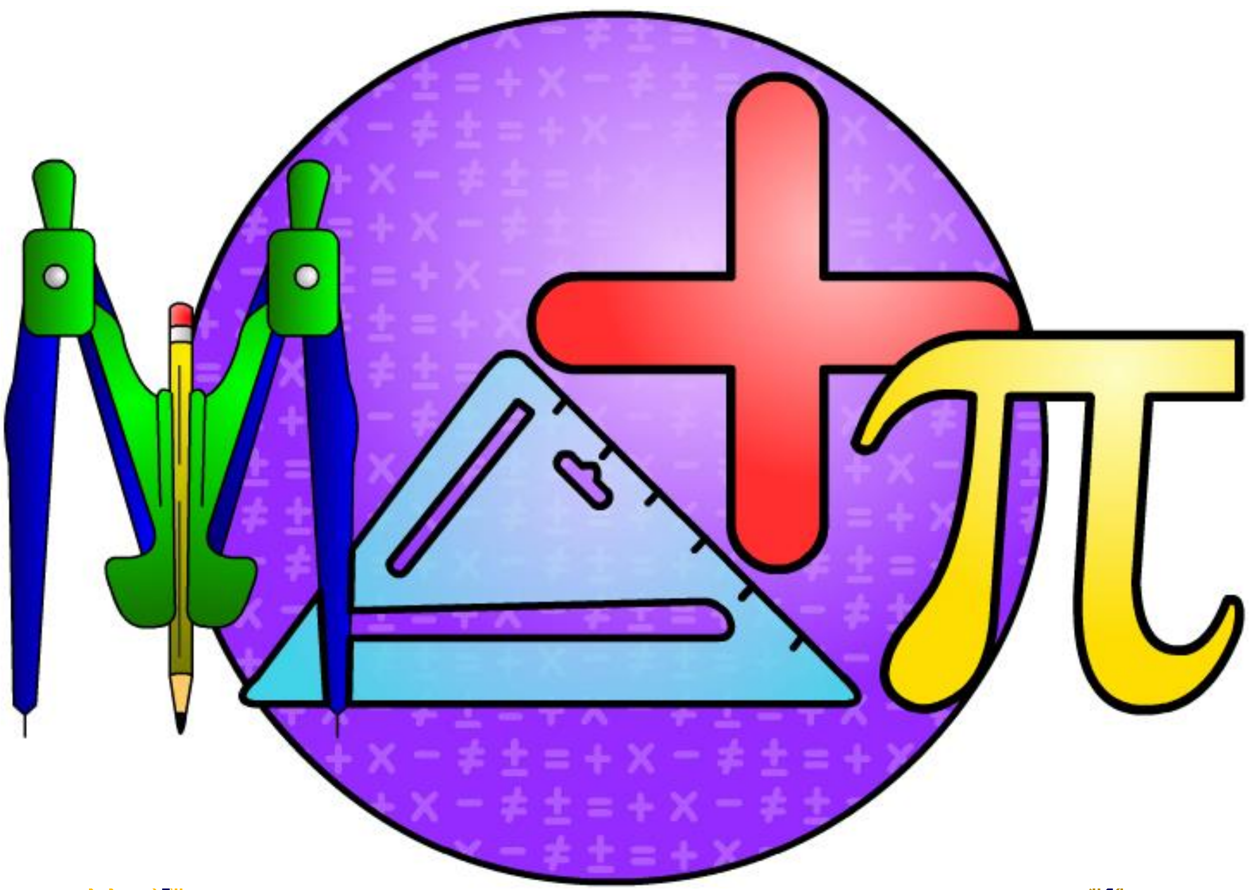
BỘ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN LỚP 9
NĂM 2018-2019 (CÓ ĐÁP ÁN)



1. **Đề thi chọn học sinh giỏi cấp huyện môn Toán 9 năm 2018-2019 có đáp án - Phòng GD&ĐT Con Cuông**
2. **Đề thi chọn học sinh giỏi cấp huyện môn Toán 9 năm 2018-2019 có đáp án - Phòng GD&ĐT Hà Trung**
3. **Đề thi chọn học sinh giỏi cấp huyện môn Toán 9 năm 2018-2019 có đáp án - Phòng GD&ĐT Hoài Nhơn**
4. **Đề thi chọn học sinh giỏi cấp huyện môn Toán 9 năm 2018-2019 có đáp án - Phòng GD&ĐT huyện Lai Vung**
5. **Đề thi chọn học sinh giỏi cấp huyện môn Toán 9 năm 2018-2019 có đáp án - Phòng GD&ĐT Tam Dương**
6. **Đề thi chọn học sinh giỏi cấp huyện môn Toán 9 năm 2018-2019 có đáp án - Phòng GD&ĐT Thạch Hà**

PHÒNG GD&ĐT CON CUÔNG **KÌ THI CHỌN HSG CẤP HUYỆN LỚP 9 THCS**

Đề chính thức

NĂM HỌC: 2018 – 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1*(5 điểm):* Cho biểu thức A = $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ với x ≥ 0 và x ≠ 4

a) Rút gọn A.

b) Tính giá trị của A khi x = $\frac{4}{9}$.

c) Tìm giá trị của x để A có giá trị nguyên.

Câu 2 *(4điểm):*

1. Giải các phương trình sau:
   a) $\sqrt{4x^2-4x+1}=2x+1$
   b) $\sqrt{x+3}+4\sqrt{x}-2x=6-\sqrt{5-x}$
2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^3 + 3n^2 + 2018n$ chia hết cho 6

Câu 3 (***2,5 điểm):*** Cho đường thẳng (d) có phương trình:

(m+1)x + (m-2)y = 3 (d) (m là tham số)

a) Tìm giá trị của m biết đường thẳng (d) đi qua điểm A (-1; -2)

b) Tìm m để (d) cắt 2 trục tọa độ và tạo thành tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

Câu 4 *(7,0 điểm):* Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tiếp tuyến Ax, By. Lấy điểm M bất kì thuộc nửa đường tròn (M khác A và B). Kẻ MH vuông góc với AB tại H.

a) Tính MH biết AH = 3cm, HB = 5cm.

b) Qua M kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh M,I,H thẳng hàng.

c) Vẽ đường tròn tâm (O’) nội tiếp tam giác AMB tiếp xúc AB ở K.

Chứng minh diện tích $S_{\Delta AMB}$ = AK.KB

Câu 5 *(1,5 điểm)* Cho x; y là các số thực dương thỏa mãn (x+1)(y+1) = 4xy.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3y^2+1}}\le 1$

HẾT

Đề có 01 trang

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

PHÒNG GD&ĐT CON CUÔNG **HƯỚNG DẪN CHẤM HSG CẤP HUYỆN LỚP 9 THCS**

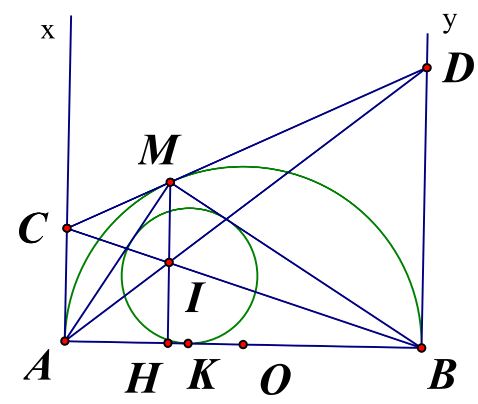
NĂM HỌC: 2018 – 2019

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu	Hướng dẫn giải, đáp án	Điểm
1 (5 điểm)	a) $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}+\frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$ $=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)+2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-(2+5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ $=\frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$ $=\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$	0,5 0,5 1,0
	b) Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$, tại $x = \frac{4}{9}$ (t/m đk) $A=\frac{3\sqrt{\frac{4}{9}}}{\sqrt{\frac{4}{9}}+2}=\frac{3.\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+2}$ $=\frac{2}{\frac{2}{3}+2}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$	0,25 0,75 0,5
	c)Với $x \geq 0$ và $x \neq 4$ A nguyên $\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ có giá trị nguyên. Mặt khác $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=3-\frac{6}{\sqrt{x}+2}\langle 3$ (vì $\frac{6}{\sqrt{x}+2}>0$) Suy ra $0 \leq A < 3$ Vì A nguyên nên A = 0 ; 1 ; 2 A = 0 giải ra ta được x = 0 (T/m đk) A= 1 giải ra ta được x = 1 (T/m đk) A = 2 giải ra ta được x = 16 (T/m đk) Vậy A nguyên thì $x \in \{ 0 ;1 ;16\}$	0,25 0,25 0,25 0,75

Câu 2 (4,0 điểm)	1) a) $\sqrt{4x^2-4x+1}=2x+1$ $\Leftrightarrow \lvert 2x-1\rvert = 2x+1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} 2x-1=2x+1 \\ 2x-1=-2x-1 \end{array}\right. \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{-1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} 0x=2(kt/m) \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases}$	0,5 0,5 0,5
	b)Đk 0≤ x ≤ 5 $\sqrt{x+3}+4\sqrt{x}-2x=6-\sqrt{5-x}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+3}+\sqrt{5-x}=2(\sqrt{x}-1)^2+4$ (1) Vế trái của (1) bé hơn bằng 4 ; vế phải lớn hơn hoặc bằng 4 Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=\sqrt{5-x} \\ \sqrt{x}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (t/mđk) Vậy pt có nghiệm duy nhất là x = 1	0,25 0,25 0,25 0,25
	2. $n^3 + 3n^2 + 2018n = n.(n+1)(n+2) + 2016n$ vì n.(n+1)(n+2) là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên vừa chia hết cho 2 và vừa chia hết cho 3 nên n.(n+1)(n+2) chia hết cho 6 . 2016n luôn chia hết cho 6 Vậy $n^3 + 3n^2 + 2018n$ luôn chia hết cho 6 với mọi n € Z	0,5 0,5 0,25 0,25
Câu 3 (2,5 điểm)	a) Đường thẳng (d) đi qua điểm A (-1; -2) nên ta có x = - 1; y = -2 thay vào và giải ra ta được m = 0	 0,5 0,5
	Để d cắt 2 trục tọa độ thì m ≠ -1 ; 2 c) Giả sử (d) cắt 2 trục tọa độ tại 2 điểm A và B. ta tính được tọa độ A ($\frac{3}{m+1};0$) B ($0;\frac{3}{m-2}$) Ta có tam giác OAB vuông tại O nên	0,25 0,25 0,25

