá chất lượng điều khiển là $e_F(t)$ và $y_F(t)$



- ***Giải:***

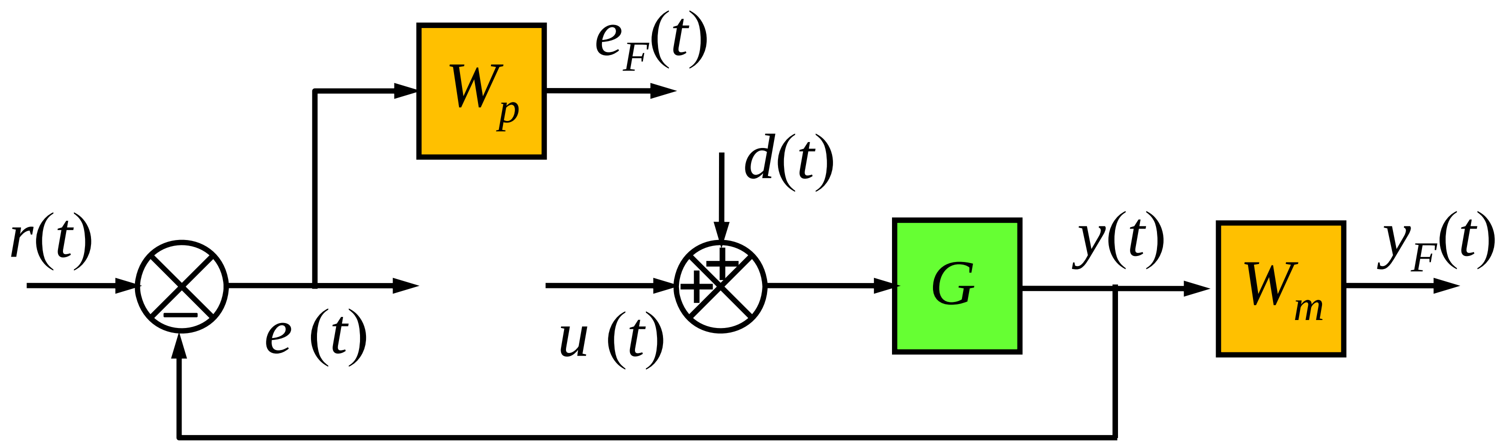
- Bước 1: Tín hiệu vào ra của cấu trúc P–K

$$w \equiv [r \quad d]^T$$
$$z \equiv [e_F \quad y_F]^T$$
$$y \equiv e$$
$$u \equiv u$$



Biến đổi hệ thống thành cấu trúc P-K – Thí dụ 2 (tt)

★ Bước 2: Tách *K* ra khỏi sơ đồ:



★ Bước 3: Quan hệ vào ra:

$$z_1 = e_F = W_p e = W_p(r - Gd - Gu) \quad \Rightarrow \quad z_1 = W_p w_1 - W_p G w_2 - W_p G u$$

$$z_2 = y_F = W_m(Gd + Gu) \quad \Rightarrow \quad z_2 = W_m(Gw_2 + Gu)$$

$$y = e = r - Gd - Gu \quad \Rightarrow \quad y = w_1 - Gw_2 - Gu$$

Biến đổi hệ thống thành cấu trúc P-K – Thí dụ 2 (tt)

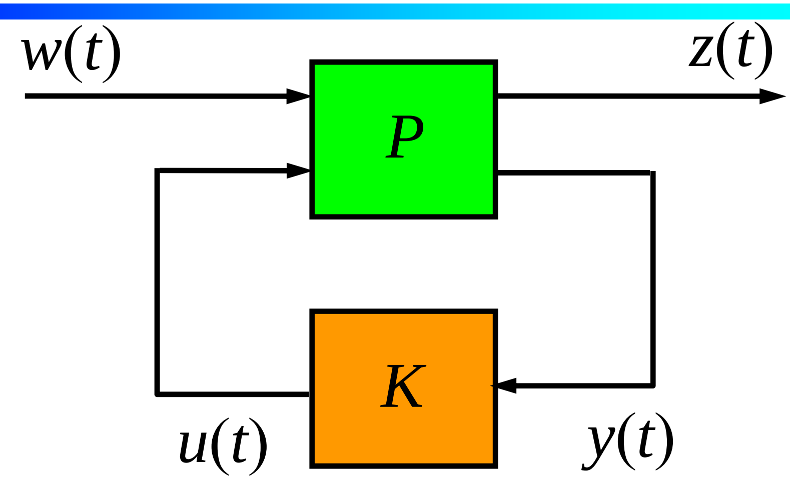
- Bước 4: Xác định *P*:

