

# ĐÁNH GIÁ SỨC CHỊU TẢI VÀ CƠ CẤU TRƯỢT CỦA NỀN CÔNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH GIỚI HẠN

Lê Văn Cảnh<sup>(1)</sup>, Nguyễn Chánh Hoàng<sup>(2)</sup>, Nguyễn Kế Tường<sup>(3)</sup>

(1) Trường Đại học Quốc tế – Đại học Quốc gia TP. HCM

(2) Trường Đại học Bách khoa – Đại học Quốc gia TP.HCM

(3) Trường Đại học Thủ Dầu Một

## TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi trình bày phương pháp số phân tích giới hạn để đánh giá sức chịu tải và cơ cấu trượt của nền công trình. Nền đất được mô hình theo tiêu chuẩn dẻo Mohr – Coulomb với giả thiết luật chảy dẻo kết hợp. Từ đó, cận trên của tải trọng giới hạn được phỏng đoán bởi thuật toán số phân tích giới hạn động học. Phương pháp phần tử hữu hạn tron dựa trên cạnh ES-FEM được dùng để xấp xỉ trường chuyển vị, và hiện tượng locking sẽ được khử. Bài toán phân tích giới hạn sau đó được chuyển về dạng bài toán tối ưu toán học mà chúng ta có thể giải dùng các thuật toán tối ưu tuyến tính. Phương thức số mà chúng tôi đề xuất sẽ được áp dụng để giải bài toán móng nông và kết quả đạt được cho các bài toán thực tiễn là tốt.*

**Từ khóa:** phân tích giới hạn, tải trọng giới hạn

\*

## 1. Giới thiệu

Tải trọng giới hạn của nền móng nông công trình có thể phỏng đoán theo công thức được đề xuất bởi Terzaghi [1]. Tuy nhiên, đối với nền đất không đồng nhất và có điều kiện phức tạp thì công thức này sẽ không còn phù hợp. Do đó, nhiều thuật toán số dựa trên lý thuyết phân tích giới hạn cận trên và cận dưới đã được đề xuất [2-6]. Trong các giải thuật số này, trường chuyển vị hay ứng suất sẽ được xấp xỉ rời rạc bằng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH); sau đó áp dụng định lý cận trên

hoặc cận dưới để phỏng đoán tải trọng giới hạn. Vì việc thiết lập phần tử chuyển vị là tương đối dễ dàng hơn so với phần tử cân bằng, nên phương pháp phân tích giới hạn cận trên dùng phương pháp phần tử hữu hạn chuyển vị được quan tâm đáng kể, đặc biệt là phần tử chuyển vị bậc thấp. Tuy nhiên, vấn đề phát sinh khi dùng loại phần tử này là hiện tượng “locking”, kết quả tính toán số không hội tụ hoặc hội tụ chậm. Trong phân tích giới hạn động học, “locking” xảy ra là do điều kiện chảy dẻo được áp đặt.

Các giải pháp để khử hiện tượng locking đã được đề xuất như là (i) dùng phần tử chuyển vị bậc cao [7]; (ii) dùng các phần tử bất liên tục trên biên [8]. Điểm chính của các phương pháp này là nhằm tăng số bậc tự do tổng thể của bài toán, vì vậy sẽ giải quyết được vấn đề locking. Tuy nhiên, chi phí tính toán tăng lên nhiều và việc tạo lưới trong các phương pháp này là tương đối phức tạp. Trong nghiên cứu này, chúng tôi dùng phương pháp PTHH trơn dựa trên cạnh để xấp xỉ trường chuyển vị [9,10]. Khác với phương pháp PTHH truyền thống, ở đây trường biến dạng được dùng là trường biến dạng trung bình được tính toán trên miền làm trơn dựa trên cạnh. Vì trường biến dạng trơn này là hằng số trên miền làm trơn, nên chúng ta chỉ cần áp đặt điều kiện chảy dẻo tại một điểm bất kỳ trong các miền trơn, trong khi đảm bảo điều kiện này thỏa mãn mọi nơi. Do đó, hiện tượng locking được khử và chi phí tính toán được tối ưu [11].

