1.4. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ QUAN HỆ THỨ TỰ

1.4.1. Quan hệ tương đương

1.4.2. Tập thương

1.4.3. Quan hệ thứ tự

1.4.1. Quan hệ tương đương

Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó có (thỏa mãn) ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ví dụ 1. Cho tập $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Trên A ta định nghĩa quan hệ R như sau: $\forall a, b \in A$ thì $aRb \Leftrightarrow a + b = 2k$ với k là một số nguyên dương nào đó.

Ví dụ 2. Xét tập A là tập hợp các sinh viên của lớp 48K và xét quan hệ R là quan hệ đồng hương (cùng huyện) trên A.

Ví dụ 3. Xét tập hợp Z các số nguyên và quan hệ R là quan hệ đồng dư theo modun 5 trên Z. Khi đó R cũng là quan hệ tương đương trên Z.

1.4.2. Tập thương

Mệnh đề. Mỗi quan hệ tương đương R trên một tập A sẽ xác định một phân hoạch của tập A nghĩa là xác định một sự phân chia tập A thành các tập con $A_1, A_2, ..., A_q$ nào đó thỏa mãn các tính chất:

$$\bigcup_{i=1}^{q} A_i = A \qquad (1)$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ với } i \neq j \qquad (2)$$

sao cho hai phần tử a, b cùng thuộc một tập con A_i khi và chỉ khi aRb.

Thật vậy, với mỗi $a \in A$, gọi R_a là tập tất cả các phần tử của A có quan hệ với a, khi đó dễ thấy

$$\bigcup_{a \in A} R_a = A$$

1.4.2. Tập thương

mặt khác nếu $R_a \cap R_b \neq \emptyset$ thì tồn tại $c \in R_a \cap R_b$ và với mọi $x \in R_a$ ta có xRa, aRc, cRb suy ra xRb, nghĩa là $x \in R_b$ và ngược lại.

Vậy nếu $R_a \cap R_b \neq \emptyset$ thì $R_a \equiv R_b$.

Đánh số các tập con dưới dạng $A_1, A_2, ..., A_q$ ta có điều phải chứng minh.

Mỗi tập con thuộc phân hoạch của A được xác định theo quan hệ tương đương R được gọi là *một lớp tương đương* của A theo quan hệ tương đương R. Lớp tương đương của A theo quan hệ tương đương R, chứa phần tử a thường được ký hiệu là $\overline{a}$.

Tập hợp bao gồm tất cả các phần tử, trong đó mỗi phần tử là một lớp tương đương của A theo quan hệ tương đương R được gọi là *tập thương* của tập A theo quan hệ tương đương R, ký hiệu là A/R.

1.4.2. Tập thương

Ví dụ 4.

- Quan hệ tương đương trong ví dụ 1 xác định phân hoạch của tập A thành hai tập $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \overline{1} = \overline{3} = \overline{5} = \overline{7} = \overline{9}$ và $A_2 = \{2, 4, 6, 8\} = \overline{2} = \overline{4} = \overline{6} = \overline{8}$. Tập thương $A/R = \{A_1, A_2\} = \{\overline{1}, \overline{2}\}$.

- Quan hệ tương đương trong ví dụ 2 xác định phân hoạch của tập A thành các tập A_i mà mỗi A_i là tập tất cả các sinh viên của A thuộc cùng một huyện. Có thể coi tập thương là tập các huyện có sinh viên thuộc lớp 48K.

- Quan hệ tương đương trong ví dụ 3 xác định phân hoạch của tập A thành năm tập $A_0 = \{5k \mid k \in Z\}$, $A_1 = \{5k+1 \mid k \in Z\}$, $A_2 = \{5k+2 \mid k \in Z\}$, $A_3 = \{5k+3 \mid k \in Z\}$, $A_4 = \{5k+4 \mid k \in Z\}$.

Tập thương $Z/R = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$, (chính là Z_5 quen thuộc).

1.4.2. Tập thương

Ngược lại, nếu có một phân hoạch tập A (nghĩa là có sự phân chia tập A thành các tập con thỏa mãn (1) và (2) thì phân hoạch đó xác định một quan hệ tương đương trên tập A.

Thật vậy, giả sử $A_1, A_2, ..., A_q$ là một phân hoạch của tập A.

Ta xác định quan hệ R trên A như sau:

Hai phần tử *a*,*b* của *A* có quan hệ *R* khi và chỉ khi chúng cùng thuộc một tập A_i nào đó của phân hoạch đã cho. Nghĩa là:

$$\forall a, b \in A, aRb \Leftrightarrow \exists A_i \text{ sao cho } a \in A_i, b \in A_i,$$

khi đó R là quan hệ trên A và

- Tính chất phản xạ thỏa mãn với mọi $a \in A$, do điều kiện (1) ắt tồn tại i để $a \in A_i$, do đó aRa.