	$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}\left\|\frac{3}{m+1}\right\|\left\|\frac{3}{m-2}\right\|$ $S_{\Delta OAB}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left\|\frac{3}{m+1}\right\|\left\|\frac{3}{m-2}\right\|=\frac{9}{2}$ Giải ra ta có $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ (t/mđk) Vậy $\left[\begin{array}{l} m=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2} \\ m=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ thì ………	0,25 0,5
	 	
	a) Tam giác AMC vuông tại M có MH là đường cao MH = $\sqrt{AH.BH}$ (hệ thức lượng…..) = $\sqrt{3.5}=\sqrt{15}$ (cm)	0,5 0,5 0,5 0,5
	a) Vì AC song song với BD nên ta có $\frac{AC}{BD}=\frac{AI}{ID}=\frac{CM}{MD}$ (Vì AC=CM; BD =MD) Suy ra MI// AC. Mà MH//AC (vì cùng vuông góc AB) Suy ra M, I, H thẳng hàng	0,5 0,5 1,0 0,5
	c)Đặt AB = a; AM = c; BM = b Ta có	

	$AK=\dfrac{a+c-b}{2};BK=\dfrac{a+b-c}{2}$ $\Rightarrow AK.BK=\dfrac{a+c-b}{2}.\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{1}{2}.\left[\dfrac{(a+c-b).(a+b-c)}{2}\right]$ $=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{a^2-(b^2+c^2)+2bc}{2}\right]$ $=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2bc}{2}=\dfrac{1}{2}bc$ $=\dfrac{1}{2}AM.BM=S_{\Delta AMB}$ Vậy $S_{\Delta AMB}$ = AK.KB	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
5 (1,5 điểm)	Từ (x+1)(y+1) = 4xy $\Rightarrow \dfrac{x+1}{x}.\dfrac{y+1}{y}=4$ $\Leftrightarrow (1+\dfrac{1}{x})(1+\dfrac{1}{y})=4$ Đặt a = $\dfrac{1}{x}$; b = $\dfrac{1}{y}$ Ta có (1+a)(1+b) = 4 $\Rightarrow 3=a+b+ab$ $\Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+2\sqrt{ab}+ab\geq 2\sqrt{ab}+ab$ Từ đó ab≤ 1 Áp dụng AM – GM cho 2 số thực dương ta có $\dfrac{1}{\sqrt{3x^2+1}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\sqrt{3+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{a}{\sqrt{a+b+ab+a^2}}$ $=\dfrac{a}{\sqrt{(a+b)(a+1)}}\leq\dfrac{1}{2}(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{a}{a+1})$ Tương tự ta có $\dfrac{1}{\sqrt{3y^2+1}}\leq\dfrac{1}{2}(\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+1})$ Cộng vế theo vế ta được	0,5 0,5 0,5

	$\frac{1}{\sqrt{3x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3y^2+1}} \le \frac{1}{2}(\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1})$ $\le \frac{1}{2}(1+\frac{2ab+a+b}{(a+1)(b+1)}) \le \frac{1}{2}(1+\frac{ab+3}{2}) \le \frac{1}{2}(1+\frac{1+3}{4})$ ≤ 1 Dấu bằng xẩy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a}{a+b}=\frac{a}{b+1} \\ \frac{b}{a+b}=\frac{b}{b+1} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=1$ x = y = 1	

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TRUNG

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9
NĂM HỌC 2018-2019
Môn thi: Toán. Thời gian: 150 phút

Câu 1: (4.0 điểm) Cho biểu thức P=$\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\dfrac{x+8}{10-x}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right)$

a. Rút gọn biểu thức P

b. Tính giá trị của biểu thức P khi x=$\sqrt[4]{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}$

Câu 2: (4.0 điểm)

a. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{x+1}-3\sqrt{y-1}=-1\\ 2\sqrt{x+1}+5\sqrt{y-1}=9\end{cases}$

b. Giải phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+\sqrt{(x+1)(4-x)}=5$

c. Cho một số tự nhiên có 4 chữ số; Nếu xoá đi chữ số hàng chục và hàng đơn vị thì số đó giảm đi 5445 đơn vị. Tìm số đã cho.

Câu 3: (4.0 điểm)

a. Chứng minh A=$\left(2^n-1\right)\left(2^n+1\right)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n .

b. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thoả mãn đồng thời các điều kiện sau: x+y+z>11 và 8x+9y+10z=100.

c. Chứng minh rằng nếu xy+$\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$ thì $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$

Câu 4: (3.0 điểm)

a. Cho x, y>0 thoả mãn $\dfrac{x}{1+x}+\dfrac{2y}{1+y}=1$. Tìm giá trị lớn nhất của P=xy^2.

b. Tìm các số tự nhiên n sao cho B=n^2-n+13 là số chính phương.

Câu 5: (5.0 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB=2R. Gọi Ax, By là các tia vuông góc với AB (Ax, By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, nó cắt Ax và By theo thứ tự ở C và D. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng CD.

a. Tính số đo góc $\widehat{COD}$

b. Chứng minh OI=$\dfrac{1}{2}CD$ và OI vuông góc với AB.

c. Chứng minh: AC.BD = R^2

d. Tìm vị trí của điểm M để tứ giác ABCD có chu vi nhỏ nhất.

Đề bài gồm có 1 trang 5 câu

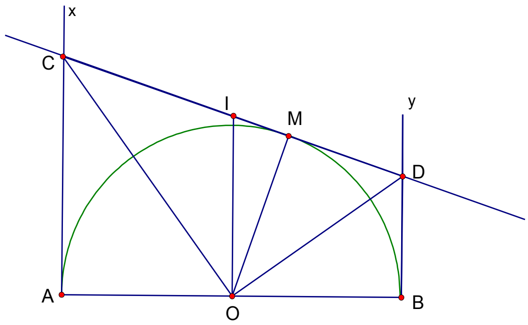
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TRUNG

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG LỚP 9 NĂM HỌC 2018-2019

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4.0 điểm)	a. (2.5 điểm)	
	ĐKXĐ: x$\neq$ 10 và x>1	0.25
	P=$\left(\frac{\sqrt{x-1}}{3+\sqrt{x-1}}+\frac{x+8}{10-x}\right):\left(\frac{3\sqrt{x-1}+1}{x-3\sqrt{x-1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)=$	
	$=\frac{\sqrt{x-1}.(10-x)+(x+8)(3+\sqrt{x-1})}{(3+\sqrt{x-1})(10-x)}:\frac{3\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+3}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}$	0.5
	$=\frac{10\sqrt{x-1}-x\sqrt{x-1}+3x+x\sqrt{x-1}+24+8\sqrt{x-1}}{(3+\sqrt{x-1})(10-x)}:\frac{2\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}$	0.5
	$=\frac{18\sqrt{x-1}+3x+24}{(3+\sqrt{x-1})(10-x)}:\frac{2\sqrt{x-1}+4}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}=\frac{3(\sqrt{x-1}+3)^2}{(3+\sqrt{x-1})(10-x)}.\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}{2(\sqrt{x-1}+2)}$	0.5
	$=\frac{3(\sqrt{x-1}+3)}{10-x}.\frac{\sqrt{x-1}(\sqrt{x-1}-3)}{2(\sqrt{x-1}+2)}=\frac{3\sqrt{x-1}(x-10)}{2(\sqrt{x-1}+2)(10-x)}=\frac{-3\sqrt{x-1}}{2(\sqrt{x-1}+2)}$	0.75
	b. (1.5 điểm)	
	x=$\sqrt[4]{\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}}-\sqrt[4]{\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}}\Rightarrow\ \sqrt[4]{(3+2\sqrt{2})^2}-\sqrt[4]{(3-2\sqrt{2})^2}=\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{(3-2\sqrt{2})}$	
	$==\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$	1.0
	Vậy P=$\frac{-3\sqrt{2-1}}{2(\sqrt{2-1}+2)}=\frac{-1}{2}$	0.5

<table>
<tr>
<td rowspan="3">2
(4.0 điểm)</td>
<td>a. (1.0 điểm) ĐKXĐ: $x \ge -1; y \ge 1$
$\begin{cases} \sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-1} = -1 \\ 2\sqrt{x+1} + 5\sqrt{y-1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 6\sqrt{y-1} = -2 \\ 2\sqrt{x+1} + 5\sqrt{y-1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-1} = 1 \\ 2\sqrt{x+1} + 5\sqrt{y-1} = 9 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-1} = 1 \\ 2\sqrt{x+1} + 5\sqrt{y-1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2\sqrt{x+1} + 5\sqrt{y-1} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases} (TM)$
Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là (3; 2)</td>
<td>0.25
0.25
0.25
0.25</td>
</tr>
<tr>
<td>b. (1.5 điểm) ĐKXĐ: $-1 \le x \le 4$
đặt a=$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$ (a≥ 0)
$a^2=5+2\sqrt{(x+1)(4-x)} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{a^2-5}{2}$
Thay vào phương trình đã cho ta được:
$a+\frac{a^2-5}{2}=5 \Leftrightarrow a^2+2a-15=0 \Leftrightarrow a^2-3a+5a-15=0 \Leftrightarrow (a-3)(a+5)=0 \Rightarrow a=-5$ (loại); a=3 (thoả mãn đk)
Với a=3 ta có PT: $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = 3$
$5+2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 9 \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = 2 \Leftrightarrow 4x-x^2+4-x=4 \Leftrightarrow x^2-3x=0$
$\Leftrightarrow x(x-3)=0$
$\Rightarrow$ x=0 (thoả mẫn đk), x=3 (thoả mãn đk)
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{0; 3\}$</td>
<td>0.25
0.25
0.25
0.25
0.25
0.25</td>
</tr>
<tr>
<td>c. (1.5 điểm) Gọi số cần tìm là: $\overline{abcd}$ $0 \le b, c, d \le 9; 1 \le a \le 9)$
Ta có $\overline{abcd}$-5445=$\overline{ab} \Leftrightarrow 100.\overline{ab} + \overline{cd}$-5445=$\overline{ab} \Leftrightarrow$ 99. 55-99$\overline{ab}$=$\overline{cd}$
$\Leftrightarrow$ 99(55-$\overline{ab}$)=$\overline{cd}$
Vì $\overline{cd}$ là số có 2 chữ số nên 55-$\overline{ab}$=0 hoặc 55-$\overline{ab}$=1
+ Trường hợp 55- $\overline{ab}$=00 $\Rightarrow$ $\overline{ab}$=55; $\overline{cd}$=00 $\Rightarrow$ $\overline{abcd}$=5500
+ Trường hợp 55- $\overline{ab}$=1 $\Rightarrow$ $\overline{ab}$=54; $\overline{cd}$=99 $\Rightarrow$ $\overline{abcd}$=5499
Vậy các số cần tìm là: 5500 và 5499.</td>
<td>0.25
0.25
0.25
0.25
0.25
0.25</td>
</tr>
</table>