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p & -W_pG & -W_pG \\ 0 & W_mG & W_mG \\ 1 & -G & -G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} W_p & -W_pG & -W_pG \\ 0 & W_mG & W_mG \\ \hdashline 1 & -G & -G \end{array}\right]$$

Bài toán thiết kế tối ưu H_2

- Cho hệ thống điều khiển biểu diễn dưới dạng cấu trúc P-K. Mô hình toán học của đối tượng là



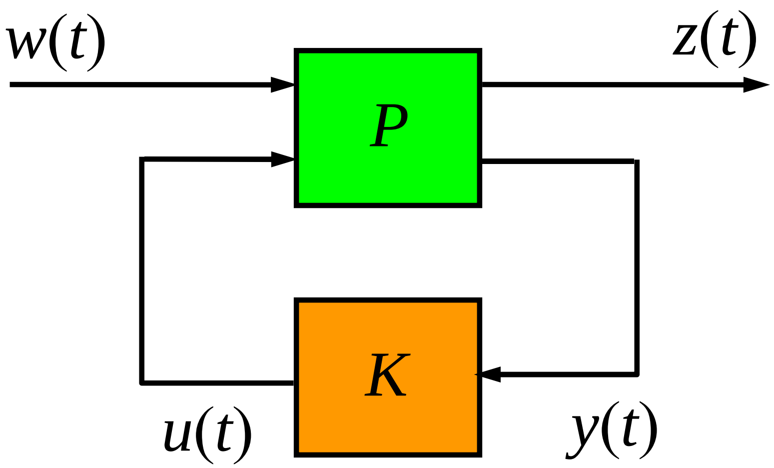
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = C[sI - A]^{-1} B + D$$

- **Bài toán tối ưu H_2:** Tìm bộ điều khiển K hợp thức ổn định nội P, đồng thời tối thiểu chuẩn H_2 của hàm truyền T_{zw} từ $w(t)$ đến $z(t)$

$$K_{opt}(s) = \min_{K \text{ stabilizing}} \left\| T_{zw} \right\|_2$$

Điều kiện tồn tại lời giải bài toán tối ưu H$_2$



$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

★ ***Giả thiết:***

1. (A, B_2) ổn định được và (C_2, A) phát hiện được;
2. $R_1 = D_{12}^* D_{12} > 0$ và $R_2 = D_{21} D_{21}^* > 0$
3. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ là ma trận hạng đầy cột với mọi ω
4. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ là ma trận hạng đầy hàng với mọi ω

Lời giải bài toán tối ưu H_2

- Lời giải bài toán tối ưu H_2 liên quan đến hai ma trận Hamilton:

$$H = \begin{bmatrix} A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 & -B_2 R_1^{-1} B_2^* \\ -C_1^*(I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^*) C_1 & -(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1)^* \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^* R_2^{-1} C_2)^* & -C_2^* R_2^{-1} C_2 \\ -B_1 (I - D_{21}^* R_2^{-1} D_{21}) B_1^* & -(A - B_1 D_{21}^* R_2^{-1} C_2) \end{bmatrix}$$

- Đặt: $X = \mathrm{Ric}(H) \geq 0$ và $Y = \mathrm{Ric}(J) \geq 0$

- ***Định lý:*** Lời giải duy nhất của bài toán tối ưu H_2 là:

$$K_{opt}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & (YC_2^* + B_1 D_{21}^*) R_2^{-1} \\ \hline -R_1^{-1}(B_2^* X + D_{12}^* C_1) & 0 \end{array}\right]$$

với $A_K = A - B_2 R_1^{-1}(B_2^* X + D_{12}^* C_1) - (YC_2^* + B_1 D_{21}^*) R_2^{-1} C_2$

Lời giải bài toán cận tối ưu H_∞ đơn giản

- Lời giải bài toán cận tối ưu H_∞ liên quan đến hai ma trận Hamilton:

$$H = \begin{bmatrix} A & \gamma^2 B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix}$$