1.4.2. Tập thương

- Tính chất đối xứng thỏa mãn vì với mọi $a, b \in A$, nếu aRb thì $\exists A_i$ sao cho $a \in A_i, b \in A_i$, tức là $\exists A_i$ sao cho $b \in A_i, a \in A_i$, tức là bRa.

- Tính chất bắc cầu thỏa mãn vì với mọi $a, b, c \in A$, nếu aRb và bRc thì từ aRb suy ra $\exists A_i$ sao cho $a \in A_i, b \in A_i$ và từ bRc suy ra $\exists A_j$ sao cho $b \in A_j, c \in A_j$.

Tuy nhiên theo điều kiện (2) ta có $i = j$, do đó $\exists A_i$ sao cho $a \in A_i, c \in A_i$, tức là aRc.

Ví dụ 5. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và phân hoạch $A_1 = \{1, 4, 5\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{2, 6\}$. Khi đó quan hệ tương đương R tương ứng là

$$R = \{(1,1), (1,4), (1,5), (4,1), (4,4), (4,5), (5,1), (5,4), (5,5), (3,3), (2,2), (2,6), (6,2), (6,6)\}$$

1.4.3. Quan hệ thứ tự

Một quan hệ hai ngôi R trên tập hợp A được gọi là *quan hệ thứ tự* nếu nó có (thỏa mãn) ba tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu. Người ta thường ký hiệu quan hệ thứ tự bởi ký hiệu $\leq$ và nếu $a \leq b$ hoặc $b \leq a$ thì ta nói rằng hai phần tử a và b *so sánh được* với nhau.

Tập A với quan hệ thứ tự được gọi là *tập sắp thứ tự*.

Ví dụ 6. Quan hệ "$\leq$" trên Z là quan hệ thứ tự

Ví dụ 7. Quan hệ quan hệ bao hàm $\subseteq$ giữa các tập con của một tập hợp X là quan hệ thứ tự trên tập $\mathcal{P}(X)$ tất cả các tập con của X.

Ví dụ 8. Quan hệ "Chia hết cho", ký hiệu là $\vdots$, trên N là quan hệ thứ tự.

1.4.3. Quan hệ thứ tự

Trong ví dụ 6, với a, b tùy ý ta luôn có $a \leq b$ hoặc $b \leq a$. Các quan hệ thứ tự có tính chất mọi cặp phần tử đều có thể so sánh được thì được gọi là *quan hệ thứ tự toàn phần* hoặc *thứ tự tuyến tính*.

Trong các ví dụ 7 và 8, không phải hai phần tử bất kỳ đều có thể so sánh Các quan hệ thứ tự như vậy được gọi là *quan hệ thứ tự bộ phận*.

Từ quan hệ thứ tự $\leq$, nếu $a \leq b$ và $a \neq b$ thì ta viết $a < b$ và ta nói rằng "$<$" là *thứ tự chặt*. Như vậy một quan hệ thứ tự chặt chỉ thỏa mãn hai tính chất phản xứng và bắc cầu.

Giả sử R là quan hệ thứ tự trên tập A. B là một tập con của A. Khi đó $R \cap (B \times B)$ là một quan hệ thứ tự trên B và ta cũng ký hiệu là R, được gọi là thứ tự trên B *cảm sinh* bởi thứ tự trên A hoặc là *thu hẹp* của thứ tự R trên B.

1.4.3. Quan hệ thứ tự

Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự. Một phần tử $a \in X$ được gọi là phần tử *tối tiểu* của X nếu từ $x \leq a$ kéo theo $x = a$.

Chẳng hạn tập Z với quan hệ $\leq$ trong ví dụ 6 không có phần tử tối tiểu.

Giả sử X khác rỗng. Tập $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ với quan hệ $\subseteq$ (quan hệ bao hàm thu hẹp trên $\mathcal{P}(X)$) chứa ít nhất một phần tử tối tiểu và mọi tập con một phần tử của X đều là phần tử tối tiểu.

Giả sử X là một tập hợp sắp thứ tự. Một phần tử $a \in X$ được gọi là phần tử *bé nhất* của X nếu từ $\forall x \in X$ đều có $a \leq x$.

Một tập hợp được gọi là sắp thứ tự tốt nếu nó là tập sắp thứ tự và mọi tập con khác rống của nó đều có phần tử bé nhất.

Ví dụ tập hợp các số tự nhiên với quan hệ thứ tự $\leq$ thông thường là tập sắp thứ tự tốt.

Bài tập.

1. Chứng tỏ rằng mỗi quan hệ tương đương đều có thể biểu diễn bởi ma trận khối dạng

$$M_R = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

trong đó

$$A_{ij} = \begin{cases} \text{ma trận có mọi phần tử bằng 1 nếu } i = j \\ \text{ma trận không (có mọi phần tử bằng 0) nếu } i \neq j \end{cases}$$

2. Có thể có bao nhiêu quan hệ tương đương trên một tập có n phần tử?

HÕt môc 1. 4

C¸m ¬n sù chó ý cña c¸c b¹n!