**2. Phương pháp PTHH trơn dựa trên cạnh ES-FEM**

Trong phương pháp phần tử hữu hạn trơn dựa trên cạnh ES-FEM, ta chia miền  $\Omega$  thành những miền "trơn"  $\Omega_k$  con,

được định nghĩa:  $\bigcup_{k=1}^{N_{ed}} \Omega$  và  $\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset$

với  $i \neq j$ , trong đó  $N_{ed}$  là tổng số cạnh của các phần tử. Các thành phần biến dạng tại một điểm  $x_c$  bất kỳ thu được như sau:

$$\tilde{\epsilon}(x_c) = \int_{\Omega_k} \epsilon(x) \Phi(x - x_c) d\Omega \quad (1)$$

Trong đó:  $\Phi$  là hàm làm trơn, thỏa mãn điều kiện đơn vị:  $\int_{\Omega_k} \Phi d\Omega = 1$

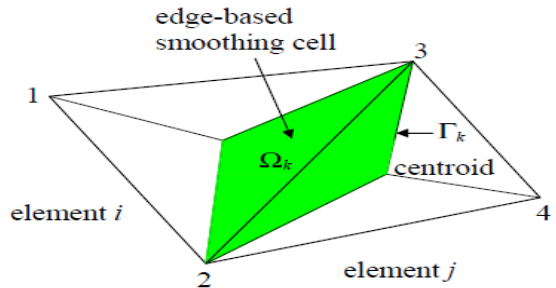
Trong trường hợp đơn giản nhất, hàm làm trơn được định nghĩa như sau:

$$\Phi(x - x_c) = \begin{cases} 1/A^{(k)}, & x \in \Omega_k \\ 0, & x \notin \Omega_k \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó:  $A^{(k)} = \int_{\Omega_k} d\Omega$  là diện tích

của hàm trơn.

Đối với phần tử tam giác ba nút, miền trơn dựa trên cạnh k được tạo ra bằng cách kết nối hai đầu nút của cạnh chung với hai trọng tâm của phần tử tam giác đang xét và phần tử tam giác kề bên (hình 1).



**Hình 1:** Phân chia miền trơn  $\Omega_k, \Omega_m$

Biến dạng trung bình trên miền trơn  $\Omega_k$  của phần tử tam giác 3 nút được định nghĩa như sau:

$$\tilde{\epsilon}_m^{(k)} = \frac{1}{A^{(k)}} \int_{\Omega_k} \epsilon_m(x) d\Omega = \sum_{i=1}^{N_e^{(k)}} \tilde{B}_m^i d_m^i \quad (3)$$

Trong đó:  $A^{(k)} = \int_{\Omega_k} d\Omega = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_e^{(k)}} A_i$

là diện tích của hàm trơn  $\Omega_k$ .

Với  $N_e^{(k)}$  là số phần tử có chung cạnh k ( $N_e^{(k)} = 1$  cho cạnh biên, và  $N_e^{(k)} = 2$  cho cạnh chung giữa hai phần tử);  $A_i$  là diện tích của phần tử thứ i có chung cạnh k.

Biến dạng trung bình trên miền trơn  $\Omega_k$ :

$$\varepsilon_k^{(h)} = \tilde{B}_{k1} d_{k1} + \tilde{B}_{k2} d_{k2} = \tilde{B}_k d_k \quad (4)$$

Ma trận tính biến dạng và chuyển vị

$$\tilde{B}_{kj}^i : \quad \tilde{B}_{kj}^i = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1,x}^{kj} & 0 & \dots & \tilde{N}_{n,x}^{kj} & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{1,y}^{kj} & \dots & 0 & \tilde{N}_{n,y}^{kj} \\ \tilde{N}_{1,y}^{kj} & \tilde{N}_{1,x}^{kj} & \dots & \tilde{N}_{n,y}^{kj} & \tilde{N}_{n,x}^{kj} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Với:

$$\tilde{N}_{1,\alpha}^{kj} = \frac{A_i}{3A^{(k)}} \iint_{\Gamma_{kj}} N_i(x) n_\alpha(x) d\Gamma \quad (6)$$

Trong đó  $\tilde{N}_{1,\alpha}^{kj}$  là các ma trận hàm dạng tron.