- ***Định lý:*** Tồn tại bộ điều khiển ổn định sao cho $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ nếu và chỉ nếu 3 điều kiện dưới đây đồng thời được thỏa mãn:

  1. $H \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$ và $X = \mathrm{Ric}(H)$;
  2. $J \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$ và $Y = \mathrm{Ric}(J)$;
  3. $\rho(XY) < \gamma^2$ ($\rho(XY) = |\lambda_{\max}(A)|$ là bán kính phổ của A)

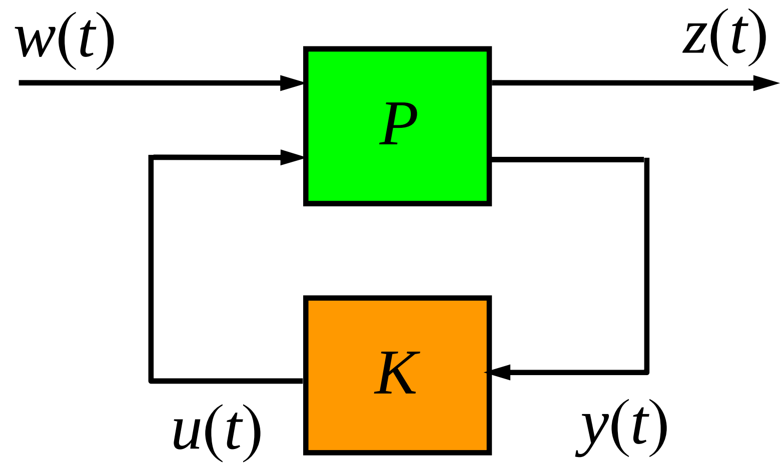
  Một bộ điều khiển thỏa $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ là :

$$K_{subopt}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & (I - \gamma^2 YX)^{-1} YC_2^* \\ \hline -B_2^* X & 0 \end{array}\right]$$

  với $\quad A_K = A + \gamma^2 B_1 B_1^* X - B_2 B_2^* X - (I - \gamma^2 YX)^{-1} YC_2^* C_2$

Bài toán thiết kế tối ưu H_∞

- **_Phát biểu bài toán:_** Cho hệ thống điều khiển biểu diễn dưới dạng cấu trúc P-K. Thiết kế bộ điều khiển K ổn định hệ thống, đồng thời tín hiệu ra $z(t)$ là tối thiểu với mọi tín hiệu vào $w(t)$ có năng lượng nhỏ hơn hoặc bằng 1.



- Bài toán trên tương đương với tìm bộ điều khiển K sao cho tối thiểu chuẩn H_∞ của hàm truyền từ $w(t)$ đến $z(t)$ $\Rightarrow$ **Bài toán tối ưu H_∞**

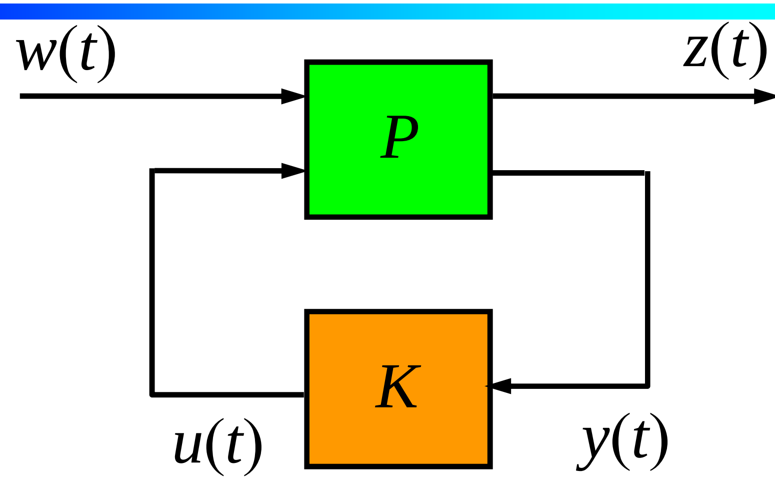
$$\min_{K \text{ stabilizing}} \left\| T_{zw} \right\|_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \min_{K \text{ stabilizing}} \left\| P_{11} + P_{12}K\left[I - P_{22}K\right]^{-1} P_{21} \right\|_\infty$$

Bài toán tối ưu H không giải được trong trường hợp tổng quát

- **Bài toán cận tối ưu H_∞**: tìm bộ điều khiển K sao cho chuẩn H_∞ của hàm truyền từ $w(t)$ đến $z(t)$ nhỏ hơn hệ số $\gamma>0$ cho trước.

