

Bài giảng Xác suất Thống kê và ứng dụng

Phan Thanh Hồng

Đại học THĂNG LONG

Ngày 8 tháng 9 năm 2009

Phần VII

Khoảng tin cậy

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

Một số khái niệm

Trong những phần trước ta đã đề cập tới ước lượng điểm, chẳng hạn trung bình mẫu \bar{x} , phương sai mẫu s^2 , tỷ lệ mẫu \hat{p} lần lượt là ước lượng điểm cho trung bình tổng thể μ , phương sai tổng thể σ^2 , tỷ lệ tổng thể p . Phần này sẽ trình bày về ước lượng khoảng cho một số tham số tổng thể, theo đó sau khi tính toán trên một mẫu cụ thể ta có thể tin rằng tham số tổng thể thuộc vào một khoảng giá trị nào đó.

Định nghĩa

Giả sử θ là một tham số tổng thể cần ước lượng và α là một số mà $0 < \alpha < 1$. Giả sử dựa trên mẫu ngẫu nhiên rút từ tổng thể ta tìm được hai biến ngẫu nhiên A và B sao cho

$$P(A \leq \theta \leq B) = 1 - \alpha$$

Khi đó khoảng $[A, B]$ được gọi là hàm ước lượng khoảng độ tin cậy $(1 - \alpha)100\%$ cho θ . Với một mẫu cụ thể được chọn ra, A, B có giá trị a, b thì khoảng $[a, b]$ được gọi là một khoảng tin cậy $(1 - \alpha)100\%$ cho θ . Số $(1 - \alpha)$ được gọi là độ tin cậy của khoảng ước lượng.

Xét lại ví dụ về mẫu 49 lượng xăng trong bảng sau ở phần III

30.8	30.9	32.0	32.3	32.6
31.7	30.4	31.4	32.7	31.4
30.1	32.5	30.8	31.2	31.8
31.6	30.3	32.8	30.6	31.9
32.1	31.3	32.0	31.7	32.8
33.3	32.1	31.5	31.4	31.5
31.3	32.5	32.4	32.2	31.6
31.0	31.8	31.0	31.5	30.6
32.0	30.4	29.8	31.7	32.2
32.4	30.5	31.1	30.6	

Bảng: Mẫu 49 lượng xăng tiêu thụ

Trong phần IV ta đã khảo sát biểu diễn thân và lá của tập dữ liệu này và thấy phân phối của mẫu có dạng hình chuông cân đối.

29		8
30		1344
30		5666889
31		001233444
31		55566777889
32		0001122344
32		556788
33		3

Ví dụ

Ta lấy ngẫu nhiên một mẫu gồm 5 phần tử từ tập dữ liệu trên khi đó trung bình mẫu \bar{X} có phân phối chuẩn với trung bình $\mu_{\bar{X}} = \mu$, độ lệch chuẩn $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Vì μ và σ chưa biết, giả sử rằng $\mu = 31.5$, $\sigma = 0.8$ (đây là hai giá trị ước lượng trên mẫu 49 lượng xăng nói trên), khi đó theo quy tắc thực nghiệm \bar{X} rơi vào khoảng

$$\left[\mu - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

với xác suất 95.44%.

Tức là 95.44% khả năng khoảng

$$\left[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n} \right]$$

chứa μ .

Ví dụ

Ta lấy ngẫu nhiên một mẫu gồm 5 phần tử từ tập dữ liệu trên khi đó trung bình mẫu \bar{X} có phân phối chuẩn với trung bình $\mu_{\bar{X}} = \mu$, độ lệch chuẩn $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Vì μ và σ chưa biết, giả sử rằng $\mu = 31.5$, $\sigma = 0.8$ (đây là hai giá trị ước lượng trên mẫu 49 lượng xăng nói trên), khi đó theo quy tắc thực nghiệm \bar{X} rơi vào khoảng

$$\left[\mu - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

với xác suất 95.44%.

Tức là 95.44% khả năng khoảng

$$\left[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n} \right]$$

chứa μ .

