QUY LUẬT PHÂN PHỐI CỦA
ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC.

- PHÂN PHỐI CHUẨN
- PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG
- PHÂN PHỐI STUDENT

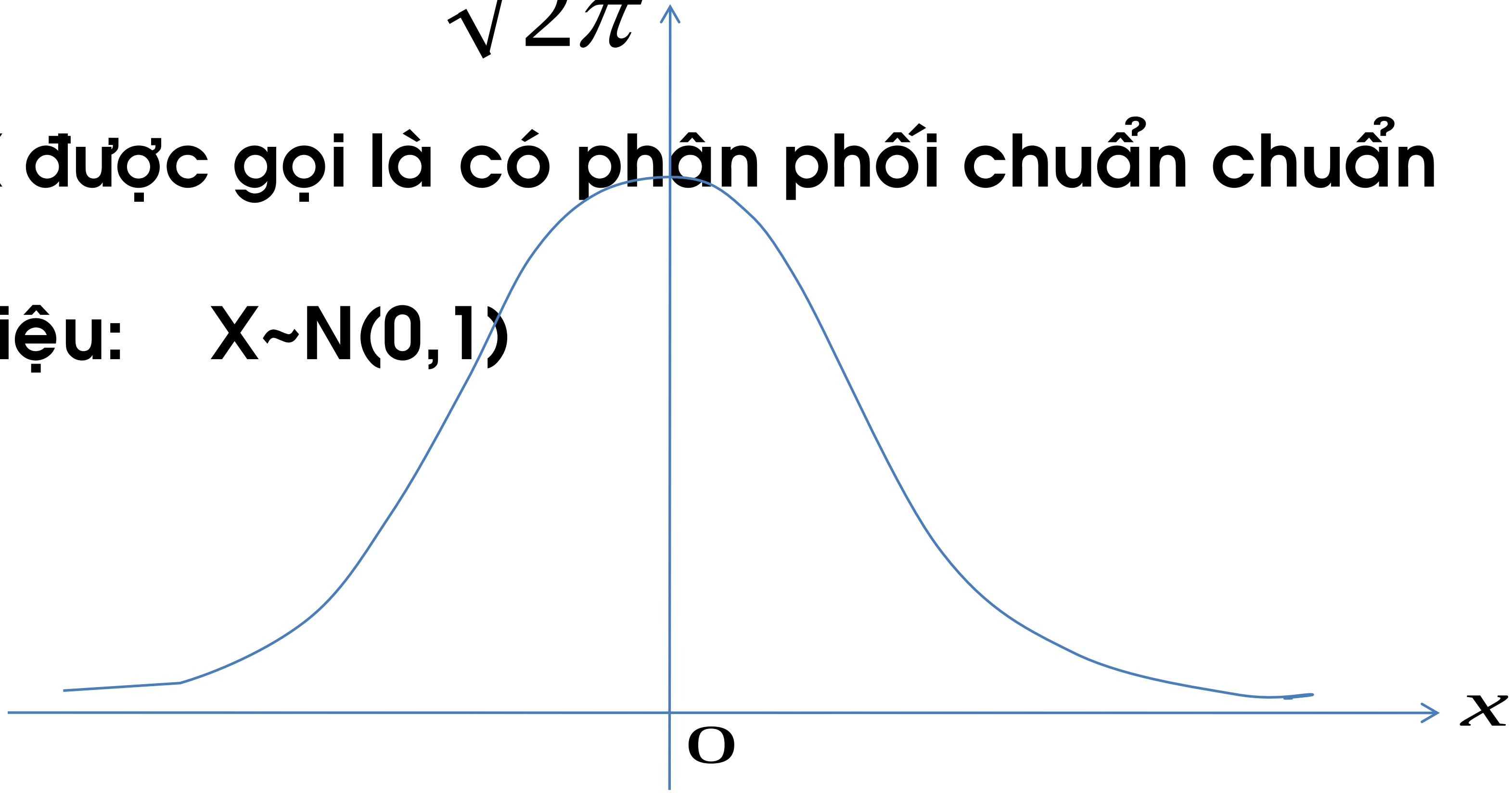
4.4.PHÂN PHỐI CHUẨN

X là ĐLNN liên tục có hàm mật độ

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}};-\infty < x < +\infty$$

Thì X được gọi là có phân phối chuẩn chuẩn tắc.