	a. (1.0 điểm) Ta có $2^n - 1$; 2^n và 2^n+1 là ba số tự nhiên liên tiếp nên $(2^n-1).2^n.(2^n+1)$ chia hết cho 3 Mà $(2^n, 3)=1$ nên $(2^n-1)(2^n+1)$ chia hết cho 3 Vậy A chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n	 0.5 0.25 0.25
3 (4.0 điểm)	b. (1.5 điểm) Ta có $8x+8y+8z<8x+9y+10z=100 \Rightarrow x+y+z<12.5$ $\Rightarrow x+y+z\leq 12$ Ta có $x+y+z>11$ và x, y, z dương nên $x+y+z=12$ (1) Ta có $8x+9y+10z=100$ (2) Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=12 \\ 8x+9y+10z=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ 96+y+2z=100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ y+2z=4 \end{cases}$ Do x, y, z là các số nguyên dương nên z=1; y=2, x=9	0.25 0.25 0.25 0.5 0.25
	c. (1.5 điểm) Ta có $xy+\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$ $\Rightarrow x^2y^2+(1+x^2)(1+y^2)+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$ $\Rightarrow x^2y^2+x^2+1+y^2+x^2y^2+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=1$ $\Rightarrow x^2y^2+x^2+y^2+x^2y^2+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=0$ $\Rightarrow x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}=0$ $\Rightarrow \left(x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\right)^2=0$ $\Rightarrow x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}=0$	 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25
	a. (1.5 điểm) Ta có $\frac{x}{1+x}+\frac{2y}{1+y}=1 \Rightarrow x(1+y)+2y(1+x)=(1+x)(1+y) \Rightarrow$ $x+xy+2y+2xy=1+y+x+xy$ $\Rightarrow 2xy+y=1$ Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có $1=y+2xy\geq 2\,2\sqrt{y.2xy}=2\sqrt{2xy^2}$ $\Rightarrow 1\geq 8xy^2 \Rightarrow xy^2\leq \frac{1}{8}$ Dấu "=" xảy ra khi $y=2xy \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}$ Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{1}{8}$ khi $x=y=\frac{1}{2}$	 0.5 0.25 0.25 0.25 0.25
4 (3.0 điểm)	b. (1.5 điểm) B là số chính phương nên 4B cũng là số chính phương Đặt $4B=k^2$ (k là số tự nhiên) thì $4n^2-4n+52=k^2 \Leftrightarrow (2n-1)^2-k^2=-51$ $\Leftrightarrow (2n-1+k)(2n-1-k)=1.(-51)=51.(-1)=17.(-3)=-3.17$ Vì n là số tự nhiên nên $2n-1+k>2n-1-k$ ta có các hệ PT: $\begin{cases} 2n-1+k=1 \\ 2n-1-k=-51 \end{cases}$ (1) $\begin{cases} 2n-1+k=3 \\ 2n-1-k=-17 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2n-1+k=51 \\ 2n-1-k=-1 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2n-1+k=17 \\ 2n-1-k=-3 \end{cases}$ (4) Giải các hệ (1), (2), (3), (4) ta được n=-12; n==-3; n=13; n=4 Do n là các số tự nhiên nên $n\in\{4;\ 13\}$	0.25 0.25 0.25 0.25 0.25 0.25

<table>
<tr><td rowspan="5">**5**</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>a. (1.25 điểm) OC là tia phân giác của góc $\widehat{AOM}$ (T/c tia phân giác)
OD là tia phân giác của $\widehat{MOB}$ (T/c tia phân Giác)
Mà $\widehat{AOM}$ và $\widehat{MOB}$ là hai góc kề bù
Nên OC$\perp$ OD hay $\widehat{COD}=90^0$</td><td></td></tr>
<tr><td>b. (1.25 điểm) Tam giác COD vuông tại O và IC=ID
Suy ra OI=$\frac{1}{2}CD$ (đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)
Ta có AC//BD (cùng vuông góc với AB)
Suy ra tứ giác ABCD là hình thang
$\Rightarrow$ OI là đường trung bình của hình thang
$\Rightarrow$ OI//AC $\Rightarrow$ OI$\perp$ AB</td><td></td></tr>
<tr><td>c. (1.25 điểm) Xét tam giác COD vuông tại O
có OM$\perp$ CD (CD là tiếp tuyến)
Áp dụng hệ thức lượng ta có OM^2=MC.MD hay MC.MD=R^2
C và D là giao của các tiếp tuyến nên CA=CM, DB=DM
Suy ra CA.DB=R^2</td><td></td></tr>
<tr><td>d. (1.25 điểm) Ta có CA+DB=CD
Hình thang ABCD có độ dài canh AB không đổi
Nên chu vi hình thang nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất
CD nhỏ nhất khi CD=AB
CD=AB khi CD//AB
CD//AB khi OM$\perp$ AB; OM$\perp$ AB khi M là điểm chính giữa của cung AC.</td><td></td></tr>
</table>

UBND HUYỆN HOÀI NHƠN **PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO** ***Đề chính thức***	**ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN** **Năm học 2018 – 2019** **Môn: TOÁN 9** Ngày thi: 01/12/2018 *Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)*

Bài 1. (*4.0 điểm*)

a) Thu gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

b) Cho $x=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $B=\left(1-2x+x^2+x^3-x^4\right)^{2018}$.

c) Cho $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$C=x^3+y^3-3(x+y)+2018.$$

Bài 2. (*4.0 điểm*)

a) Tìm các số nguyên dương có hai chữ số, biết số đó là bội của tích hai chữ số của chính số đó.

b) Chứng minh rằng số tự nhiên $A=1.2.3.....2017.2018.\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{2017}+\dfrac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Bài 3. (*5.0 điểm*)

3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $c\geq a,\ c\geq b$ thì $c\geq a+b$.

3.2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$E=x^2+y^2+z^2.$$

Bài 4. (*4.0 điểm*) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM=x$ và $AN=y$. Chứng minh rằng:

a) $MN^2=x^2+y^2-xy$.

b) $MN=a-x-y$.

c) MN luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 5. (*3.0 điểm*) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là trực tâm của tam giác ABC và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Tính diện tích của tam giác ABC, biết $OM=HK=\dfrac{KM}{4}$ và $AM=30$ cm.

---------- ☙ **HẾT** ❧ ----------

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1. (*4.0 điểm*)

a) Thu gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}$.

Lời giải.

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}=1+\sqrt{2}$.

b) Cho $x=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}$. Tính giá trị của biểu thức $B=\left(1-2x+x^2+x^3-x^4\right)^{2018}$.

Lời giải.

Ta có: $x=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+1}+1}}=\dfrac{2}{\dfrac{2}{\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-1\right)\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+1\right)}}=\sqrt{2}$. Thay $x=\sqrt{2}$ vào biểu thức, ta được: $B=\left[1-2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3-\left(\sqrt{2}\right)^4\right]^{2018}=\left(1-2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}-4\right)^{2018}=(-1)^{2018}=1$.

c) Cho $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$C=x^3+y^3-3(x+y)+2018.$$

Lời giải.

- Ta có $x^3=\left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\right)^3=3+2\sqrt{2}+3.x+3-2\sqrt{2}=6+3x$

  và $y^3=\left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-22\sqrt{2}}\right)^3=17+12\sqrt{2}+3.y+17-12\sqrt{2}=34+3y$

- Cộng vế theo vế, ta được: $x^3+y^3=40+3x+3y \Leftrightarrow x^3+y^3-3(x+y)+2018=2058$.

➢ Vậy $C=2058$ khi $x=\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y=\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}}+\sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$.

Bài 2. (*4.0 điểm*)

a) Tìm các số nguyên dương có hai chữ số, biết số đó là bội của tích hai chữ số của chính số đó.

Lời giải.

Gọi số cần tìm là $\overline{ab}$, theo đề, ta có $10a+b=k.a.b$. (Trong đó: $1\le a,\ b\le 9$ và $a,\ b,\ k\in\mathbb{Z}^+$).

Suy ra $b=\dfrac{10}{\dfrac{k.a-1}{a}}=\dfrac{10}{k-\dfrac{1}{a}}$. Vì $1\le b\le 9\Rightarrow 1\le\dfrac{10}{k-\dfrac{1}{a}}\le 9\Leftrightarrow\dfrac{10}{9}\le k-\dfrac{1}{a}\le 10$.

Từ $\begin{cases}\dfrac{10}{9}\le k-\dfrac{1}{a}\le 10\\ 10 : k-\dfrac{1}{a}\in\mathbb{Z}^+\end{cases}\longrightarrow k-\dfrac{1}{a}\in\left\{\dfrac{5}{3};2;\dfrac{5}{2};5;10\right\}$.

- Nếu $k-\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{3}\Rightarrow\begin{cases}a.(3k-5)=3\\ b=6\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}a=1\\ k=\dfrac{8}{3}\\ b=6\end{cases}$ (không thỏa) hoặc $\begin{cases}a=3\\ k=2\\ b=6\end{cases}$ (thỏa) $\longrightarrow\overline{ab}=36$.

• Nếu $k-\frac{1}{a}=2 \Rightarrow \begin{cases} a.(k-2)=1 \\ b=5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=3 \\ b=5 \end{cases}$ (thỏa) $\longrightarrow \overline{ab}=15$.

• Nếu $k-\frac{1}{a}=\frac{5}{2} \Rightarrow \begin{cases} a.(2k-5)=2 \\ b=4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=\frac{7}{2} \\ b=4 \end{cases}$ (không thỏa) hoặc $\begin{cases} a=2 \\ k=3 \\ b=4 \end{cases}$ (thỏa) $\longrightarrow \overline{ab}=24$.