### 3. Công thức phân tích giới hạn rời rạc dựa trên ES-FEM.

#### 3.1 Công thức phân tích giới hạn cận trên

Ta xem vật thể cứng - dẻo tuyệt đối trong miền  $\Omega \in \square^2$  với biên  $\Gamma$ , với lực thể tích  $\mathbf{g}$  và lực trên biên  $\mathbf{t}$ . Điều kiện biên ràng buộc về chuyển vị  $\Gamma_u$  được thiết lập,  $\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$ . Theo lí thuyết cận trên, kết cấu bị sụp đổ khi và chỉ khi tồn tại trường khả dĩ động  $\mathbf{u} \in U$ , sao cho:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) d\Omega < W_{ext}(\mathbf{u}) \quad (7)$$

$$\text{Hay } D_p(\varepsilon(\mathbf{u})) < W_{ext}(\mathbf{u}) \quad (8)$$

$$\text{Với } D_p(\varepsilon(\mathbf{u})) = \int_{\Omega} d_p(\varepsilon) d\Omega \quad (9)$$

$$W_{ext}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{g}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^T \mathbf{u} d\Gamma_t \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

$$U = \{ \mathbf{u} : \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \forall x \in \Gamma_u, W_{ext}(\mathbf{u}) > 0 \} \quad (12)$$

Gọi là hệ số tải trọng sụp đổ của lực thể tích  $\mathbf{g}$  và lực trên biên  $\mathbf{t}$  gây ra, khi đó trường chuyển vị khả dĩ động  $\mathbf{u} \in U$

$$D_p(\varepsilon(\mathbf{u})) < \lambda W_{ext}(\mathbf{u}) + W_{ext}^0(\mathbf{u}) \quad (13)$$

Với  $W_{ext}^0(\mathbf{u})$  là công của lực thể tích  $\mathbf{g}_0$  và lực trên biên  $\mathbf{t}_0$  không nhân với hệ số tải trọng (tĩnh tải). Do vậy cận trên có thể tìm được thông qua bài toán tối ưu:

$$\lambda = \min D_p(\varepsilon(\mathbf{u})) - W_{ext}^0(\mathbf{u}) \quad (14)$$

Với những ràng buộc:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{u}} = 0, & \mathbf{u} \in \Gamma_u \\ F(\dot{\mathbf{u}}) = 1 \end{cases} \quad (15)$$

#### 3.2 Luật chảy dẻo kết hợp

Tinh thần của lí thuyết cận trên trong phân tích giới hạn là tìm trường khả dĩ thực ứng với những ràng buộc về mặt cơ học. Một trong những ràng buộc đó là phải thỏa luật chảy dẻo kết hợp, thể hiện mối liên hệ giữa gia số biến dạng dẻo khi trạng thái ứng suất nằm trên mặt phá hủy, mà ở đây trong bài báo này là tiêu chuẩn von Mises và Mohr – Coulomb. Đối với bài toán phẳng, luật chảy dẻo kết hợp được viết như sau:

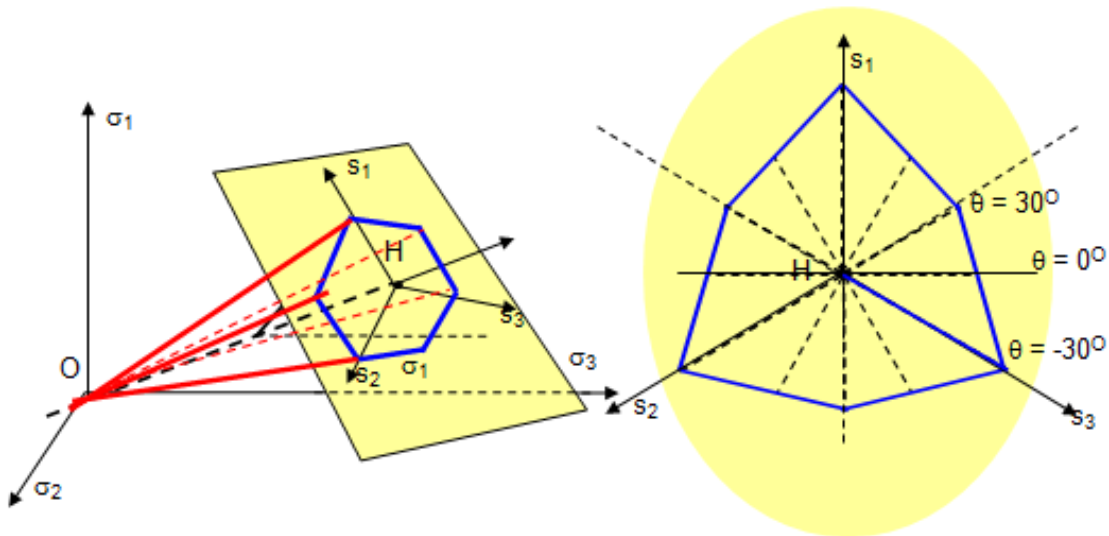
$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \frac{\partial u}{\partial x} = \mu^* \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} \\ \varepsilon_y^* &= \frac{\partial v}{\partial y} = \mu^* \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} \\ \gamma_{xy}^* &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu^* \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{aligned} \quad (16)$$