Ký hiệu: X~N(0,1)



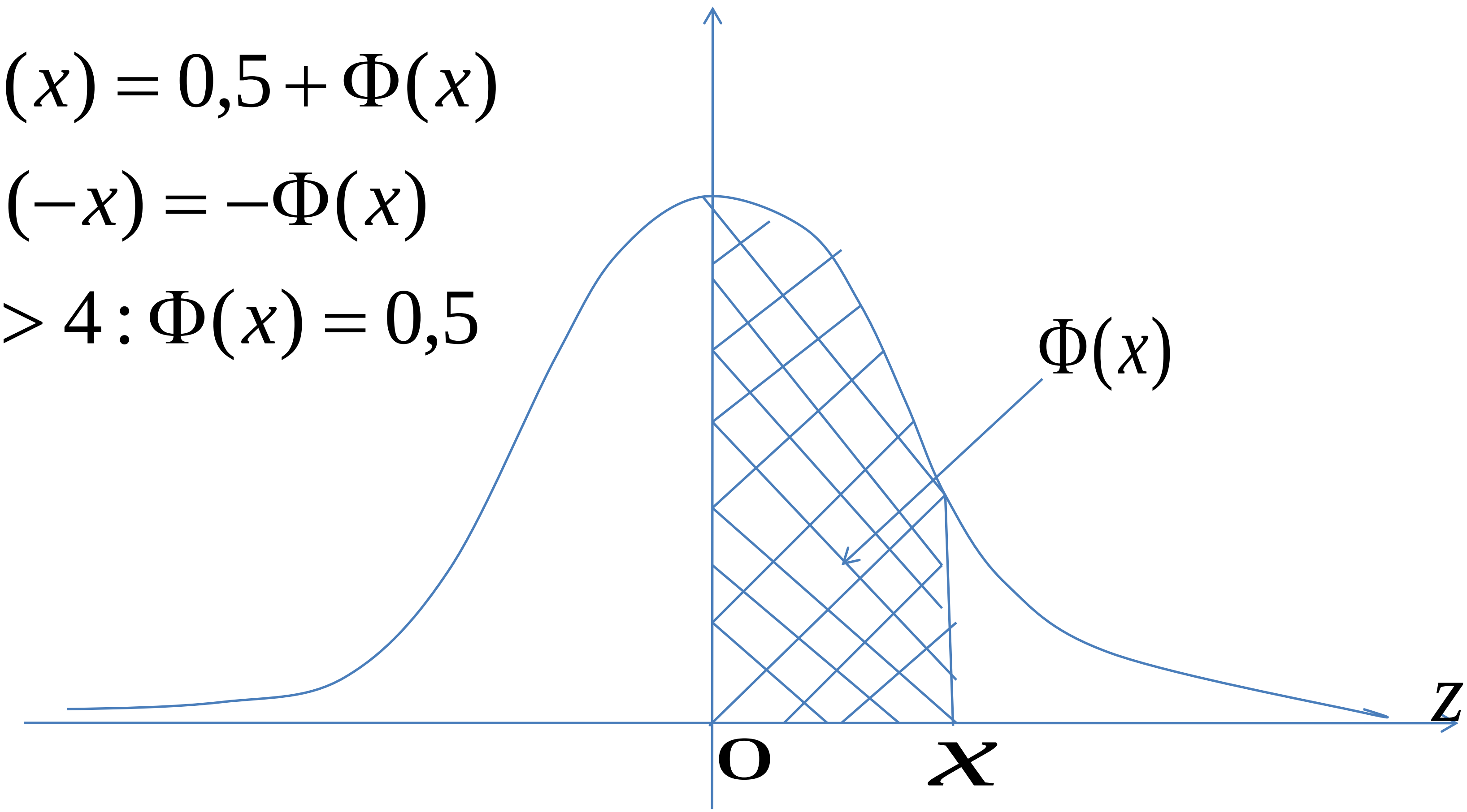
HÀM LAPLACE

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-z^2}{2}} dz$$

$.F(x) = 0{,}5 + \Phi(x)$

$.\Phi(-x) = -\Phi(x)$

$.x > 4 : \Phi(x) = 0{,}5$



CHÚ Ý:

X~N(0,1)

Sử dụng hàm LAPLACE

$$* P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$* P(X < \alpha) = 0,5 + \Phi(\alpha)$$