Ví dụ

Ta lấy ngẫu nhiên một mẫu gồm 5 phần tử từ tập dữ liệu trên khi đó trung bình mẫu \bar{X} có phân phối chuẩn với trung bình $\mu_{\bar{X}} = \mu$, độ lệch chuẩn $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Vì μ và σ chưa biết, giả sử rằng $\mu = 31.5$, $\sigma = 0.8$ (đây là hai giá trị ước lượng trên mẫu 49 lượng xăng nói trên), khi đó theo quy tắc thực nghiệm \bar{X} rơi vào khoảng

$$\left[\mu - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + 2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

với xác suất 95.44%.

Tức là 95.44% khả năng khoảng

$$\left[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n} \right]$$

chứa μ .

Ví dụ

Với mẫu cụ thể chọn được là $\{30.8, 31.9, 30.3, 31.4, 31.3\}$ ta có $\bar{x} = 31.1$ và khoảng $[31.1 - 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}, 31.1 + 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}] = [30.6, 32.0]$ chứa giá trị $\mu = 31.5$.

Với mẫu cụ thể chọn được là $\{32.7, 31.6, 33.3, 32.3, 32.6, 32.5\}$ ta có $\bar{x} = 32.5$ và khoảng $[32.5 - 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}, 32.5 + 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}] = [31.8, 33.2]$ không chứa giá trị $\mu = 31.5$.

Như vậy trước khi chọn mẫu, ta nói 95.44% khả năng μ rơi vào khoảng

$$[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n}]$$

Sau khi chọn mẫu ta tính được khoảng $[30.6, 32.0]$ chẳng hạn thì ta nói đây là khoảng tin cậy 95.44% cho μ hay μ thuộc khoảng $[30.6, 32.0]$ với hi vọng rằng khoảng giá trị này nằm trong số 95.44% những khoảng chứa μ , chứ không phải nằm trong số 4.56% những khoảng không chứa μ còn lại.

Ví dụ

Với mẫu cụ thể chọn được là $\{30.8, 31.9, 30.3, 31.4, 31.3\}$ ta có $\bar{x} = 31.1$ và khoảng $[31.1 - 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}, 31.1 + 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}] = [30.6, 32.0]$ chứa giá trị $\mu = 31.5$.

Với mẫu cụ thể chọn được là $\{32.7, 31.6, 33.3, 32.3, 32.6, 32.5\}$ ta có $\bar{x} = 32.5$ và khoảng $[32.5 - 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}, 32.5 + 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}] = [31.8, 33.2]$ không chứa giá trị $\mu = 31.5$.

Như vậy trước khi chọn mẫu, ta nói 95.44% khả năng μ rơi vào khoảng

$$[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n}]$$

Sau khi chọn mẫu ta tính được khoảng $[30.6, 32.0]$ chẳng hạn thì ta nói đây là khoảng tin cậy 95.44% cho μ hay μ thuộc khoảng $[30.6, 32.0]$ với hi vọng rằng khoảng giá trị này nằm trong số 95.44% những khoảng chứa μ , chứ không phải nằm trong số 4.56% những khoảng không chứa μ còn lại.

Với mẫu cụ thể chọn được là $\{30.8, 31.9, 30.3, 31.4, 31.3\}$ ta có $\bar{x} = 31.1$ và khoảng $[31.1 - 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}, 31.1 + 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}] = [30.6, 32.0]$ chứa giá trị $\mu = 31.5$.

Với mẫu cụ thể chọn được là $\{32.7, 31.6, 33.3, 32.3, 32.6, 32.5\}$ ta có $\bar{x} = 32.5$ và khoảng $[32.5 - 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}, 32.5 + 2 \cdot 0.8/\sqrt{5}] = [31.8, 33.2]$ không chứa giá trị $\mu = 31.5$.

Như vậy trước khi chọn mẫu, ta nói 95.44% khả năng μ rơi vào khoảng

$$[\bar{X} - 2\sigma/\sqrt{n}, \bar{X} + 2\sigma/\sqrt{n}]$$

Sau khi chọn mẫu ta tính được khoảng $[30.6, 32.0]$ chẳng hạn thì ta nói đây là khoảng tin cậy 95.44% cho μ hay μ thuộc khoảng $[30.6, 32.0]$ với hi vọng rằng khoảng giá trị này nằm trong số 95.44% những khoảng chứa μ , chứ không phải nằm trong số 4.56% những khoảng không chứa μ còn lại.