Bài toán thiết kế cận tối ưu H_∞ đơn giản

- **Bài toán cận tối ưu H_∞ đơn giản**: tìm bộ điều khiển *K* sao cho chuẩn H_∞ của hàm truyền từ $w(t)$ đến $z(t)$ nhỏ hơn hệ số $\gamma>0$ cho trước trong trường hợp đối tượng tổng quát được mô tả bởi PTTT:



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) + D_{21} w(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = C[sI - A]^{-1} B + D$$

Phương trình đại số Ricatti

- Phương trình đại số Ricatti (ARE - Algeraic Ricatti Equation):

$$A^* X + XA + XRX + Q = 0 \quad \text{trong đó: } R = R^* \quad Q = Q^*$$

- Phương trình Ricatti có vô số lời giải. X được gọi là lời giải ổn định nếu $A+RX$ ổn định. Lời giải ổn định của phương trình Ricatti là duy nhất.

- Tương ứng với mỗi phương trình Ricatti, có thể thành lập ma trận Hamilton:

$$H = \begin{bmatrix} A & R \\ -Q & -A^* \end{bmatrix}_{2n\times 2n}$$

- ***Bổ đề:*** Các trị riêng của H đối xứng qua trục ảo

Lời giải phương trình Ricatti

- Giả sử H không có trị riêng nằm trên trục ảo. Đặt là $T = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}_{2n\times n}$ cơ sở của không gian bất biến n chiều ổn định.

  Tức là $HT = T\Lambda$ với ma trận $\Lambda_{n\times n}$ ổn định

- ***Bổ đề:*** Nếu $\det(X_1) \neq 0$ thì $X = X_2 X_1^{-1}$ là nghiệm ổn định của phương trình Ricatti

- Nghiệm ổn định nghiệm của phương trình Ricatti tương ứng với ma trận Hamilton H được ký hiệu là:

$$X = \mathrm{Ric}(H)$$

- Ký hiệu: $H_0 \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric})$ nếu các giả thiết H_1 và H_2 thỏa mãn;

  $X = \mathrm{Ric}(H_0)$ là nghiệm ổn định của phương trình Ricatti.

Bổ đề giá trị thực bị chặn (Bounded Real Lemma)

- Giả sử $G(s) = C[sI - A]^{-1}B$ trong đó (A, B, C) ổn định được và phát hiện được. Đặt ma trận Hamilton:

$$H_0 = \begin{bmatrix} A & BB^* \\ -C^*C & -A^* \end{bmatrix}$$

- ***Định lý:*** Giả sử $G \in \mathcal{RH}_\infty$. Các phát biểu dưới đây là tương đương:

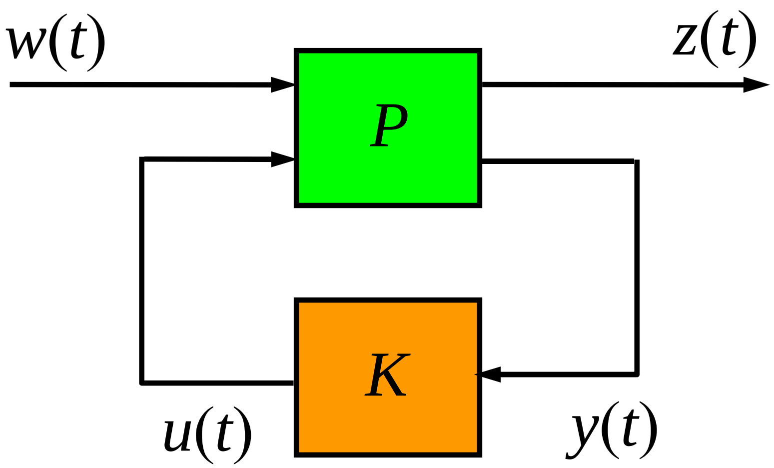
  1. $\|G\|_\infty < 1$;