$$* P(\alpha < X) = 0,5 - \Phi(\alpha)$$

$$* P(|X| < \alpha) = 2.\Phi(\alpha)$$

$$* P(|X| > \alpha) = 1 - P(|X| \le \alpha) = 1 - 2.\Phi(\alpha)$$

CHỨ Ý:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Sử dụng hàm LA PLACE

$$*\,P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

$$*\,P(X > \alpha) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

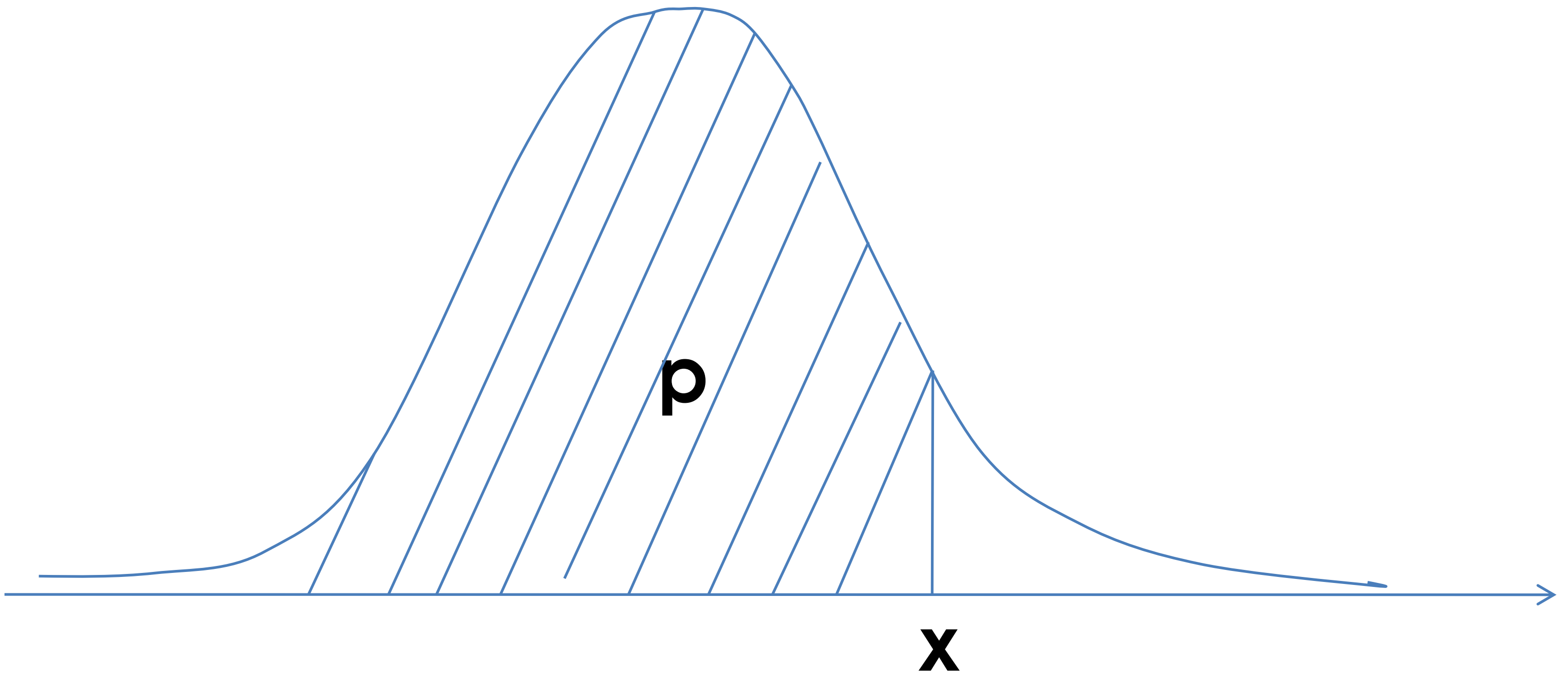
$$*\,P(X < \alpha) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

$$*\,P(|X| < \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$

$$*\,P(|X| > \alpha) = 1 - \Phi(|X| \le \alpha)$$

$$X \sim N(0,1)$$

$$P(X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-1}{2}z^2} dz = NORMSDIST(x) = p$$



SỬ DỤNG EXCEL

X~N(0,1)

$$* P(X < x) = NORMSDIST(x)$$

$$* P(X > x) = 1 - NORMSDIST(x)$$

$$* P(a < X < b) = NORMSDIST(b) - NORMSDIST(a)$$

$$* P(|X| < x) = 2 * NORMSDIST(x) - 1$$

$$* P(|X| > x) = 1 - P(|X| \le x)$$

$$* P(X < x) = p \Rightarrow x = NORMSINV(p)$$

SỬ DỤNG EXCEL:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$* P(X < x) = NORMDIST(x, \mu, \sigma, 1)$$

$$* P(X > x) = 1 - NORMDIST(x, \mu, \sigma, 1)$$

$$* P(a < X < b) = NORMDIST(b, \mu, \sigma, 1) - NORMDIST(a, \mu, \sigma, 1)$$

$$* P(X < x) = p \Rightarrow x = NORMINV(p, \mu, \sigma)$$

VD:

X~N(0,1)

i) TRA BẢNG HÀM LAPLACE

$$*P(X<1,65)=\Phi(1,65)+0,5=0,4505+0,5=0,9505$$

$$*P(-1<X<2)=\Phi(2)-\Phi(-1)=\Phi(2)+\Phi(1)=0,4772+0,3413=0,8185$$

$$*P(1,96<X)=0,5-\Phi(1,96)=0,5-0,4750=0,0250$$

$$*P(|X|<2,58)=2.\Phi(2,58)=2(0,4951)=0,9902$$

II) SỬ DỤNG EXCEL

$$*P(X<1,65)=NORMSDIST(1.65)=0,950529$$

$$*P(-1<X<2)=NORMSDIST(2)-NORMSDIST(-1)=0,818595$$

$$*P(1,96<X)=1-P(X\leq 1,96)=1-NORMSDIST(1.96)=0,024998$$

$$*P(|X|<2,58)=2*NORMSDIST(2.58)-1=0,99012$$

VD:

X(năm) là tuổi thọ của một sản phẩm điện tử có phân phối chuẩn với trung bình là 8 năm, độ lệch chuẩn là 2 năm. Sản phẩm được bảo hành 2 năm.

1) **Tính tỷ lệ sản phẩm cần bảo hành.**
2) **Trong năm 2008, hãng bán được 20 ngàn sản phẩm.Theo Anh Chị có bao nhiêu sản phẩm cần bảo hành.**
3) **Nếu tỷ lệ sản phẩm cần bảo hành là 0,002; thì thời gian bảo hành là bao nhiêu?**

<u>VD:</u>

X(g) là trọng lượng của một loại trái cây có phân phối chuẩn.Kiểm tra 1000 trái thấy có:

106 trái có trọng lượng trên 300g

40 trái có trọng lượng dưới 180g

1) Tính trọng lượng trung bình và độ lệch chuẩn của loại trái cây trên.
2) Trong 1000 trái cây trên có bao nhiêu trái có trọng lượng trong khoảng từ 200g-220g.

VD:

X(kwh) là lượng điện một hộ dân sử dụng trong một tháng có phân phối chuẩn

$$X \sim N(60kwh, (40kwh)^2)$$

Giá tiền điện là 1 ngàn đồng /kwh nếu sử dụng trong định mức 70kwh.

Nếu sử dụng vượt định mức thì phải trả 3 ngàn đồng cho 1 kwh vượt định mức.

Gọi Y là số tiền một hộ phải trả trong 1 tháng.

1) Tính $P(160<Y<220)$
2) Tính $P(Y>70)$
3) Thành phố có 500 ngàn hộ, theo Anh Chị tin chắc nhất có bao nhiêu hộ sử dụng vượt định mức

GIẢI:

1)

$$Y = \begin{cases} X * 1; khi: X \le 70 \\ 70 + (X - 70) * 3; khi: X > 70 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} X * 1; khi: X \le 70 \\ 3X - 140; khi: X > 70 \end{cases}$$

$$P(160 < Y < 220) = P(160 < 3X - 140 < 220)$$

$$= P(100 < X < 120) = \Phi(\frac{120 - \mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{100 - \mu}{\sigma})$$

$$= \Phi(\frac{120 - 60}{40}) - \Phi(\frac{100 - 60}{40}) = \Phi(1{,}5) - \Phi(1) = 0{,}092$$

2)

$$P(Y > 70) = P(3X - 140 > 70) = P(X > 70)$$

$$= 0{,}5 - \Phi(\frac{70 - \mu}{\sigma}) = 0{,}5 - \Phi(0{,}25) = 0{,}4013$$

3)

Z: số hộ sử dụng vượt định mức trong 500 ngàn hộ

Z~B(500.000; 0,4013)

Số hộ tin chắc nhất sử dụng vượt định mức =MOD(Z)=200.650 hộ

4.4.2.TÍNH XẤP XỈ PHÂN PHỐI NHỊ THỨC BỞI PHÂN PHỐI CHUẨN

X~B(n,p)

.Nếu n lớn (n≥30)

.p không gần 0 hoặc không gần 1

Có thể tính xấp xỉ phân phối nhị thức bởi phân phối chuẩn

X~N(np,npq)

$$P(k_1 \le X \le k_2) = \Phi(\frac{k_2 + 0,5 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{k_1 - 0,5 - np}{\sqrt{npq}})$$

VD:

Theo một khảo sát về mức độ hài lòng của người dân với các dịch vụ công, tỷ lệ người dân than phiền về dịch vụ cấp chủ quyền nhà là 40%.

Tính xác suất trong 100 hộ được hỏi có:

a) Từ 40 đến 50 hộ than phiền.

b) Ít nhất 50 hộ than phiền.

c) Nhiều nhất 60 hộ than phiền.