Nội dung trình bày

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn

Giả sử ta cần ước lượng khoảng cho trung bình μ của một tổng thể phân phối chuẩn với phương sai σ^2 đã biết và độ tin cậy là $1 - \alpha$.

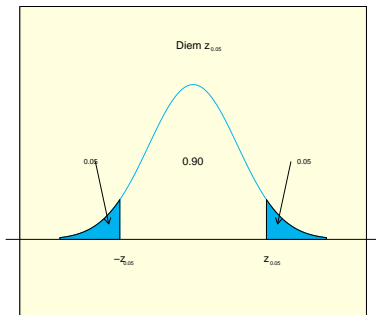
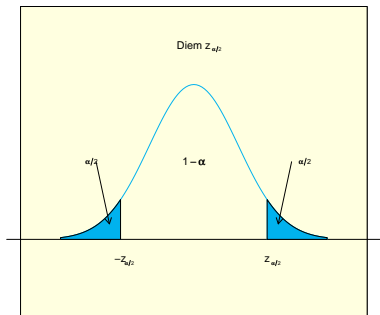
Gọi Z là biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn hóa. Với số $0 < \alpha < 1$ cho trước ta có thể tìm được số $z_{\alpha/2}$ sao cho

$$P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

hay

$$P(Z > z_{\alpha/2}) = P(Z < -z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn



Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn

Khi đó $P(-z_{\alpha/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ và ta có

$$P(\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Khoảng tin cậy cho μ

- 1 Giả sử tổng thể có phân phối chuẩn với phương sai σ^2 đã biết. Thì khoảng tin cậy $100(1 - \alpha)\%$ cho μ là

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- 2 Nếu σ^2 không biết và n lớn ($n \geq 30$), khoảng tin cậy cho μ là

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

(Cả khi không có giả thiết tổng thể phân phối chuẩn).

Khoảng tin cậy cho μ

- 1 Giả sử tổng thể có phân phối chuẩn với phương sai σ^2 đã biết. Thì khoảng tin cậy $100(1 - \alpha)\%$ cho μ là

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

- 2 Nếu σ^2 không biết và n lớn ($n \geq 30$), khoảng tin cậy cho μ là

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

(Cả khi không có giả thiết tổng thể phân phối chuẩn).

Ví dụ 1

Ví dụ: Trong ví dụ về mẫu 49 lượng xăng nói trên. Ta tính được trung bình mẫu $\bar{x} = 31.55$, và độ lệch chuẩn mẫu $s = 0.799$.

Để tìm khoảng tin cậy 90% cho trung bình tổng thể μ (lượng xăng tiêu thụ trung bình cho tất cả các xe), ta tiến hành các bước sau

- 1 xác định $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$, cỡ mẫu $n = 49$, $\bar{x} = 31.55$, $s = 0.799$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[31.55 \pm 1.645 \frac{0.799}{\sqrt{49}} \right] = [31.36, 31.74]$$

- 4 Kết luận: Vậy khoảng tin cậy 90% cho lượng xăng trung bình của tất cả các xe là $[31.36, 31.74]$

Ví dụ 1

Ví dụ: Trong ví dụ về mẫu 49 lượng xăng nói trên. Ta tính được trung bình mẫu $\bar{x} = 31.55$, và độ lệch chuẩn mẫu $s = 0.799$.

Để tìm khoảng tin cậy 90% cho trung bình tổng thể μ (lượng xăng tiêu thụ trung bình cho tất cả các xe), ta tiến hành các bước sau

- 1 xác định $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$, cỡ mẫu $n = 49$, $\bar{x} = 31.55$, $s = 0.799$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[31.55 \pm 1.645 \frac{0.799}{\sqrt{49}} \right] = [31.36, 31.74]$$

- 4 Kết luận: Vậy khoảng tin cậy 90% cho lượng xăng trung bình của tất cả các xe là $[31.36, 31.74]$

Ví dụ 1

Ví dụ: Trong ví dụ về mẫu 49 lượng xăng nói trên. Ta tính được trung bình mẫu $\bar{x} = 31.55$, và độ lệch chuẩn mẫu $s = 0.799$.