Trong đó  $\mu^* \geq 0$ : là hệ số tốc độ gia tăng biến dạng dẻo.

Những phương trình này kết hợp với điều kiện biên ta sẽ thành lập được bài toán tối ưu cực tiểu với hàm mục tiêu là năng lượng tiêu tán dẻo. Trường biến dạng khả dĩ thực, ứng với trạng thái tới hạn, sẽ tìm được khi giải bài toán tối ưu hóa.

### 3.3 Tiêu chuẩn bền Mohr – Coulomb

Tiêu chuẩn bền của Mohr - Coulomb được sử dụng rất rộng rãi trong cơ học đất, nó phù hợp với trạng thái làm việc có thoát nước của đất.



**Hình 2:** Mặt giới hạn của Mohr - Coulomb trong không gian ứng suất

Đối với trường hợp biến dạng phẳng tiêu chuẩn Mohr – Coulomb có thể viết như sau:

$$F = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2 - (2c \cos \varphi - (\sigma_x + \sigma_y) \sin \varphi)^2 = 0 \quad (17)$$

Trong đó:  $c$  là lực dính của đất;  $\varphi$  là góc ma sát trong của đất.

Tiêu chuẩn Mohr – Coulomb được biểu diễn trong không gian ứng suất được giới hạn bởi 6 mặt tạo thành hình chóp như hình 2. Để thuận tiện trong quá trình sử dụng hệ số tốc độ gia tăng biến dạng dẻo, khi áp dụng luật chảy dẻo cho từng mặt ta có thể viết theo dạng sau:

$$F_k = A_k \sigma_x + B_k \sigma_y + C_k \tau_{xy} - 2c \cos \varphi = 0 \quad (18)$$

Trong đó:  $A_k = \cos a_k + \sin \varphi$ ,  $B_k = \sin \varphi - \cos a_k$ ,  $C_k = 2 \sin a_k$ ,  $a_k = \frac{2\pi k}{p}$ ,

với  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Với  $p$  tương ứng với số hệ số tốc độ gia tăng biến dạng dẻo cần thiết cho tiêu chuẩn Mohr – Coulomb trong không gian ứng suất. Theo đề nghị của S.W. Sloan [1] thì  $p = 12$  là đủ chính xác để thể hiện mặt phá hủy Mohr – Coulomb, tuy nhiên nếu  $p$  càng lớn thì sẽ càng chính xác.

Áp dụng luật chảy dẻo kết hợp (16) đối với từng cạnh ta được:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \sum_{k=1}^{k=p} \mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \sum_{k=1}^{k=p} \mu A_k \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = \sum_{k=1}^{k=p} \mu \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = \sum_{k=1}^{k=p} \mu B_k \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = \sum_{k=1}^{k=p} \mu \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = \sum_{k=1}^{k=p} \mu C_k \end{aligned} \tag{19}$$

Năng lượng tiêu tán dẻo cho từng phần tử:

$$D = \int_{A_i} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dA_i \tag{20}$$

Thế (2) vào (3) và kết hợp với (1) ta được:

$$D = 2A_i \cos \varphi \cdot c \cdot \sum_{k=1}^{k=p} \mu_k \tag{21}$$

Năng lượng tiêu tán dẻo cho toàn miền quan tâm dựa trên ES-FEM được viết dưới dạng:

$$D^{ES-FEM} = \sum_{i=1}^{Ned} (2A_i \cos \varphi \cdot c \cdot \sum_{k=1}^{k=p} \mu_k) \tag{22}$$