• Nếu $k-\frac{1}{a}=5 \Rightarrow \begin{cases} a.(k-5)=1 \\ b=2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=6 \\ b=2 \end{cases}$ (thỏa) $\longrightarrow \overline{ab}=12$.

• Nếu $k-\frac{1}{a}=10 \Rightarrow \begin{cases} a.(k-10)=1 \\ b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ k=11 \\ b=1 \end{cases}$ (thỏa) $\longrightarrow \overline{ab}=11$.

Vậy $\overline{ab} \in \{11;12;15;24;36\}$.

b) Chứng minh rằng số tự nhiên $A=1.2.3.....2017.2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Lời giải.

Ta có $B=1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ $(*)$ là số tự nhiên. Thật vậy

• Với $n=1$ thì $B=1 \in \mathbb{N} \longrightarrow (*)$ đúng.

• Với $n=2$ thì $B=3 \in \mathbb{N} \longrightarrow (*)$ đúng.

• Giả sử $(*)$ đúng khi $n=k$, nghĩa là $B=1.2.3.....k.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right) \in \mathbb{N}$.

• Cần chứng minh $(*)$ đúng khi $n=k+1$, nghĩa là $B=1.2.3.....(k+1).\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k+1}\right) \in \mathbb{N}$.

Ta có $1.2.3.....(k+1).\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k+1}\right)=1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right).(k+1)+1.2.3.....k$.

Có $\begin{cases} 1.2.3.....\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{k}\right) \in \mathbb{N} \\ k+1 \in \mathbb{N} \\ 1.2.3.....k \in \mathbb{N} \end{cases} \longrightarrow B \in \mathbb{N}$.

Vậy $1.2.3.....n.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)$ là số tự nhiên.

Suy ra, với $n=2k$ thì $1.2.3.....2k.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2k}\right)$ và $1.2.....k.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{k}\right)$ là các số tự nhiên

$\longrightarrow \left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+...+\frac{1}{2k}\right).(k+1)(k+2).....2k$ cũng là các số tự nhiên.

• Áp dụng các chứng minh ta có: $1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right)$ và $\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018$ cũng là các số tự nhiên.

Ta có $\begin{cases} 1011 \vdots 3 \\ 1342 \vdots 673 \end{cases} \longrightarrow 1010.1011.....1342.....2018 \vdots 2019$

$$\longrightarrow 1.2.....1009.\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{1009}\right).1010.1011.....1342.....2018 \vdots 2019.$$

Và $\begin{cases} 3 \vdots 3 \\ 673 \vdots 673 \end{cases} \longrightarrow 1.2.3.....673.....1009 \vdots 2019$

$$\longrightarrow 1.2.....1009.\left(\frac{1}{1010}+\frac{1}{1011}+...+\frac{1}{2018}\right).1010.1011.....2018 \vdots 2019.$$

➢ Vậy số tự nhiên $A = 1.2.3.....2017.2018.\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2017}+\frac{1}{2018}\right)$ chia hết cho 2019.

Bài 3. (*5.0 điểm*)

3.1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

a) Tính $a+b+c$, biết rằng $ab+bc+ca=9$.

Lời giải.

Từ $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \longrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=4(ab+bc+ca)$.

Mà $ab+bc+ca=9$ nên $(a+b+c)^2=36 \xrightarrow{a,\,b,\,c>0} a+b+c=6$.

b) Chứng minh rằng: Nếu $c \ge a, c \ge b$ thì $c \ge a+b$.

Lời giải.

Ta có $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \Leftrightarrow (c-a-b)^2=4ab$.

Không mất tính tổng quát, giả sử: $c \ge a \ge b$. Khi đó, ta có:

$(c-a-b)^2=4ab \ge 4b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c-a-b \ge 2b\ (1) \\ c-a-b \le 2b\ (2) \end{array}\right.$.

● $(1) \Rightarrow c-a-b>0 \longrightarrow c>a+b$.

● $(1) \Rightarrow c-a-b \le -2b \Leftrightarrow c-a+b \le 0\ (*)$, mà $c-a \ge 0$ suy ra $(*)$ vô lí.

➢ Vậy: nếu $c \ge a, c \ge b$ thì $c \ge a+b$.

3.2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$E=x^2+y^2+z^2.$$

Lời giải.

Cách 1.

● Áp dụng bất đẳng thức COSI ta có các đánh giá sau:

$+)\ x^{2019}+x^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017\ so\ 1} \ge 2019x^2$. Dấu "=" xảy ra khi $x=1$.

$+)\ y^{2019}+y^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017\ so\ 1} \ge 2019y^2$. Dấu "=" xảy ra khi $y=1$.

$+)\ z^{2019}+z^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017\ so\ 1} \ge 2019z^2$. Dấu "=" xảy ra khi $z=1$.

● Khi đó: $6\left(x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}\right)+6051 \ge 2019\left(x^2+y^2+z^2\right) \xrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3} x^2+y^2+z^2 \le 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

➢ Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x=y=z=1$.

Cách 2.

● Áp dụng bất đẳng thức COSI ta có các đánh giá sau:

$+)\ x^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{672\ so\ 1}\geq 673x^3$; $y^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{672\ so\ 1}\geq 673y^3$ và $z^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{672\ so\ 1}\geq 673z^3$

$+)\ x^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2018\ so\ 1}\geq 2019x$; $y^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2018\ so\ 1}\geq 2019y$ và $z^{2019}+\underbrace{1+1+1+...+1}_{2018\ so\ 1}\geq 2019z$

• Khi đó: $+)\ x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}+2016\geq 673\left(x^3+y^3+z^3\right)\xrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3}x^3+y^3+z^3\leq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

$+)\ x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}+6054\geq 2019(x+y+z)\xrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3}x+y+z\leq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=1$.

• Suy ra $6\geq x^3+x+y^3+y+z^3+z\overset{COSI}{\geq}2\left(x^2+y^2+z^2\right)\longrightarrow x^2+y^2+z^2\leq 3$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x^3=x\\ y^3=y\\ z^3=z\end{cases}\longrightarrow x=y=z=1$.

➢ Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x=y=z=1$.

Cách 3. (Sử dụng BĐT HOLDER)

• Áp dụng bất đẳng thức HOLDER, ta có

$\left(x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}\right)\left(x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}\right)3^{2017}\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2019}$

$\xleftrightarrow{x^{2019}+y^{2019}+z^{2019}=3}3^{2019}\geq\left(x^2+y^2+z^2\right)^{2019}\longrightarrow 3\geq x^2+y^2+z^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$.

➢ Vậy E đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x=y=z=1$.

Bài 4. (*4.0 điểm*) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1$. Đặt $AM=x$ và $AN=y$. Chứng minh rằng:

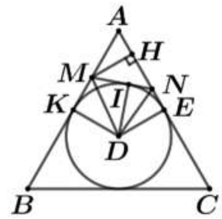
a) $MN^2=x^2+y^2-xy$.

b) $MN=a-x-y$.

c) MN luôn tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Lời giải.

• Vì $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{AM}{MB}=1-\dfrac{AN}{NC}\\ \dfrac{AN}{NC}=1-\dfrac{AM}{MB}\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\dfrac{AN}{NC}<1\\ \dfrac{AM}{MB}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<a-x\\ y<a-y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<\dfrac{a}{2}\\ y<\dfrac{a}{2}\end{cases}\longrightarrow x+y<a$.



Không mất tính tổng quát ta giả sử $AM\leq AN$. Kẻ $MH\perp AC$ như hình vẽ bên.

Khi đó, ta có $AH=AM.\cos 60^\circ=\dfrac{AM}{2}$.

a) Áp dụng định lí PYTAGO, ta có:

• $MN^2=MH^2+HN^2=AM^2-AH^2+(AN-AH)^2$

$=AM^2+AN^2-2AN.AH=AM^2+AN^2-AM.AN=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$.

➢ Vậy $MN^2=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$ (1)

b) Theo đề, ta có:

• $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1\Rightarrow\dfrac{AB}{MB}-1+\dfrac{AC}{NC}-1=1$

$\Rightarrow \dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a-y}=3 \Leftrightarrow a^2-a(x+y)+a^2=3a^2-3a(x+y)+3xy \longrightarrow a^2-2a(x+y)=-3xy\ (2)$

Thay (2) vào (1) ta được: $MN^2=(x+y)^2-2a(x+y)+a^2 \Leftrightarrow (x+y)^2-2a(x+y)+a^2=(a-x-y)^2$

➢ Vậy $MN=|a-x-y|=a-x-y$ (vì $x+y<a$).

c) Gọi K, E lần lượt là trung điểm của AB, AC.

D là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC.

Kẻ $DI \perp MN\ (I \in MN)$. Khi đó ta dễ dàng tính được: $DK=DE=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$; $MK=\dfrac{a}{2}-x$; $NE=\dfrac{a}{2}-y$.

Ta có $KM+NE=\dfrac{a}{2}-x+\dfrac{a}{2}-y=MN$ và $(2) \Leftrightarrow ax+ay-3xy=a(a-x-y)$.

- $S_{\Delta DMN}=2S_{\Delta AKD}-S_{\Delta MKD}-S_{\Delta NED}-S_{\Delta AMN}=DK.AK-\dfrac{KD.MK}{2}-\dfrac{KE.NE}{2}-\dfrac{AH.AN}{2}$

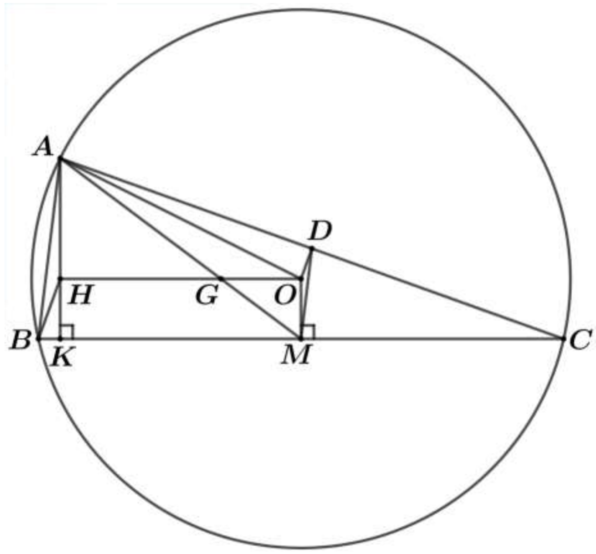
$=DK.AK-\dfrac{DK.MN}{2}-\dfrac{AH.AN}{4}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}-\dfrac{a\sqrt{3}}{12}.(a-x-y)-\dfrac{x\sqrt{3}y}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\left[a^2-a(a-x-y)-3xy\right]=\dfrac{\sqrt{3}}{12}[ax+ay-3xy]=\dfrac{a\sqrt{3}}{12}.(a-x-y)=\dfrac{DK.MN}{2}$.