Để tìm khoảng tin cậy 90% cho trung bình tổng thể μ (lượng xăng tiêu thụ trung bình cho tất cả các xe), ta tiến hành các bước sau

- 1 xác định $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$, cỡ mẫu $n = 49$, $\bar{x} = 31.55$, $s = 0.799$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[31.55 \pm 1.645 \frac{0.799}{\sqrt{49}} \right] = [31.36, 31.74]$$

- 4 Kết luận: Vậy khoảng tin cậy 90% cho lượng xăng trung bình của tất cả các xe là $[31.36, 31.74]$

Ví dụ 1

Ví dụ: Trong ví dụ về mẫu 49 lượng xăng nói trên. Ta tính được trung bình mẫu $\bar{x} = 31.55$, và độ lệch chuẩn mẫu $s = 0.799$.

Để tìm khoảng tin cậy 90% cho trung bình tổng thể μ (lượng xăng tiêu thụ trung bình cho tất cả các xe), ta tiến hành các bước sau

- 1 xác định $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$, cỡ mẫu $n = 49$, $\bar{x} = 31.55$, $s = 0.799$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.05} = 1.645$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.05} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[31.55 \pm 1.645 \frac{0.799}{\sqrt{49}} \right] = [31.36, 31.74]$$

- 4 Kết luận: Vậy khoảng tin cậy 90% cho lượng xăng trung bình của tất cả các xe là $[31.36, 31.74]$

Ví dụ: Xét ví dụ về mẫu 65 thời gian thanh toán

22	29	16	15	18	17	12	13	17	16	15
19	17	10	21	15	14	17	18	12	20	14
16	15	16	20	22	14	25	19	23	15	19
18	23	22	16	16	19	13	18	24	24	26
13	18	17	15	24	15	17	14	18	17	21
16	21	25	19	20	27	16	17	16	21	

Tìm khoảng tin cậy 99% cho thời gian thanh toán trung bình của tất cả các hóa đơn của công ty.

Lời giải:

- 1 Ta có $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$, cỡ mẫu $n = 65$, $\bar{x} = 18.18$, $s = 4.065$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[18.18 \pm 2.58 \frac{4.065}{\sqrt{65}} \right] = [16.88, 19.48]$$

- 4 Vậy khoảng tin cậy 99% cho thời gian thanh toán trung bình là $[16.88, 19.48]$

Lời giải:

- 1 Ta có $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$, cỡ mẫu $n = 65$, $\bar{x} = 18.18$, $s = 4.065$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[18.18 \pm 2.58 \frac{4.065}{\sqrt{65}} \right] = [16.88, 19.48]$$

- 4 Vậy khoảng tin cậy 99% cho thời gian thanh toán trung bình là $[16.88, 19.48]$

Lời giải:

- 1 Ta có $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$, cỡ mẫu $n = 65$, $\bar{x} = 18.18$, $s = 4.065$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[18.18 \pm 2.58 \frac{4.065}{\sqrt{65}} \right] = [16.88, 19.48]$$

- 4 Vậy khoảng tin cậy 99% cho thời gian thanh toán trung bình là $[16.88, 19.48]$

Lời giải:

- 1 Ta có $\alpha = 1 - 0.99 = 0.01$, cỡ mẫu $n = 65$, $\bar{x} = 18.18$, $s = 4.065$
- 2 xác định $z_{\alpha/2} = z_{0.005} = 2.58$
- 3 tính khoảng tin cậy

$$\left[\bar{x} - z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.005} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[18.18 \pm 2.58 \frac{4.065}{\sqrt{65}} \right] = [16.88, 19.48]$$

- 4 Vậy khoảng tin cậy 99% cho thời gian thanh toán trung bình là $[16.88, 19.48]$

- 1 Một số khái niệm
- 2 Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu lớn
 - Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ
- 3 Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể
- 4 Xác định cỡ mẫu

Mô tả phân phối t

Ta đã biết khi tổng thể phân phối chuẩn hoặc cỡ mẫu n lớn thì phân phối của

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

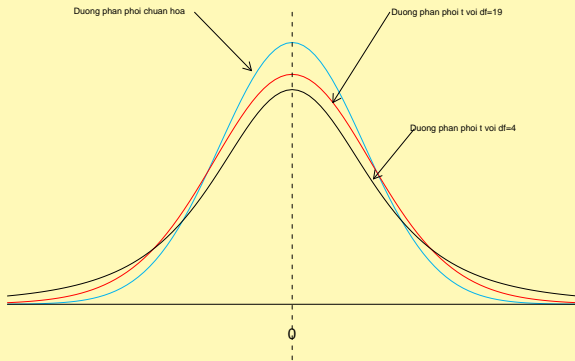
là hoặc xấp xỉ phân phối chuẩn.