GIẢI:

X: số hộ than phiền, $X \sim B(100;0,40)$

a) NX: $n=100$ lớn, $p=0,40$

Tính xấp xỉ bởi phân phối chuẩn

a)

$$P(40 \leq X \leq 50) = \Phi(\frac{50 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{40 - np}{\sqrt{npq}}) = 0{,}4794$$

b)

$$P(X \geq 50) = \Phi(\frac{100 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{50 - np}{\sqrt{npq}}) = 0{,}0206$$

c)

$$P(X \leq 60) = \Phi(\frac{60 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{0 - np}{\sqrt{npq}}) = 0{,}99998$$

VD:

Trường Đại học KTTC có 300 sinh viên ,căng tin của trường phục vụ cơm trưa cho sinh viên theo hai ca:

ca 1 : từ 11.00 giờ – 11.30 giờ.

ca 2 : từ 11.40 giờ - 12.10 giờ.

Sinh viên có thể chọn bất kỳ ca nào để dùng cơm.

Theo Anh Chị căng tin cần có ít nhất bao nhiêu chỗ ngồi để xác suất căng tin luôn luôn đáp ứng đủ chỗ ngồi cho sinh viên đến dùng cơm trưa không bé hơn 95%.

VD: X(mm) độ dài của một trục xe đạp có phân phối chuẩn, với độ lệch chuẩn là 0,2mm. Sản phẩm được xem là đạt tiêu chuẩn, nếu độ dài sai lệch so với độ dài trung bình không quá 0,3mm.

a) Tính xác suất chọn ngẫu nhiên một sản phẩm thì được sp đạt yêu cầu.

b) Một cửa hàng nhận về 100 sp. Tính xác suất có ít nhất 90 sp đạt yêu cầu.

c) Trong quá trình kiểm tra có thể bị nhầm lẩn:

i)Nếu sp tốt mà bị loại thì mắc sai lầm loại 1.

ii)Nếu sp xấu mà được nhận thì mắc sai lầm loại 2

Xác suất mắc sai lầm loại 1 là 1%,Xác suất mắc sai lầm loại 2 là 2%. Tính xác suất không bị nhầm lẩn trong 1lần kiểm tra.

d) Tính xác suất khi kiểm tra 100 sp có nhiều nhất 10 lần bị nhầm lẩn.

4.5.PHÂN PHỐI CHI BÌNH PHƯƠNG

4.5.1. X là ĐLNN liên tục có hàm mật độ là:

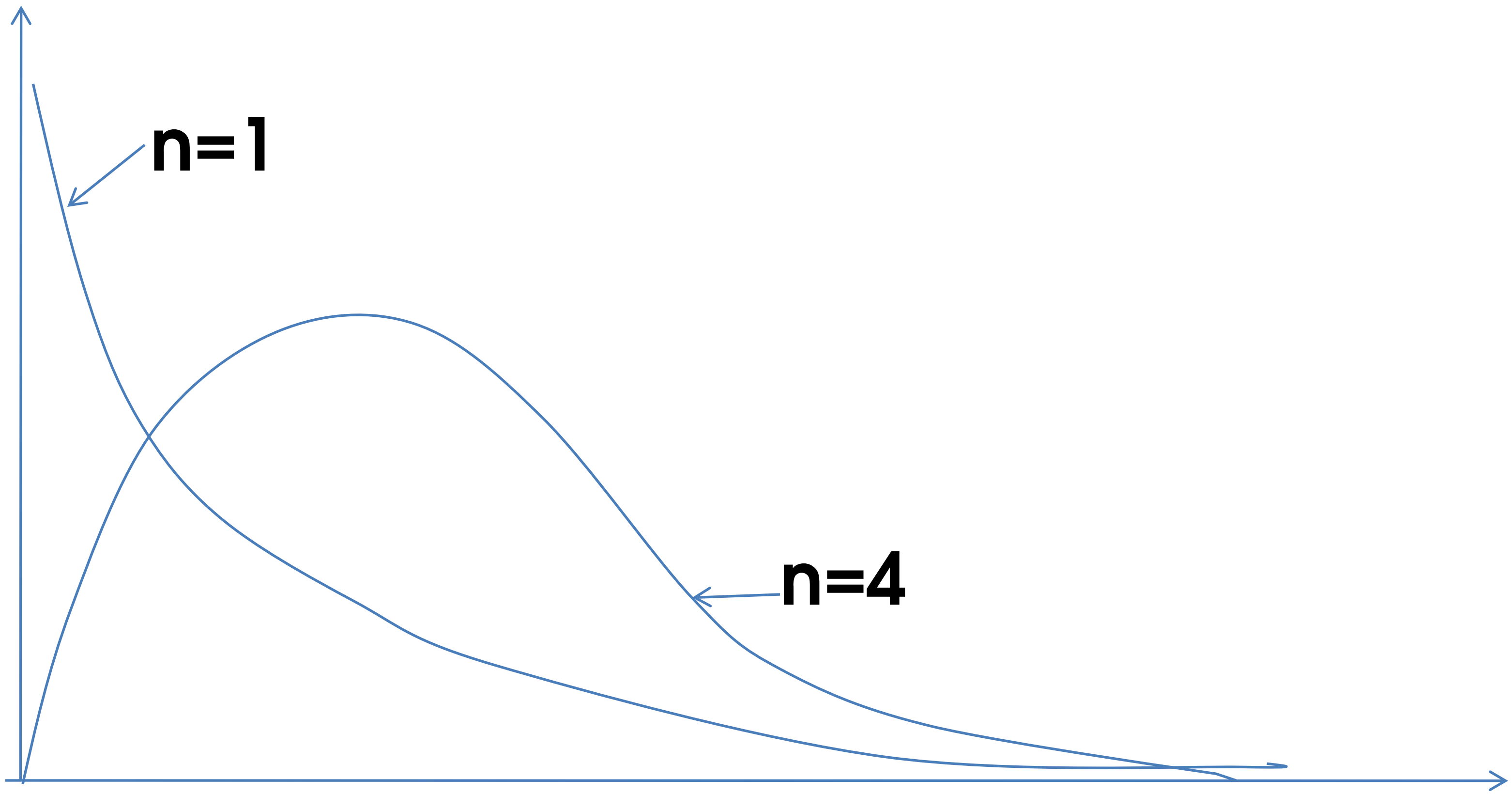
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\dfrac{k}{2})}; khi: x > 0 \\ 0; khi: x \leq 0 \end{cases}$$