  2. H_0 không có trị riêng trên trục ảo và $H_0 \in \mathrm{dom(Ric)}$

  3. Tồn tại nghiệm ổn định của phương trình Ricatti:

$$A^*X + XA + XBB^*X + C^*C = 0$$

Điều kiện tồn tại lời giải bài toán cận tối ưu H$_\infty$ đơn giản



$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

★ ***Giả thiết:***

1. (A, B_1) điều khiển được và (C_1, A) quan sát được;
2. (A, B_2) ổn định được và (C_2, A) phát hiện được;
3. $D_{12}^*[C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$
4. $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

Lời giải bài toán cận tối ưu H_∞ đơn giản

- Lời giải bài toán cận tối ưu H_∞ liên quan đến hai ma trận Hamilton:

$$H = \begin{bmatrix} A & \gamma^2 B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A^* \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix}$$

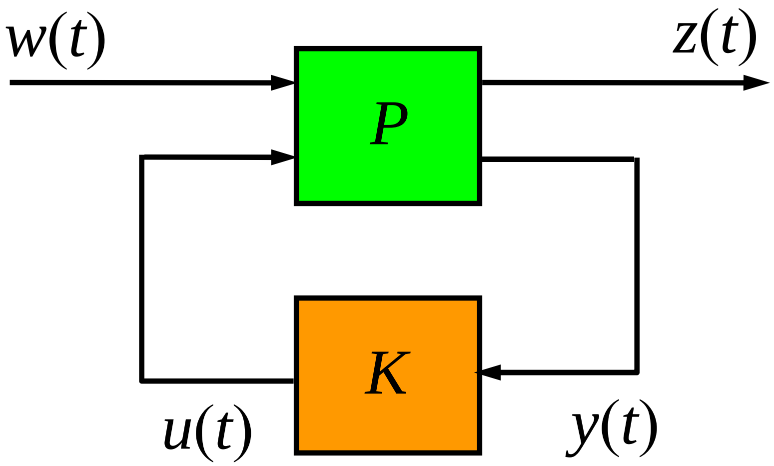
- ***Định lý:*** Tồn tại bộ điều khiển ổn định sao cho $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ nếu và chỉ nếu 3 điều kiện dưới đây đồng thời được thỏa mãn:
  1. $H \in \mathrm{dom(Ric)}$ và $X = \mathrm{Ric}(H)$;
  2. $J \in \mathrm{dom(Ric)}$ và $Y = \mathrm{Ric}(J)$;
  3. $\rho(XY) < \gamma^2$ ($\rho(XY) = |\lambda_{\max}(A)|$ là bán kính phổ của A)

  Một bộ điều khiển thỏa $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ là :

$$K_{subopt}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_K & (I-\gamma^2 YX)^{-1} Y C_2^* \\ \hline -B_2^* X & 0 \end{array}\right]$$

  với $\quad A_K = A + \gamma^2 B_1 B_1^* X - B_2 B_2^* X - (I - \gamma^2 YX)^{-1} Y C_2^* C_2$

Giải bài toán thiết kế tối ưu bền vững dùng Matlab



$$P(s) := \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array}\right]$$

- Bước 1: Biến đổi hệ thống về cấu trúc chuẩn *P*-*K*. Tìm các ma trận trạng thái mô tả đối tượng tổng quát *P*.
- Bước 2: Tìm lời giải bài toán thiết kế tối ưu bền vững dùng Matlab
  - Bài toán tối ưu H2:
    >> [Kopt,Tzw] = h2syn(P,ny,nu)
  - Bài toán cận tối ưu H∞:
    >> [Ksubopt,Tzw,γ_{subopt}]=hinfsyn(G,ny,nu,γ_{min},γ_{max},tol)

Chuẩn đầu ra

Sau khi học xong chương 5 sinh viên phải có khả năng:

- Tính chuẩn của tín hiệu và hệ thống
- Tính chuẩn của tín hiệu/sai số khi biết tín hiệu vào/nhiễu tác động vào hệ thống
- Xây dựng mô hình không chắc chắn của hệ thống
- Đánh giá tính ổn định bền vững của hệ thống
- Đánh giá chất lượng bền vững của hệ thống
- Thiết kế hệ thống điều khiển bền vững dùng phương pháp nắn độ lợi vòng
- Hiểu về khái niệm điều khiển tối ưu bền vững