Tuy nhiên khi n nhỏ thì

$$\frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

tuân theo phân phối t với bậc tự do $df = n - 1$.

Mô tả phân phối t



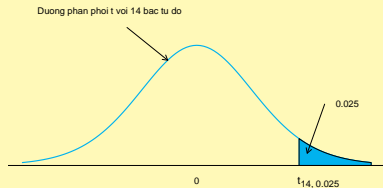
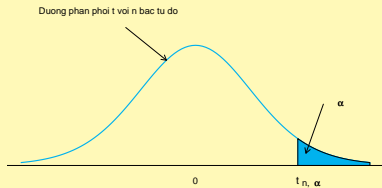
Mô tả phân phối t

Phân phối t có một số đặc điểm: đường mật độ có dạng hình chuông cân đối với hai đuôi dài hơn của phân phối chuẩn hóa và mức độ tập trung kém hơn. Biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối t có trung bình bằng 0 và phương sai bằng $n/(n - 2)$ với $n > 2$. Khi cỡ mẫu lớn, hình dáng của phân phối t khá gần với phân phối chuẩn hóa, có thể coi phân phối chuẩn hóa là phân phối t với bậc tự do $df = \infty$.

Giá trị $t_{n,\alpha}$

$t_{n,\alpha}$ là giá trị sao cho $P(t_n > t_{n,\alpha}) = \alpha$ hay $P(t_n < -t_{n,\alpha}) = \alpha$ trong đó t_n là biến ngẫu nhiên phân phối t với bậc tự do $df = n$.

Giá trị $t_{n,\alpha}$



Khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể, cỡ mẫu nhỏ

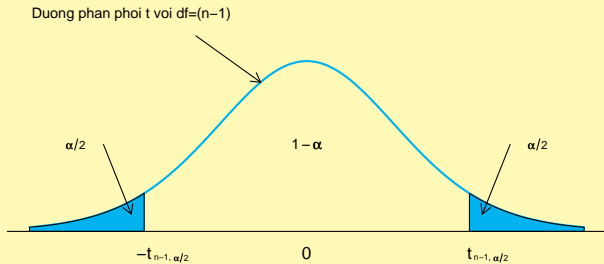
Khoảng tin cậy cho μ

Nếu tổng thể phân phối chuẩn với trung bình μ thì khoảng tin cậy $1 - \alpha$ cho μ là

$$\left[\bar{x} - t_{n-1, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{n-1, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \left[\bar{x} \pm t_{n-1, \alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Trong đó $t_{n-1, \alpha/2}$ là giá trị sao cho $P(t_{n-1} > t_{n-1, \alpha/2}) = \alpha/2$ với n là cỡ mẫu.

Giá trị $t_{n-1, \alpha/2}$



tel.: 04.8287546, fax.: 04.2636775

Ví dụ

Ví dụ: Một mẫu ngẫu nhiên gồm 6 xe hơi của một nhãn hiệu được chọn ra và tính lượng xăng tiêu thụ trên 100 km được kết quả :

18.61, 18.41, 19.21, 20.81, 19.41, 20.51

Tìm khoảng tin cậy 90% cho lượng xăng tiêu thụ trung bình trên 100 km của tất cả các xe thuộc nhãn hiệu đó. Cho biết lượng xăng tiêu thụ trên 100km của các xe tuân theo phân phối chuẩn.

Lời giải:

- 1 Ta có $n = 6 < 30$, $\bar{x} = 19.49$, $s = 0.98$, $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$,
- 2 $t_{n-1, \alpha/2} = t_{5, 0.05} = 2.015$.
- 3 khoảng tin cậy cho lượng xăng tiêu thụ trung bình trên 100 km của các xe là

$$19.49 - 2.015 \cdot \frac{0.98}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 19.49 + 2.015 \cdot \frac{0.98}{\sqrt{6}}$$

$$18.61 \leq \mu \leq 20.37$$

Ví dụ: Một mẫu ngẫu nhiên gồm 6 xe hơi của một nhãn hiệu được chọn ra và tính lượng xăng tiêu thụ trên 100 km được kết quả :

18.61, 18.41, 19.21, 20.81, 19.41, 20.51

Tìm khoảng tin cậy 90% cho lượng xăng tiêu thụ trung bình trên 100 km của tất cả các xe thuộc nhãn hiệu đó. Cho biết lượng xăng tiêu thụ trên 100km của các xe tuân theo phân phối chuẩn.