được gọi là có phân phối chi bình phương, với bậc tự do là k

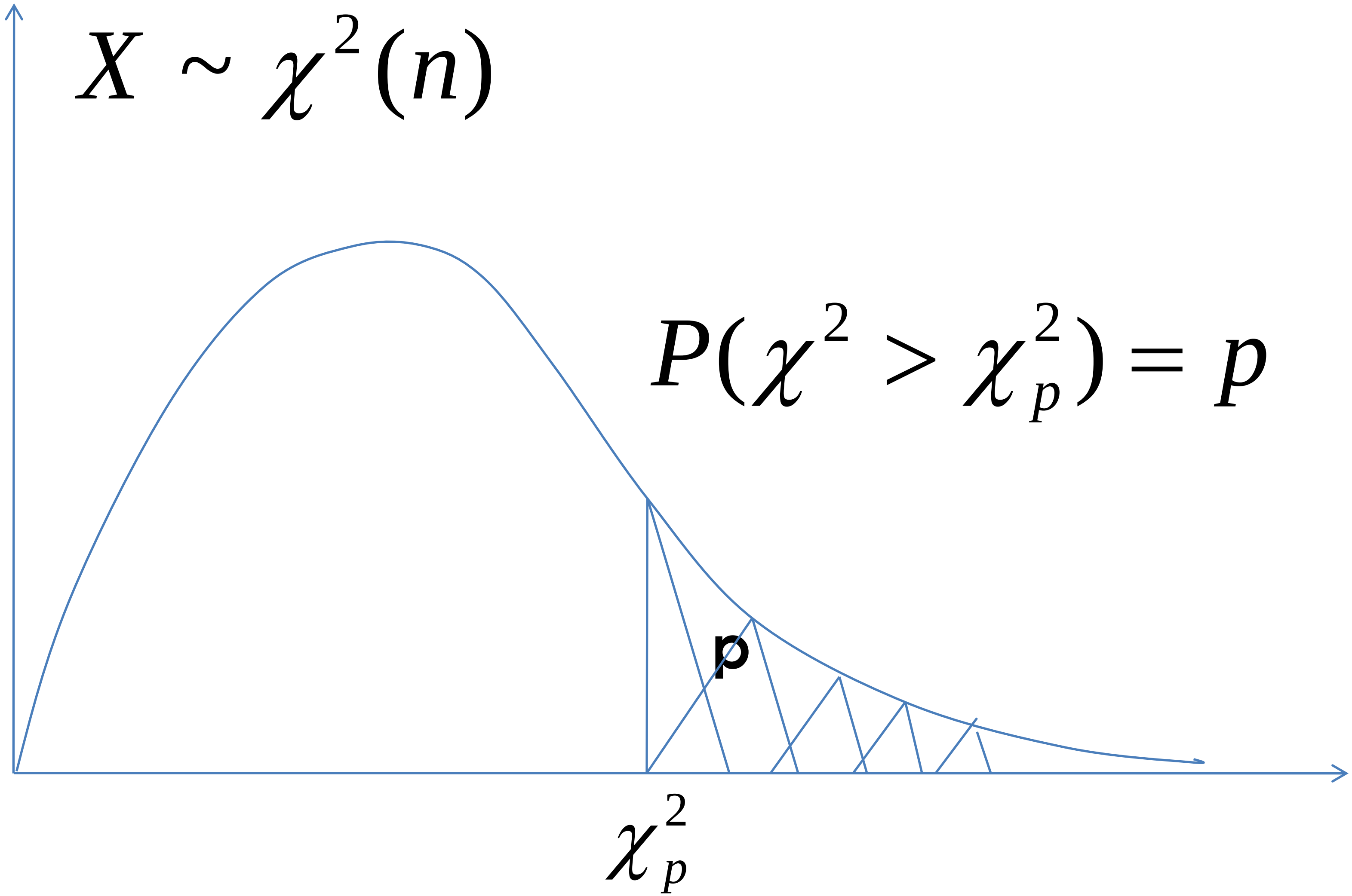
Ký hiệu:

