Chương II

2.3 Hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp. Nhị thức Newton

2.4 Hoán vị lặp, tổ hợp lặp, đa thức Newton

2.3.1. Hoán vị

Định nghĩa:

Tập A có n phần tử. Mỗi cách sắp đặt thứ tự n phần tử của A gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là Pn

Pn= n! = n.(n-1).(n-2)…1

Quy ước 0! =1

2.3.1. Hoán vị

A B C

A B C　　B A C　　C A B

A C B　　B C A　　C B A

2.3.1. Hoán vị

A B C

3

A B C

A C B

B A C

B C A

C A B

C B A

3!=9

2.3.1. Hoán vị

2.3.2. Tổ hợp

2.3.2. Tổ hợp

Định nghĩa:

Tập hợp A có n phần tử. Mỗi tập con gồm k phần tử của A được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.

Ký hiệu: C_n^k

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Tính chất:

$$C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

2.3.2. Tổ hợp

1 2 3 4

$$C_4^3$$

1 2 3

1 2 4

1 3 4

2 3 4

2.3.3. Chỉnh hợp

2.3.3. Chỉnh hợp

Định nghĩa:

Cho A là một tập hợp n phần tử.

Mỗi bộ gồm k phần tử có sắp thứ tự của A gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử. (1≤k≤ n)

Ký hiệu:

$$A_n^k$$

Ta có:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2.3.3. Chỉnh hợp

A B C

$$A_3^2$$

A B	A C	C B
B A	C A	B C

2.3.3. Chỉnh hợp

2.3.4. Nhị thức Newton

2.3.4. Nhị thức Newton

Định nghĩa:

Cho n≥1 và x,y ∈ $\mathbb{R}$

$$(x+y)^n = C_n^0 x^0 y^n + C_n^1 x^1 y^{n-1} + \ldots + C_n^n x^n y^0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

2.3.4. Nhị thức Newton

Ví dụ:

$$(x+y)^6 = \sum_{k=0}^{6} C_6^k x^k y^{6-k}$$

Khi thay x=4, y=5, ta có kết quả là: 531441

2.3. Nhị thức Newton

2.4.1. Hoán vị lặp

2.4.1 Hoán vị lặp

Định nghĩa:

Cho n đối tượng, trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau $(i = 1,2, \ldots, k)$ và $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$

Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một *hoán vị lặp* của n.

Số phép hoán vị lặp của n phần tử đó là

$$P_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

2.4.1 Hoán vị lặp

Ví dụ:

Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

Chữ S: 3

Chữ U: 1

Chữ C: 2

Chữ E: 1

Tổng: 7

$$\frac{7!}{3!.1!.2!.1!} = 420$$

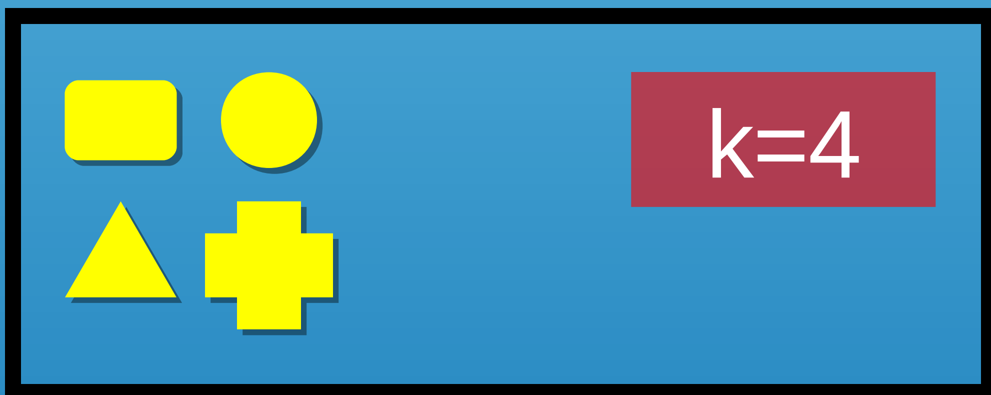
2.4.1 Hoán vị lặp

2.4.2 Tổ hợp lặp

2.4.2 Tổ hợp lặp

Định nghĩa:

Có k loại vật, mỗi loại vật có nhiều vật giống hệt nhau (không phân biệt)



Chọn ra n vật thể (có thể chọn các vật thể giống nhau)

Số cách chọn:

$$C_{n+k-1}^{n}$$

2.4.2 Tổ hợp lặp

Ví dụ:

Có 4 loại mũ (trắng, xanh, đen, nâu) giống hệt nhau, trừ màu sắc.

Mua 15 mũ, hỏi có bao nhiêu cách mua (theo màu)

Có 4 loại vật. Chọn ra 15 vật

Số cách chọn:

$$C_{15+4-1}^{15} = C_{18}^{15} = 816$$

2.4.2 Tổ hợp lặp

Hệ quả 1:

Số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình:

x+y+z+t = 20

là một tổ hợp lặp chặp 4 của 20:

$$C_{20+(4-1)}^{20} = C_{23}^{20} = 1771$$

Tổng quát, số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \mathrm{m}$$

được tính bởi công thức:

$$C_{\mathrm{m}+(k-1)}^{k}$$

2.4.2 Tổ hợp lặp

Hệ quả 1: Lưu ý

Nếu phương trình cho nghiệm có điều kiện, ta dùng phương pháp đổi biến

Ví dụ:

Tìm số nghiệm nguyên ≥ 0 của phương trình

x+y+z+t = 20

Điều kiện: x $\geq 5, y \leq 8$

Ta đổi biến: $(x-5) \geq 0.$

Sau đó tìm số nghiệm của PT (x-5)+y+z+t = (20-5)

Gọi số nghiệm đó = A

Tiếp tục, đổi biến: $(y-9) \geq 0.$

Sau đó tìm số nghiệm của PT (x-5)+(y-9)+z+t = (20-5-9)

Gọi số nghiệm đó = B

Lấy A-B=số nghiệm PT thỏa điều kiện của đề bài

2.4.2 Tổ hợp lặp

Hệ quả 2: bài toán phân phối

Phân phối 20 viên kẹo vào 4 hộp. Số cách làm là một tổ hợp lặp chặp 4 của 20:

$$C_{20+(4-1)}^{20} = C_{23}^{20} = 1771$$

Tổng quát, số cách phân phối của m viên kẹo vào k hộp được tính bởi công thức:

$$C_{\mathrm{m}+(k-1)}^{k}$$

2.4.2 Đa thức Newton

2.4.3 Đa thức Newton

Công thức:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum P_n(n_1, n_2, .., n_k).x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ nguyên, ≥ 0

2.4.3 Đa thức Newton

Ví dụ 1:

Tìm hệ số của $u^3v^2w^2t^1$
trong khai triển $(u+v+w+t)^8$

Ta có:

$$(u+v+w+t)^8 = P_8(3,2,2,1)u^3v^2w^2t^1 + \ldots$$
$$= \frac{8!}{3!2!2!1!}u^3v^2w^2t^1 + \ldots$$
$$= 1680.u^3v^2w^2t^1 + \cdots$$

2.4.3 Đa thức Newton

Ví dụ 2:

Tìm số đơn thức của $u^{\mathrm{a}}v^{\mathrm{b}}w^{\mathrm{c}}t^{\mathrm{d}}$
trong khai triển $(u+v+w+t)^8$

Ta có:
Số đơn thức có thể có là số trường hợp có thể xảy ra của các số mũ a,b,c,d
Mà a+b+c+d = 8
Vậy số đơn thức bằng số nghiệm ≥ 0 của PT:

a+b+c+d = 0