Lời giải:

- 1 Ta có $n = 6 < 30$, $\bar{x} = 19.49$, $s = 0.98$, $\alpha = 1 - 0.9 = 0.1$,
- 2 $t_{n-1, \alpha/2} = t_{5, 0.05} = 2.015$.
- 3 khoảng tin cậy cho lượng xăng tiêu thụ trung bình trên 100 km của các xe là

$$19.49 - 2.015 \cdot \frac{0.98}{\sqrt{6}} \leq \mu \leq 19.49 + 2.015 \cdot \frac{0.98}{\sqrt{6}}$$

$$18.61 \leq \mu \leq 20.37$$

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 1

Nếu tổng thể phân phối chuẩn đã biết độ lệch chuẩn tổng thể σ , với mẫu dữ liệu thô ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ bằng các lệnh sau

```
library (BSDA)  
z.test(x, sigma.x= , conf.level=)
```

Trong đó

x: vectơ dữ liệu
sigma.x: độ lệch chuẩn tổng thể (theo giả thiết)
conf.level: độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 1

Nếu tổng thể phân phối chuẩn đã biết độ lệch chuẩn tổng thể σ , với mẫu dữ liệu thô ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ bằng các lệnh sau

```
library (BSDA)  
z.test(x, sigma.x= , conf.level=)
```

Trong đó

x: vectơ dữ liệu
sigma.x: độ lệch chuẩn tổng thể (theo giả thiết)
conf.level: độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 1

Nếu tổng thể phân phối chuẩn đã biết độ lệch chuẩn tổng thể σ , với mẫu dữ liệu thô ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ bằng các lệnh sau

```
library (BSDA)  
z.test(x, sigma.x= , conf.level=)
```

Trong đó

x:	vectơ dữ liệu
sigma.x:	độ lệch chuẩn tổng thể (theo giả thiết)
conf.level:	độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 2

Nếu tổng thể phân phối chuẩn đã biết độ lệch chuẩn tổng thể σ , và trung bình mẫu \bar{x} ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ bằng các lệnh sau

```
library (BSDA)  
zsum.test(mean.x, sigma.x = , n.x = , conf.level=)
```

Trong đó

<code>mean.x:</code>	trung bình mẫu
<code>sigma.x:</code>	độ lệch chuẩn tổng thể (theo giả thiết)
<code>n.x:</code>	cỡ mẫu
<code>conf.level:</code>	độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 2

Nếu tổng thể phân phối chuẩn đã biết độ lệch chuẩn tổng thể σ , và trung bình mẫu \bar{x} ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ bằng các lệnh sau

```
library (BSDA)  
zsum.test(mean.x, sigma.x = , n.x = , conf.level=)
```

Trong đó

mean.x:	trung bình mẫu
sigma.x:	độ lệch chuẩn tổng thể (theo giả thiết)
n.x:	cỡ mẫu
conf.level:	độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 2

Nếu tổng thể phân phối chuẩn đã biết độ lệch chuẩn tổng thể σ , và trung bình mẫu \bar{x} ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ bằng các lệnh sau

```
library (BSDA)  
zsum.test(mean.x, sigma.x = , n.x = , conf.level=)
```

Trong đó

<code>mean.x:</code>	trung bình mẫu
<code>sigma.x:</code>	độ lệch chuẩn tổng thể (theo giả thiết)
<code>n.x:</code>	cỡ mẫu
<code>conf.level:</code>	độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 3

Nếu

- 1 mẫu dữ liệu thô cỡ lớn,
- 2 hoặc tổng thể phân phối chuẩn (không biết độ lệch chuẩn tổng thể), mẫu dữ liệu thô cỡ nhỏ

Ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ như sau:

```
t.test(x, conf.level=)
```