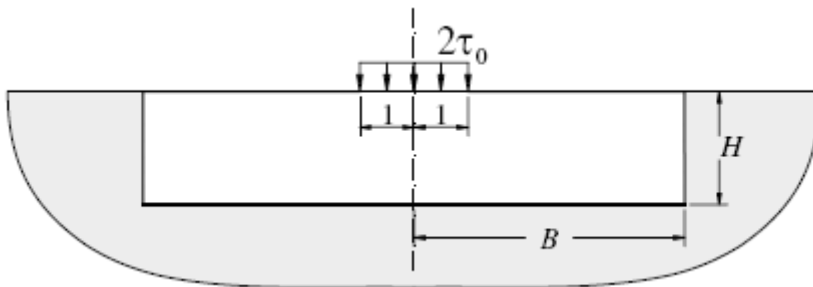
Bài toán tối ưu hóa cho bởi (14) được viết lại như sau:

$$\lambda^+ = \min_{u \in C} \sum_{i=1}^{Ned} (2A_i \cos \varphi \cdot c \cdot \sum_{k=1}^{k=p} \mu_k) \tag{23}$$

$$\text{Ràng buộc: } \begin{cases} \dot{u} = 0, & u \in \Gamma_u \\ F(\dot{u}) = 1 \end{cases}$$

#### 4. Kết quả tính toán số

Thuật toán phân tích giới hạn cận trên dựa trên phương pháp PTHH tron dựa trên cạnh sẽ được áp dụng để phỏng đoán tải trọng giới hạn của bài toán móng nông biến dạng phẳng như hình 3.



**Hình 3:** Bài toán móng nông - tải trọng và hình học

Lời giải giải tích được đề xuất bởi Prandtl [12] cho bài toán bán không gian cứng-dẻo là  $\lambda = 2 + \pi = 5.142$  (với  $c = 1$ ,  $\varphi = 0$ ). Do tính đối xứng nên chúng ta chỉ cần giải một nửa mô hình móng. Hình chữ nhật có  $B = 5$ ,  $H = 2$  được xem là mô hình đủ lớn để đảm bảo là các phần tử trên biên không có biến dạng.

Hiện tượng “locking” sẽ xảy ra nếu chúng ta dùng phần tử tam giác truyền thông T3. Tuy nhiên, khi áp dụng phương pháp PTHH tron ES-FEM thì hiện tượng locking này được khử trong mô hình Mohr - Coulomb. Hệ số tải trọng giới hạn đạt được khi dùng các lưới PTHH khác nhau được trình bày trong bảng 1.

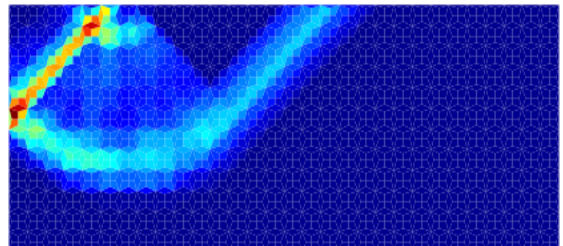
**Bảng 1:** Hệ số tải trọng giới hạn cho các lưới khác nhau

Mô hình	Số phần tử		
	160	640	1440
ES-FEM	5.427	5.314	5.277
Errors (%)	5.5	3.3	2.6

Từ bảng 1 ta thấy rằng kết quả tính toán thu được vẫn còn cao hơn kết quả tốt nhất đạt được trong [8] với việc dùng các đường bất liên tục trên biên phần tử (việc tạo lưới cho loại phần tử bất liên tục này rất phức tạp vì một điểm được có thể xem là các nút khác nhau). Tuy nhiên, do phương pháp ES-FEM dùng lưới phần tử truyền thông nên việc tạo lưới đơn giản hơn. Hơn nữa, kết quả thu được ở đây khi dùng chỉ 160 phần tử đều tốt hơn tất cả kết quả thu được trong [8] (bảng 2) khi

dùng phần tử T3 truyền thông với kỹ thuật tích phân thiếu (reduced integration).

Phân bố năng lượng tiêu tán cũng được thể hiện trên hình 4.