$$X \sim \chi^2(k)$$

$$\begin{cases} \mu = E(X) = k \\ \sigma^2 = Var(X) = 2k \end{cases}$$



CHI BÌNH PHƯƠNG


$X \sim \chi^2(n)$
$P(\chi^2 > \chi_p^2) = p$
p
χ_p^2

EXCEL:

$$X \sim \chi^2(n)$$

* $P(\chi^2 > x) = CHIDIST(x, n)$

* $P(\chi^2 < x) = 1 - P(\chi^2 \geq x) = 1 - CHIDIST(x, n)$

* $P(\chi^2 > x) = p \qquad \Rightarrow x = CHIINV(p, n)$

VD:

TRA BẢNG: $X \sim \chi^2(10)$

$$*P(\chi^2 > 4,865) = 0,90$$

$$*P(\chi^2 \le 3,247) = 1 - P(\chi^2 > 3,247) = 1 - 0,975 = 0,025$$

$$*P(\chi^2 > \chi^2_{0,99}) = 0,99 \Rightarrow \chi^2_{0,99} = 2,558$$

$$(P(\chi^2 > x) = 0,99 \Rightarrow x = 2,558)$$

$$*P(\chi^2 > \chi^2_{0,025}) = 0,025 \Rightarrow \chi^2_{0,025} = 20,483$$

$$(P(\chi^2 > x) = 0,025 \Rightarrow x = 20,48)$$

VD: SỬ DỤNG EXCEL

$$X \sim \chi^2(10)$$

$$*P(\chi^2 > 3,247) = CHIDIST(3.247,10) = 0,974999$$

$$*P(\chi^2 \le 2,558) = 1 - P(\chi^2 > 2,558) =$$

$$= 1 - CHIDIST(2.558,10)$$

$$= 1 - 0,009997 = 0,990003$$

$$*P(\chi^2 > \chi_p^2) = 0,90$$

$$\Rightarrow \chi_p^2 = CHIINV(0.90,10) = 4,865182$$

$$(P(\chi^2 > x) = 0,90 \Rightarrow x = CHIINV(0.90,10) = 4,865182)$$

4.5.2.ĐỊNH LÝ:

Nếu $X_1, X_2, ..., X_n$ là các ĐLNN độc lập có phân phối chuẩn tắc .
Thì $X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$ có phân phối chi bình

phương, với bậc tự do là k.

CHÚ Ý:

Nếu $\begin{cases} X_1 \sim \chi^2(k_1) \\ X \sim \chi^2(k_2) \end{cases}$; X_1, X_2 độc lập

Thì $X = X_1 + X_2 \sim \chi^2(k_1 + k_2)$

4.6.PHÂN PHỐI STUDENT

4.6.1.ĐN:

X là ĐLNN liên tục có hàm mật độ là:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})(1+\frac{x^2}{k})^{\frac{-(k+1)}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})\sqrt{k\pi}}; x \in R$$

được gọi là có phân phối STUDENT với bậc tự do là k

Ký hiệu: $X \sim T(k)$

$$\begin{cases} \mu = E(X) = 0 \\ \sigma^2 = Var(X) = \dfrac{k}{k-2} \end{cases}$$

X~T(n)