Trong đó

x: vectơ dữ liệu
conf.level: độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 3

Nếu

- 1 mẫu dữ liệu thô cỡ lớn,
- 2 hoặc tổng thể phân phối chuẩn (không biết độ lệch chuẩn tổng thể), mẫu dữ liệu thô cỡ nhỏ

Ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ như sau:

```
t.test(x, conf.level=)
```

Trong đó

`x`: vectơ dữ liệu
`conf.level`: độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 3

Nếu

- 1 mẫu dữ liệu thô cỡ lớn,
- 2 hoặc tổng thể phân phối chuẩn (không biết độ lệch chuẩn tổng thể), mẫu dữ liệu thô cỡ nhỏ

Ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ như sau:

```
t.test(x, conf.level=)
```

Trong đó

`x`: vectơ dữ liệu
`conf.level`: độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 4

Nếu

- 1 cỡ mẫu lớn, biết trung bình mẫu \bar{x} , độ lệch chuẩn mẫu s
- 2 hoặc tổng thể phân phối chuẩn (không biết độ lệch chuẩn tổng thể), cỡ mẫu nhỏ, biết trung bình mẫu \bar{x} , độ lệch chuẩn mẫu s

Ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ như sau:

```
library(BSDA)  
tsum.test(mean.x, s.x= , n.x= , conf.level=)
```

Trong đó

```
mean.x:      trung bình mẫu  
s.x:        độ lệch chuẩn mẫu  
n.x:        cỡ mẫu  
conf.level: độ tin cậy (mặc định là 0.95)
```

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 4

Nếu

- 1 cỡ mẫu lớn, biết trung bình mẫu \bar{x} , độ lệch chuẩn mẫu s
- 2 hoặc tổng thể phân phối chuẩn (không biết độ lệch chuẩn tổng thể), cỡ mẫu nhỏ, biết trung bình mẫu \bar{x} , độ lệch chuẩn mẫu s

Ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ như sau:

```
library (BSDA)
```

```
tsum.test(mean.x, s.x= , n.x= , conf.level=)
```

Trong đó

```
mean.x:      trung bình mẫu  
s.x:         độ lệch chuẩn mẫu  
n.x:         cỡ mẫu  
conf.level:  độ tin cậy (mặc định là 0.95)
```

Tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể trong R

Trường hợp 4

Nếu

- 1 cỡ mẫu lớn, biết trung bình mẫu \bar{x} , độ lệch chuẩn mẫu s
- 2 hoặc tổng thể phân phối chuẩn (không biết độ lệch chuẩn tổng thể), cỡ mẫu nhỏ, biết trung bình mẫu \bar{x} , độ lệch chuẩn mẫu s

Ta tìm khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể μ như sau:

```
library (BSDA)  
tsum.test(mean.x, s.x= , n.x= , conf.level=)
```

Trong đó

<code>mean.x</code> :	trung bình mẫu
<code>s.x</code> :	độ lệch chuẩn mẫu
<code>n.x</code> :	cỡ mẫu
<code>conf.level</code> :	độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể

Trong phần VI, ta đã nghiên cứu phân phối của tỷ lệ mẫu \hat{P} : khi cỡ mẫu lớn \hat{P} có phân phối gần như phân phối chuẩn với trung bình $\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)/n$.

Chuẩn hóa \hat{P} ta có $Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$.

Tương tự bài toán ước lượng khoảng cho trung bình, từ

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

ta có

$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Từ đó ta có

$$P(\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{p(1-p)/n} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{p(1-p)/n}) = 1 - \alpha$$

Khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể

Dù p không biết ta có thể dùng \hat{p} là ước lượng điểm cho p thay vào phương trình trên để được khoảng tin cậy cho p .

Khoảng tin cậy cho p

Nếu cỡ mẫu n lớn khoảng tin cậy cho p là

$$[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}] = [\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}]$$

Trong đó n được coi là lớn nếu $n\hat{p} \geq 5$ và $n(1 - \hat{p}) \geq 5$

Ví dụ: Thuốc kháng sinh đôi khi là nguyên nhân gây ra tình trạng buồn nôn cho người sử dụng như một tác dụng phụ. Tại một công ty dược, các nhà khoa học vừa phát triển một loại thuốc kháng sinh mới có tên là Phe-Mycin. Công ty muốn ước lượng p , tỷ lệ bệnh nhân bị buồn nôn khi dùng thuốc này. Một mẫu ngẫu nhiên 200 bệnh nhân được chọn có 35 bệnh nhân bị buồn nôn.