➢ Do đó $\dfrac{DI.MN}{2}=\dfrac{DK.MN}{2} \longrightarrow DI=DK$. Suy ra DI là bán kính đường tròn nội tiếp, mà $MN \perp DI \longrightarrow MN$ là tiếp tuyến của đường tròn.

Bài 5. (*3.0 điểm*) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của cạnh BC, H là trực tâm của tam giác ABC và K là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Tính diện tích của tam giác ABC, biết $OM=HK=\dfrac{KM}{4}$ và $AM=30$ cm.

Lời giải.



- Gọi D là trung điểm của AC.

Ta chứng minh được $\Delta AHB \backsim \Delta MOD$ (3 cặp cạnh song song)

$\Rightarrow \dfrac{AH}{OM}=\dfrac{AB}{MD}=2 \longrightarrow HG=2OG$.

- Gọi G là giao điểm của AM và OH. Ta chứng minh được $\Delta AGH \backsim \Delta MGO\ (g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{AG}{GM}=\dfrac{HG}{GO}=\dfrac{AH}{OM}=2 \longrightarrow AH=2OM$.

- Dễ dàng chứng minh được tứ giác $IMKH$ là hình chữ nhật (hình bình hành có 1 góc vuông).

$\Rightarrow HO=KM \longrightarrow HO=4OM$, suy ra $3OG=4OM$.

- Áp dụng định lý PYTAGO trong tam giác vuông OGM, ta có:

$OM^2+OG^2=GM^2 \Leftrightarrow OM^2+\dfrac{16}{9}OM^2=\dfrac{AM^2}{9} \Leftrightarrow 5OM=AM \longrightarrow OM=6$ cm.

Khi đó $OH=24$ cm; $AH=12$ cm; $AK=18$ cm.

Ta có $OC=OA=\sqrt{OH^2+AH^2}=12\sqrt{5}$, từ đó tính được $BC=2MC=2\sqrt{OC^2-OM^2}=12\sqrt{19}$.

➢ Vậy $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AK.BC}{2}=\dfrac{18.12\sqrt{19}}{2}=108\sqrt{19}\ (\text{cm}^2)$.

Mọi sự góp ý, xin nhắn tin đến https://www.facebook.com/lehong.quoc.12

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN LAI VUNG	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2018 – 2019**
ĐỀ CHÍNH THỨC	**MÔN THI: TOÁN** ***Thời gian làm bài: 150 phút*** ***Ngày thi: 25/11/2018***

Họ và tên thí sinh:... Số báo danh:..............................

Chữ ký của giám thị 1:...................... Chữ ký của giám thị 2:............................

NỘI DUNG ĐỀ THI

(Đề thi có 02 trang, gồm 5 câu)

Câu I *(4,0 điểm)*

1. Tính $A = (\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})(\sqrt{2} + 10\sqrt{0,2})$

2. Tìm các số tự nhiên n sao cho $B = n^2+2n+18$ là số chính phương.

3. Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu a chia cho 13 dư 2 và b chia cho 13 dư 3 thì $a^2 + b^2$ chia hết cho 13.

Câu II *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức $C = \dfrac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \dfrac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức C.

2. a) Chứng minh $\sqrt{x^4 + 1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}(x^2 + 4)$ với mọi số thực x. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

b) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \sqrt{a^4+1} + \sqrt{b^4+1}$.

Câu III *(4,0 điểm)*

1. Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 2x^3 = 4x + 4$

b) $\dfrac{1}{x^2} + \sqrt{x + 2} = \dfrac{1}{x} + \sqrt{2x + 1}$

2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

An dự định đi từ A đến B bằng xe đạp điện trong khoảng thời gian nhất định. Nếu An đi với vận tốc 20 km/h thì đến B sớm 12 phút. Nếu An đi với vận tốc 12 km/h thì đến B trễ 20 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu của An.

Câu IV *(4,0 điểm)*

1. Cho hình vuông ABCD và điểm M thuộc cạnh BC (M khác B, C). Một đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt CD tại N.

a) Chứng minh BM = DN.

b) Tính tỉ số $\frac{AM}{MN}$.

2. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên tia đối tia AH lấy điểm D sao cho AD = BC. Tại B kẻ BE $\perp$ AB sao cho BE = AB (E và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau từ bờ là AB). Tại C kẻ CF $\perp$ AC sao cho CF = AC (F và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau từ bờ là AC). Chứng minh rằng ba đường thẳng DH, BF và CE đồng quy.

Câu V *(4,0 điểm)*

Cho đường tròn (O ; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ một điểm M di động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A, vẽ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm). Đường thẳng chứa đường kính của đường tròn song song với EF cắt ME, MF lần lượt tại C và D. Dây EF cắt OM tại H, cắt OA tại B.

1. Chứng minh rằng: OA.OB không đổi.

2. Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đường thẳng d.

3. Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích của ΔHBO lớn nhất.

--- HẾT ---

Lưu ý: *Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.*

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN LAI VUNG	HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ THANG ĐIỂM KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 2018 – 2019 MÔN: TOÁN
Hướng dẫn chấm gồm 04 trang	

I. HƯỚNG DẪN CHUNG:

1. Học sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng, chính xác, chặt chẽ thì cho đủ số điểm của câu đó.

2. Việc chi tiết hóa (nếu có) thang điểm trong hướng dẫn chấm phải đảm bảo không làm sai lệch hướng dẫn chấm và phải được thống nhất thực hiện trong tổ chấm thi.

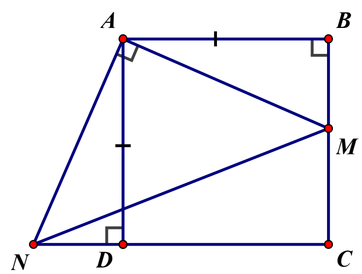
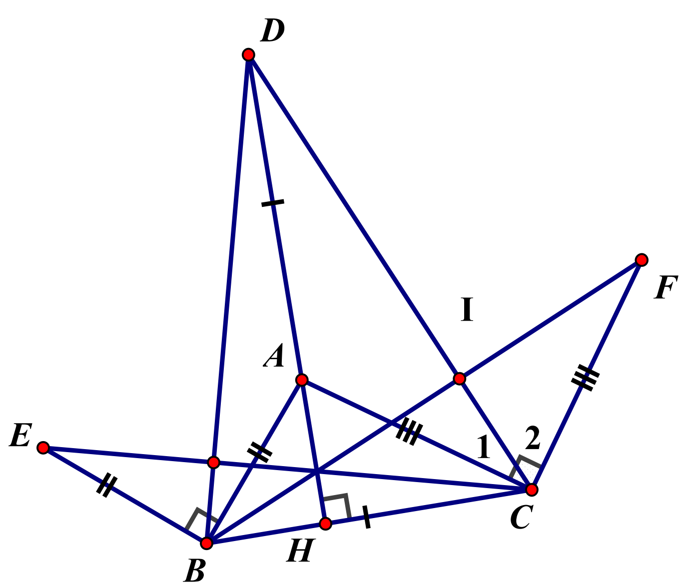
3. Điểm toàn bài tính theo thang điểm 20, làm tròn số đến 0,25 điểm.

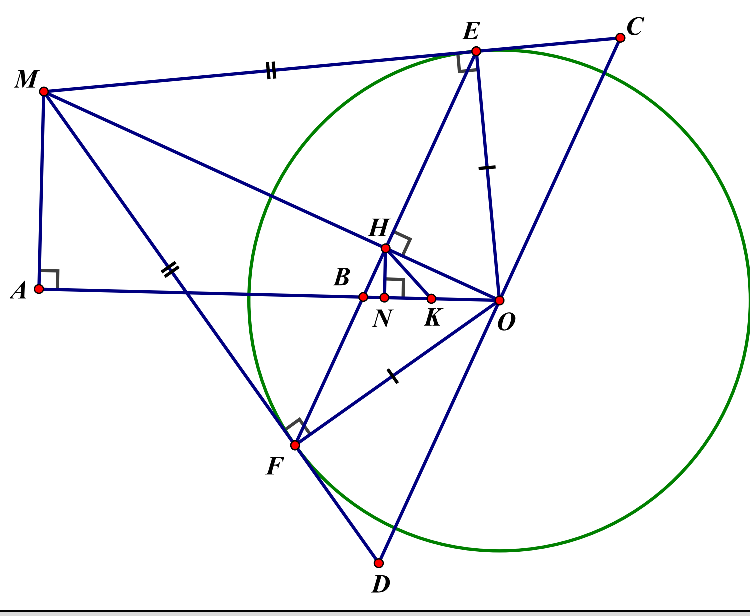
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Nội dung	Điểm
Câu I	4,0
1. Tính A= $(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(\sqrt{2}+10\sqrt{0,2})$	1,0
$A=(\sqrt{8}-3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(\sqrt{2}+10\sqrt{0,2})$	
$=(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{20})$	0,25
$=(2\sqrt{5}-\sqrt{2})(2\sqrt{5}+\sqrt{2})$	0,25
$=(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2$	0,25
$= 20 - 2 = 18$	0,25
2. Tìm các số tự nhiên n sao cho B = $n^2+2n+18$ là số chính phương.	1,5
Đặt $n^2+2n+18=a^2$ $(a\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N})$	0,25
$\Leftrightarrow a^2-(n+1)^2=17$	0,25
$\Leftrightarrow (a+n+1)(a-n-1)=17$	0,25
Vì $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ nên $(a+n+1)>(a-n-1)$; 17 là số nguyên tố.	0,25
Suy ra: $a+n+1=17$ (*) và $a-n-1=1$ hay $a=n+2$	0,25
Thay $a=n+2$ vào (*) tính được n = 7	0,25
3. Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu a chia cho 13 dư 2 và b chia cho 13 dư 3 thì a^2+b^2 chia hết cho 13.	1,5
Do: a chia cho 13 dư 2 nên a=13x+2 $(x\in\mathbb{Z})$	0,25
b chia cho 13 dư 3 nên b=13y+3 $(y\in\mathbb{Z})$	0,25
Suy ra: $a^2+b^2=(13x+2)^2+(13y+3)^2$	0,25
$=169x^2+52x+4+169y^2+78y+9$	0,25
$=13(13x^2+4x+13y^2+6y+1)=13.K \,\vdots\, 13$	0,25
Vậy: a^2+b^2 chia hết cho 13 (đpcm)	0,25