**Hình 4:** Phân bố năng lượng tiêu tán dẻo

### 5. Kết luận

Phương thức số phân tích giới hạn cận trên dùng phương pháp PTHH tron dựa trên cạnh ES-FEM và tối ưu toán học tuyến tính đã được đề xuất và trình bày trong bài báo này. Từ kết quả tính toán ta thấy rằng khi dùng phương pháp ES-FEM để xấp xỉ trường chuyển vị thì hiện tượng locking được khử và kết quả thu được tương đối chính xác với chi phí tính toán trung bình. Phương pháp phân tích giới hạn số giúp chúng ta phỏng đoán tương đối chính xác tải trọng phá hoại cũng như cơ cấu trượt của nền công trình. Tuy nhiên, ở đây mặt dẻo Mohr – Coulomb được thể hiện gần đúng phụ thuộc vào thông số  $p$  và số lượng điều kiện ràng buộc và số biến trong bài toán tối ưu là rất lớn, chẳng hạn khi dùng 1440 phần tử thì số điều kiện ràng buộc và số biến tương ứng lên đến 2456 và 12487. Chúng ta có thể giải quyết vấn đề này bằng cách mô tả chính xác mặt dẻo

và dùng kĩ thuật tối ưu nón bậc hai (second-order cone programming), và giải pháp này sẽ được trình bày trong các nghiên cứu tiếp theo.

\*

## ESTIMATE BEARING CAPACITY AND COLLAPSE MECHANISM OF SOIL BY USING LIMIT ANALYSIS

**Le Van Canh<sup>(1)</sup>, Nguyen Chanh Hoang<sup>(2)</sup>, Nguyen Ke Tuong<sup>(3)</sup>**

*(1) International University – VNU HCM; (2) University of Technology – VNU HCM;*

*(3) Thu Dau Mot University*

### ABSTRACT

*This paper presents a numerical limit analysis for evaluating the bearing capacity factor for a rigid surface footing is presented in this paper. The soil is modeled as a cohesion frictional Mohr–Coulomb material with an associated flow rule assumed. The upper bound on the collapse load is then estimated by means of numerical kinematic procedures. The edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) is used to approximate the displacement field. The limit analysis problem can be then formulated in the form of an optimization problem which can be solved using linear programming techniques. The procedure is applied to the benchmark Punch problem and is found in practice to generate good upper-bound solution.*

**Keywords:** *limit analysis, load limit*

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Terzaghi, K., 1943, *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley & Sons, New York.
- [2] Krabbenhoft K, Lyamin AV, Hjiaj M, Sloan SW., *A new discontinuous upper bound limit analysis formulation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 2005; 63:1069–1088.
- [3] Lyamin AV, Sloan SW., *Mesh generation for lower bound limit analysis*, Advances in Engineering Software 2003; 34:321–338.
- [4] Ciria H, Peraire J, Bonet J., *Mesh adaptive computation of upper and lower bounds in limit analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 2008; 75:899–944.
- [5] Makrodimopoulos A, Martin CM., *Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 2006; 31:835–865.
- [6] Makrodimopoulos A, Martin CM., *Lower bound limit analysis of cohesive-frictional materials using second-order cone programming*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 2006; 66:604–634.

- [7] Sloan, S.W. & Randolph, M. F., *Numerical prediction of collapse loads using finite element methods*, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 1982; 6, 47–76.
- [8] Sloan SW, Kleeman PW., *Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995; 127(1-4), 293-314.
- [9] Liu GR, Nguyen-Thoi T, Lam KY., *An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids*, Journal of Sound and Vibration 2009; 320:1100–1130.
- [10] Nguyen-Xuan H, Liu GR, Nguyen-Thoi T, Nguyen Tran C., *An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for analysis of two-dimensional piezoelectric structures*, Journal of Smart Material and Structures 2009; 12:12. 065-015.
- [11] C.V. Le, H. Nguyen-Xuan, H. Askes, S. Bordas, T. Rabczuk, H. Nguyen-Vinh, *A cell-based smoothed finite element method for kinematic limit analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2010: 83, 1651–1674.
- [12] Prandtl L., *Ueber die haerte plastischer koerper*, Nachrichtex der Akademie der Wissenschaften in Gottingen. II. Mathematisch-Physikalische Klasse II 1920; 12:74–85.

*Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ  
phát triển khoa học và công nghệ quốc  
gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số  
107.02-2011.01*