Ta tìm khoảng tin cậy 95% cho tỷ lệ tất cả các bệnh nhân bị buồn nôn khi dùng thuốc .

Lời giải:

- 1 $n = 200, \alpha = 0.05$
- 2 $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$
- 3 Ước lượng điểm cho tỷ lệ tổng thể là

$$\hat{p} = \frac{35}{200} = 0.175$$

- 4 Ta có $n\hat{p} = 35, n(1 - \hat{p}) = 165$ đều lớn hơn 5. Nên khoảng tin cậy 95% cho p là

$$\begin{aligned} [\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}] &= [0.175 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.175 \cdot 0.825}{200}}] \\ &= [0.175 \pm 0.053] = [0.122, 0.228] \end{aligned}$$

Tìm khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể trong R

```
prop.test(x, n, conf.level = ,correct = F)  
hoặc  
binom.test(x, n, conf.level = )
```

Trong đó

x: số phần tử có tính chất nghiên cứu trong mẫu
n: cỡ mẫu
conf.level: độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Tìm khoảng tin cậy cho tỷ lệ tổng thể trong R

```
prop.test(x, n, conf.level = , correct = F)
```

hoặc

```
binom.test(x, n, conf.level = )
```

Trong đó

x: số phần tử có tính chất nghiên cứu trong mẫu

n: cỡ mẫu

conf.level: độ tin cậy (mặc định là 0.95)

Xác định cỡ mẫu cho ước lượng trung bình tổng thể

Xét bài toán ước lượng khoảng cho trung bình của tổng thể phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn σ đã biết. Ta có khoảng tin cậy với độ tin cậy $1 - \alpha$ cho μ là

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Độ chính xác của ước lượng đo bằng lượng được cộng vào và trừ ra khỏi trung bình mẫu khi xác định giới hạn dưới và trên của khoảng tin cậy, và được ký hiệu là e .

Như vậy $e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Khi muốn ước lượng cho trung bình với độ chính xác e đã xác định trước, theo công thức trên ta có thể xác định cỡ mẫu n như sau

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{e} \right)^2$$

Xác định cỡ mẫu cho ước lượng trung bình tổng thể

Xét bài toán ước lượng khoảng cho trung bình của tổng thể phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn σ đã biết. Ta có khoảng tin cậy với độ tin cậy $1 - \alpha$ cho μ là

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Độ chính xác của ước lượng đo bằng lượng được cộng vào và trừ ra khỏi trung bình mẫu khi xác định giới hạn dưới và trên của khoảng tin cậy, và được ký hiệu là e .

Như vậy $e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Khi muốn ước lượng cho trung bình với độ chính xác e đã xác định trước, theo công thức trên ta có thể xác định cỡ mẫu n như sau

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{e} \right)^2$$

Xác định cỡ mẫu cho ước lượng trung bình tổng thể

Xét bài toán ước lượng khoảng cho trung bình của tổng thể phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn σ đã biết. Ta có khoảng tin cậy với độ tin cậy $1 - \alpha$ cho μ là

$$\left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Độ chính xác của ước lượng đo bằng lượng được cộng vào và trừ ra khỏi trung bình mẫu khi xác định giới hạn dưới và trên của khoảng tin cậy, và được ký hiệu là e .

Như vậy $e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Khi muốn ước lượng cho trung bình với độ chính xác e đã xác định trước, theo công thức trên ta có thể xác định cỡ mẫu n như sau

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{e} \right)^2$$

Xác định cỡ mẫu cho ước tỷ lệ tổng thể

Tương tự ta có công thức xác định cỡ mẫu trong bài toán ước lượng cho tỷ lệ tổng thể khi độ chính xác của ước lượng là e

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 p(1-p)}{e^2}$$

Trong đó p có thể ước lượng dựa vào các nghiên cứu trước đó hay kinh nghiệm để phỏng đoán. Ta cũng có thể chọn giải pháp "an toàn" là lấy $p = 0.5$