Nội dung	Điểm
Câu II	**4,0**
1. Cho biểu thức $C = \dfrac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \dfrac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \dfrac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$. Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức C.	**2,0**
$C = \dfrac{x\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \dfrac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$	0,25
Điều kiện xác định: $x \geq 0$ và $x \neq 9$	0,25
$C = \dfrac{x\sqrt{x}-3 - 2(\sqrt{x}-3)^2 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
$= \dfrac{x\sqrt{x}-3 - 2x+12\sqrt{x} - 18 - x - 4\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
$= \dfrac{x\sqrt{x} - 3x + 8\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
$= \dfrac{x(\sqrt{x} - 3) + 8(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
$= \dfrac{(\sqrt{x} - 3)(x + 8)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
$= \dfrac{x + 8}{\sqrt{x}+1)}$	0,25
2a) Chứng minh $\sqrt{x^4 + 1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}(x^2 + 4)$ với mọi số thực x.	1,0
Ta có $\sqrt{x^4+1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}(x^2+4) > 0 \quad \Leftrightarrow \; 17(x^4+1) \geq (x^2+4)^2 > 0$	0,25
Mà $17(x^4+1) - (x^2+4)^2 = (4x^2-1)^2 \geq 0$ với mọi x	0,25
Vậy $17(x^4+1) \geq (x^2+4)^2$ hay $\sqrt{x^4+1} \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}(x^2+4)$	0,25
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = \pm\dfrac{1}{2}$	0,25
2b) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \sqrt{a^4+1} + \sqrt{b^4+1}$.	1,0
Áp dụng kết quả câu 2a) ta có $D \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}(a^2 + b^2 + 8)$	0,25
Mà $a^2 + b^2 \geq \dfrac{1}{2}$ Suy ra $D \geq \dfrac{1}{\sqrt{17}}(\dfrac{1}{2} + 8) = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$	0,25
Vậy GTNN của D là $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ khi $a = b = \dfrac{1}{2}$	0,25- 0,25

Nội dung	Điểm
Câu III	4,0
1a) Giải phương trình: $x^4 + 2x^3 = 4x + 4$ (1)	1,0
$(1) \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2 + 4x + 4$	0,25
$\Leftrightarrow x^2(x+1)^2 = (x+2)^2$	0,25
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x+1) = x+2 \\ x(x+1) = -(x+2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 2 \\ x^2 + 2x + 2 = 0 \end{array}\right.$ (2)	0,25
$\forall x \in \mathbb{R}$ thì $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1 > 0$ nên từ (2) suy ra phương trình đã cho có nghiệm $x = \pm\sqrt{2}$	0,25
1b) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2} + \sqrt{x+2} = \frac{1}{x} + \sqrt{2x+1}$ (3)	1,5
Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ 2x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
$(3) \Leftrightarrow 1 + x^2\sqrt{x+2} = x + x^2\sqrt{2x+1}$	0,25
$\Leftrightarrow (1-x) + x^2(\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+1}) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (1-x) + x^2\frac{1-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1}} = 0$	0,25
$\Leftrightarrow (1-x)\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1}}\right) = 0$ (4)	0,25
Do $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$, do đó $1 + \frac{x^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+1}} > 0$ nên từ (4) suy ra phương trình đã cho có nghiệm x = 1 (thỏa điều kiện xác định).	0,25
2) Giải bài toán bằng cách lập phương trình: An dự định đi từ A đến B bằng xe đạp điện trong khoảng thời gian nhất định. Nếu An đi với vận tốc 20 km/h thì đến B sớm 12 phút. Nếu An đi với vận tốc 12 km/h thì đến B trễ 20 phút. Tính quãng đường AB và thời gian dự định đi lúc đầu của An.	1,5
Gọi x (giờ) là thời gian dự định đi lúc đầu (x>0).	0,25
Theo đề bài có phương trình: $20(x - \frac{1}{5}) = 12(x + \frac{1}{3})$	0,5
$\Leftrightarrow 20x - 4 = 12x + 4 \Leftrightarrow 8x = 8 \Leftrightarrow x = 1$ (nhận)	0,25
Vậy: Thời gian dự định là 1 (giờ) Quãng đường AB dài: $20.(1 - \frac{1}{5}) = 20.(\frac{4}{5}) = 16$ (km)	0,5

Nội dung	Điểm
Câu IV	**4,0**
1. Cho hình vuông ABCD và điểm M thuộc cạnh BC (M khác B, C). Một đường thẳng đi qua A và vuông góc với AM cắt CD tại N.	2,0
	
a) Chứng minh BM = DN.	1,0
ΔABM và ΔADN có: AB=AD; $\widehat{ABM}=\widehat{ADN}=90^0$; $\widehat{BAM}=\widehat{DAN}=90^0-\widehat{MAD}$	0,5
Nên $\Delta ABM=\Delta ADN$. Suy ra: BM=DN	0,5
b) Tính tỉ số $\frac{AM}{MN}$.	1,0
Vì ΔABM = ΔADN, suy ra AM = AN hay ΔAMN vuông cân tại A.	0,5
Do đó: $\frac{AM}{MN}=\frac{\sqrt{AM^2}}{\sqrt{MN^2}}=\frac{\sqrt{AM^2}}{\sqrt{AN^2+AM^2}}=\frac{\sqrt{AM^2}}{\sqrt{2AM^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
2. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Trên tia đối tia AH lấy điểm D sao cho AD = BC. Tại B kẻ BE $\perp$ AB sao cho BE = AB (E và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau từ bờ là AB). Tại C kẻ CF $\perp$ AC sao cho CF = AC (F và B thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau từ bờ là AC). Chứng minh rằng ba đường thẳng DH, BF và CE đồng quy.	2,0
	

Nội dung	Điểm
Δ DAC và Δ BCF có: DA= BC (gt) ; AC = CF (gt) ; $\widehat{DAC} = \widehat{BCF} = 90^0 + \widehat{ACH}$	0,5
Nên Δ DAC = Δ BCF. Suy ra $\widehat{C_1} = \widehat{F}$ Mà $\widehat{C_1} + \widehat{C_2} = 90^0$ (gt). Suy ra $\hat{F} + \widehat{C_2} = 90^0$	0,5
Gọi I là giao điểm của BF và DC. Trong Δ CIF có $\hat{F} + \widehat{C_2} = 90^0$. Suy ra $\widehat{CIF} = 90^0$ hay DC $\perp$ BF	0,5
Chứng minh tương tự ta được DB $\perp$ CE	0,25
Trong Δ DBC có DH, CE, BF là các đường cao nên chúng đồng quy.	0,25
Câu V	**4,0**
Cho đường tròn (O;R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Từ một điểm M di động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A, vẽ các tiếp tuyến ME, MF với đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm). Đường thẳng chứa đường kính của đường tròn song song với EF cắt ME, MF lần lượt tại C và D. Dây EF cắt OM tại H, cắt OA tại B.	
	
1. Chứng minh rằng OA.OB không đổi.	2,0
Ta có: $\begin{cases} OE = OF (= R) \\ ME = MF \end{cases} \Rightarrow$ OM là trung trực của $EF \Rightarrow OM \perp EF$	0,5
$\Delta HOB \sim \Delta AOM \Rightarrow \dfrac{OB}{OM} = \dfrac{OH}{OA} \Rightarrow OA.OB = OH.OM$ (1)	0,5
ΔEOM vuông tại E, đường cao EH nên $OE^2 = OH.OM$ (2)	0,5
Từ (1), (2) suy ra: $OA.OB = OE^2 = R^2$ (không đổi)	0,5

Nội dung	Điểm
2. Chứng minh EF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đường thẳng d.	1,0
Vì $OA.OB = R^2 \Rightarrow OB = \frac{R^2}{OA}$ mà R không đổi, OA không đổi do đó OB không đổi mà O cố định nên B cố định .	0,5
Vậy khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì EF luôn đi qua điểm cố định B.	0,5
3. Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích của ΔHBO lớn nhất.	1,0
Gọi K là trung điểm của OB, mà ΔBHO vuông tại H nên ta có HK=$\frac{BO}{2}$ Do OB không đổi nên HK không đổi.	0,25
Kẻ $HN \perp BO$, ta có $S_{\Delta BHO} = \frac{HN.BO}{2}$ Vì BO không đổi, nên $S_{\Delta HBO}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ HN lớn nhất.	0,25
Mà $HN \le HK$, dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow N \equiv K$.	0,25
Vậy S_{HBO} lớn nhất $\Leftrightarrow$ ΔHBO vuông cân tại H. $\Leftrightarrow$ MO tạo với OA một góc 45^0	0,25

---Hết---

PHÒNG GD&ĐT TAM DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2018-2019
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
*Đề thi này gồm **01** trang*

Chú ý: Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1. *(3,0 điểm)* Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$.

Tìm x để P có giá trị bằng 2.

Câu 2. *(2,0 điểm)* Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$ và $a+b+c=abc$ thì: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=2$.

Câu 3. *(2,0 điểm)* Tính tổng: $S = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + ... + \sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}$

Câu 4. *(2,0 điểm)* Giải phương trình: $x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$

Câu 5. *(1,0 điểm)* Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

$$3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n \,\vdots\, 10$$

Câu 6. *(2,0 điểm)* Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^2+xy-2017x-2018y-2019=0$$

Câu 7. *(1,0 điểm)* Cho m, n là các số tự nhiên và p là số nguyên tố thoả mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p}$. Chứng minh rằng khi đó $n + 2$ là một số chính phương.

Câu 8. *(2,0 điểm)* Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}$

Câu 9. *(3,0 điểm)* Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O. Goïi M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $BE = CM$.

a) Chứng minh rằng: ΔOEM vuông cân.

b) Chứng minh: ME song song với BN.

c) Từ C kẻ CH vuông góc với BN tại H. Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng.