TRA BẢNG: $P(T > t_{n,p}) = P(T > t_p) = p$

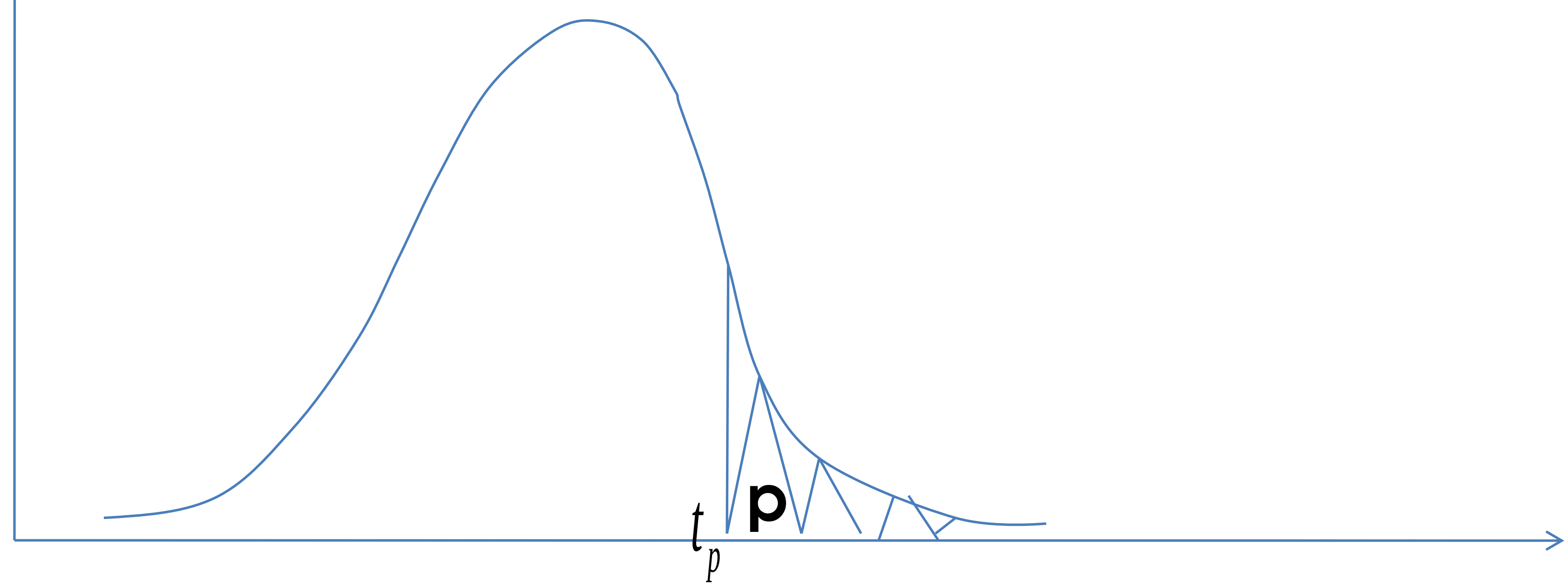
$$(\qquad P(T > x) = p \qquad)$$

EXCEL:

$$P(T > x) = TDIST(x, n, 1)$$

$$P(|T| > x) = TDIST(x, n, 2)$$

$$P(|T| > x) = p \Rightarrow x = TINV(p, n)$$



CHÚ Ý:

Sử dụng bảng phân phối STUDENT

X~T(k)

$$P(T > t_p) = p \Leftrightarrow P(T > x) = p$$

VD:

X~T(10)

P(T>2,2281)=0,025

P(T≤1,372)=1-P(T>1,372)=1-0,10=0,90

P(|T|>2,2281)=0,05

P(T>x)=0,05 thì x= 1,8125

P(T<x)=0,90 thì P(T>x)=0,10 suy ra x=1,3722

P(|T|>x)=0,10 suy ra x=1,8125

VD: SỬ DỤNG EXCEL

X~T(10)

$$P(T > 2{,}2281) = TDIST(2.2281{,}10{,}1) = 0{,}025002$$

$$P(T \le 1{,}3722) = 1 - P(T > 1{,}3722) = 1 - TDIST(1.3722) = 0{,}900002$$

$$P(|T| > 2{,}2281) = TIDIST(2.2281{,}10{,}2) = 0{,}050003$$

$$P(|T| > x) = 0{,}05 \Rightarrow x = TINV(0.05{,}10) = 2{,}228139$$

$$P(|T| > x) = 0{,}10 \Rightarrow x = TINV(0.10{,}10) = 1{,}812461$$

4.6.2.ĐỊNH LÝ:

Nếu $\begin{cases} X \sim N(0,1) \\ Y \sim \chi^2(k) \end{cases}$ X,Y độc lập

Thì: $T = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{k}}}$ có phân phối STUDENT

bậc tự do là k