Câu 10. *(2,0 điểm)* Cần dùng ít nhất bao nhiêu tấm bìa hình tròn có bán kính bằng 1 để phủ kín một tam giác đều có cạnh bằng 3, với giả thiết không được cắt các tấm bìa?

==== HẾT ====

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ tên thí sinh..SBD:......................Phòng thi...............

PHÒNG GD&ĐT TAM DƯƠNG **HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HSG LỚP 9**

Năm học: 2018 – 2019

Môn Toán

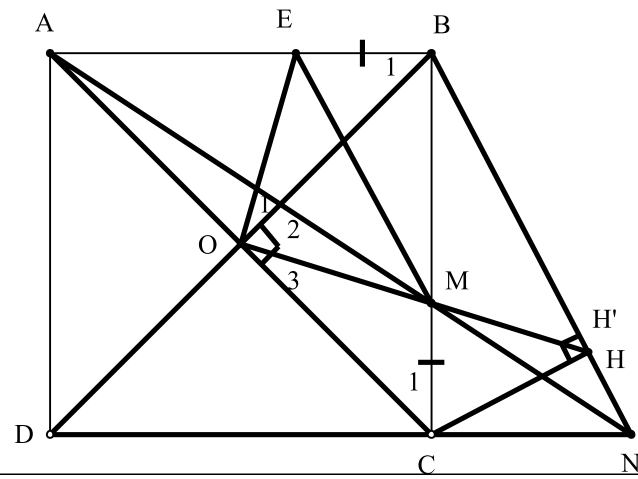
Hướng dẫn chung:

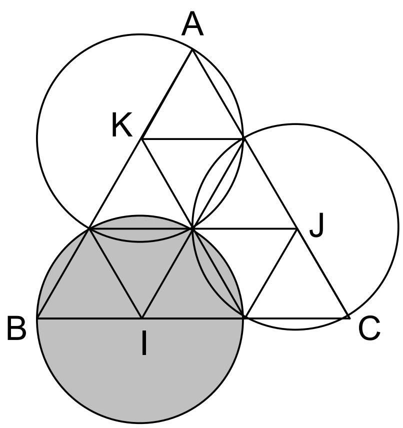
-Học sinh giải theo cách khác mà đúng, đảm bảo tính lôgic, khoa học thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa.

-Các câu hình học, học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai phần nào không chấm điểm phần đó.

Câu	Nội dung	Điểm
1	Biểu thức có nghĩa khi $x \ge 0; x \ne 4$	0,25
	$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
	$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
	$= \frac{x+3\sqrt{x}+2+2x-4\sqrt{x}-2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,5
	$= \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
	$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
	$= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$	0,25
	Do đó: P= 2 $\Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (t/m)	1
2	Từ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = 4$	0,25
	$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) = 4$	0,25
	$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right) = 4$ (*)	0,25
	mà a + b + c = abc	0,25
	$\Rightarrow \frac{a+b+c}{abc} = 1$	0,25
	Nên từ (*)$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2 = 4$	0,25
	$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = 2$	0,5
3	Với $\forall\, n \in N^*$ ta có: $1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}$	0,25
		0,25

	$=\dfrac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{n^2(n+1)^2}$ $=\dfrac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}=\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)^2$ Suy ra $\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}}=1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ (do $1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}>0\ \forall\ n\in \mathbb{N}^*$) Áp dụng kết quả trên với n = 1; 2;……….. ;2019 ta có: $S=\left(1+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+......+\left(1+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}\right)$ $=2019-\dfrac{1}{2019}=2018\dfrac{2018}{2019}$	0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
4	Điều kiện : $x \geq -1$ Đặt $t=\sqrt{x+1}$ (ĐK: $t\geq 0$) $\Leftrightarrow$ $x=t^2-1$ Phương trình đã cho trở thành : $t^4-t^2+12t-36=0$ $\Leftrightarrow t^4-(t-6)^2=0$ $\Leftrightarrow (t-2)(t+3)(t^2-t+6)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t-2=0 \\ t+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2\ (t/m) \\ t=-3<0\ \text{(loai)} \end{array}\right.$ (Vì $t^2-t+6=(t-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{23}{4}>0$ với $\forall$ t) Với $t=2 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn) Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=3$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
5	Chứng minh: $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n \vdots 10$ với mọi n nguyên dương Ta có: $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n=(3^{n+2}+3^n)-(2^{n+2}+2^n)$ $=3^n(3^2+1)-2^{n-1}(2^3+2)$ $=3^n.10-2^{n-1}.10$ $=(3^n-2^{n-1}).10 \vdots 10$ với mọi n nguyên dương	0,5 0,5
6	Ta có: $x^2+xy-2017x-2018y-2019=0$ $\Leftrightarrow x^2+xy+x-2018x-2018y-2018=1$ $\Leftrightarrow x(x+y+1)-2018(x+y+1)=1$ $\Leftrightarrow (x-2018)(x+y+1)=1$ Vì 1=1.1=(-1).(-1) nên ta có 2 TH sau: TH 1: $\begin{cases} x-2018=1 \\ x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2019 \\ y=-2019 \end{cases}$ TH 2: $\begin{cases} x-2018=-1 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2017 \\ y=-2019 \end{cases}$ KL: PT có 2 nghiệm nguyên (x;y) là: (2019;-2019) và (2017;-2019)	0,5 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
7	Theo bài ra: $\dfrac{p}{m-1}=\dfrac{m+n}{p} \Leftrightarrow p^2=(m-1)(m+n)$. Vì m, n là các số tự nhiên nên $m+n>m-1$ Mặt khác p là số nguyên tố nên chỉ có 2 trường hợp: $p^2=1.p^2=p.p$	0,25 0,25

<table>
<tr><td></td><td>Do đó suy ra: $\begin{cases} m-1=1 \\ m+n=p^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m+n=p^2 \end{cases} \Rightarrow\ n+2=p^2$.
Vì p là số nguyên tố nên n+2 là số chính phương. Vậy có đpcm.</td><td>0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>8</td><td>Vì $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ nên $b=\frac{2ac}{a+c}$
Do đó: $\frac{a+b}{2a-b}=\frac{a+\frac{2ac}{a+c}}{2a-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{a^2+3ac}{2a^2}=\frac{a+3c}{2a}$
Và: $\frac{c+b}{2c-b}=\frac{c+\frac{2ac}{a+c}}{2c-\frac{2ac}{a+c}}=\frac{c^2+3ac}{2c^2}=\frac{c+3a}{2c}$
Suy ra: $P=\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}=\frac{a+3c}{2a}+\frac{c+3a}{2c}=\frac{ac+3c^2+ac+3a^2}{2ac}$
$=\frac{3\left(a^2+c^2\right)+2ac}{2ac}\ge\frac{3.2ac+2ac}{2ac}=\frac{8ac}{2ac}=4$
Vậy $P\ge 4$ với mọi a, b, c thỏa mãn đề bài. Dấu bằng xẩy ra khi: $a=b=c$
Vậy GTNN của P là 4 khi $a=b=c$</td><td>0,25
0,25
0,25
0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">9</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>a) Xét ΔOEB và ΔOMC, ta có:
OB = OC(vì ABCD là hình vuông).
$\widehat{B}_1=\widehat{C}_1=45^O$
BE = CM (gt)
Suy ra ΔOEB = ΔOMC (c.g.c)
$\Rightarrow$ OE = OM và $\widehat{O}_1=\widehat{O}_3$
Lại có $\widehat{O}_2+\widehat{O}_3=\widehat{BOC}=90^O$ (vì tứ giác ABCD là hình vuông)
$\Rightarrow\ \widehat{O}_2+\widehat{O}_1=90^0 \Leftrightarrow \widehat{EOM}=90^O$ kết hợp với OE = OM $\Rightarrow$ΔOEM vuông cân tại O.</td><td>0,25
0,25
0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>b) Vì AB // CD $\Rightarrow$ AB // CN $\Rightarrow \frac{AM}{MN}=\frac{BM}{MC}$ (Theo ĐL Ta- lét) (*)
Mà BE = CM (gt) và AB = BC $\Rightarrow$ AE = BM thay vào (*)
Ta có : $\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{EB}$
$\Rightarrow$ ME // BN (theo ĐL Ta-lét đảo)</td><td>0,25
0,25
0,25
0,25</td></tr>
<tr><td>c) Gọi H’ là giao điểm của OM và BN</td><td></td></tr>
</table>

	Từ ME // BN $\Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{OH'B}$ (cặp góc đồng vị) Mà $\widehat{OME} = 45^{O}$ vì ΔOEM vuông cân tại O $\Rightarrow \widehat{MH'B} = 45^{O} = \widehat{C_1} \Rightarrow \Delta OMC \backsim \Delta BMH'$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{MC}{MH'}$, kết hợp với $\widehat{OMB} = \widehat{CMH'}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta OMB \backsim \Delta CMH'$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MH'C} = \widehat{OBM} = 45^{O}$ Vậy $\widehat{BH'C} = \widehat{BH'M} + \widehat{MH'C} = 90^{O} \Rightarrow CH' \perp BN$ tại H' Mà CH cũng vuông góc với BN tại H $\Rightarrow$ H $\equiv$ H' hay ba điểm O, M, H thẳng hàng (đpcm).	0,25 0,25 0,25 0,25
10	 Giả sử ΔABC là tam giác đều có cạnh bằng 3. Chia mỗi cạnh tam giác ABC thành ba phần bằng nhau. Nối các điểm chia bởi các đoạn thẳng song song với các cạnh. Tam giác ABC được chia thành 9 tam giác đều có cạnh bằng 1 như hình vẽ. Gọi I, J, K lần lượt là 3 điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho BI = CJ = AK = 1. Ba đường tròn bán kính 1, tâm tương ứng là I, J, K sẽ phủ kín được tam giác ABC (mỗi hình tròn sẽ phủ kín được ba tam đều cạnh 1). Như vậy dùng ba tấm bìa hình tròn bán kính 1 sẽ phủ kín được tam giác ABC. * Số tấm bìa ít nhất phải dùng là 3, vì nếu ngược lại sẽ có hai trong ba đỉnh của tam giác ABC cùng thuộc một hình tròn bán kính 1. Điều này không thể xảy ra do cạnh của tam giác ABC bằng 3.	0,5 0,5 0,5 0,5

----------Hết---------

PHÒNG GD&ĐT THẠCH HÀ

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn thi: Toán 9
(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. *(4,5 điểm)*

1. Tính giá trị biểu thức $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$

2. Tìm điều kiện xác định của các biểu thức sau:

$$M=\frac{2018}{\sqrt{x^2-2x-3}} \qquad N=\frac{-2019}{\sqrt{x-\sqrt{2x+3}}}$$

Câu 2. *(3,0 điểm)*

1. Cho 3 số *a, b,c* khác 0, thỏa mãn $a+b+c=0$. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\left|\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right|$$

2. Tính giá trị của biểu thức: $B=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+....+\sqrt{1+\frac{1}{2018^2}+\frac{1}{2019^2}}$

Câu 3. *(4,5 điểm)*

1. Cho đa thức f(x), tìm dư của phép chia f(x) cho (x-1)(x+2). Biết rằng f(x) chia cho x - 1 dư 7 và f(x) chia cho x + 2 dư 1.

2. Giải phương trình: $x^3-3x^2+2x+6=0$

3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $5x^2+y^2=17-2xy$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của tam giác. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$

b) $\frac{1}{a+b};\ \frac{1}{b+c};\ \frac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác.

Câu 5. *(5,0 điểm)*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, trung tuyến AM, phân giác AI. Tính HI, IM; biết rằng AC= 4/3AB và diện tích tam giác ABC là 24 cm^2

2. Qua điểm O nằm trong tam giác ABC ta vẽ 3 đường thẳng song song với 3 cạnh tam giác. Đường thẳng song song với cạnh AB cắt cạnh AC, BC lần lượt tại E và D; đường thẳng song song với cạnh BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại M và N; đường thẳng song song với cạnh AC cắt cạnh AB và BC lần lượt tại F và H. Biết diện tích các tam giác ODH, ONE, OMF lần lượt là a^2, b^2, c^2.

a) Tính diện tích S của tam giác ABC theo *a, b, c*

b) Chứng minh $S\le 3(a^2+b^2+c^2)$

-----------------*Hết*-----------------

Họ và tên học sinh:…………………………………………………SBD:…………

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm, học sinh không được sử dụng máy tính bỏ túi)

SƠ LƯỢC GIẢI
Đề thi chọn HSG cấp huyện năm học 2018 – 2019
Môn: TOÁN 9

Đáp án
Ta có $A=\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=\sqrt{4+\sqrt{15}}\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}\right).\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)$
$A=\sqrt{4+\sqrt{15}}.1.\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=\sqrt{8+2\sqrt{15}}.\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$
$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right).\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)=5-3=2$
Điều kiện xác định của M là $x^2-2x-3>0$
$\Leftrightarrow (x+1)(x-3>0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x+1<0 \\ x-3<0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$
Điều kiện xác định của N là $\begin{cases} 2x+3\ge 0 \\ x-\sqrt{2x+3}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\sqrt{2x+3}\ge 0$ (*)
$\Leftrightarrow x^2>2x+3 \Leftrightarrow x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-1 \end{array}\right.$ (**)
Từ (*) và (**) ta được $x>3$ là điều kiện xác định của M
Ta có: $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{bc}\right)$
$=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+2\left(\dfrac{c}{abc}+\dfrac{a}{abc}+\dfrac{b}{abc}\right)=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}+\dfrac{2(a+b+c)}{abc}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$
Vậy $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\left\|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right\|$
Theo câu a) Ta có $\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}}=\left\|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right\|=\left\|\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a+b}\right\|$ (*) Áp dụng (*) ta có: $\sqrt{1+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{(-2)^2}}=\left\|\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{(-2)}\right\|=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}$ (Vì $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}>0$)
Tượng tự $\sqrt{1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$; $\sqrt{1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$;….
$\sqrt{1+\dfrac{1}{2018^2}+\dfrac{1}{2019^2}}=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}$
Suy ra $B=2019-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{4076360}{2019}$
$x^3-3x^2+2x+6=0$ $\Leftrightarrow (x+1)(x^2-4x+6)=0$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$ (1) hoặc $x^2 - 4x + 6 = 0$ (2)

(1) $\Leftrightarrow x = -1$

(2) $\Leftrightarrow (x-2)^2 + 2 = 0$. Do $(x-2)^2 + 2 \neq 0 \ \forall x$ nên pt này vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1\}$

Vì $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ là đa thức bậc 2 nên f(x) : $(x-1)(x+2)$ có đa thức dư dạng ax + b

Đặt $f(x) = (x-1)(x+2).q(x) + ax + b$

Theo đề ra f(x) : (x - 1) dư 7 $\Rightarrow$ $f(1) = 7 \Leftrightarrow a + b = 7$ (1)

f(x) : (x + 2) dư 1 $\Rightarrow$ $f(-2) = 1 \Leftrightarrow -2a + b = 1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ a = 2 và b = 5.

Vậy f(x) : $[(x-1)(x+2)]$ được dư là 2x + 5

$5x^2 + y^2 = 17 - 2xy \Leftrightarrow 4x^2 + (x + y)^2 = 17$

$\Rightarrow 4x^2 \le 17 \Rightarrow x^2 \le \dfrac{17}{4}$ vì x^2 là số chính phương nên x^2 = 0; 1; 4

Nếu $x^2 = 0 \Rightarrow (x + y)^2 = 17$ (loại)

Nếu $x^2 = 1 \Rightarrow (x + y)^2 = 13$ (loại)

Nếu $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$

$x = 2 \Rightarrow (2 + y)^2 = 1 \Rightarrow y = -3$ hoặc $y = -1$.

$x = -2 \Rightarrow (-2 + y)^2 = 1 \Rightarrow y = 3$ hoặc $y = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm : (x; y) = (2; -3), (2; -1), (-2; 3), (-2; 1)

Vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác nên b + c > a

$\Leftrightarrow a(b+c) > a^2 \Leftrightarrow a(b+c) + ab + ac > a^2 + ab + ac$

$\Leftrightarrow 2a(b+c) > a(a+b+c) \Leftrightarrow \dfrac{a}{b+c} < \dfrac{2a}{a+b+c}$

Tượng tự ta cũng có: $\dfrac{b}{c+a} < \dfrac{2b}{a+b+c}$; $\dfrac{c}{b+a} < \dfrac{2c}{a+b+c}$

Suy ra: $\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} < \dfrac{2a}{a+b+c} + \dfrac{2b}{b+c+a} + \dfrac{2c}{a+b+c} = 2 \ (dpcm)$

Ta có a + b > c

$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{1}{b+c+a} + \frac{1}{c+a+b} = \frac{2}{a+b+c} > \frac{2}{(a+b)+(a+b)} = \frac{1}{a+b}$$

Chứng minh tương tự ta có $\dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b} > \dfrac{1}{b+c}$; $\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{b+c} > \dfrac{1}{c+a}$

Vậy $\dfrac{1}{a+b}$; $\dfrac{1}{b+c}$; $\dfrac{1}{c+a}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác *(Đpcm)*

Do AC= ¾ AB (gt) và AB.AC = 2S = 48, suy ra AC = 6 (cm); AB = 8(cm).

Áp dụng định lí Pitago trong tam giác vuông ABC ta tính được BC = 10 cm, suy ra AM = 5 (cm) (1)

Áp dụng tính chất giữa canh và đường cao trong tam giác vuông ABC ta tính được

$\mathrm{BH} = \dfrac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{BC}} = 3{,}6(\mathrm{cm})$ (2)

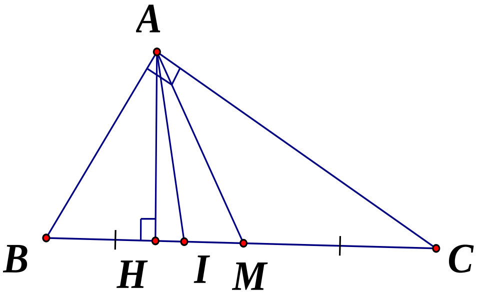
Áp dụng tính chất đường phân giác cua tam giác ta có

$\frac{IB}{IC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{IB}{IB+IC}=\frac{AB}{AB+AC}\Leftrightarrow\frac{IB}{10}=\frac{6}{6+8}\Rightarrow IB=\frac{30}{7}$ cm (3)

Từ (1), (2) và (3), ta có I nằm giữa B và M; H nằm giữa B và I

Vậy: HI = BI - BH $=\frac{4,8}{7}$ cm

MI = BM - BI $=\frac{5}{7}$ cm



Ta có các tam giác ODH, EON, FMO đồng dạng với tam giác ABC

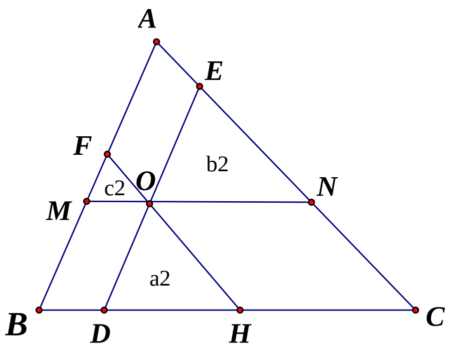
Đặt $S_{ABC} = d^2$.

Ta có: $\frac{S_{ODH}}{S_{ABC}}=\frac{a^2}{d^2}=\left(\frac{DH}{BC}\right)^2\Rightarrow\frac{a}{d}=\frac{DH}{BC}$;

$\frac{S_{EON}}{S_{ABC}}=\frac{b^2}{d^2}=\left(\frac{ON}{BC}\right)^2=\left(\frac{HC}{BC}\right)^2\Rightarrow\frac{b}{d}=\frac{HC}{BC}$; Tương tự $\frac{c}{d}=\frac{BD}{BC}$

Suy ra: $\frac{a+b+c}{d}=\frac{DH+HC+DB}{BC}=1\Rightarrow d=a+b+c$

Vậy $S=d^2=(a+b+c)^2$



Áp dụng BĐT Cosy, ta có: $a^2+b^2\geq 2ab;\ b^2+c^2\geq 2bc;\ \ a^2+c^2\geq 2ac$

$S=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$S\leq a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=3(a^2+b^2+c^2)$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$, hay O là trọng tâm của tam giác ABC

Lưu ý: *Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa;*
Điểm toàn bài quy tròn đến 0,5.